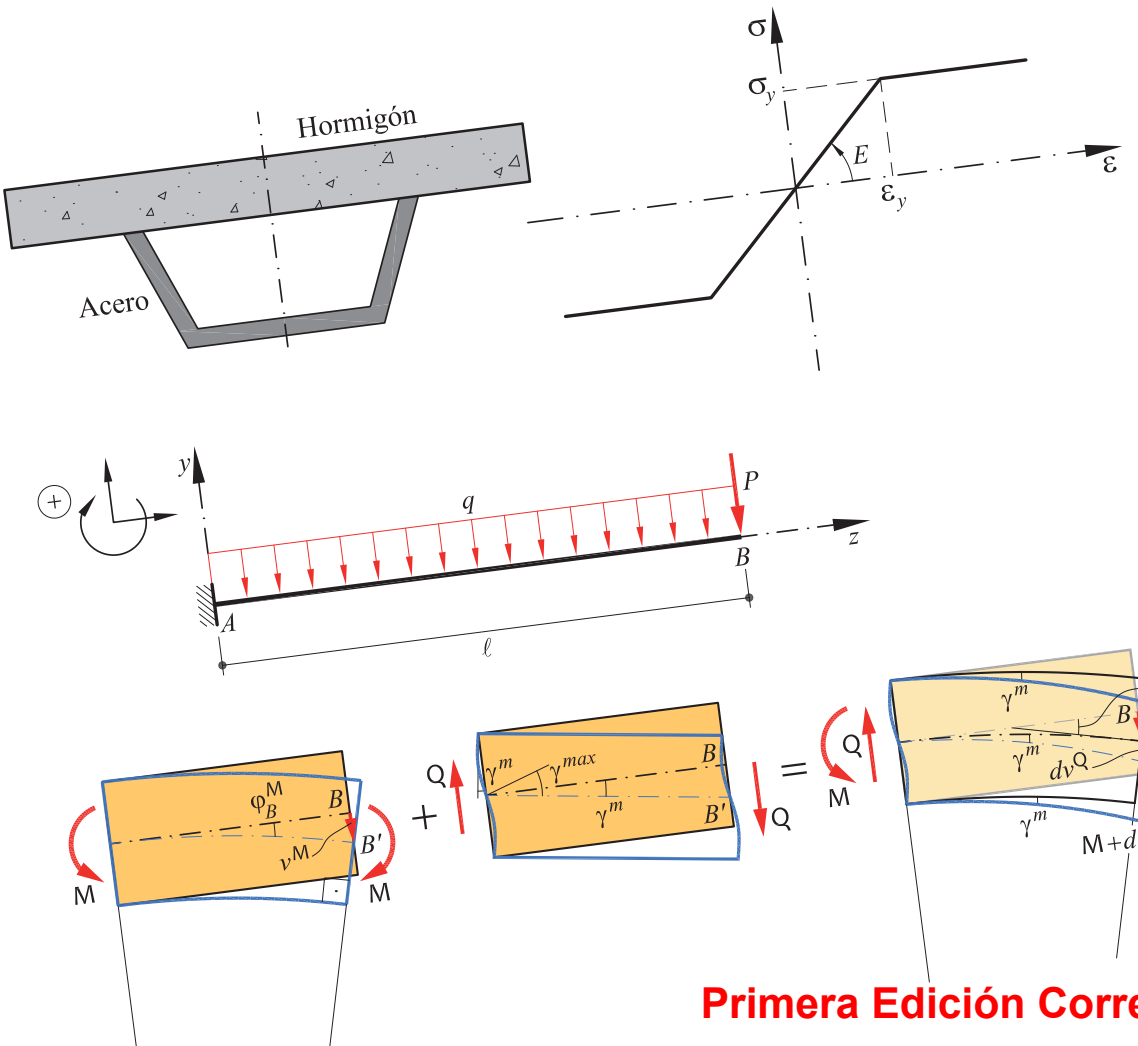
Estática y Resistencia de Materiales

Sergio H. Oller Liz G. Nallim



Primera Edición Corregida

Estática y Resistencia de Materiales

Estática y Resistencia de Materiales

Sergio H. Oller

Profesor de la Universidad Nacional de Salta, Argentina (UNSa)
Investigador Principal del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina (CONICET)
Investigador Senior del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, España (CIMNE)
Profesor Senior de la Universidad Politécnica de Cataluña, España

Liz G. Nallim

Profesora de la Universidad Nacional de Salta, Argentina (UNSa)
Investigadora Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina (CONICET)

CIMNE

Estática y Resistencia de Materiales
Sergio H. Oller, Liz G. Nallim

Primera Edición, febrero 2020. Corregida, febrero 2021

© Centre Internacional de Mètodes Numèrics a l'Enginyeria (CIMNE), 2020
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España
www.cimne.com

Impreso por: **Artes Gráficas Torres S.A.,**
Barcelona, España
www.agraficastorres.es

ISBN: 978-84-121101-2-8
Depósito legal: B-21133-2018

A nuestros lectores, estudiantes y profesionales,
para quienes hemos escrito este libro.

Contenido

PRESENTACIÓN. XV

LISTA DE SÍMBOLOS. XVII

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN.....1

1.1 La Mecánica y la Resistencia de Materiales 1

1.2 Principios fundamentales de la mecánica del sólido rígido. 3

1.3 Objetivos de la resistencia de materiales – Problema y método de la resistencia de materiales. 6

1.4 Sistema real y esquema de cálculo. 8

1.5 Fuerzas exteriores e interiores – Reducción de fuerzas al centro geométrico de una sección transversal 14

1.5.1 Fuerza interiores - Método de las secciones.....15

1.5.2 Reducción de un sistema de fuerzas a una resultante en un punto. 17

1.6 Hipótesis fundamentales de la resistencia de materiales. 22

1.7 Validez de las hipótesis fundamentales de la resistencia de materiales. 25

CAPÍTULO 2 CONCEPTOS BÁSICOS -ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL..... 27

2.1 Introducción. 27

2.2 Campos de la elasticidad 28

2.3 Concepto de tensión..... 30
2.3.1 Tensor de tensión. 30
2.3.2 Ecuación de equilibrio de Cauchy. 33
2.3.3 Ecuación de equilibrio rotacional de Cauchy o reciprocidad de las tensiones tangenciales. 35
2.3.4 Estado de tensión según un plano cualquiera – Estado de equilibrio de un punto en función de la componente normal y tangencial (equilibrio en el contorno)……..36
2.3.4.1 Estado de equilibrio del punto en función de la tensión normal y tangencial – Caso particular problema plano 38
2.3.4.2 Círculo de Mohr..... 46
2.3.5 Tensiones principales, método analítico. 49
2.3.5.1 Particularización al caso de estado plano de tensión..... 52
2.3.6 Estado de tensión esférico y desviador..... 54

2.4 Concepto de deformación. 68
2.4.1 Deformación y ecuación de compatibilidad. 68
2.4.2 Estado de deformación esférico y desviador. 73
2.4.3 Medición de la deformación en laboratorio. 73

2.5 Ecuación constitutiva – Ley de Hooke. 79
2.5.1 Introducción. 79
2.5.2 Coeficiente de Poisson y deformación transversal..... 80
2.5.3 Ley de Hooke para tensiones tangenciales – Módulo de elasticidad transversal 81
2.5.4 Ley de Hooke generalizada..... 85

2.6 Tensión y deformación plana. 87
2.6.1 Problema de tensión plana. 87
2.6.2 Problema de deformación plana. 89
2.6.3 Ecuación de compatibilidad en función de las componentes del campo de tensiones. 102
2.6.4 Módulo de elasticidad volumétrico. 104

2.7 Resumen de la formulación básica obtenida en el capítulo..... 105

CAPÍTULO 3 LEYES DE ESFUERZOS EN ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS 107

3.1 Introducción. 107

3.2 Equilibrio interno-externo de una rebanada de una barra estructural – Esfuerzo interno. 111

3.3 Grado de libertad y vínculos estructurales en el plano. 115
3.3.1 Estructura isocinemática. 120
3.3.2 Estructura isostática. 121
3.3.3 Tipos de vínculos externos 125
3.3.4 Determinación e indeterminación estática de las estructuras. 125

3.4 Leyes de esfuerzo para una viga simple. 136
3.4.1 Forma matemática de enfocar el problema mecánico de cálculo de esfuerzos internos 136
3.4.2 Forma convencional de resolver el problema mecánico de cálculo de esfuerzos internos. 138

3.5 Viga Gerber o en Cantilever. 156
3.5.1 Definición. 156
3.5.2 Método analítico 157
3.5.3 Método de descomposición 158

3.6 Resumen de la formulación básica obtenida en el capítulo. 280

CAPÍTULO 4 ESFUERZO AXIL - PIEZAS DE EJE RECTO 281

4.1 Piezas rectas de sección transversal conformada por un material simple 281
4.1.1 Ecuaciones que gobiernan el comportamiento a esfuerzo axil en barras rectilíneas. 283
4.1.2 Influencia de la temperatura en las ecuaciones que gobiernan el comportamiento a esfuerzo axil en barras rectilíneas 286

4.2 Esfuerzo axil en cilindros de paredes delgadas sometidos a presión interior. 311

4.3 Energía interna de deformación por axil. 315

4.4 Piezas rectas de sección trasversal conformada por material compuesto. 318
4.4.1 Teoría general 318
4.4.2 Caso particular de hormigón armado. 321
4.4.3 Caso particular de hormigón pretensado. 325

4.5 Esfuerzo axil en barras elastoplásticas. 338

4.6 Resumen de la formulación básica obtenida en el capítulo. 343

CAPÍTULO 5 MOMENTO FLECTOR 345

5.1 Introducción. 345

5.2 Flexión pura recta. 349
5.2.1 Deducción de la fórmula de la flexión de Navier - Bernoulli. 351
5.2.2 Máximo módulo resistente y rendimiento de una sección transversal.....357
5.2.3 Ecuación de la elástica de Bernoulli. 364
5.2.3.1 Método de integración de la ecuación de la elástica. 367
5.2.4 Energía interna de deformación por flexión recta. 370

5.3 Flexión pura esviada. Det. del estado tensional y eje neutro 378
5.3.1 Ángulos que se producen en la flexión esviada. 383
5.3.2 Estudio directo de la flexión esviada.....385
5.3.3 Teoría generalizada de flexión pura esviada. 405

5.4 Flexión compuesta. 412
5.4.1 Eje neutro 414
5.4.2 Núcleo central. 415

5.5 Flexión compuesta esviada. 415
5.5.1 Determinación del eje neutro.....417
5.5.1.1 Forma geométrica de obtener el eje neutro.....418
5.5.2 Núcleo central. 432
5.5.2.1 Determinación del núcleo central en un caso general.....437
5.5.3 Teoría generalizada de flexión compuesta esviada.....471

5.6 Flexión recta en piezas de distintos materiales. 479
5.6.1 Materiales compuestos con compatibilidad. 481
5.6.2 Materiales compuestos sin compatibilidad – Postesado de tendones sobre una sección de hormigón 482
5.6.3 Postesado sobre una barra previamente tesada 485
5.6.4 Pretensado con adherencia.....489

5.7 Flexión compuesta en secciones que no resisten a tracción.....495
5.7.1 Flexión compuesta recta. 495
5.7.2 Aplicación a una sección rectangular. 498

5.8 Flexión recta en una pieza de hormigón armado de sección rectangular.....502

5.9 Efecto de la temperatura en un material compuesto con compatibilidad. 516
5.9.1 Barras de distintos mat. sometidas a variación de temperatura.....520
5.9.2 Problema termo-elástico integrado en vigas de Bernoulli - Material compuesto con compatibilidad de deformaciones.....524

5.10 Flexión elastoplástica 529

5.10.1 Sección con dos ejes de simetría.....530
5.10.1.1 Determinación del momento de plastificación parcial.....531
5.10.1.2 Determinación del momento plástico.....534
5.10.1.3 Particularización para una sección rectangular.....534

5.11 Resumen de la formulación básica obtenida en el capítulo 540

ANEXO - Capítulo 5.....545

CAPÍTULO 6 ESFUERZO DE CORTE.....565

6.1 Introducción. 565

6.2 Cinemática producida por el acoplamiento Flexión-Corte en una sección transversal.....571

6.3 Corte por flexión recta – Fórmula general del corte o fórmula de Collignon-Jourawski 574
6.3.1 Tensiones tangenciales por corte recto en secciones macizas 576
6.3.1.1 Sección rectangular– Tensiones tangenciales por corte.....576
6.3.1.2 Sección circular – Tensiones tangenciales por corte 579
6.3.1.3 Barra conformada por capas – Influencia del esfuerzo de corte.....583
6.3.2 Energía de deformación por corte recto – Teoría de Collignon-Jourawski 587
6.3.2.1 Área reducida – Factor de forma de las secciones.....588
6.3.3 Tensiones tangenciales por corte recto en secciones abiertas delgadas 592
6.3.3.1 Distribución y magnitud de las tensiones tangenciales en secciones abiertas de paredes delgadas.....594
6.3.3.2 Sección doble T delgada –Tens. tangenciales por corte…...597
6.3.3.3 Sección doble T gruesa – Tens. tangenciales por corte 602
6.3.3.4 Sección U delgada – Tensiones tangenciales por corte.....604
6.3.3.5 Centro de corte o Centro de torsión 611
6.3.3.6 Sección L delgada – Tensiones tangenciales por corte 614
6.3.3.7 Sección L delgada de alas iguales – Tensiones tangenciales por corte 618
6.3.3.8 Centro de corte en perfiles de alas paralelas – Problema simplificado 622
6.3.3.9 Sección anular delgada abierta – Tensiones tangenciales por corte y centro de corte.....624
6.3.3.10 Sección anular delgada cerrada – Tensiones tangenciales por corte y centro de corte.....627
6.3.3.11 Secciones delgadas cerradas y simétricas–Caso particular ..631
6.3.3.12 Cálculo de los momentos estáticos respecto de ejes cualesquiera. Forma simple de cálculo del flujo de corte y tensiones tangenciales para ejes principales no paralelos a los lados de la sección.....632

6.4 Corte por flexión recta en secciones compuestas/mixtas – Fórmula general del corte o fórmula de Collignon-Jourawski.....634

6.5 Corte por flexión esviada u oblicua – Fórmula general del corte o fórmula de Collignon-Jourawski.....641
6.5.1 Corte oblicuo o esviado en secciones transversales macizas simétricas.....641
6.5.2 Corte esviado u oblicuo en secciones transversales delgadas.....643
6.5.3 Forma general del corte esviado u oblicuo en secciones transversales de paredes delgadas para sistemas de ejes centroidales no-principales.....644

6.6 Resumen de la formulación básica obtenida en el capítulo.....715

ANEXO - Capítulo 6.....717

CAPÍTULO 7 MOMENTO TORSOR - TORSIÓN UNIFORME.....731

7.1 Introducción al problema de torsión. 731
7.1.1 Ley de distribución del esfuerzo de torsión en una barra. 731

7.2 Teoría de torsión para piezas cilíndricas.....734
7.2.1 Introducción.....734
7.2.2 Estado de deformación de la barra.....735
7.2.3 Estado de tensión y equilibrio de la barra. 736
7.2.4 Energía de deformación elástica acumulada en la barra.....740
7.2.5 Estado de tensión elastoplástico perfecto y equilibrio de la barra.740

7.3 Teoría de torsión para piezas prismáticas de sección transversal no circular sometidas a torsión uniforme.....743
7.3.1 Introducción.....743
7.3.2 Teoría de Saint Venant – Problema de valores de contorno.....745
7.3.2.1 1ra. Suposición de Saint Venant: Sobre el estado tensional. 746
7.3.2.2 2da. Suposición de Saint Venant: Sobre la existencia de la función de Prandtl.....749
7.3.2.3 3da. Suposición de Saint Venant: Sobre el campo de desplazamientos.....754
7.3.3 Teoría de Saint Venant – Analogía con el problema de Coulomb.758
7.3.4 Teoría de Saint Venant – Ejemplo de aplicación a una sección maciza de forma cualquiera.....758
7.3.5 Teoría de Saint Venant – Particularización a secciones de paredes delgada. 764
7.3.6 Teoría de Saint Venant – Particularización a secciones delgadas, abiertas compuestas.....767
7.3.7 Teoría de Saint Venant – Particularización a secciones cerradas de paredes delgadas. 769

7.3.8 Teoría de Saint Venant – Particularización a secciones cerradas multicelulares de paredes delgadas. 776
7.3.9 Teoría de Saint Venant – Particularización a secciones delgadas compuestas con formas y materiales distintos. 780

7.4 Resumen de la formulación básica obtenida en el capítulo 793

APÉNDICE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LAS SECCIONES TRANSVERSALES 797

A.1 Introducción. 797

A.2 Momento estático de una sección respecto de un eje y posición del centro geométrico (CG). 798
A.2.1 Definición de momento estático y centro geométrico. 798
A.2.2 Teoremas de Pappus - Guldin. 802
A.2.3 Centro geométrico de secciones compuestas. 804

A.3 Propiedades mecánicas de piezas estructurales. 809
A.3.1 Centro de peso o gravedad de un cuerpo compuesto por distintos materiales. 809
A.3.2 Centro geométrico de un cuerpo compuesto por distintos materiales. 811
A.3.3 Centro mecánico de un cuerpo compuesto por distintos materiales. 812

A.4 Momentos de inercia o Momento de segundo orden. 813
A.4.1 Teorema de Steiner. 814
A.4.2 Radio de giro. 816
A.4.3 Forma de tratar las secciones gruesas y delgadas. 820
A.4.4 Rotación de ejes de inercia. 825
A.4.5 Ejes principales de inercia. 829

BIBLIOGRAFÍA. 837

Presentación

Este libro está dirigido a la formación de estudiantes de ingeniería, arquitectura y también a ingenieros y arquitectos como base de consulta para el ejercicio de la profesión. Presenta un enfoque de la Resistencia de Materiales enriquecido con nuevos conceptos y con ejemplos resueltos mediante herramientas informáticas, ayudando así a establecer una metodología de trabajo simple, reduciendo los tiempos de solución de los problemas y permitiendo una mejor asimilación de los conceptos fundamentales.

El libro es fruto de la extensa experiencia de los autores dedicada a la enseñanza de esta temática y ha sido pensado para satisfacer la necesidad de conocimiento de los estudiantes de ingeniería y arquitectura. Con este objetivo se ha escrito este texto que permite el aprendizaje de las bases para el análisis de estructuras en general y piezas de máquinas.

Este libro, además de los temas clásicos de la Resistencia de Materiales, incursiona sobre las bases del tratamiento de piezas de paredes delgadas, de materiales compuestos laminados y reforzados en general, como así también de hormigón armado y pretensado, estructuras de sección mixta, etc. Se espera que todos estos temas sean de ayuda para abordar conceptos más avanzados de cursos posteriores y desarrollos más profundos en el ejercicio profesional.

Este trabajo ha sido posible gracias a un gran esfuerzo de los autores por resumir el amplio campo de conocimientos de esta materia, como así también por la colaboración de personas que durante mucho tiempo han aportado trabajo y conocimiento en estas páginas. Así, los autores quieren agradecer

especialmente, por su dedicación en la preparación de las figuras y material gráfico de este libro, a Raúl Giménez Rodrigo, de la *Unitat de Serveis TIC* de la Escuela de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona, y a Jorge Mariscal de la Llosa, Becario de Formación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta. También, los autores agradecen a Clara Casanova, Albert Costa y Xavier Aparicio por la preparación y solución de algunos ejemplos de este libro, que fueron desarrollados durante sus Becas de Colaboración otorgadas por la Escuela de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona, y al Dr. Ricardo Quinteros por el diseño de la cubierta de este texto. Queremos además mencionar a los estudiantes que, aunque sus nombres no están expresamente aquí incluidos, han contribuido durante tantos años a motivar la preocupación por mejorar nuestros conocimientos y la forma de transmitirlos.

Los autores agradecen especialmente al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) por impulsar y financiar esta publicación.

Finalmente, agradecemos a nuestros seres queridos que nos acompañan cada día y nos apoyan con su comprensión para hacer posible este trabajo.

Noviembre de 2019

Sergio H. Oller, Liz G. Nallim

Lista de Símbolos

Esta lista contiene lo principales símbolos que se han utilizado y está ordenada de acuerdo a su aparición en el texto del libro.

CG	Centro Geométrico
CM	Centro Mecánico
ρ^{dens}	densidad
u, v, w	desplazamiento según las direcciones x, y, z respectivamente
u_i	desplazamiento según la dirección x_i, $i = 1,2,3$
a_i	aceleración según la dirección x_i, $i = 1,2,3$
$dV = dx_1 dx_2 dx_3$	diferencial de volumen
p_i	peso específico según la dirección x_i, $i = 1,2,3$
σ_{ij}, $i = j$	tensión normal
τ_{ij}, σ_{ij}, $i \neq j$	tensión tangencial
ℓ	versor normal a un plano
$\mathbf{t}$	vector de tensión completa
t_1, t_2, t_3	componentes del vector de tensión completa en los ejes coordenados x_1, x_2, x_3
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor de tensiones
α_p, φ	inclinación del plano principal
$\sigma^I, \sigma^{II}, \sigma^{III}$	tensiones principales
$\ell^I, \ell^{II}, \ell^{III}$	versores normales a los planos principales
I_1, I_2, I_3	invariantes de tensión
$\mathbf{p}$	tensor esférico de tensiones
$\boldsymbol{\sigma}_D$	tensor desviador de tensiones
$\mathbf{u}$	vector desplazamiento de un punto

$\boldsymbol{\varepsilon}$	tensor de deformaciones
$\varepsilon_{ij},\ i=j$	deformación específica
$\gamma_{ij}=2\varepsilon_{ij},\ i\neq j$	distorsión específica
∇_s	gradiente simétrico
$\boldsymbol{\varepsilon}_V$	tensor esférico de deformaciones
$\boldsymbol{\varepsilon}_D$	tensor desviador de deformaciones
$\mathrm{I}'_1,\mathrm{I}'_2,\mathrm{I}'_3$	invariantes de deformación
E	módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young
G	módulo de elasticidad transversal o módulo de corte
ν	coeficiente de Poisson
$\mathbf{C}$	matriz constitutiva
K_V	módulo de elasticidad volumétrico
NGL	número de grados de libertad
$q_i\ (i=1,2,\cdots,n)$	coordenadas generalizadas
$\boldsymbol{r}_i$	vector de posición de la partícula i
$\mathbf{v}_i$	velocidad la partícula i, derivada temporal de los respectivos vectores de posición
$\dot{q}_j=\dfrac{dq_j}{dt}$	velocidad generalizada la partícula j
GIE	grado de indeterminación estática
$\mathsf{N}=\mathsf{N}_3=\mathsf{N}_z$	esfuerzo axil o normal
Q	esfuerzo de corte o cortante
$\mathsf{Q}_x,\mathsf{Q}_y$	esfuerzo de corte según los ejes cartesianos de la sección transversal x, y respectivamente
$\mathsf{Q}_1,\mathsf{Q}_2$	esfuerzo de corte según los ejes principales de la sección transversal x_1, x_2 respectivamente
$\mathsf{M}_T=\mathsf{M}_3=\mathsf{M}_z$	momento tosor
M	momento flector
$\mathsf{M}_x,\mathsf{M}_y$	momento flector con vector momento sobre los ejes cartesianos de la sección transversal x,y respectivamente
$\mathsf{M}_1,\mathsf{M}_2$	momento flector con vector momento sobre los ejes principales x_1,x_2 de la sección transversal respectivamente
$K_{\mathsf{N}}=EA/\ell$	rigidez de una barra frente a esfuerzos axiles
$\varepsilon_3^{\mathrm{mec}}=\varepsilon_{33}^{\mathrm{mec}}$	deformación mecánica específica en la dirección x_3

$\varepsilon_3^{\text{ter}} = \varepsilon_{33}^{\text{ter}}$	deformación térmica específica en la dirección x_3
$\Delta t = t - t^{\text{ref}}$	cambio entre la temperatura actual (t) y la de referencia (t^{ref})
u_3^{mec}	desplazamiento en la dirección x_3 por acción mecánica
u_3^{ter}	desplazamiento en la dirección x_3 por acción térmica
α_t	coeficiente de dilatación térmica
$\overline{\omega}$	densidad de energía interna de deformación o energía específica de deformación
$\overline{\omega}^c$	energía específica complementaria
W	energía potencial interna de deformación (energía primal)
W^c	energía potencial interna complementaria de deformación (energía dual)
$\overline{E}$	módulo de elasticidad de referencia en piezas estructurales compuestas por varios materiales
ω	cuantía geométrica
μ	cuantía mecánica
σ^y	tensión umbral de fluencia
W_1, W_2	módulos de la sección (resistentes) respecto a los ejes x_1, x_2 respectivamente
I_1, I_2	momentos principales de inercia de la sección respecto a los ejes x_1, x_2 respectivamente
κ	curvatura
κ	coeficiente de uniformidad de corte
ρ	radio de curvatura
η	rendimiento geométrico de una sección transversal
φ_1, φ_2	ángulo de rotación de la sección transversal respecto de los ejes principales de inercia x_1, x_2 respectivamente
F	flexibilidad
K	rigidez
$m-m$	eje de carga
α'	ángulo medido en sentido trigonométrico (anti-horario) desde el eje de inercia principal mayor hasta el vector momento
α	menor ángulo medido entre el eje de inercia principal mayor y el vector momento
x_1^n, x_2^n	abscisa y ordenada de puntos del eje neutro

K_{m-m}	pendiente del eje (plano) de carga $m-m$
K_{n-n}	pendiente del eje (plano) neutro $n-n$
I^*_{nn}	momento de inercia equivalente respecto al eje neutro $n-n$
θ'	ángulo medido en sentido trigonométrico (anti-horario) desde el eje de inercia principal mayor hasta la línea neutra
θ	menor ángulo medido entre el eje de inercia principal mayor y el eje neutro
$\hat{\kappa}$	factor de forma
$\overline{A}, \widehat{A}$	sección transversal reducida
γ^m	distorsión media
$f(s)$	flujo de tensiones tangenciales respecto a la coordenada s
ψ	giro absoluto de una sección respecto de otra en torsión
θ	ángulo de torsión unitaria o ángulo de torsión específica por unidad de longitud
$\phi = \phi(x_1, x_2)$	función de tensión de Prandtl
$\mathfrak{Z}(x_1, x_2)$	función de alabeo de Saint Venant
J	módulo de torsión
f_C	función que define el contorno de la sección transversal
$\boldsymbol{A}$	matriz ortonormal de rotación de ejes en el plano
$\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2$	vectores que definen las direcciones principales de inercia de una sección transversal
$\boldsymbol{I}$	matriz de momentos de inercia en el sistema cartesiano (x, y)
$I_0,\ I'_0$	primer y segundo invariante de inercia, respectivamente

Capítulo 1
Introducción

1.1 La Mecánica y la Resistencia de Materiales

La *mecánica clásica* es la parte de la física que estudia el equilibrio y el movimiento de los cuerpos sometidos a la acción de agentes externos (fuerza, temperatura, etc.).

La mecánica es una ciencia que constituye la base para innumerables aplicaciones ingenieriles. En la Figura 1.1 se muestra las subdivisiones de esta disciplina.

El estudio de la dinámica y de la cinética está centrado en la fuerza como causa que produce el movimiento. Concretamente, éstas estudian el movimiento de los cuerpos durante un determinado tiempo y las fuerzas que lo producen.

La *cinemática* estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar las fuerzas que lo producen y, en consecuencia, se limita a estudiar la trayectoria en función del tiempo.

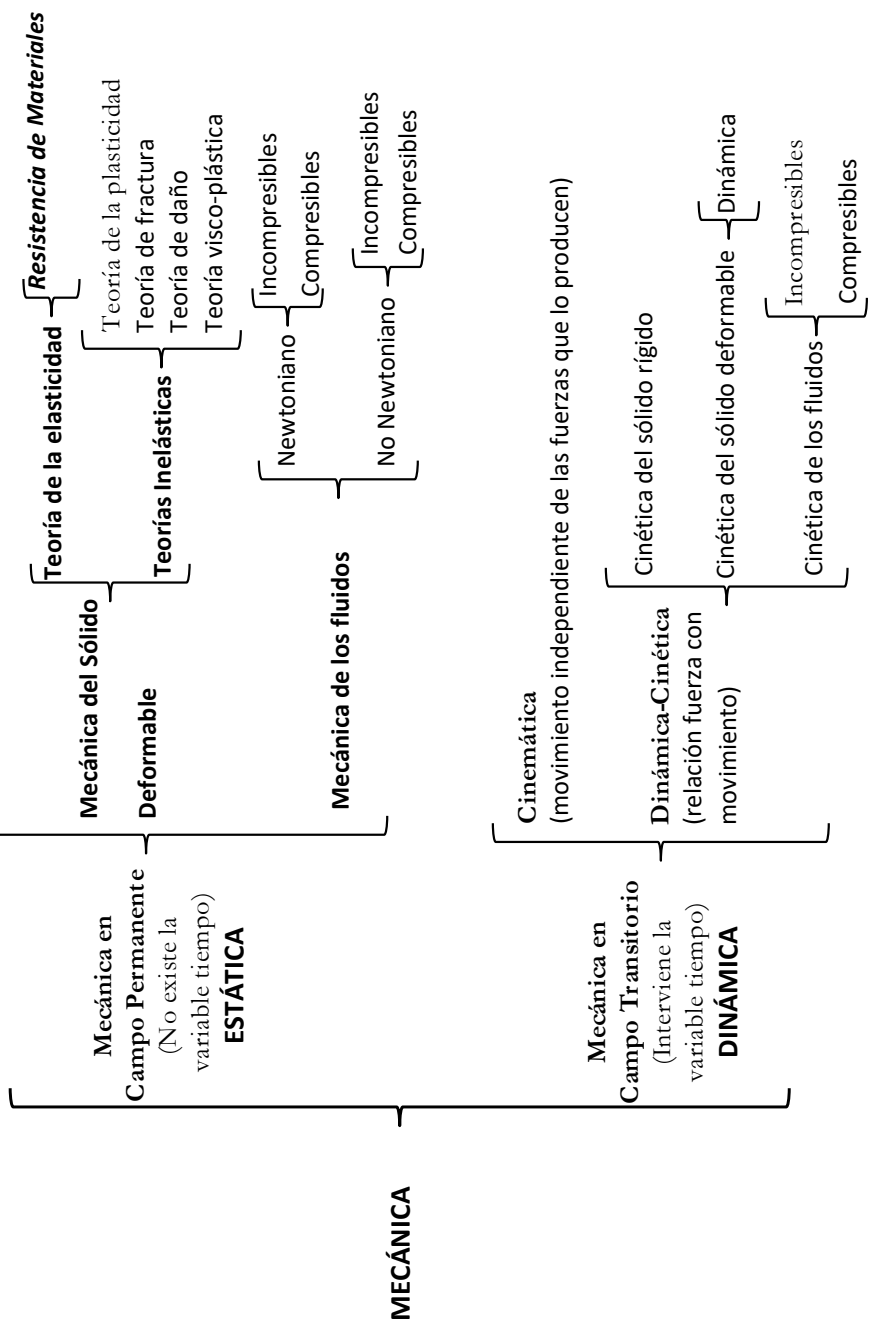


Figura 1.1 – Cuadro resumen: subdivisiones de la Mecánica Clásica.

1.2 Principios fundamentales de la mecánica del sólido rígido

La *mecánica* inicia sus primeros pasos con Aristóteles (380 aC) y Arquímedes (287 aC); pero fue Newton, en 1687, quien estableció las bases fundamentales a través de su obra "Principios matemáticos de la filosofía natural" (Philosophiæ naturalis principia mathematica). Por esta razón, una parte importante de la Mecánica Clásica se denomina *Mecánica Newtoniana*, la que se distingue de la *Mecánica Cuántica* y de la *Mecánica Relativista*. La Mecánica Clásica tiene a su vez tres formulaciones principales, la *Mecánica Newtoniana* que se basa en las tres leyes de Newton; la *Mecánica Langrangiana* que permite el uso, en igualdad de condiciones, de sistemas inerciales o no inerciales, sin que las ecuaciones cambien en su forma básica; y la *Mecánica Hamiltoniana* que es una formulación similar a la Lagrangiana, y constituye el enfoque más adecuado para construir la *Mecánica Estadística Clásica* y la *Mecánica Cuántica*. También comprende la *Electrodinámica Clásica*, que está basada en las ecuaciones de Maxwell; y la *Termodinámica* que se encarga de estudiar las transformaciones e intercambios de energía en sistemas mecánicos abiertos y cerrados.

La *Mecánica Relativista* fue desarrollada por Albert Einstein a principios del siglo XX y su objetivo principal era resolver la incompatibilidad que existía entre la mecánica newtoniana y el electromagnetismo. Postuló dos teorías dentro de ésta: la de *Relatividad Especial* y la de *Relatividad General*.

Por otra parte, dentro de la *Mecánica Cuántica* las aportaciones más relevantes fueron hechas por Hamilton y, más tarde, por Max Planck en 1900 quien enunció que la radiación electromagnética es absorbida y emitida por la materia en forma de cuantos de luz o fotones. Posteriormente, Werner Heisenberg (1932) y Erwin Schrödinger (1933) desarrollaron importantes trabajos en el área de la mecánica cuántica.

La *Mecánica Newtoniana*, no obstante los avances actuales en ciencias, no ha perdido vigencia pues resulta un caso particular de la Mecánica Relativista.

A pesar de los grandes avances de la Mecánica, en Ingeniería sigue empleándose la *Mecánica Clásica* o *Newtoniana* por la escala en que se desarrollan los fenómenos a tratar.

Es importante recordar que las variables fundamentales en mecánica clásica son: *espacio, tiempo* y *masa*. El *espacio* relaciona la posición de un punto con un cierto sistema referencial, el *tiempo* considera el instante en que se evalúa la posición y la *masa* establece una de las cualidades del cuerpo en análisis. La *fuerza* es una magnitud derivada que representa las acciones que hacen algunos cuerpos sobre otros. Estas fuerzas se pueden ejercer por contacto directo o, a la distancia, en forma indirecta.

La masa y la fuerza son dos variables que están relacionadas entre sí y, por lo tanto, representan una sola. Es decir que en mecánica clásica hay tres variables fundamentales y entre ellas no hay ninguna relación. Mientras que, por ejemplo, en la mecánica relativista el espacio y el tiempo están relacionados.

Los tres principios básicos de la mecánica del sólido rígido son:

a) Ley de composición de fuerzas (principio de superposición): El efecto que provoca la resultante $\boldsymbol{R}$ de un sistema de fuerzas es equivalente al efecto de la suma de los efectos de las componentes (ver Figura 1.2a).

b) Principio de transmisibilidad: Una fuerza aplicada sobre un cuerpo rígido puede ser reemplazada por cualquier otra fuerza aplicada sobre su recta de acción que tenga la misma intensidad, dirección y sentido que la fuerza original (ver Figura 1.2b).

c) Leyes de Newton:

c.1) Un cuerpo mantiene su estado de reposo o movimiento relativo si se le aplica un sistema de fuerzas nulo (Figura 1.3a).

c.2) La fuerza resultante en un cuerpo provoca en éste una aceleración que es igual al cociente de la magnitud de esta fuerza sobre la masa (Figura 1.3b).

c.3) A toda acción le corresponde una reacción igual y de sentido contrario (Figura 1.3c).

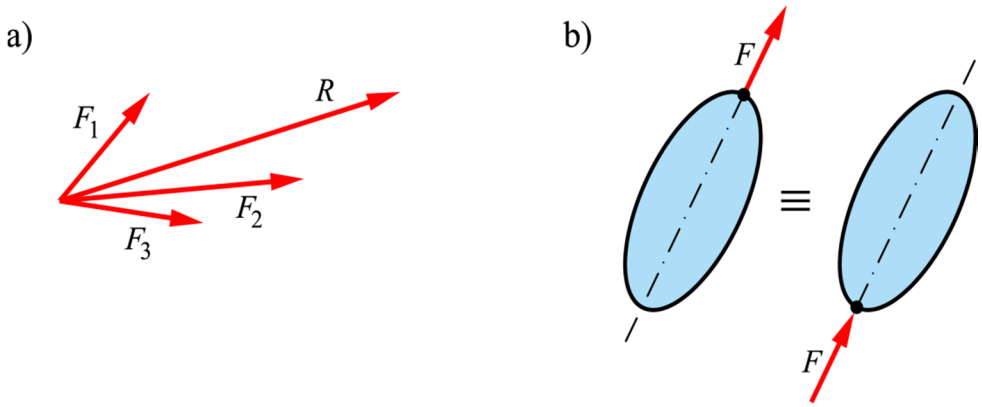


Figura 1.2 – Composición y transmisibilidad de fuerzas.

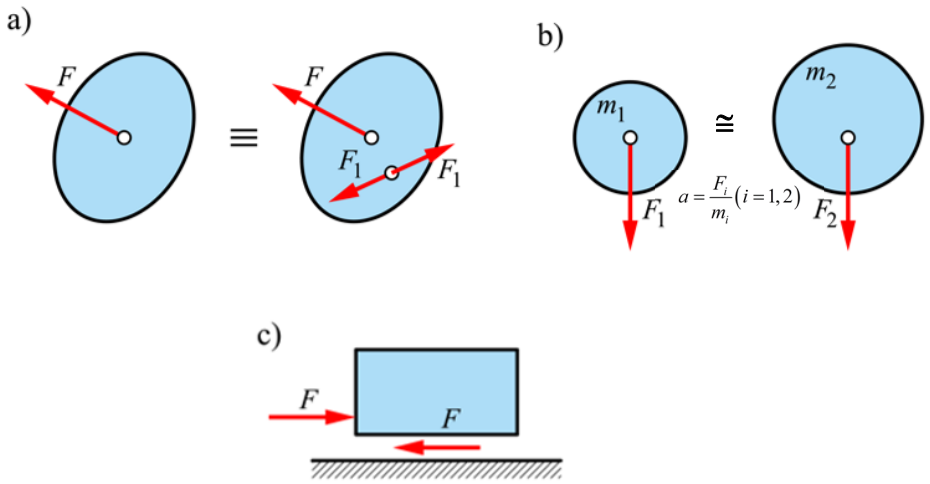


Figura 1.3 – Representación esquemática de las leyes de Newton.

1.3 Objetivos de la resistencia de materiales – Problema y método de la resistencia de materiales

La mecánica clásica del sólido rígido supone que cuando sobre un sólido ideal se aplica un determinado sistema de fuerzas, aquel permanece indeformable y conserva su geometría original. Sin embargo, la realidad es distinta pues cualquier cuerpo real sobre el que actúan fuerzas exteriores se *deforma* en mayor o menor grado. Se dice que un cuerpo es deformable cuando la distancia entre dos puntos interiores varía en función de la magnitud de las cargas aplicadas (Figura 1.4).

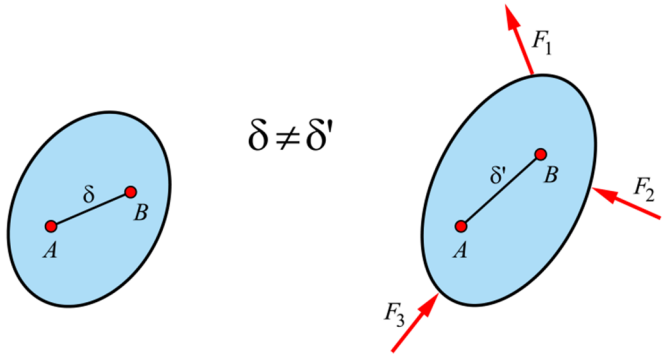


Figura 1.4 – Representación del cambio de configuración de un cuerpo después de la deformación.

La Resistencia de Materiales es la ciencia (parte de la *Teoría de la Elasticidad* y ésta, a su vez, parte de la *Mecánica*) *que trata la resistencia y rigidez de cuerpos sometidos a la acción de cargas y destinados a aplicaciones de ingeniería estructural.* Por esta razón, la *resistencia de materiales* tiene dos objetivos principales respecto de los cuerpos cargados:

a) Determinar las fuerzas interiores por unidad de superficie (tensiones). Concepto ligado a la *resistencia.*

b) Determinar las deformaciones que se producen por efecto de las tensiones. Concepto ligado a la *rigidez*.[1]

La resistencia de materiales conduce a garantizar el equilibrio *local*, es decir en cada punto del sólido y el equilibrio *global*, es decir de todo el sólido. Estos conceptos se pueden resumir diciendo que el objeto fundamental de la resistencia de materiales es garantizar la *estabilidad* del cuerpo.

La estabilidad de una estructura depende de su *geometría* y *cinemática*, del *material* del que está constituida y de las *fuerzas actuantes*. Cuando todas estas situaciones se encuentran contempladas dentro del marco de la resistencia de materiales, el cuerpo habrá encontrado su *estado estable*.

Es importante relacionar aquí la diferencia fundamental entre la *Resistencia de Materiales* (Teoría de la Elasticidad) y la *Mecánica Teórica*. Para la primera importa el sólido deformable en sí mismo, en tanto para la segunda importan también las leyes del movimiento del sólido.

La diferencia entre la *Teoría Matemática de la Elasticidad* y la *Resistencia de Materiales* radica en la manera de enfocar el mismo problema. La Teoría de la Elasticidad estudia el comportamiento de los sólidos deformables de una manera más exacta, recurriendo a fundamentos básicos de la mecánica. Esto hace que la teoría de la elasticidad no siempre se pueda utilizar en forma simple para la solución de problemas prácticos.

La *Resistencia de Materiales* no sólo pretende conocer las tensiones y deformaciones que ocurren en el interior de un sólido, sino también busca dar una interpretación correcta sobre la capacidad de trabajo y aplicación práctica de la estructura analizada. En la teoría de la elasticidad este último problema no se plantea.

Por lo antes mencionado, la Resistencia de Materiales añade algunas hipótesis simplificativas a las pocas hipótesis fundamentales de la Teoría de la Elasticidad. Se obtienen así soluciones adecuadas en la mayoría de los problemas de *dimensionado* y *comprobación* de estabilidad de las piezas que componen una estructura. Estos dos problemas configuran importantes aplicaciones de la resistencia de materiales:

a) *Dimensionado*: tarea que integra el *diseño estructural* y parte de suponer conocido el sistema de fuerzas en equilibrio que actúa sobre una estructura. Consiste

[1] Recordar que rigidez es la fuerza necesaria para producir un desplazamiento unitario $K\,u = f$

en determinar las dimensiones de las piezas o elementos que la componen, de manera que las tensiones y las deformaciones no superen ciertos límites de seguridad o convencionales.

b) *Verificación*: tarea que forma parte de la *comprobación* y es un caso particular del anterior. Es decir, conocido el sistema de fuerzas en equilibrio y las dimensiones de las piezas, se procede a verificar su seguridad en tensiones y deformaciones.

1.4 Sistema real y esquema de cálculo

En la Resistencia de Materiales, como en cualquier rama de la ciencia, el estudio del *problema real* comienza por escoger el *esquema de cálculo*.

El esquema de cálculo es una simplificación del problema real, manteniendo sólo las características importantes y despreciando todo aquello que no influye sustancialmente en el problema. Esta simplificación añade hipótesis restrictivas, pero resulta absolutamente necesario, pues los problemas reales son imposibles de abordar dada la complejidad e interrelación entre los fenómenos naturales que en éste se desarrollan.

El concepto de esquema de cálculo induce a pensar que el problema que se está por resolver puede aproximarse al real, tanto como se quiera, según el grado de complejidad que se esté dispuesto a admitir en el análisis. Este concepto, ambiguo en su límite superior (tan perfecto como se quiera), no lo es tanto en su límite inferior ya que al menos debe cumplir con ciertas condiciones que garanticen que el problema conserve la esencia de la estructura a resolver. Como ejemplo se presenta una estructura formada por un forjado, vigas, columnas y zapatas de cimentación, cuyo modelo simplificado se muestra en la Figura 1.5. Éste puede ser tan complejo como se quiera, según cuál sea el grado de precisión y conocimiento que se quiera tener sobre este problema. Si sólo interesa estudiar una parte del problema (forjados, o vigas, o columnas, o cimentación), el esquema de cálculo será diferente. Por ejemplo se podría estudiar el pórtico ABCD o sólo la viga AB (Figura 1.5). Sin embargo, esto no es todo, pues habrá que pensar si se considera sólo el peso del forjado y sus sobrecargas, o se debería también incluir el peso de las vigas, columnas

y cimentaciones, etc. Todo dependerá, como se dijo, de lo que se quiera analizar y de cuánta precisión se desea alcanzar.

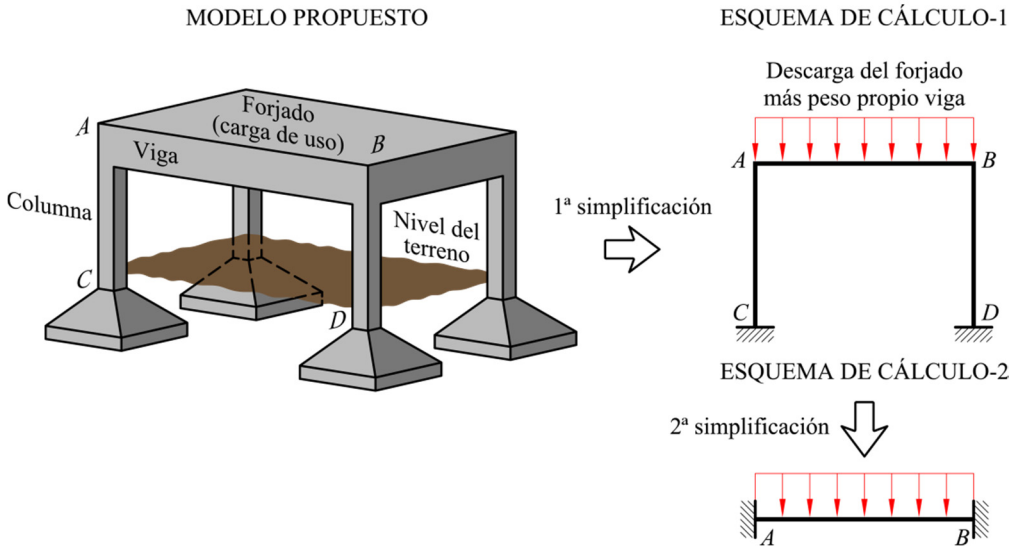


Figura 1.5 – Simplificación del problema real mediante esquemas de cálculos.

Cada *sistema real* puede admitir diferentes *esquemas de cálculo* y a cada esquema le podrían corresponder diferentes sistemas reales. La elección del esquema de cálculo, en Estructuras/Resistencia de Materiales, comienza por hacer hipótesis simplificativas en cuanto: al material, la geometría del cuerpo, las cargas aplicadas y los desplazamientos prescritos en determinados puntos.

a) ***El material***: se considera *continuo, homogéneo, elástico* e *isótropo*.

- Se dice que un material es *continuo* cuando el volumen está ocupado plenamente por la materia, sin oquedades ni discontinuidades. Siendo así, se puede aplicar en el análisis el cálculo infinitesimal.

- Se dice que un material es *homogéneo* cuando cualquiera de sus partes tiene las mismas propiedades, independientemente de su posición en el espacio. El concepto de *homogeneidad* es un concepto macroscópico, pues al bajar a un nivel microscópico se observa que los materiales están compuestos por la participación de distintas sustancias, cuya distribución depende de su estructura interna.

- Es necesario hacer también consideraciones sobre el concepto de *elasticidad*, que es la propiedad de los materiales de restablecer sus dimensiones originales luego de haber cesado la acción de las cargas impuestas. En general, todos los materiales tienen una parte de comportamiento elástico, sólo que en algunos el rango de comportamiento elástico es mayor que en otros (por ejemplo la goma, al contrario de los plásticos).

- Se dice que un cuerpo es *isótropo* cuando en un punto sus propiedades son las mismas en cualquier dirección de análisis (por ejemplo el acero, al contrario de la madera).

b) ***La geometría*** de la pieza estructural a estudiar requiere también consideraciones respecto de su sistema de cálculo. Las simplificaciones permiten reducir el cuerpo en 3-D a *barras*, *placas*, *bóvedas* o *bloques*, según sea el caso y la precisión que se quiera alcanzar en el análisis.

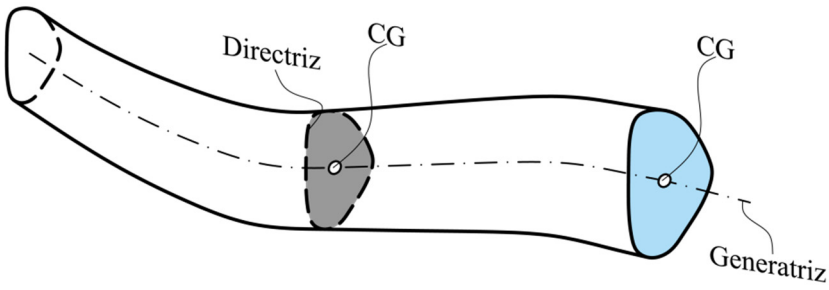


Figura 1.6 – Representación de una barra.

- Se llama *barra* a todo cuerpo que tiene una dimensión mucho mayor que las otras dos. Geométricamente se obtiene una barra moviendo una figura plana a lo largo de una curva (ver Figura 1.6). Así, lo que en geometría es la generatriz de un cuerpo en resistencia de materiales es el *eje de la barra*; y lo que en geometría es una figura plana, tal que su contorno configura la directriz, en resistencia de materiales se denomina *sección transversal* o *sección normal*. En esta sección se puede identificar el centro geométrico (CG), por donde discurre el eje de la pieza formando un ángulo recto con dicha sección transversal en cada punto del eje.

  Según sea la *generatriz* (eje de la pieza), la *barra* recibe el nombre de: *viga* (eje recto), *arco* (eje curvo en un plano), *arco alabeado* o *muelle* (eje curvo alabeado).

  Según sea la *directriz* (sección transversal de la pieza), la *barra* recibe el nombre de: *barra de inercia constante* (sección constante), *barra de inercia variable* (sección variable).

  Un sistema formado por un conjunto de barras unidas entre sí mediante *nudos* y destinado a recibir cargas, se denomina *estructura de barras*.

  Si una *viga,* o un *arco,* poseen sección transversal simétrica, es posible trabajar con su plano medio, representando sólo la geometría correspondiente al eje de la pieza.

- Se llama *placa* a todo cuerpo plano donde dos de sus dimensiones prevalecen sobre la tercera llamada espesor. En su forma más simple, el estudio de las placas se basa en una generalización de la teoría de vigas.

- Se entiende por *bóveda* al caso general de las placas, es decir que se trata de placas curvadas que tienen un radio de curvatura (si el radio de curvatura es infinito, se tiene una placa).

- Un *bloque* configura una estructura donde las tres dimensiones son del mismo orden de magnitud.

En este libro sólo se tratan las estructuras de barras en sus distintas formas y tipologías.

c) ***Las cargas*** merecen otro tipo de consideración y también necesitan ser esquematizadas. Las *fuerzas interiores* y *exteriores* que se tengan en consideración dependerán del esquema de cálculo. Las primeras se estudiarán más adelante, mientras que las segundas pueden ser *concentradas* o *distribuidas*. Esta división no es más que convencional, pues no existen en la naturaleza verdaderas fuerzas concentradas, ya que esto exigiría que el área de aplicación de la carga tienda a cero. En la Figura 1.7 se presentan los tipos de fuerzas que se deben considerar en un esquema de cálculo.

d) ***Los desplazamientos*** condicionan de manera sustantiva la resolución de las estructuras; pues los procedimientos de resolución son distintos según se trata de grandes o pequeños desplazamientos en la estructura. Las estructuras que sufren grandes desplazamientos requieren un tratamiento más complicado y más general que no puede abordarse con las herramientas de este curso de Resistencia de Materiales.

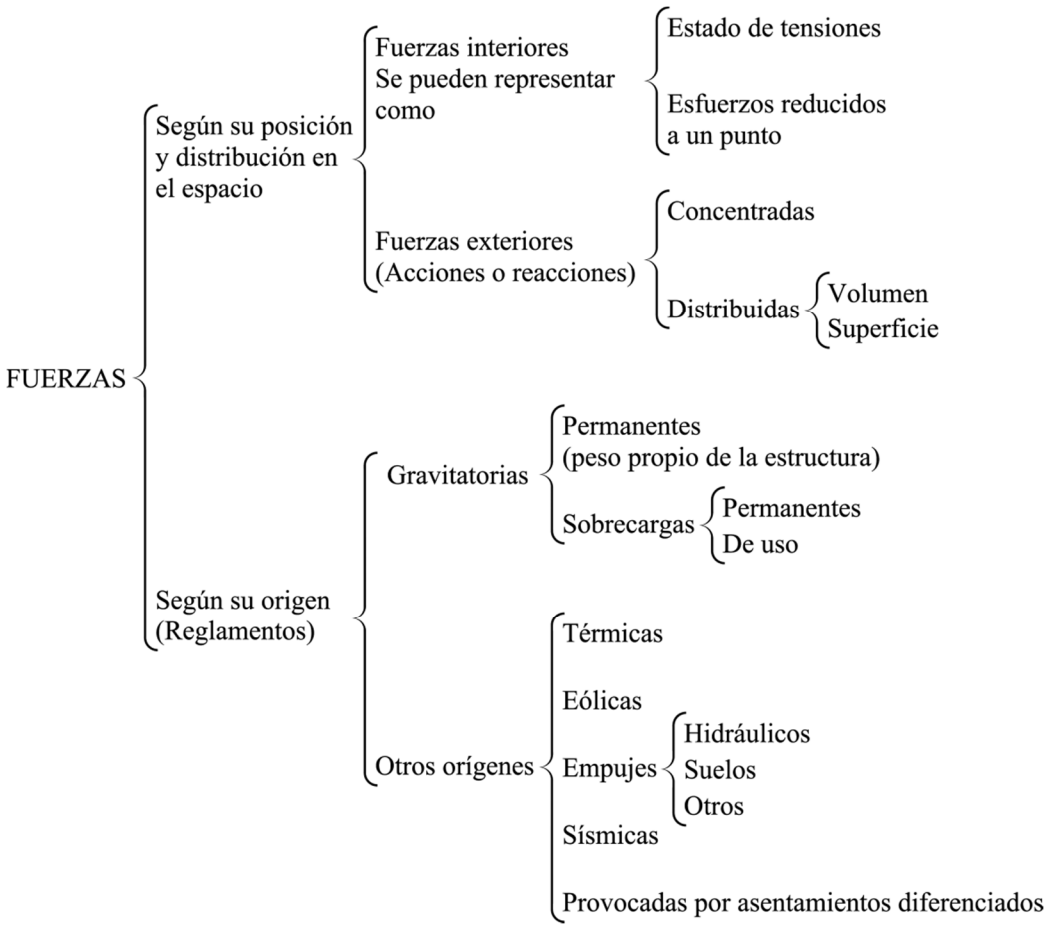


Figura 1.7 – Representación esquemática de los tipos de fuerza que actúan sobre una estructura.

1.5 Fuerzas exteriores e interiores – Reducción de fuerzas al centro geométrico de una sección transversal

Las fuerzas representan la acción de los cuerpos entre sí. Si interesa estudiar una parte de un cuerpo en particular, todos los cuerpos o partes restantes que actúen sobre la parte que se desee estudiar, constituirán *fuerzas exteriores.*

Las fuerzas exteriores podrán ser de volumen o de superficie. Serán fuerzas de *volumen* el peso del cuerpo y las fuerzas másicas en general, las fuerzas magnéticas, etc. Las fuerzas de *superficie* serán aquellas que resulten de la acción de un cuerpo sobre otro. Es decir, cuando existe un contacto. Si la superficie de aplicación tiende a cero, estas fuerzas reciben el nombre de fuerzas *concentradas.*

Entre las fuerzas exteriores se encuentran no sólo las *acciones* que son el motivo del estudio que se desea llevar a cabo (ciertas acciones gravitatorias, hidráulicas, etc.), sino que están aquellas que garantizan el equilibrio externo del cuerpo, y que reciben el nombre de *reacciones* (ver Figura 1.8). Estas reacciones se desarrollan en ciertas partes del cuerpo preestablecidas, a través de unos dispositivos que se denominan *apoyos,* cuya función es restringir movimientos.

Las fuerzas exteriores en equilibrio (acciones y reacciones) dan lugar a *fuerzas interiores.* Estas últimas se originan por la interacción entre partículas del cuerpo, y permiten transmitir o reducir los esfuerzos para conseguir su estado de equilibrio. De esta última parte se ocupa especialmente la Resistencia de Materiales.

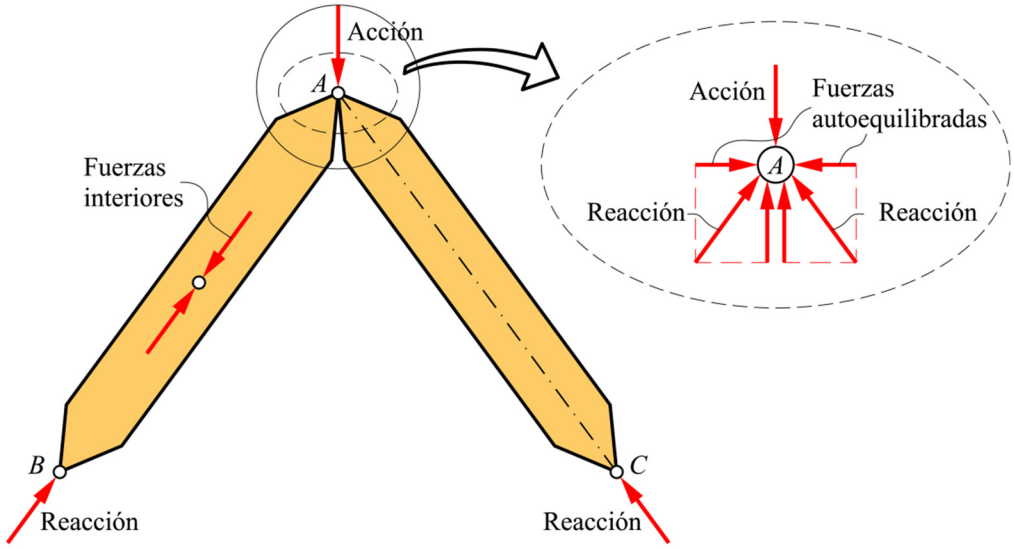


Figura 1.8 – Relación entre las fuerzas exteriores y las fuerzas interiores.

También se habla de *fuerzas interiores*, cuando dos partes estructurales interactúan entre sí. Por ejemplo, en la Figura 1.8, la interacción entre las dos barras que confluyen al nudo A, da lugar a dos fuerzas que son interiores a la estructura.

1.5.1 Fuerza interiores - Método de las secciones

Una forma de conocer las *fuerzas* interiores en una barra es mediante un método que las ponga en evidencia, esto es por ejemplo el *método de las secciones*, que consiste en cortar la estructura en equilibrio y luego restituir el equilibrio mediante fuerzas que actúan sobre la sección de corte y que suplantan la acción de la parte faltante. Así, la Figura 1.9a muestra una barra C en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores P_n. Si se efectúa un corte de la barra en C mediante una sección Δ, resulta la pieza estructural dividida en dos partes, C^I y C^{II}, como se representa en la Figura 1.9b, donde en la sección Δ actúan, a cada lado, las fuerzas P_Δ^I y P_Δ^{II} que restituyen el equilibrio de las partes C^{II} y C^I respectivamente.

Si se plantean las ecuaciones de equilibrio en C^I y C^{II} en forma independiente se obtiene

$$\text{Para } C^I \rightarrow \quad \left(\sum_1^i \mathbf{P}_j\right)_{C^I} + \mathbf{P}_\Delta^{II} = \mathbf{0} \tag{1.1}$$

$$\text{Para } C^{II} \rightarrow \quad \mathbf{P}_\Delta^{I} + \left(\sum_{i+1}^n \mathbf{P}_j\right)_{C^{II}} = \mathbf{0} \tag{1.2}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1.1) y (1.2) se obtiene la siguiente expresión

$$\underbrace{\left(\sum_1^i \mathbf{P}_j\right)_{C^I} + \left(\sum_{i+1}^n \mathbf{P}_j\right)_{C^{II}}}_{(a)} + \underbrace{\mathbf{P}_\Delta^{II} + \mathbf{P}_\Delta^{I}}_{(b)} = \mathbf{0} \tag{1.3}$$

La sumatoria de los términos (a) en la ecuación (1.3) corresponde a la ecuación de equilibrio global, es decir

$$\left(\Sigma \mathbf{P}_n\right)_{C^I} + \left(\Sigma \mathbf{P}_n\right)_{C^{II}} = \mathbf{0} \tag{1.4}$$

Si se reemplaza la ecuación (1.4) en la ecuación (1.3) se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio interno

$$\mathbf{P}_\Delta^{II} + \mathbf{P}_\Delta^{I} = \mathbf{0} \tag{1.5}$$

Las identidades dadas por las ecuaciones (1.1) a (1.5) muestran que las fuerzas interiores que actúan en la sección Δ se pueden obtener tanto de la parte C^I (izquierda) como de la parte C^{II} (derecha) y que el equilibrio local garantiza el global y viceversa.

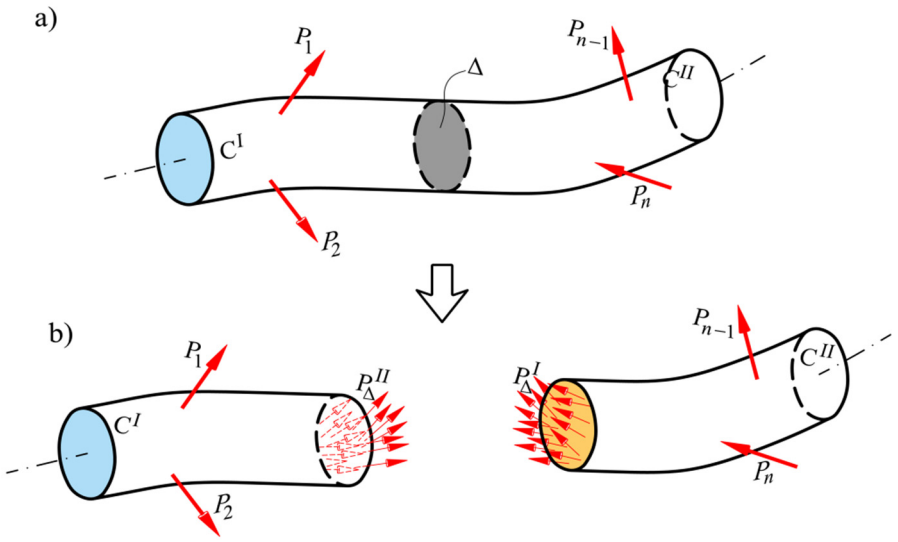


Figura 1.9 – Relación entre el equilibrio interno y externo en una parte estructural.

Además, al practicar el método de las secciones, resulta la siguiente afirmación: "*si las fuerzas que actúan sobre un lado de la sección son las mismas que las que actúan sobre el otro lado de la sección* Δ*, las deformaciones que se producen a ambos lados de* Δ *son iguales*". Esta condición se conoce como *condición de continuidad de deformaciones*.

1.5.2 Reducción de un sistema de fuerzas a una resultante en un punto

La fuerza $\mathbf{R}$ (ver Figura 1.10) es la resultante de las fuerzas por unidad de área, que resulta de la integración de las tensiones que actúan en la sección transversal. Esta forma de representar las acciones internas mediante esfuerzos resultantes forma parte del método que utiliza la Resistencia de Materiales para resolver, en forma simplificada, un problema estructural.

Haciendo una reducción del sistema de fuerzas interiores al Centro Geométrico de la sección (o mecánico en caso de ser una sección mixta), por donde pasa el eje de la pieza, se obtiene el vector principal $\bar{\mathbf{R}}$ y el momento principal $\bar{\mathbf{M}}$. Escogiendo un sistema de ejes ortogonales tal que dos de ellos descansen sobre el plano de la sección normal y un tercero que sea tangente al eje de la pieza, es posible descomponer $\bar{\mathbf{R}}$ y $\bar{\mathbf{M}}$ en sus componentes cartesianas, tal como muestra la Figura 1.10.

En la Figura 1.10 se obtienen las componentes de los *esfuerzos reducidos al centro geométrico* (CG) sobre una sección transversal. A estos *esfuerzos,* llamados *característicos,* se acostumbra denominarlos convencionalmente *esfuerzos de sección* o *fuerzas de sección*. Cada componente recibe los nombres que se indican a continuación:

- N : Esfuerzo normal o axil
- Q_y : Esfuerzo de corte según el eje y
- Q_x : Esfuerzo de corte según el eje x
- M_T : Momento torsor, en el eje z
- M_y : Momento flector según el eje y
- M_x : Momento flector según el eje x

Conociendo las fuerzas exteriores se pueden determinar estos seis esfuerzos característicos en una sección transversal, mediante seis ecuaciones de equilibrio de una de las partes de la barra seccionada. Haciendo, por ejemplo, el equilibrio de la parte derecha C^{II} de la barra seccionada, en cualquier caso se debe cumplir:

$$\sum_i F_{x_i} = 0; \sum_i F_{y_i} = 0; \sum_i F_{z_i} = 0 \tag{1.6}$$

$$\sum_i M_{x_i} = 0; \sum_i M_{y_i} = 0; \sum_i M_{z_i} = 0 \tag{1.7}$$

donde $F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}$ son las componentes cartesianas de la resultante **R** de las fuerzas P_Δ^I y de las fuerzas externas P_n que actúan en C^{II}; mientras que $M_{x_i}, M_{y_i}, M_{z_i}$ son las componentes cartesianas de los momentos de las fuerzas mencionadas, que resultan de la traslación de las fuerzas a un punto determinado de la sección transversal (centro geométrico, mecánico) (ver Figura 1.11).

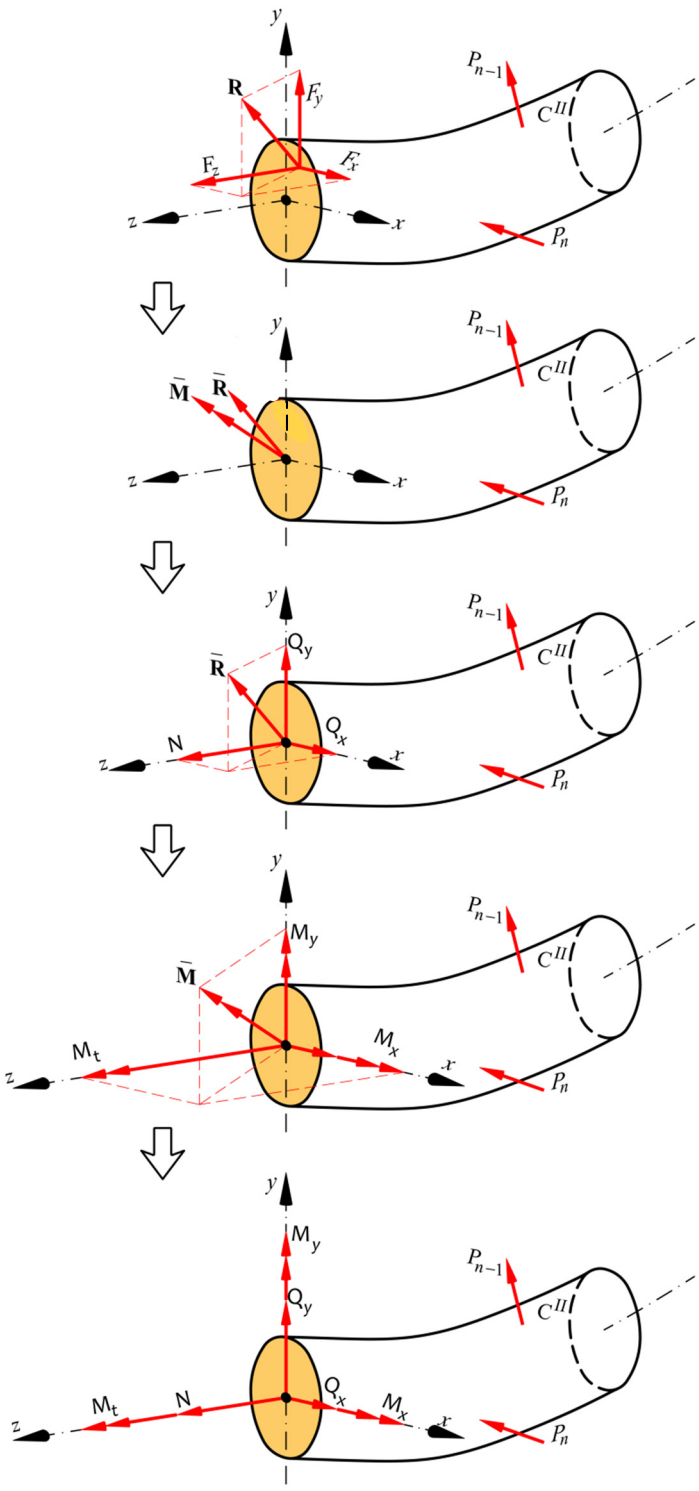


Figura 1.10 – Reducción de un sistema de fuerzas a una resultante en un punto.

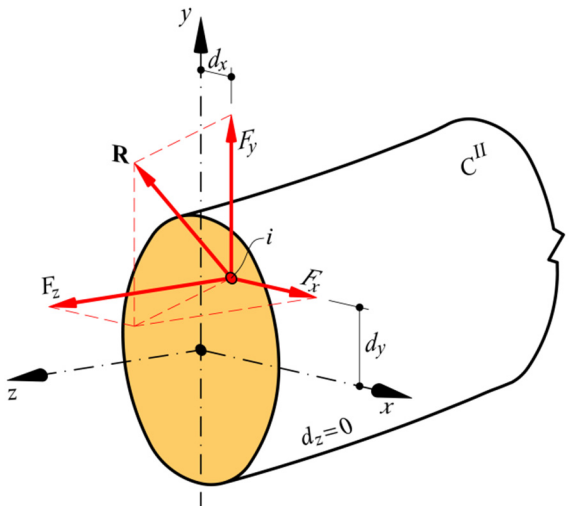


Figura 1.11 – Resultante en una sección transversal

Las ecuaciones (1.6) y (1.7) pueden escribirse vectorialmente de la siguiente manera:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}; \quad \sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

donde

$$\mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}_i; \quad \mathbf{M}_i = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_i \tag{1.9}$$

y

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{d}_i \times \mathbf{F}_i \tag{1.10}$$

Siendo

$$\mathbf{d}_i = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z = 0 \end{Bmatrix}_i \tag{1.11}$$

Reemplazando (1.9) y (1.11) en (1.10) se obtiene

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d_x & d_y & d_z = 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}_i = \tag{1.12}$$
$$= \left(d_y F_z\right)\vec{i} + \left(d_x F_y\right)\vec{k} - \left(d_y F_x\right)\vec{k} - \left(d_x F_z\right)\vec{j}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{M}_i = \mathsf{M}_x\,\vec{i} + \mathsf{M}_T\,\vec{k} - \mathsf{M}_y\,\vec{j} \tag{1.13}$$

Que también se puede escribir como

$$\mathbf{M}_i = \begin{Bmatrix} \mathsf{M}_x \\ \mathsf{M}_y \\ \mathsf{M}_T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_y F_z \\ -d_x F_z \\ d_x F_y - d_y F_x \end{Bmatrix} \tag{1.14}$$

Las ecuaciones (1.8) constituyen la condición general de equilibrio de un *sólido rígido*, como se verá más adelante.

En el caso que una pieza contenga un plano medio de simetría es posible hacer una particularización de las ecuaciones (1.6) y (1.7), siempre que las cargas actúen también en ese plano medio. De esta manera, sólo aparecen los esfuerzos que actúan en el plano de la estructura. Un caso simple, y muy utilizado, es el que se representa en la Figura 1.12 (plano medio $y-z$), en la cual N es el esfuerzo axil, $\mathsf{Q}_y = \mathsf{Q}$ es el esfuerzo de corte y $\mathsf{M}_x = \mathsf{M}$ es el momento flector. Debido a que, en este caso, todos los esfuerzos se producen en el plano $y-z$, las ecuaciones de equilibrio global están dadas por

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

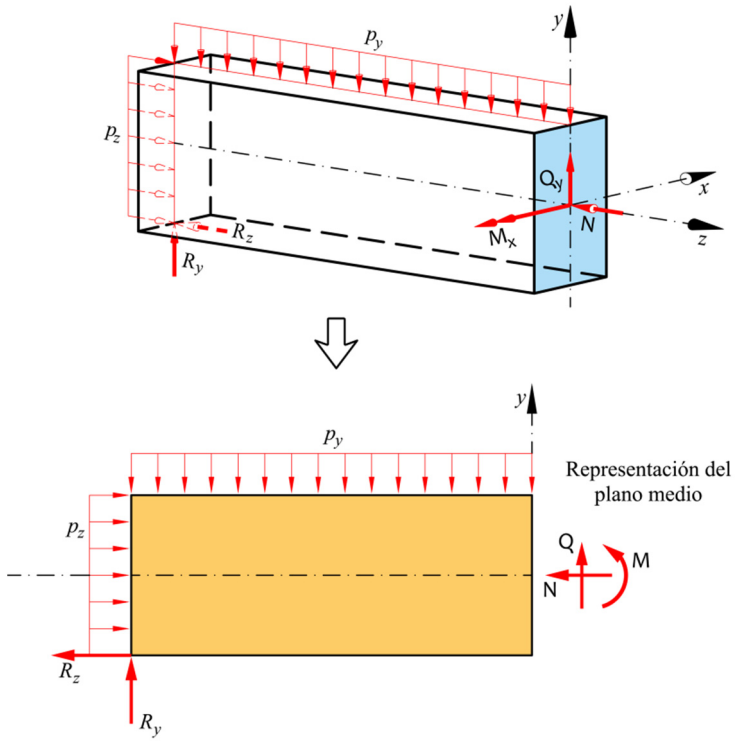


Figura 1.12 – Esfuerzos característicos.

1.6 Hipótesis fundamentales de la resistencia de materiales

Una vez se comprenden los conceptos de sistema real y esquema de cálculo, donde se ha hecho mención a la importancia de "esquematizar" el material, la geometría y las cargas, es posible plantear, en primer lugar, cuatro hipótesis que son coincidentes con las hipótesis básicas de la teoría de la elasticidad. Estas se enuncian a continuación:

1) *Sobre el material*: debe ser continuo, homogéneo, isótropo y elástico lineal.

2) *Sobre las deformaciones*: deben ser pequeñas y provenir de desplazamientos pequeños, además deben ser continuas y derivables.

3) *Sobre la geometría:* se debe admitir que ésta no cambia con la deformación, es decir que deben ser pequeñas (lo que constituye una conclusión de la condición 2).

4) *Sobre la aplicación de cargas exteriores*: deben aplicarse lentamente para evitar que se produzcan fuerzas de inercia (no interviene el tiempo).

Además de estas hipótesis, la resistencia de materiales considera cuatro hipótesis adicionales:

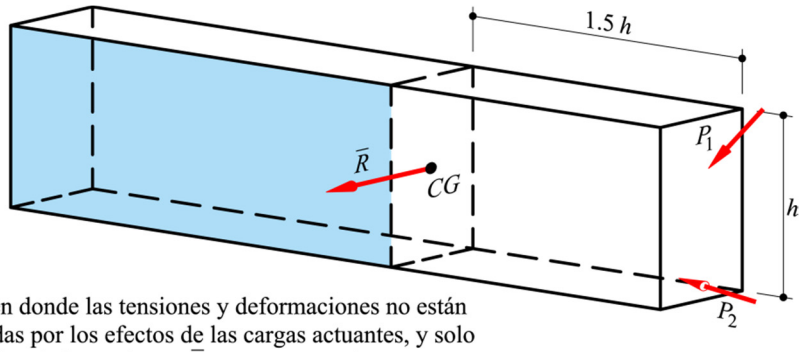


Figura 1.13 – Validez del principio de Saint – Venant.

5) *Hipótesis de Saint-Venant,* para una barra sometida a fuerzas exteriores, permite prescindir del efecto local que se provoca en las tensiones y deformaciones en una región de 1.0 a 1.5 veces la dimensión característica de una sección transversal para piezas suficientemente esbeltas (ver Figura 1.13).

Hipótesis de Navier-Bernoulli: Las secciones planas y normales al eje neutro antes de la deformación, siguen siéndolo después de la deformación (Figura 1.14

6) Figura 1.14), evidencia que resultará más clara luego al analizar las secciones transversales sometidas a flexión.

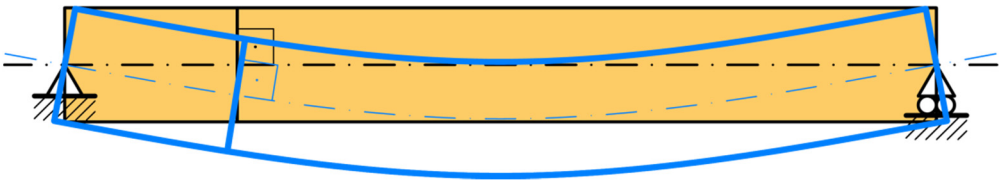


Figura 1.14 – Hipótesis de Navier – Bernoulli.

7) *Principio de superposición:* Dada las acciones por separado, medidos los efectos que producen cada una de las acciones; se tendrá que la suma de las acciones (o la acción total), provocará un efecto que será igual que la suma de los efectos de cada una de las acciones evaluados por separado (Figura 1.15).

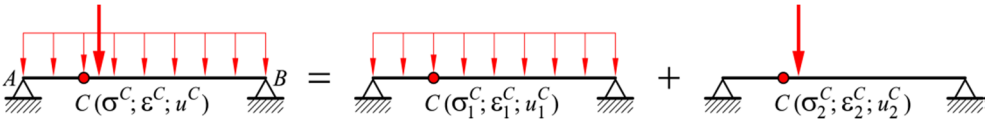


Figura 1.15 – Principio de superposición.

En la Figura 1.15 los efectos totales de las acciones en C (tensiones, deformaciones y desplazamientos) pueden obtenerse como:

$$\begin{aligned} \sigma^C &= \sigma_1^C + \sigma_2^C \\ \varepsilon^C &= \varepsilon_1^C + \varepsilon_2^C \\ u^C &= u_1^C + u_2^C \end{aligned} \tag{1.16}$$

8) *Existencia de un estado neutro:* En cualquier estructura sometida a flexión siempre existe un punto sobre un eje en estado neutro en el que no existen tensiones ni deformaciones.

1.7 Validez de las hipótesis fundamentales de la resistencia de materiales

1) Las dimensiones de la sección transversal de una pieza estructural tienen que ser pequeñas comparadas con su longitud. Por ejemplo, si se designa con L a la longitud de la pieza, la restricción anterior se podría cuantificar con los siguientes valores límites:

   - $L/10$ para las dimensiones de la sección transversal en barras de hormigón armado.
   - $L/20$ para las dimensiones de la sección transversal en barras de hormigón pretensado.
   - $L/100$ para las dimensiones de la sección transversal en arcos.

   Esto puede demostrarse mediante la teoría de la elasticidad.

2) Los arcos deben tener curvaturas suaves en su directriz y su radio debe ser grande respecto a su dimensión transversal.

3) La sección transversal debe ser constante o tener una variación muy suave a lo largo de la pieza.

Capítulo 2

Conceptos Básicos Elasticidad Bidimensional

2.1 Introducción

La teoría de la elasticidad[1] es una ciencia derivada de la mecánica que estudia el comportamiento de los sólidos, considerando que entre la magnitud de la fuerza F y el desplazamiento u, consecuencia de dicha fuerza, hay una proporcionalidad denominada rigidez K, que se mantiene constante a lo largo de todo el proceso mecánico de carga-descarga (ver Figura 2.1).

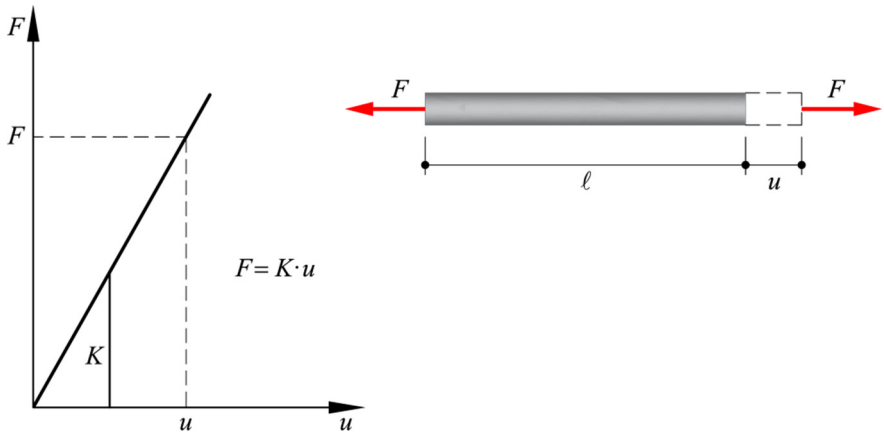


Figura 2.1 – Respuesta fuerza-desplazamiento de una barra sometida a tracción.

Se dice que un sólido deformable es elástico, cuando al cesar la acción que lo deformaba todos sus puntos regresan a la posición de origen recuperando la geometría original. La introducción a la teoría de la elasticidad, que se trata en este

[1] S. P Timoshenko, and J. N Goodier. *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, 1970

capítulo, se basa en las cuatro hipótesis fundamentales planteadas en el Capítulo 1, que se repiten a continuación para mayor claridad:

1) **Sobre el material**: Debe ser continuo, homogéneo, isótropo y la relación entre carga y desplazamiento debe ser lineal. Sobre esto último se profundizará dentro del contenido de este capítulo.
2) **Sobre las deformaciones**: Deben ser pequeñas y provenir de desplazamientos pequeños. La función que las representa debe ser continua y derivable. También se tratará este concepto más en profundidad en este mismo capítulo.
3) **Sobre la geometría del cuerpo sólido**: Se debe admitir que ésta no cambiará con las deformaciones. Es decir, los desplazamientos deben ser pequeños y por lo tanto es ésta una consecuencia de la hipótesis 2.
4) **Sobre la aplicación de las cargas exteriores**: Deben aplicarse lentamente para evitar que se produzcan efectos dinámicos. Es decir que la variable tiempo no interviene en la formulación.

2.2 Campos de la elasticidad

A continuación se presenta una descripción gráfica de los campos involucrados en la teoría de la elasticidad y su interrelación. Esta estructura conceptual, introducida por Enzo Tonti[2] (ver Figura 2.2), tiene por objeto presentar las variables agrupadas en tensoriales (Tensión σ y Deformación ε) y variables vectoriales (Fuerza F y Desplazamiento u). Este esquema, denominado *Diagrama de Tonti*, muestra tanto la interrelación entre las variables mencionadas, como entre los campos en los que se establecen las formulaciones de la teoría de la elasticidad (Campo Primal, en el que la variable libre es el desplazamiento y el Campo Dual, en el que la variable libre es la fuerza).

El diagrama de Tonti (Figura 2.2) permite iniciar el proceso deductivo partiendo del desplazamiento como variable libre del problema y, a partir de éste, obtener la

[2] E. Tonti (1975). On the formal structure of physical theories. Quaderno dei gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

deformación mediante la cinemática preestablecida (en este caso se ha escogido, como ejemplo, el caso más simple de una barra sometida a tracción uniforme). Una vez obtenida la deformación, se pasa a la tensión mediante la definición de una ley constitutiva (en este caso se ha utilizado la forma más simple establecida por Hooke para el caso uniaxial). Conocida la tensión se pasa, a continuación, a obtener la fuerza correspondiente (nuevamente en este caso se plantea la condición de equilibrio más simple para una barra sometida a tracción uniforme). Por último, se cierra el ciclo estableciendo la condición de equilibrio estructural que relaciona las fuerzas con los desplazamientos. Todo esto que se ha descrito ha resultado de recorrer el diagrama de Tonti en sentido anti horario y se conoce como formulación en el Campo Primal, que se basa en establecer como variable libre del problema el desplazamiento.

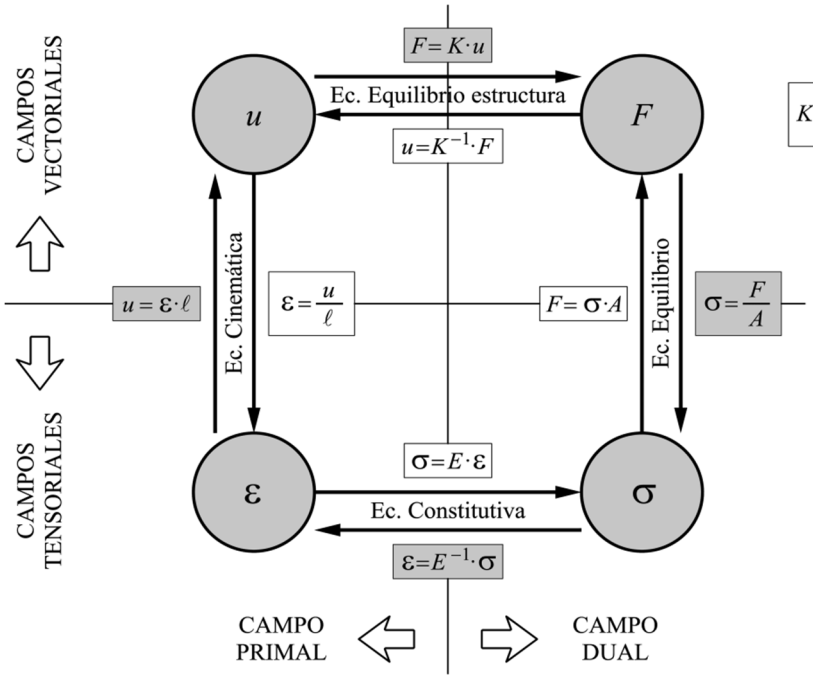


Figura 2.2 – Campos de la mecánica del sólido – Diagrama de Tonti (ej. para esfuerzo axial).

Se podría hacer una descripción análoga recorriendo el diagrama de Tonti en sentido horario, es decir partiendo de una variable de fuerza llamada conjugada de los desplazamientos, obteniéndose el mismo resultado, siendo ésta la formulación conocida como Dual.

2.3 Concepto de tensión

2.3.1 Tensor de tensión

Para definir los esfuerzos interiores y su distribución en una sección transversal, es necesario introducir el concepto de tensión. Se considera la sección transversal A de una barra cargada y en equilibrio. En el entorno de un punto k se escoge un área diferencial dA sobre la cual actúa una fuerza interior $\boldsymbol{dP}$ (Figura 2.3). De aquí resulta la magnitud vectorial $\mathbf{t}$ que representa la *tensión completa* en el punto k de la sección transversal A

$$\mathbf{t} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dA} \tag{2.1}$$

Este vector de *tensión completa* puede descomponerse en una componente normal al plano de la sección denominada tensión normal σ_n y dos componentes tangenciales a dicho plano denominadas tensiones tangenciales τ_1 y τ_2.

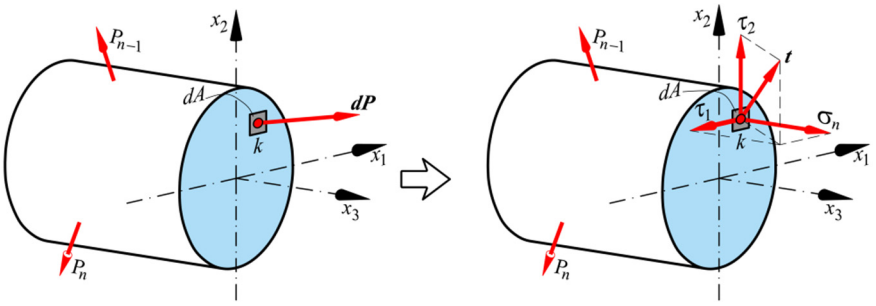


Figura 2.3 – Representación de la tensión completa en un punto de una sección transversal de una barra.

Si por el punto k se hacen pasar distintos planos, se tendrán distintas secciones de la barra y para cada una de ellas se tendrá un vector de tensión completa distinto en el mencionado punto. De esta forma $\mathbf{t}$ no sería una medida objetiva de la tensión, pues dependerá de la posición del plano que determine la sección transversal.

Para evitar esta falta de objetividad se suele establecer una medida convencional de la tensión a través de la definición de los vectores de tensión completa en tres planos ortogonales que pasan por el punto k. De esta forma resulta el concepto de *tensor de tensiones* en un punto k, como la representación ordenada de los tres vectores de tensión completa para tres planos ortogonales que pasan por el punto. Esto es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} \tag{2.2}$$

Las componentes del tensor de tensiones se identifican mediante dos subíndices que indican el plano en el que actúan y la dirección que tienen, es decir

$$\sigma_{ij} \begin{cases} i \text{ indica la cara en la que actúa la tensión cuya normal es } x_i \\ j \text{ indica la dirección de la tensión paralela al } x_j \end{cases}$$

El tensor de tensiones es un tensor de segundo orden que resulta de la composición de tres tensores de primer orden correspondientes a tres planos ortogonales entre sí (ver Figura 2.4). Debido a que cada punto del sólido está en equilibrio, éste también lo está y por lo tanto cumple también con el equilibrio rotacional, de donde surge que las tensiones tangenciales que se acercan o alejan de las aristas deben ser iguales. De esto resulta que este tensor de tensiones debe ser necesariamente simétrico,

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad ; \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad ; \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \tag{2.3}$$

La condición de tensión expresada por la ecuación (2.3) se cumple en todos los puntos en equilibrio y recibe el nombre de *reciprocidad de tensiones tangenciales* o *reciprocidad de Cauchy,* que se demostrará más adelante.

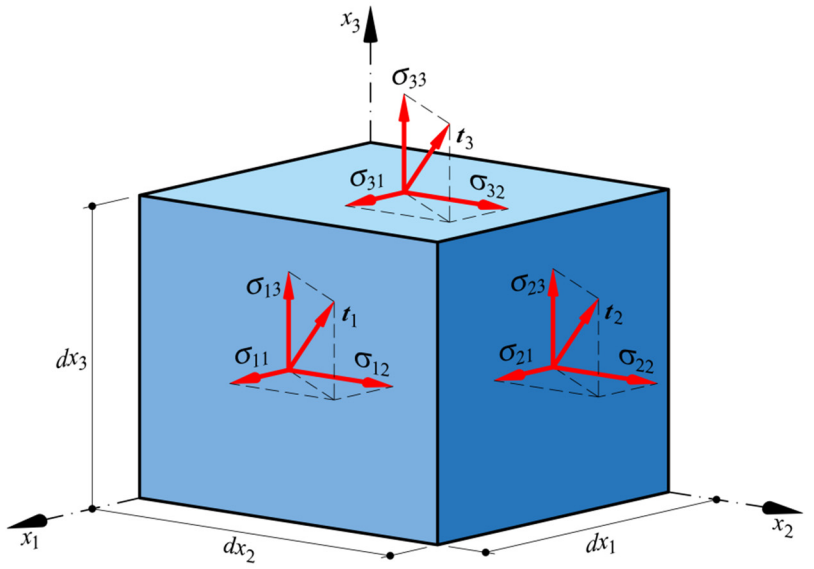


Figura 2.4 – Representación del estado tensional de un punto según tres planos ortogonales.

Es habitual representar el tensor de tensiones como una matriz columna que sólo contiene los términos de la parte simétrica del tensor. Esta representación de un tensor simétrico se denomina *notación de Voigt* y, para este caso, se escribe se la siguiente manera

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{sim} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

2.3.2 Ecuación de equilibrio de Cauchy

El equilibrio de un punto k perteneciente a un sólido, conduce a la denominada *ecuación de Cauchy*. Esta ecuación garantiza el equilibrio interno de este punto k considerando sus fuerzas másicas. Para simplificar el procedimiento y clarificar el concepto se presenta a continuación la formulación para un problema plano (2-D). La generalización de esta formulación al espacio es una simple expansión conceptual que no será tratada en este texto. Entonces, planteando las ecuaciones de equilibrio en las direcciones x_1 y x_2 (ver Figura 2.5) se tiene,

$$\begin{cases} \sum F_{x1} = 0 = \cancel{-\sigma_{11}(dx_2dx_3)} - \cancel{\sigma_{21}(dx_1dx_3)} + \left(\cancel{\sigma_{21}} + \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)(dx_1dx_3) + \\ \qquad + \left(\cancel{\sigma_{11}} + \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)(dx_2dx_3) + \overbrace{p_1 \cdot \underbrace{(dx_1dx_2dx_3)}_{dV}}^{P_1} \\ \sum F_{x2} = 0 = \cancel{-\sigma_{22}(dx_1dx_3)} - \cancel{\sigma_{12}(dx_2dx_3)} + \left(\cancel{\sigma_{12}} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}dx_1\right)(dx_2dx_3) + \\ \qquad + \left(\cancel{\sigma_{22}} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}dx_2\right)(dx_1dx_3) + \overbrace{p_2 \cdot \underbrace{(dx_1dx_2dx_3)}_{dV}}^{P_2} \end{cases} \tag{2.5}$$

donde el peso específico p_i resulta del producto de la densidad ρ^{dens} por la aceleración a_i, o sea $p_i = \rho^{dens} \cdot a_i \,(i = 1,2)$; y el peso P_i del diferencial de volumen dV se obtiene del producto $P_i = p_i \cdot dV \,(i = 1,2)$, con $dV = dx_1dx_2dx_3$.

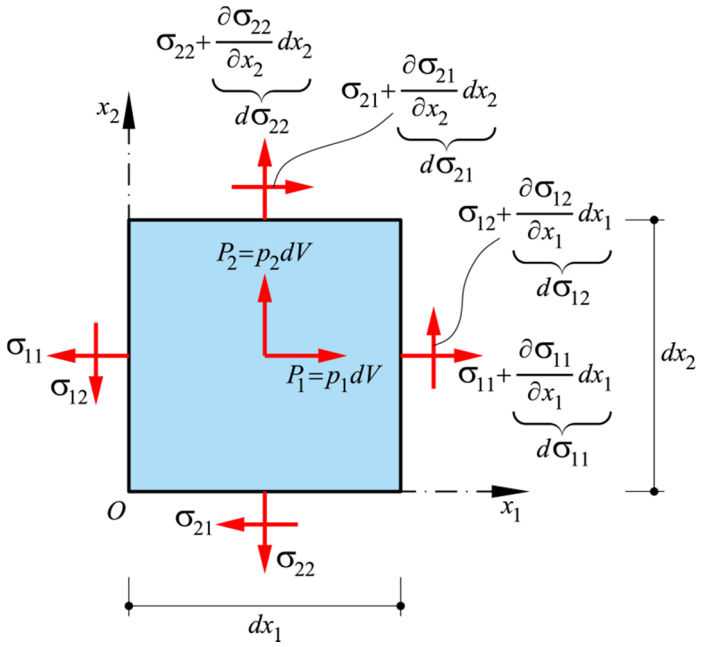


Figura 2.5 – Equilibrio de un punto proyectado sobre el plano x_1 , x_2 .

Operando algebraicamente se llega a,

$$\begin{cases} \sum F_{x1} = 0 = \dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2dx_1dx_3 + \dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1dx_2dx_3 + p_1\,dx_1dx_2dx_3 = 0 \\ \sum F_{x2} = 0 = \dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}dx_1dx_2dx_3 + \dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}dx_2dx_1dx_3 + p_2\,dx_1dx_2dx_3 = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Quedando así la ecuación de equilibrio interno de Cauchy, definida en un punto k , expresada de la siguiente manera,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} + p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + p_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{div(\sigma) + p = 0} \tag{2.7}$$

2.3.3 Ecuación de equilibrio rotacional de Cauchy o reciprocidad de las tensiones tangenciales

Las tensiones tangenciales deben garantizar la simetría del tensor de tensiones (ecuación (2.3)) y para ello se debe cumplir la condición de *reciprocidad de las tensiones tangenciales* ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$). Es decir que las tenciones que se acercan a una arista formada por dos caras concurrentes del cubo elemental en el punto k (ver Figura 2.5), o las que se alejan de ella, deben ser igual en módulo.

A continuación se establece la ecuación de equilibrio rotacional del punto k, que se muestra en la Figura 2.5, tomando momento respecto del punto O, y que garantiza la reciprocidad de estas tensiones tangenciales.

$$\begin{aligned}\sum M_O = 0 = &-\sigma_{11}\left(\frac{dx_2^2 dx_3}{2}\right)+\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)\left(\frac{dx_2^2 dx_3}{2}\right)+p_1\cdot\left(\frac{dx_1 dx_2^2 dx_3}{2}\right)+\\ &+\left(\sigma_{21}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)\left(dx_1 dx_2 dx_3\right)+\\ &+\sigma_{22}\left(\frac{dx_1^2 dx_3}{2}\right)-\left(\sigma_{22}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}dx_2\right)\left(\frac{dx_1^2 dx_3}{2}\right)-p_2\cdot\left(\frac{dx_1^2 dx_2 dx_3}{2}\right)+\\ &-\left(\sigma_{12}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}dx_1\right)\left(dx_1 dx_2 dx_3\right)\end{aligned} \tag{2.8}$$

Operando algebraicamente y luego eliminando los términos que multiplican a infinitésimos de orden superior (en este caso infinitésimos de 4to orden), resulta,

$$\sum M_O = 0 = \left(\sigma_{21}\right)\left(dx_1 dx_2 dx_3\right)-\left(\sigma_{12}\right)\left(dx_1 dx_2 dx_3\right) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{21} \equiv \sigma_{12} \tag{2.9}$$

La expresión obtenida en la ecuación (2.9) se puede generalizar a tres dimensiones (3D), es decir

$$\sigma_{ij} \equiv \sigma_{ji} \text{ para } i, j = 1,2,3 \text{ con } i \neq j \tag{2.10}$$

La ecuación (2.9) (y por ende la más general (2.10)) constituye la expresión algebraica del principio de *reciprocidad de tensiones tangenciales de Cauchy*. Este principio

establece que las componentes de las tensiones tangenciales que actúan sobre planos perpendiculares entre sí y son normales a la arista común, tienen el mismo módulo y convergen o divergen de la arista.

2.3.4 Estado de tensión según un plano cualquiera – Estado de equilibrio de un punto en función de la componente normal y tangencial (equilibrio en el contorno)

Sea nuevamente el estado de tensiones en un punto k de un sólido en equilibrio, pero en este caso se secciona el volumen elemental con un plano oblicuo identificado por su vector normal $\boldsymbol{\ell}$, resultando de aquí un *tetraedro elemental* tal como se muestra en la Figura 2.6. El tetraedro se ubica de tal manera que tres de sus caras coinciden con los planos delimitados por el sistema coordenado original (x_1, x_2, x_3), y la cuarta cara (oblicua) tiene una orientación arbitraria, determinada por los cosenos directores (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) de la normal $\boldsymbol{\ell}$, esto es,

$$\boldsymbol{\ell} = \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\left(\widehat{\boldsymbol{\ell}, x_1}\right) \\ \cos\left(\widehat{\boldsymbol{\ell}, x_2}\right) \\ \cos\left(\widehat{\boldsymbol{\ell}, x_3}\right) \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

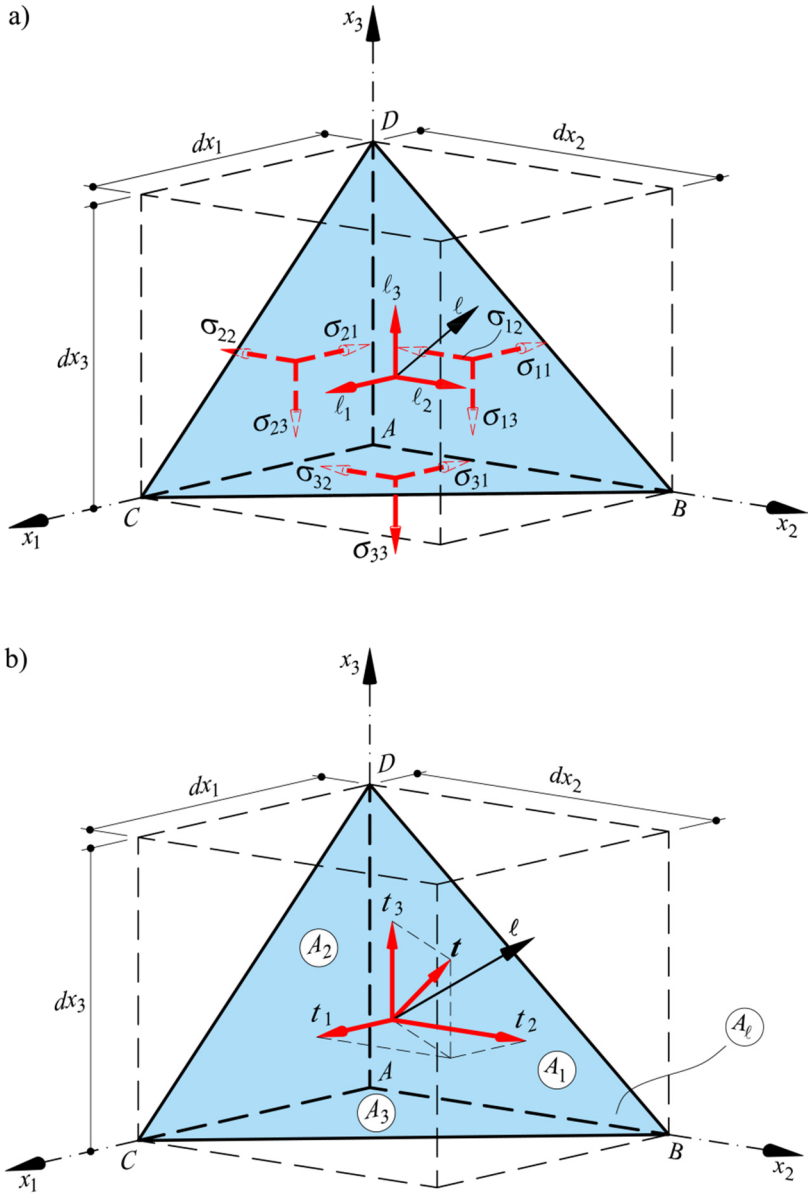


Figura 2.6 – Representación del estado tensional de un punto A según distintos planos: a) tensiones en los planos cartesianos; b) tensiones en el plano oblicuo.

Las áreas de las caras del tetraedro, indicadas por el índice del versor saliente, resultan

$$\begin{cases} A_\ell = \text{Sup}(CDB) \\ A_1 = \text{Sup}(ADB) = A_\ell \cdot \ell_1 \\ A_2 = \text{Sup}(CAD) = A_\ell \cdot \ell_2 \\ A_3 = \text{Sup}(CAB) = A_\ell \cdot \ell_3 \end{cases} \tag{2.12}$$

Así, del equilibrio de fuerzas según los tres ejes coordenados se obtiene,

$$\begin{cases} \sum F_{x1} = 0 \\ \sum F_{x2} = 0 \\ \sum F_{x3} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1 A_\ell = \sigma_{11} A_1 + \sigma_{21} A_2 + \sigma_{31} A_3 \\ t_2 A_\ell = \sigma_{12} A_1 + \sigma_{22} A_2 + \sigma_{32} A_3 \\ t_3 A_\ell = \sigma_{13} A_1 + \sigma_{23} A_2 + \sigma_{33} A_3 \end{cases} \tag{2.13}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.12) en las (2.13) resulta el estado tensional en un plano cualquiera, a partir del tensor de tensiones del punto k,

$$\begin{cases} t_1 = \sigma_{11} \ell_1 + \sigma_{21} \ell_2 + \sigma_{31} \ell_3 \\ t_2 = \sigma_{12} \ell_1 + \sigma_{22} \ell_2 + \sigma_{32} \ell_3 \\ t_3 = \sigma_{13} \ell_1 + \sigma_{23} \ell_2 + \sigma_{33} \ell_3 \end{cases} \tag{2.14}$$

Que también puede escribirse matricialmente como,

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\ell}; \tag{2.15}$$

$$\text{pero } \boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\ell}$$

2.3.4.1 Estado de equilibrio del punto en función de la tensión normal y tangencial – Caso particular problema plano

Para simplificar los cálculos y obtener el estado tensional de un punto k en un plano cualquiera paralelo al eje x_3, se presenta en este apartado un caso particular del problema anterior expresado en el plano $x_1 - x_2$, tal como se muestra en la Figura 2.7. En este caso particular, muy común en muchas aplicaciones prácticas,

las tensiones $\sigma_{3i} = \sigma_{i3}$ $(i = 1,2,3)$ son nulas y, en consecuencia, el vector tensión $\mathbf{t}$ está contenido en el plano $x_1 - x_2$. El plano oblicuo, paralelo al eje x_3, está definido por el vector normal $\boldsymbol{\ell}$ cuyas componentes están dadas por

$$\boldsymbol{\ell} = \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\left(\widehat{\boldsymbol{\ell}, x_1}\right) \\ \cos\left(\widehat{\boldsymbol{\ell}, x_2}\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(90^o - \alpha) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

donde α es el ángulo que forma el eje cartesiano x_1 con el vector $\boldsymbol{\ell}$ que define la posición del plano oblicuo.

De manera análoga a la ec. (2.12) y teniendo en cuenta la ec. (2.16), la proyección de áreas en el estado plano de la Figura 2.7 resulta,

$$\begin{cases} A_1 = A_\ell \cdot \ell_1 = A_\ell \cdot \cos(\alpha) \\ A_2 = A_\ell \cdot \ell_2 = A_\ell \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \end{cases} \tag{2.17}$$

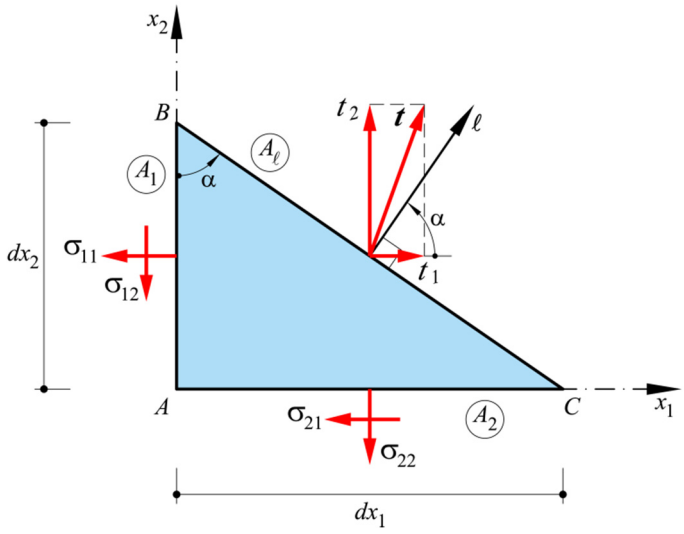


Figura 2.7 – Representación plana del estado tensional de un punto según un plano oblicuo en la base (x_1, x_2).

Así, como caso particular de la ecuación (2.13), el equilibrio de fuerzas resulta,

$$\begin{cases} t_1 A_\ell = \sigma_{11}\, A_1 + \sigma_{21}\, A_2 \\ t_2 A_\ell = \sigma_{12}\, A_1 + \sigma_{22}\, A_2 \end{cases} \tag{2.18}$$

Sustituyendo las ecuaciones de proyección de áreas (ec. (2.17)), resulta el estado tensional en un plano cualquiera, definido por su normal ℓ, a partir del estado tensional del punto k,

$$\begin{cases} t_1 = \sigma_{11}\,\ell_1 + \sigma_{21}\,\ell_2 = \sigma_{11}\cos\alpha + \sigma_{21}\,\text{sen}\,\alpha \\ t_2 = \sigma_{12}\,\ell_1 + \sigma_{22}\,\ell_2 = \sigma_{12}\cos\alpha + \sigma_{22}\,\text{sen}\,\alpha \end{cases} \tag{2.19}$$

Las ecuaciones (2.19), igual que la (2.15), también puede escribirse como,

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \text{sen}\,\alpha \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\ell} \qquad , \qquad \text{ya que:} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

Esto permite obtener las componentes de tensión $\{t_1, t_2\}$ en un plano α cualquiera en la base $(x_1\ ,\ x_2)$, a partir del tensor de tensiones en el punto analizado.

Otra forma de expresar el vector de tensión completa $\mathbf{t}$ es en un sistema de ejes locales dextrógiros, tangencial y normal al plano α, definido por su normal ℓ. Esto permitirá luego definir el concepto de tensión principal. Para ello se expresa la tensión normal y la tensión tangencial al plano mencionado en función del ángulo α (ver Figura 2.8),

$$\mathbf{t} = \underbrace{\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{Componentes} \\ \text{en } (x_1, x_2)}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_\alpha \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{Componentes} \\ \text{en } (\ell, s)}} \tag{2.21}$$

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = t_1 \cos\alpha + t_2 \operatorname{sen}\alpha \\ \tau_\alpha = -t_1 \operatorname{sen}\alpha + t_2 \cos\alpha \end{cases} \tag{2.22}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (2.19) en las ecuaciones (2.22), se tiene

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_{11}\cos^2\alpha + \sigma_{21}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \sigma_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}\operatorname{sen}^2\alpha \\ \tau_\alpha = -\sigma_{11}\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - \sigma_{21}\operatorname{sen}^2\alpha + \sigma_{12}\cos^2\alpha + \sigma_{22}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \end{cases} \tag{2.23}$$

Considerando la reciprocidad de las tensiones tangenciales de Cauchy, la ecuación (2.23) resulta

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_{11}\cos^2\alpha + \sigma_{22}\operatorname{sen}^2\alpha + 2\sigma_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \tau_\alpha = -(\sigma_{11}-\sigma_{22})\underbrace{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}_{\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2}} + \sigma_{12}\underbrace{(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)}_{\cos 2\alpha} \end{cases} \tag{2.24}$$

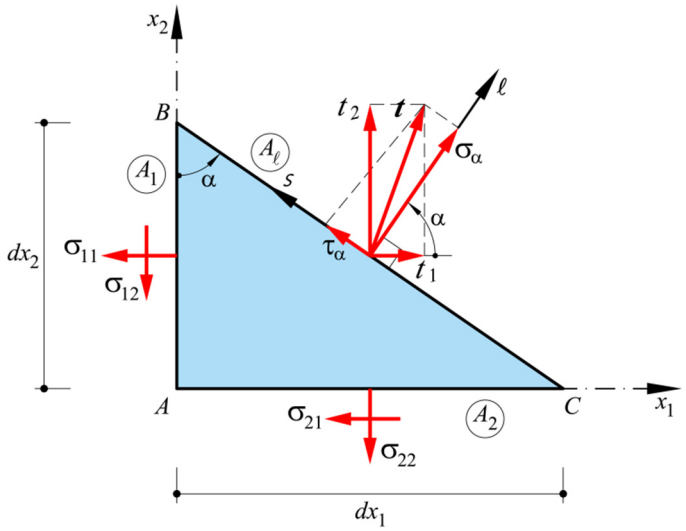


Figura 2.8 – Representación plana del estado tensional de un punto, y de las tensiones normal y tangencial según un plano oblicuo en la base (x_1, x_2).

En las deducciones que siguen se hará uso de las siguientes identidades trigonométricas

$$\begin{cases} 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\,\alpha = \text{sen}\,2\alpha \\ \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \cos\,2\alpha \end{cases} \tag{2.25}$$

de donde resulta,

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos\,2\alpha}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos\,2\alpha}{2} \tag{2.26}$$

Teniendo en cuenta las identidades y relaciones trigonométricas dadas por las ecuaciones (2.25) y (2.26) y reemplazándolas en las ecuaciones (2.24), se obtienen las expresiones que permiten determinar la tensión normal y la tensión tangencial en un plano cualquiera definido por el ángulo α,

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \dfrac{\sigma_{11}}{2}\left(1+\cos 2\alpha\right) + \dfrac{\sigma_{22}}{2}\left(1-\cos 2\alpha\right) + \sigma_{12}\,\text{sen}\,2\alpha \\ \tau_\alpha = -\dfrac{\left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)}{2}\text{sen}\,2\alpha + \sigma_{12}\cos\,2\alpha \end{cases}$$

Reordenando,

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \left(\dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right) + \left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)\cos 2\alpha + \sigma_{12}\,\text{sen}\,2\alpha \\ \tau_\alpha = -\left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)\text{sen}\,2\alpha + \sigma_{12}\cos 2\alpha \end{cases} \tag{2.27}$$

Las ecuaciones (2.27) se denominan *ecuaciones de transformación para esfuerzo plano* y muestran que existe una variación continua de las tensiones σ_α y τ_α con el ángulo α que define la posición del plano oblicuo. Lo anterior puede verse gráficamente en la Figura 2.9.

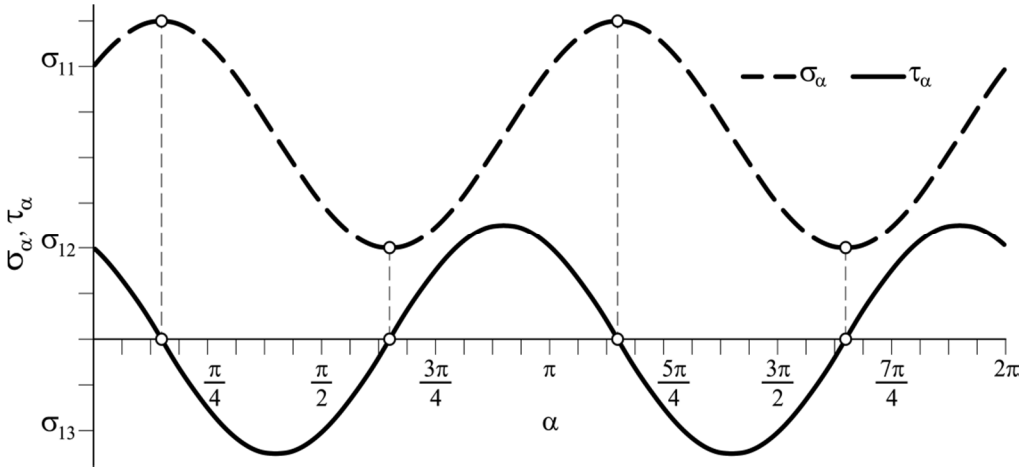


Figura 2.9 – Representación de la variación de las tensiones normal y tangencial en función de la inclinación α del plano oblicuo en la base (x_1, x_2).

Plano Principal

Si se analizan las ecuaciones (2.27) y su representación gráfica (Figura 2.9) se puede observar que existen inclinaciones del plano oblicuo en los que la tensión tangencial es nula y, simultáneamente, la tensión normal adopta un valor extremo (máximo o mínimo). Es decir, se puede obtener el ángulo $\alpha = \alpha_p$ que verifica $\tau_{\alpha_p} = 0$ y $\sigma_{\alpha_p} = \max \text{ o } \min$. Al plano cuya inclinación es α_p se lo denomina plano principal. Esto es, a partir de la segunda de las ecuaciones (2.27) resulta,

$$\tau_{\alpha_p} = 0 = -\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right) \operatorname{sen} 2\alpha_p + \sigma_{12} \cos 2\alpha_p$$

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha_p}{\cos 2\alpha_p} = \operatorname{tg} 2\alpha_p = \frac{2\sigma_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})}$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}\right) \tag{2.28}$$

A partir de la ecuación (2.28) se pueden encontrar las direcciones que definen los planos que garantizan que sobre ellos se anula la tensión tangencial. Como se

expresó más arriba, a estos planos se los denomina *planos principales* y se lo designará con el ángulo α_p. A las tensiones normales que se producen en estos planos se las denomina *tensiones principales*. Otra forma de obtener los planos principales (α_p) es encontrando los valores que hacen extrema la función que define la tensión normal σ_α en la primera de las ecuaciones (2.24). Esto es,

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0 = -2\sigma_{11}\cos\alpha_p \operatorname{sen}\alpha_p + 2\sigma_{22}\cos\alpha_p \operatorname{sen}\alpha_p + 2\sigma_{12}\left(\cos^2\alpha_p - \operatorname{sen}^2\alpha_p\right)$$

$$0 = \left(\sigma_{22} - \sigma_{11}\right)\underbrace{2\cos\alpha_p \operatorname{sen}\alpha_p}_{\operatorname{sen} 2\alpha_p} + 2\sigma_{12}\underbrace{\left(\cos^2\alpha_p - \operatorname{sen}^2\alpha_p\right)}_{\cos 2\alpha_p}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_p = \frac{2\sigma_{12}}{\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)} \quad \rightarrow \quad \alpha_p = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}\right) \tag{2.29}$$

Nótese que la ecuación (2.29) coincide con la ecuación (2.28).

El ángulo α_p, que resulta de esta expresión, se define convencionalmente como aquel ángulo que va desde el eje con mayor tensión en la base (x_1, x_2), hasta el eje x_I, que representa la tensión principal mayor en la base principal (x_I, x_{II}).

Se denominan *signos convencionales* a los siguientes (ver Figura 2.10):

- **Para las *tensiones normales*:** *positivas* (+) para el caso de *tracción* (estiramientos), *negativas* (-) para el caso de *compresión* (acortamientos).

- **Para las *tensiones tangenciales o cortantes*:** *positivas* (+) cuando actúan sobre la *cara positiva* en sentido de los *ejes positivos*, *negativas* (-) cuando actúan sobre la *cara positiva* en sentido de los *ejes negativos*.

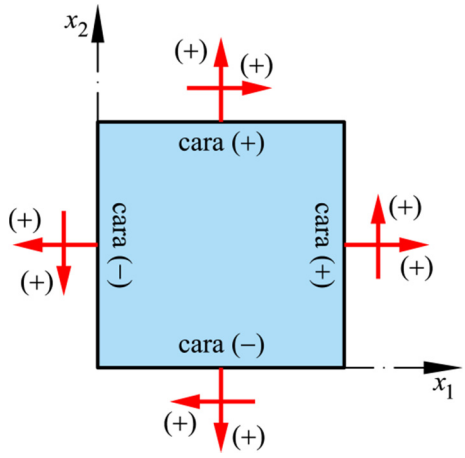


Figura 2.10 – Representación de la convención de signos para las tensiones normales y tangenciales.

Las ecuaciones (2.27) proporcionan las tensiones normales y cortantes que actúan sobre un plano cuya normal forma un ángulo α con el eje x_1. Así, a partir de las ecuaciones (2.27) resulta claramente:

$$\text{Para} \quad \alpha = 0, \quad \begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_{11} \\ \tau_\alpha = \sigma_{12} \end{cases} \tag{2.30}$$

$$\text{Para} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_{22} \\ \tau_\alpha = -\sigma_{12} \end{cases} \tag{2.31}$$

La forma de escribir las ecuaciones (2.27) resulta especialmente útil para explicar el círculo de Mohr (ver Sección 2.3.4.2).

Se determinarán ahora las magnitudes de las tensiones principales empleando las ecuaciones (2.27) y (2.29). Las tensiones principales se obtienen, según se dijo, para el ángulo α_p para el cual resultan nulas las tensiones tangenciales ($\tau_{\alpha_p} = 0$). Para esto, a partir de la segunda ecuación (2.27), se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha_p}{\cos 2\alpha_p} = \frac{2\sigma_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2\alpha_p = \frac{2\sigma_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})} \cos 2\alpha_p \tag{2.32}$$

Si ahora se sustituye la ec. (2.32) en la primera de las ecuaciones (2.27), resulta:

$$\sigma_{\alpha_p} = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} + \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{2} \cos 2\alpha_p + \frac{2\sigma_{12}^2}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})} \cos 2\alpha_p \tag{2.33}$$

$$\rightarrow \quad \sigma_{\alpha_p} = \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right) + \left[\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right] \left(\frac{2}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \right) \cos 2\alpha_p \tag{2.34}$$

La ecuación (2.34) permite obtener la magnitud de la *tensión principal* asociada al plano α_p.

2.3.4.2 Círculo de Mohr

Las *ecuaciones de transformación para esfuerzo plano* (ecuaciones. (2.24) y (2.27)), pueden representarse mediante una gráfica conocida como *círculo de Mohr*. Esta gráfica es muy útil para apreciar las relaciones entre los esfuerzos normales y cortantes que actúan en un punto según distintos planos que pasen por él. Las ecuaciones de transformación (2.27) pueden reescribirse de la siguiente manera

$$\begin{cases} \sigma_\alpha - \left(\dfrac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right) = \left(\dfrac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right) \cos 2\alpha + \sigma_{12} \operatorname{sen} 2\alpha \\ \tau_\alpha = -\left(\dfrac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right) \operatorname{sen} 2\alpha + \sigma_{12} \cos 2\alpha \end{cases} \tag{2.35}$$

Las ecuaciones (2.35) constituyen las *ecuaciones paramétricas de un círculo*, cuyo parámetro es 2α. Si se elevan al cuadrado ambos miembros de estas dos ecuaciones y luego se suma miembro a miembro, se puede eliminar el parámetro 2α. Es decir,

$$\begin{cases} \left(\sigma_\alpha - \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 \cos^2 2\alpha + \sigma_{12}^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha + 2\left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)\sigma_{12}\cos 2\alpha \operatorname{sen} 2\alpha \\ \tau_\alpha^2 = \left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha + \sigma_{12}^2 \cos^2 2\alpha - 2\left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)\sigma_{12}\cos 2\alpha \operatorname{sen} 2\alpha \end{cases} \tag{2.36}$$

$$\left(\sigma_\alpha - \underbrace{\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}}_{\sigma_{\text{med}}}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}_{R^2} \tag{2.37}$$

En la ecuación (2.37) se identifican, en el primer miembro las coordenadas del centro del círculo $(\sigma_{\text{med}}, 0)$ y, en el segundo miembro el radio R; dados respectivamente por

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} \quad \text{(tensión media)}; \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \tag{2.38}$$

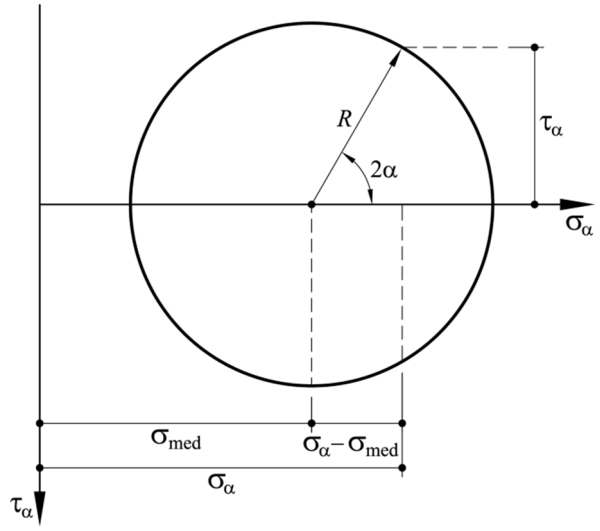


Figura 2.11 – Círculo de Mohr para esfuerzo plano.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.38), la ecuación (2.37) puede escribirse de la siguiente manera

$$\left(\sigma_\alpha - \sigma_{med}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = R^2 \tag{2.39}$$

La ecuación (2.39) constituye la ecuación de un círculo, llamado *círculo de Mohr*, en las coordenadas cartesianas $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$, de radio R y centro en $(\sigma_\alpha = \sigma_{med}, \tau_\alpha = 0)$. La representación gráfica de este círculo a partir de la ecuación (2.39) se observa en la Figura 2.11.

El círculo de Mohr representado en la Figura 2.11 puede trazarse de formas diferentes. Una de ellas es la que se explica a continuación: σ_α positivo hacia la derecha y τ_α positivo hacia abajo, lo que permite trazar el ángulo 2α positivo en sentido anti-horario, resultando el gráfico coincidente con las ecuaciones obtenidas.

Sea, por ejemplo, el estado plano de tensiones en un punto representado por las tensiones normales y tangenciales que se muestran en la Figura 2.12a, en el que se ha supuesto a modo ilustrativo que $\sigma_{11} > \sigma_{22}$.

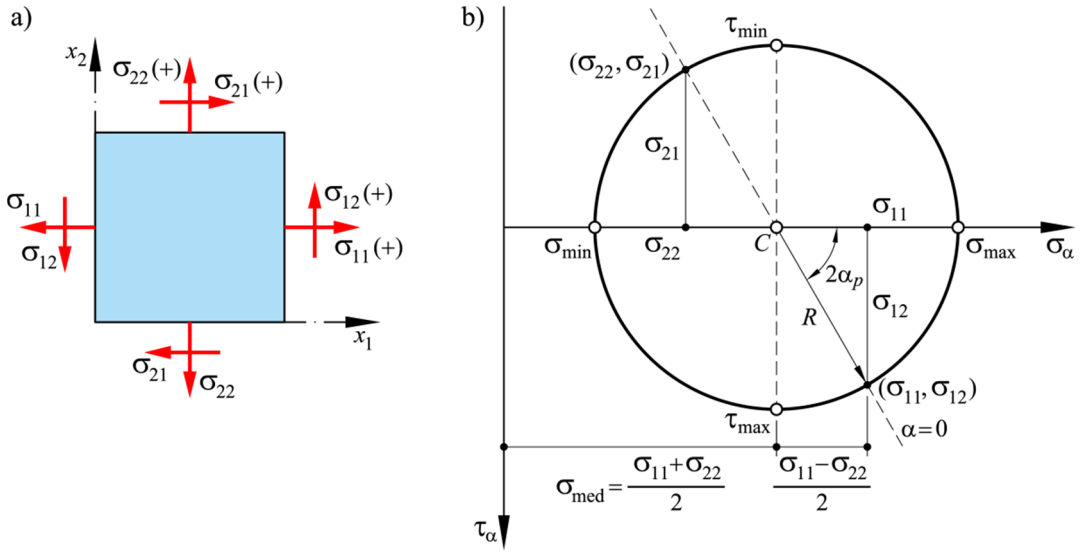


Figura 2.12 – a) Punto en estado plano de tensión; b) Círculo de Mohr correspondiente.

2.3.5 Tensiones principales, método analítico

En la Sección 2.3.4.1 se obtuvo el estado de tensiones de un punto k en equilibrio, y se determinaron las tensiones sobre un plano oblicuo de orientación arbitraria, definido por los cosenos directores de la normal $\boldsymbol{\ell}$. Si ahora dicho plano oblicuo fuera un *plano principal* ocurrirá que el vector de tensión completa $\mathbf{t}$ coincidiría con el vector $\boldsymbol{\ell}$ (ver Figura 2.13) y las tensiones tangenciales serán nulas sobre éste, es decir

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \ell_1 \\ \sigma \ell_2 \\ \sigma \ell_3 \end{Bmatrix} \quad \text{con:} \quad \sigma = \|\mathbf{t}\|; \quad \boldsymbol{\ell} = \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\widehat{\boldsymbol{\ell}, x_1}) \\ \cos(\widehat{\boldsymbol{\ell}, x_2}) \\ \cos(\widehat{\boldsymbol{\ell}, x_3}) \end{Bmatrix} \tag{2.40}$$

La ecuación (2.40) también se puede escribir como

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \sigma \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix} \tag{2.41}$$

Sustituyendo (2.41) en (2.15) y operando, se tiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix} - \sigma \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.42}$$

$$\left[\boldsymbol{\sigma} - \sigma \cdot \mathbf{I}\right] \boldsymbol{\ell} = \mathbf{0} \tag{2.43}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad y $\mathbf{0}$ el vector nulo.

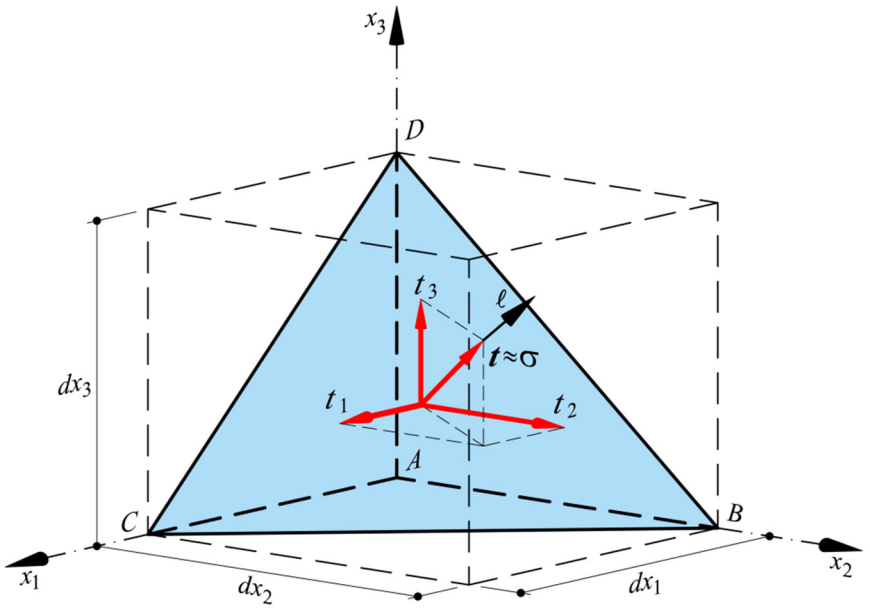


Figura 2.13 – Tensión sobre un plano principal.

El sistema de ecuaciones (2.43) es un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas con tres incógnitas. Las incógnitas son los cosenos directores que definen la posición de los planos donde la tensión tangencial es nula. Para que el sistema de ecuaciones (2.43) tenga solución diferente de la trivial es necesario que

$$\det\left[\boldsymbol{\sigma}-\sigma\cdot\mathbf{I}\right]=\left|\boldsymbol{\sigma}-\sigma\cdot\mathbf{I}\right|=0 \tag{2.44}$$

Desarrollando la ecuación (2.44) resulta,

$$\left|\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}-\sigma\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma\end{vmatrix}=0 \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}&\left(\sigma_{11}-\sigma\right)\left(\sigma_{22}-\sigma\right)\left(\sigma_{33}-\sigma\right)+\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}-\\&-\sigma_{13}^2\left(\sigma_{22}-\sigma\right)-\sigma_{23}^2\left(\sigma_{11}-\sigma\right)-\sigma_{12}^2\left(\sigma_{33}-\sigma\right)=0\end{aligned} \tag{2.46}$$

Finalmente la ecuación (2.46) puede escribirse como

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{2.47}$$

donde I_1, I_2 e I_3 se denominan invariantes de tensión ya que sus magnitudes son independientes de la base ortogonal (x_1, x_2, x_3), y están dado por

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \tag{2.48}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \tag{2.49}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \tag{2.50}$$

La ecuación (2.47) es una ecuación cúbica, denominada *ecuación característica* de la matriz del "tensor de tensiones" $\boldsymbol{\sigma}$ (ecuación (2.4)), cuyas tres raíces representan las *tensiones principales* $\sigma^I \geq \sigma^{II} \geq \sigma^{III}$, mayor, intermedia y menor respectivamente. Para determinar el plano en que se produce cada tensión principal es necesario reemplazar cada raíz de la ecuación cúbica en el sistema de ecuaciones (2.42). Tener en cuenta que una de las ecuaciones es linealmente dependiente de las otras, por lo que es necesario resolver este sistema de ecuaciones con una condición auxiliar. Puesto que es una base ortonormal, esta condición es aquella que garantiza que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es la unidad. Así, para cada una de las tensiones principales $\sigma^i\,(i = I, II, III)$, reemplazando en la ecuación (2.40) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma^i & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma^i & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1^i \\ \ell_2^i \\ \ell_3^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ y } \left(\ell_1^i\right)^2 + \left(\ell_2^i\right)^2 + \left(\ell_3^i\right)^2 = 1 \tag{2.51}$$

Se debe notar que el problema planteado a través de la ecuación (2.43) constituye un problema de *autovalores (o valores propios)* y *autovectores (o vectores propios)*, donde

los autovalores constituyen las tensiones principales y los autovectores los cosenos directores que establecen la orientación de los planos principales.

2.3.5.1 Particularización al caso de estado plano de tensión

Si ocurre que el estado de tensión es un estado plano (ver Figura 2.14), el tensor de tensión dado por la ecuación (2.2) se reduce a

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

Las ecuaciones (2.40) y (2.41) se reducen a

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{Bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.53}$$

$$\left[\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}\right] \boldsymbol{\ell} = \mathbf{0} \tag{2.54}$$

Nuevamente, para que el sistema de ecuaciones (2.53) tenga solución diferente de la trivial es necesario que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo, es decir

$$\det\left[\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}\right] = \left|\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}\right| = 0 \tag{2.55}$$

Desarrollando la ecuación (2.55) resulta

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.56}$$

$$\left(\sigma_{11} - \sigma\right)\left(\sigma_{22} - \sigma\right) - \sigma_{12}^2 = 0 \tag{2.57}$$

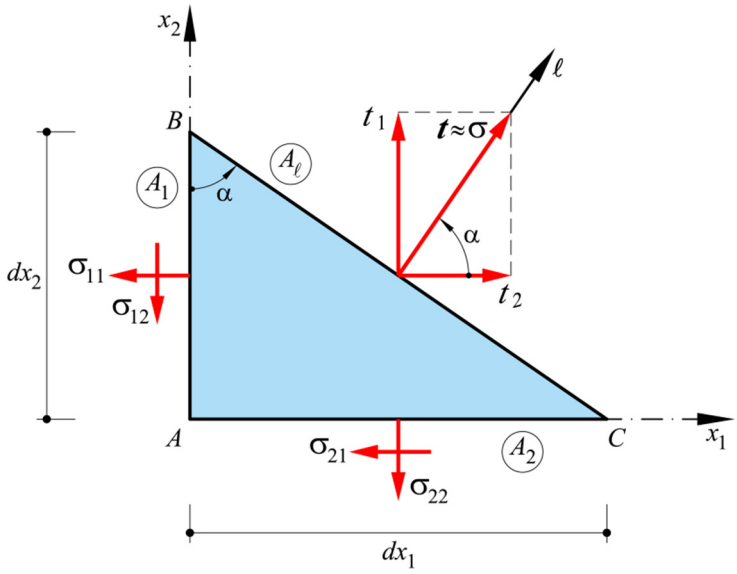


Figura 2.14 – Representación plana del estado tensional de un punto y de la tensión principal en la base (x_1, x_2).

Finalmente, la ecuación (2.57) puede escribirse en términos de los invariantes de tensión:

$$\sigma^2 - \sigma \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = 0 \tag{2.58}$$

donde $\mathrm{I}_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22}$, $\mathrm{I}_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$, $\mathrm{I}_3 = 0$.

La solución de la *ecuación característica* (2.58) para el estado de tensión plano está dada por:

$$\sigma^{I,II} = \frac{\mathrm{I}_1 \pm \sqrt{\mathrm{I}_1^2 - 4\mathrm{I}_2}}{2} \tag{2.59}$$

$$\sigma^{I,II} = \underbrace{\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}}_{\sigma_{\mathrm{med}}} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}}_{R} \tag{2.60}$$

Siendo σ_{med} la tensión media, y R el radio del Círculo de Mohr (ver ecuación (2.39)).

Las dos direcciones principales se obtienen reemplazando las soluciones de la ecuación (2.59) en el sistema de ecuaciones (2.53), así para σ^I se obtiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma^I & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1^I \\ \ell_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\ell}^I = \begin{Bmatrix} \ell_1^I \\ \ell_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\widehat{\boldsymbol{\ell}^I, x_1}) \\ \cos(\widehat{\boldsymbol{\ell}^I, x_2}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha^I \\ \operatorname{sen}\alpha^I \end{Bmatrix} \tag{2.61}$$

$$\begin{cases} \left(\sigma_{11}-\sigma^I\right)\ell_1^I + \sigma_{12}\ell_2^I = 0 \\ \sigma_{21}\ell_1^I + \left(\sigma_{22}-\sigma^I\right)\ell_2^I = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{con} \quad \left(\ell_1^I\right)^2 + \left(\ell_2^I\right)^2 = 1 \tag{2.62}$$

De donde resulta

$$\left(\ell_1^I\right)^2 = \left[-\frac{\left(\sigma_{11}-\sigma^I\right)}{\sigma_{12}}\right]^2 \left(\ell_2^I\right)^2 \quad \text{y} \quad \left[-\frac{\left(\sigma_{11}-\sigma^I\right)}{\sigma_{12}}\right]^2 \left(\ell_2^I\right)^2 + \left(\ell_2^I\right)^2 = 1 \tag{2.63}$$

$$\ell_2^I = \sqrt{\frac{1}{\left[-\frac{\left(\sigma_{11}-\sigma^I\right)}{\sigma_{12}}\right]^2 + 1}} \tag{2.64}$$

Análogo procedimiento se sigue para encontrar los cosenos directores del plano donde se produce σ^{II}, resultando un plano ortogonal a aquel donde actúa σ^I.

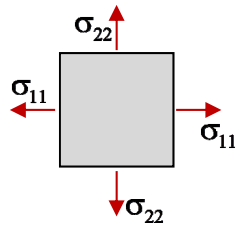
2.3.6 Estado de tensión esférico y desviador

Siendo el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ un tensor simétrico, este puede descomponerse en otros dos tensores simétricos, uno que representa un estado de tensión hidrostático denominado *tensor esférico de tensiones* $\mathbf{p}$, y otro que representa un estado de corte puro denominado *tensor desviador de tensiones* $\boldsymbol{\sigma}_D$, esto es

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\sigma}_D \tag{2.65}$$

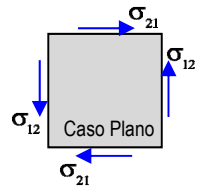
El *tensor esférico* se obtiene a partir de la presión $p = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$, esto es:

$$\mathbf{p} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{I_1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.66}$$



El *tensor desviador* se obtiene por diferencia entre el tensor de tensiones y el tensor esférico,

$$\boldsymbol{\sigma}_D = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.67}$$



Ejemplo 2-1: Para el estado tensional indicado en la figura, obtener:

a) El tensor de tensiones.

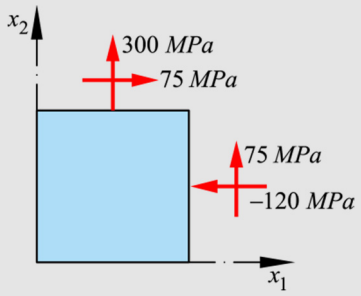
b) Los planos principales y las correspondientes tensiones principales.

i. De forma analítica

ii. Mediante el círculo de Mohr

iii. Verificar si descomponiendo el estado tensional en un plano principal se verifica la condición de plano principal.

c) Calcular la tensión en un plano cuya normal forma un ángulo de 35º con el eje x_1 ($\alpha = 35^o$)



a) Tensor de tensiones

El tensor de tensiones viene dado por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -120 & 75 \\ 75 & 300 \end{bmatrix}$$

Este tensor, no es el tensor de tensiones principales, ya que no se trata de un tensor diagonal, porque las tensiones tangenciales son no nulas en la base (x_1, x_2).

b) Planos principales y sus correspondientes estados tensionales

i. Forma analítica

Para obtener los planos principales y sus correspondientes estados tensionales se resuelve el problema de autovalores dado por la ecuación (2.44), es decir:

$$\det\left[\boldsymbol{\sigma} - \sigma\mathbf{I}\right] = \mathbf{0}$$

Las tensiones principales son los autovalores del tensor de tensiones, que se obtienen resolviendo la ecuación o polinomio característico dado por la ecuación (2.47). Los autovalores obtenidos serán las tensiones principales:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -120 - \sigma & 75 \\ 75 & 300 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^2 - \sigma I_1 + I_2 = \sigma^2 - 180\sigma - 41625 = 0$$

$$\sigma^{I} = 312.99\,MPa; \quad \sigma^{II} = -132.99\,MPa$$

En el caso de tensiones planas, también es posible calcular los autovalores, es decir las tensiones principales, aplicando directamente la ecuación (2.60). O sea,

$$\sigma^{I,II} = \frac{(-120+300)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-120-300}{2}\right)^2 + 75^2} \quad \begin{cases} \sigma^I = 312.99\, MPa \\ \sigma^{II} = -132.99\, MPa \end{cases}$$

Primer autovector: Para calcular las direcciones principales, se resuelve el problema de autovectores dado por la ecuación(2.51). Para el primer autovalor, se tiene

$$\left[\boldsymbol{\sigma} - \sigma^I \mathbf{I}\right] \boldsymbol{\ell}^I = \mathbf{0}$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} -120-312.99 & 75 \\ 75 & 300-312.99 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1^I \\ \ell_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -432.99 & 75 \\ 75 & -12.99 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1^I \\ \ell_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lo que conduce al siguiente sistema de ecuaciones linealmente dependiente

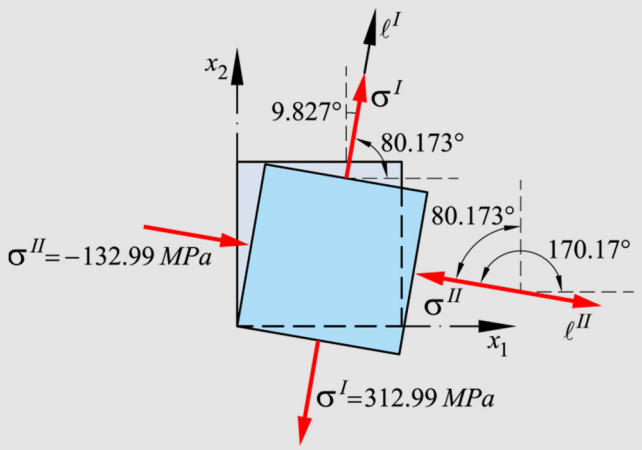
$$\begin{cases} -432.99\ell_1^I + 75\ell_2^I = 0 \\ \\ 75\ell_1^I - 12.99\ell_2^I = 0 \end{cases} \rightarrow \ell_1^I = \frac{12.99}{75}\ell_2^I$$

Sustituyendo en la condición auxiliar $\left(\ell_1^I\right)^2 + \left(\ell_2^I\right)^2 = 1$ se obtienen los cosenos directores (autovectores de la matriz de tensiones) de la normal al plano donde actúa la tensión principal σ^I,

$$\boldsymbol{\ell}^I = \begin{Bmatrix} \ell_1^I \\ \ell_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\widehat{\boldsymbol{\ell}^I, x_1}) \\ \cos(\widehat{\boldsymbol{\ell}^I, x_2}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.17067 \\ 0.98533 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(80.173^o) \\ \cos(9.827^o) \end{Bmatrix}$$

Segundo autovector: Procediendo de manera análoga se obtienen los cosenos directores que definen el plano donde actúa la tensión principal σ^{II},

$$\boldsymbol{\ell}^{II} = \begin{Bmatrix} \ell_1^{II} \\ \ell_2^{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\widehat{\boldsymbol{\ell}^{II}, x_1}) \\ \cos(\widehat{\boldsymbol{\ell}^{II}, x_2}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.98533 \\ 0.17067 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(170.17^o) \\ \cos(80.173^o) \end{Bmatrix}$$



ii. Mediante el círculo de Mohr

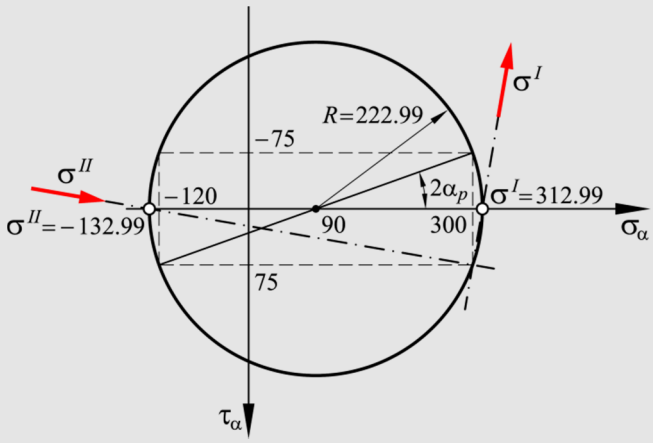
Para trazar el círculo de Mohr se obtienen en primer lugar el radio y la abscisa del centro (ec. (2.38)),

$$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2+\sigma_{12}^2}=\sqrt{\frac{(-120-300)^2}{4}+75^2}=222.99\,MPa$$

$$\sigma_{\text{med}}=\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}=\frac{-120+300}{2}=90\,MPa$$

Con $R=222.99MPa$ y las coordenadas del centro $C=(90,0)$ se traza el círculo de Mohr. Los puntos de corte del círculo con el eje σ_α (es decir para $\tau_\alpha=0$) corresponden a los puntos cuyas abscisas son las tensiones principales σ^I y σ^{II}.

$$\begin{cases}\sigma^I=\sigma_{\text{med}}+R=90+222.99=312.99\,MPa\\ \sigma^{II}=\sigma_{\text{med}}-R=90-222.99=-132.99\,MPa\end{cases}$$



Para obtener el ángulo de las direcciones principales se aplica la ecuación (2.29) y se obtiene el ángulo entre la tensión ortogonal mayor y la tensión principal mayor,

$$\text{tg}\, 2\alpha_p = \frac{2\sigma_{12}}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})} = \frac{2\cdot 75}{(-120-300)} = -0.357143\ rad \rightarrow \alpha_p = -9.827^{\text{o}}$$

iii. Verificación de la condición de plano principal

La condición de plano principal implica que sobre el plano principal definido por el ángulo α_p, obtenido en el inciso ii, la tensión normal es extrema (máxima o mínima) y la tensión tangencial es nula. Para ello, se emplean las expresiones (2.27), que proporcionan las mencionadas tensiones en ese plano, reemplazando se tiene:

$$\sigma_\alpha = \left(\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)\cos 2\alpha + \sigma_{12}\,\text{sen}\, 2\alpha$$

$$\sigma_{-9.827^{\text{o}}} = \left(\frac{-120+300}{2}\right) + \left(\frac{-120-300}{2}\right)\cos\left(-2\cdot 9.827^{\text{o}}\right) + 75\cdot\text{sen}\left(-2\cdot 9.827^{\text{o}}\right)$$

$$\sigma^{II} = -132.99 MPa$$

La otra tensión principal se produce en $\alpha_p \pm 90^{\text{o}}$, es decir 80.173^{o}

$$\sigma_{\alpha_p+90} = \left(\frac{-120+300}{2}\right) + \left(\frac{-120-300}{2}\right)\cos\left(-2\cdot 80.173^{\circ}\right) + 75\cdot \text{sen}\left(-2\cdot 80.173^{\circ}\right)$$

$$\sigma^{I} = 312.99 MPa$$

Ahora se obtiene la tensión tangencial en los planos definidos por α_p y $\alpha_p \pm 90^{\circ}$, empleando la segunda de las ecuaciones (2.27), para verificar que ésta es nula y que se trata efectivamente de planos principales.

$$\tau_{\alpha} = -\frac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})}{2}\,\text{sen}\,2\alpha + \sigma_{12}\cos 2\alpha$$

$$\tau_{-9.827^{\circ}} = \left(\frac{120-300}{2}\right)\text{sen}\left(-2\cdot 9.827^{\circ}\right) + 75\cdot\cos\left(-2\cdot 9.827^{\circ}\right)$$

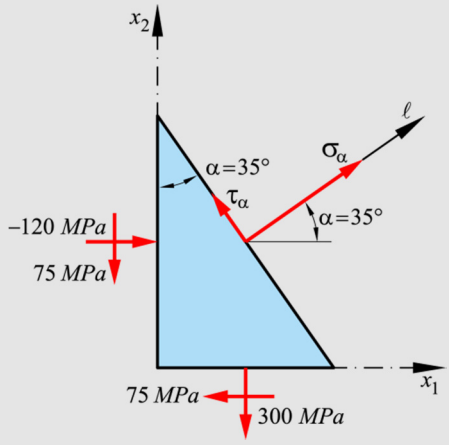
$$\tau_{-9.827^{\circ}} = 0$$

$$\tau_{80.173^{\circ}} = \left(\frac{120-300}{2}\right)\text{sen}\left(-2\cdot 80.173^{\circ}\right) + 75\cdot\cos\left(-2\cdot 80.173^{\circ}\right)$$

$$\tau_{80.173^{\circ}} = 0$$

Se verifica así que las tensiones tangenciales son nulas sobre los planos principales.

c) Tensión en un plano a 35º



Para calcular la tensión normal y la tensión tangencial, en un plano cuya normal forma un ángulo de 35º con el eje x_1, se emplean las ecuaciones (2.27),

$$\sigma_{35^o} = \left(\frac{-120+300}{2}\right) + \left(\frac{-120-300}{2}\right)\cos\left(2\cdot 35^o\right) + 75\cdot \text{sen}\left(2\cdot 35^o\right)$$

$$\sigma_{35^o} = 88.653 MPa$$

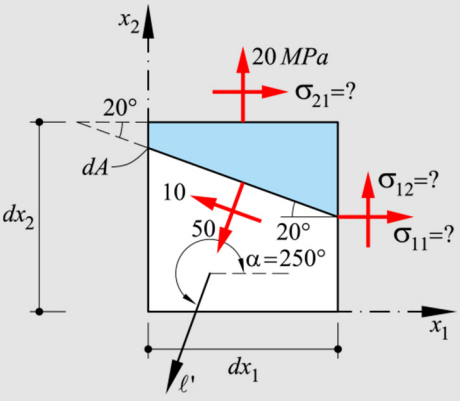
$$\tau_{35^o} = -\left(\frac{-120-300}{2}\right)\text{sen}\left(2\cdot 35^o\right) + 75\cdot \cos\left(2\cdot 35^o\right)$$

$$\tau_{35^o} = 222.987 MPa$$

Ejemplo 2-2: Dado el estado tensional plano de la figura, hallar los valores de σ_{11} y σ_{12}:

a) A partir de las ecuaciones de equilibrio.

b) Considerando el estado tensional en un plano cualquiera.



$\alpha = 360^o - (90^o + 20^o) = 250^o$, es el ángulo que forma el eje x_1 con ℓ'.

a) A partir de las ecuaciones de equilibrio

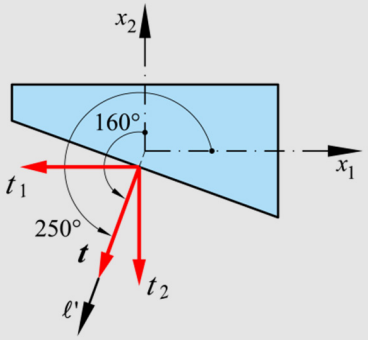
La sumatoria de fuerzas en las direcciones horizontal y vertical (x_1 y x_2) lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum F_{x_1} = \sigma_{11}\left(dA\,\text{sen}\,20^o\right) + \sigma_{21}\left(dA\cos 20^o\right) - \left(10dA\right)\cos 20^o - \left(50dA\right)\text{sen}\,20^o = 0 \\ \sum F_{x_2} = \sigma_{12}\left(dA\,\text{sen}\,20^o\right) + 20\left(dA\cos 20^o\right) + \left(10dA\right)\text{sen}\,20^o - \left(50dA\right)\cos 20^o = 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_{21} = \sigma_{12}$, la solución del sistema de ecuaciones anterior permite obtener:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -121.51\ MPa \\ \sigma_{12} = 72.42\ MPa \end{cases}$$

b) Considerando el estado tensional en un plano cualquiera (ecs. (2.15) y (2.20))



$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ell'_1 \\ \ell'_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos\widehat{(\ell', x_1)} \\ \cos\widehat{(\ell', x_2)} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos 250^o \\ \cos 160^o \end{Bmatrix}$$

Por otra parte, es

$$\begin{cases} t_1 = -10 \cdot \cos 20^o - 50 \cdot \text{sen}\, 20^o = \text{-}26.498 \\ t_2 = 10 \cdot \text{sen}\, 20^o - 50 \cdot \cos 20^o = \text{-}43.564 \end{cases}$$

Reemplazando, se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \text{-}26.498 \\ \text{-}43.564 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos 250^o \\ \cos 160^o \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{-}26.498 = \sigma_{11} \cdot \cos 250^o + \sigma_{12} \cdot \cos 160^o \\ \text{-}43.564 = \sigma_{12} \cdot \cos 250^o + 20 \cdot \cos 160^o \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{11} = -121.51 MPa \\ \sigma_{12} = 72.42 MPa \end{cases}$$

Se puede comprobar que el resultado es idéntico si se utilizan las ecuaciones de transformación de esfuerzo plano, ecuaciones. (2.24), (2.27),

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \dfrac{(\sigma_{11}+\sigma_{22})}{2} + \dfrac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})}{2}\cos 2\alpha + \sigma_{12}\,\text{sen}\,2\alpha \\ \tau_\alpha = -\dfrac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})}{2}\,\text{sen}\,2\alpha + \sigma_{12}\cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50 = \dfrac{(\sigma_{11}+20)}{2} + \dfrac{(\sigma_{11}-20)}{2}\cos\left(2\cdot 250^o\right) + \sigma_{12}\,\text{sen}\,\left(2\cdot 250^o\right) \\ -10 = -\dfrac{(\sigma_{11}-20)}{2}\,\text{sen}\,\left(2\cdot 250^o\right) + \sigma_{12}\cos\left(2\cdot 250^o\right) \end{cases}$$

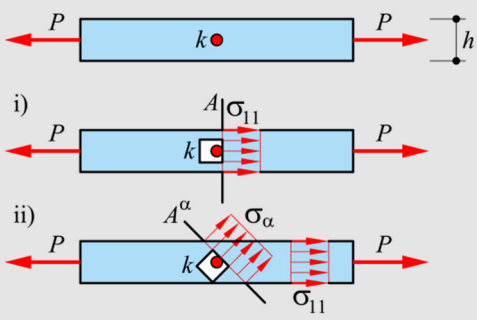
$$\rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{11} = -121.51 MPa \\ \sigma_{12} = 72.42 MPa \end{cases}$$

Resultando los mismos valores que en los casos anteriores.

Ejemplo 2-3: La barra de la figura tiene una sección transversal rectangular de dimensiones $b \times h$, se encuentra en equilibrio bajo la acción de cargas axiales P aplicadas en sus extremos. Probar que hay equilibrio en cada punto de la barra y que el estado de tensión en dicho punto depende de la orientación del plano en cuestión:

a) En forma directa (emplear el círculo de Mohr, o la ec. (2.24)).

b) Considerando la rotación de un plano cualquiera.

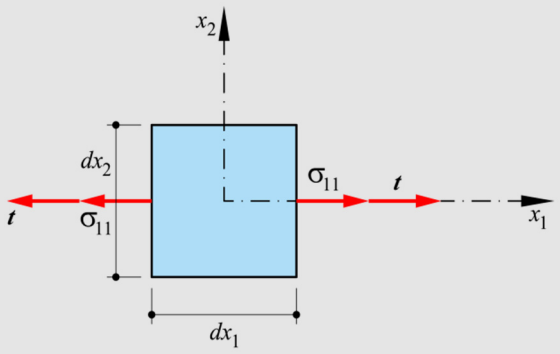


a) En forma directa

Se consideran dos casos, indicados en la figura como i) y ii). En el caso i) se toma la sección A correspondiente a un plano ortogonal al eje de la barra (sección transversal). En el caso ii) se considera una sección A^α, cuya normal forma un ángulo $\alpha = 45^o$ con el mencionado eje. Se realizará un análisis separado para cada caso y luego se examinarán los resultados.

Caso i), **plano normal a la carga**

El estado tensional en el punto k, considerando la sección transversal A se representa a continuación



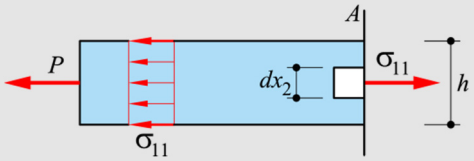
El vector tensión está dado por:

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 = \sigma_{11} \\ t_2 = \sigma_{12} = 0 \end{Bmatrix}$$

y el equilibrio en el punto se plantea a través del equilibrio de fuerzas en la dirección x_1:

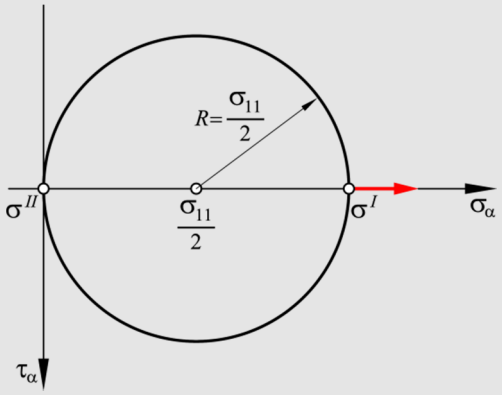
$$-\sigma_{11}\left(dx_2 \cdot b\right) + \sigma_{11}\left(dx_2 \cdot b\right) = 0$$

Si ahora se toma el equilibrio de la parte izquierda de la barra que se muestra en la siguiente figura, se obtiene



$$P = \int_A \|\mathbf{t}\| dA = \int_h \sigma_{11} b dx_2 = \sigma_{11} bh$$

Para representar el **Caso i)** en el círculo de Mohr, se calcula el radio y la abscisa del centro:



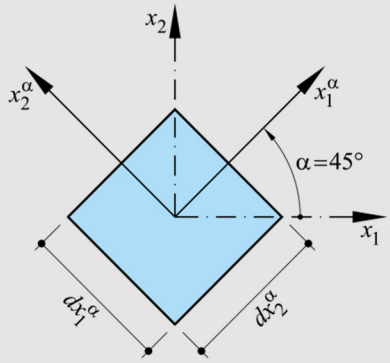
$$\sigma_{\text{med}} = \sigma_{11}/2; \quad R = \sqrt{\left(\sigma_{11}/2\right)^2}$$

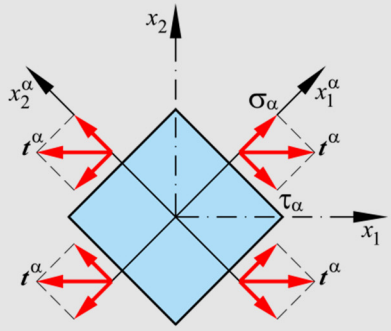
$$C = \left(\sigma_{11}/2; 0\right); \quad R = \sigma_{11}/2$$

$$\begin{cases} \sigma^I = \sigma_{\text{med}} + R = \sigma_{11} \\ \sigma^{II} = \sigma_{\text{med}} - R = 0 \end{cases}$$

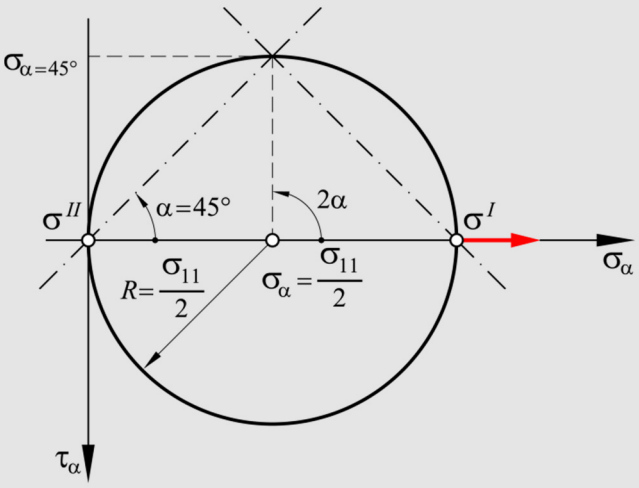
Caso ii), **estado de tensión en un plano** $\alpha = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$

El estado tensional en el punto k, considerando la sección A^{α} se representa a continuación





Si se representa el círculo de Mohr a partir de este estado tensional se obtiene



$$\sigma_{\text{med}} = \left(\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha}\right)/2$$

$$C = \left(\sigma_{11}/2; 0\right); \quad R = \sigma_{11}/2$$

$$\begin{cases} \sigma^{I} = \sigma_{\text{med}} + R = \sigma_{11} \\ \sigma^{II} = \sigma_{\text{med}} - R = 0 \end{cases}$$

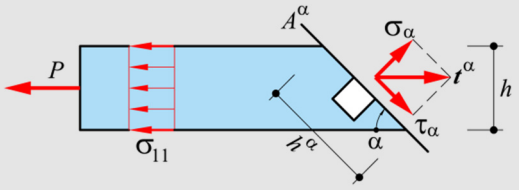
El vector tensión tiene las siguientes componentes:

$$\mathbf{t}^{\alpha} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha} \\ \tau_{\alpha} \end{Bmatrix}, \text{ siendo su módulo } \left|\mathbf{t}^{\alpha}\right| = \sqrt{\left(\sigma_{\alpha}\right)^2 + \left(\tau_{\alpha}\right)^2}, \text{ pero } \sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_{11}}{2} = \tau_{\alpha}$$

Entonces el módulo resulta

$$\left|\mathbf{t}^{\alpha}\right| = \sqrt{(\sigma_{\alpha})^2 + (\sigma_{\alpha})^2} = \sqrt{2(\sigma_{\alpha})^2} = \sqrt{2\left(\frac{\sigma_{11}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}\,\frac{\sigma_{11}}{2}$$

Si ahora se toma el equilibrio de la parte izquierda de la barra, como se muestra en la siguiente figura, se obtiene



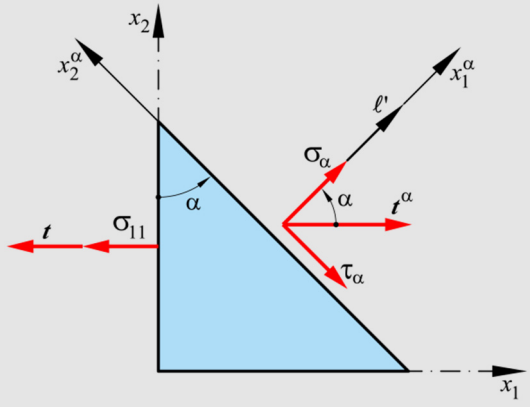
$$P = \int_{A'} \left|\mathbf{t}^{\alpha}\right| dA^{\alpha} = \int_{h'} \left|\mathbf{t}^{\alpha}\right| b\, dx_2^{\alpha} = \left|\mathbf{t}^{\alpha}\right| b h^{\alpha}$$

Se sabe que $\left|\mathbf{t}^{\alpha}\right| = \sqrt{2}\,\frac{\sigma_{11}}{2}$ y que $h^{\alpha} = \frac{h}{\cos 45^{\circ}} = \frac{2h}{\sqrt{2}}$, por lo que resulta

$$P = \left|\mathbf{t}^{\alpha}\right| b h^{\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sigma_{11}}{2}\, b\, \frac{2h}{\sqrt{2}} = \sigma_{11} b\, h$$, que coincide con el **Caso i**)

b) Considerando la rotación de un plano cualquiera (ecuación (2.24))

La representación de un estado tensional sobre un plano prefijado se muestra en la siguiente figura (análoga a la Figura 2.8),



$$\begin{Bmatrix} \left|\mathbf{t}^{\alpha}\right| \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha}\cos\alpha + \tau_{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ \sigma_{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha - \tau_{\alpha}\cos\alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ell'_1 \\ \ell'_2 \end{Bmatrix} \quad \text{con:} \quad \begin{cases} \ell'_1 = \cos(\ell', x_1) \\ \ell'_2 = \cos(\ell', x_2) \end{cases}$$

Desarrollando el producto anterior se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \left|\mathbf{t}^{\alpha}\right| = \sigma_{\alpha}\cos\alpha + \tau_{\alpha}\operatorname{sen}\alpha = \sigma_{11}\cos\alpha + \cancelto{=0}{\sigma_{12}}\operatorname{sen}\alpha \\ 0 = \sigma_{\alpha}\operatorname{sen}\alpha - \tau_{\alpha}\cos\alpha = \cancelto{=0}{\sigma_{21}}\cos\alpha + \cancelto{=0}{\sigma_{22}}\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|\mathbf{t}^{\alpha}\right| = \sigma_{\alpha}\cos\alpha + \tau_{\alpha}\operatorname{sen}\alpha = \sigma_{11}\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \left|\mathbf{t}^{\alpha}\right| = \sigma_{11}\cos\alpha \\ 0 = \sigma_{\alpha}\operatorname{sen}\alpha - \tau_{\alpha}\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \sigma_{\alpha} = \tau_{\alpha}\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \end{cases}$$

Si ahora se considera que es $\alpha = 45^{\circ}$ resulta

$$\begin{cases} \left|\mathbf{t}^{\alpha}\right| = \sigma_{11}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sigma_{\alpha} = \tau_{\alpha} \end{cases}$$

O también se puede resolver en forma más simple utilizando la ecuación (2.19),

$$\mathbf{t}^{\alpha} = \begin{Bmatrix} t_1^{\alpha} \\ t_2^{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}\cos\alpha + \cancel{\sigma_{21}}\operatorname{sen}\alpha \\ \cancel{\sigma_{12}}\cos\alpha + \cancel{\sigma_{22}}\operatorname{sen}\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para obtener el estado tensional en un sistema de ejes normal y tangencial al plano α, se utiliza la ecuación (2.24)

$$\mathbf{t}^{\alpha} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha} \\ \tau_{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}\cos^2\alpha + \cancel{\sigma_{22}}\operatorname{sen}^2\alpha + 2\cancel{\sigma_{12}}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ -\dfrac{\left(\sigma_{11} - \cancel{\sigma_{22}}\right)}{2}\operatorname{sen}2\alpha + \cancel{\sigma_{12}}\cos 2\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\sigma_{11}}{2} \\ \dfrac{\sigma_{11}}{2} \end{Bmatrix}$$

Este estado de tensión en el que el vector de tensión completa permanece siempre paralelo a una misma dirección (x_1 en este caso) se denomina *estado simple de tensión*. Además se verifica que sólo una de las tensiones principales es diferente de cero.

2.4 Concepto de deformación

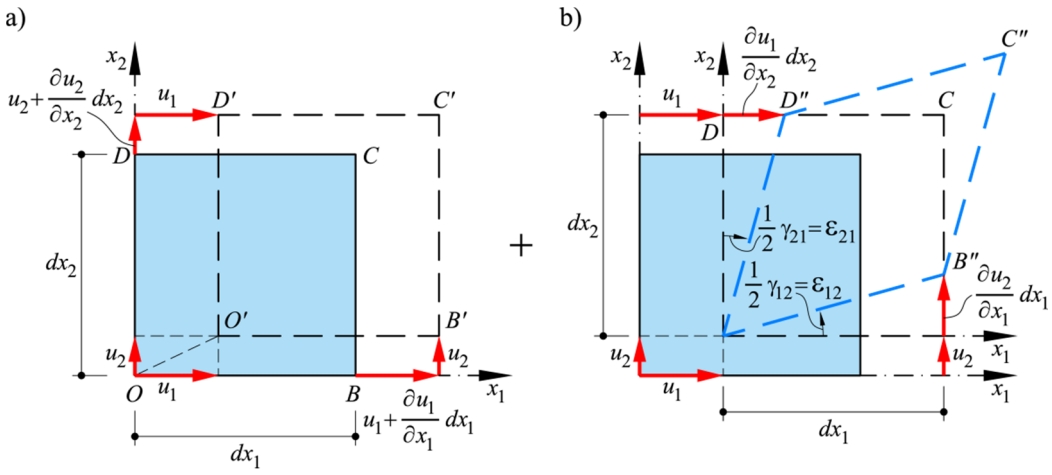
La deformación es una magnitud adimensional que mide el desplazamiento relativo respecto a la dimensión original de la pieza, en tanto el desplazamiento es una medida absoluta del corrimiento que ha sufrido un punto. Existen diversas medidas de la deformación que resultan apropiadas para cada cinemática en particular (pequeñas o grandes deformaciones, etc.). Dados los alcances de este texto, se utiliza la deformación ingenieril que se define respecto del estado indeformado de la pieza. Dicho de otra forma, se compara el desplazamiento sufrido por la pieza con su dimensión antes de deformarse.

La deformación, que es consecuencia de un estado de tensión y éste, a su vez, depende de la carga (ver diagrama de Tonti), se representa mediante un tensor, de manera análoga al concepto de tensión. Por esta razón, en este apartado se definirá su magnitud y, para no extender más el tratamiento de la misma, se dejará al lector que utilice las mismas expresiones que resultan de tratar el tensor de tensiones (deformaciones en distintos planos, deformaciones principales, círculo de Mohr de deformaciones, etc.).

A continuación, se deduce la expresión de la deformación que permite escribir el correspondiente tensor.

2.4.1 Deformación y ecuación de compatibilidad

La Figura 2.15 muestra la deformación que sufre un punto del sólido sometido a un estado tensional. La deformación total puede obtenerse como la composición de una cuota volumétrica (a) a la que se le añade una cuota desviadora que se representa en (b).



a) Estado de cambio de volumen

b) Estado de cambio de forma superpuesto al cambio de volumen

Figura 2.15 – Representación bidimensional (2-D) de la deformación de un punto de un sólido sometido a un estado de tensión.

La *deformación específica* o alargamiento relativo a la longitud original se obtiene a partir de la Figura 2.15a. La deformación específica en la dirección x_1 resulta

$$\varepsilon_{11}=\frac{\left(u_1+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1\right)-u_1}{dx_1}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tag{2.68}$$

De manera análoga en la dirección x_2 , se tiene

$$\varepsilon_{22}=\frac{\left(u_2+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2\right)-u_2}{dx_2}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \tag{2.69}$$

La *distorsión específica* o deformación angular por unidad de longitud se obtiene a partir de la Figura 2.15b.

$$\gamma_{21} = \gamma_{12} = \frac{\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1\right)}{dx_1} + \frac{\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2\right)}{dx_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \tag{2.70}$$

Siendo

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{21}}{2} = \frac{\gamma_{12}}{2} \tag{2.71}$$

Si ahora se deriva ε_{11} dos veces respecto de x_2 y ε_{22} dos veces respecto de x_1, se obtiene respectivamente

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^2 \partial x_1}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} \tag{2.72}$$

La derivada segunda de γ_{12} respecto de x_1 y x_2 conduce a

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \underbrace{\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2}}_{\partial^2 \varepsilon_{11}/\partial x_2^2} + \underbrace{\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}}_{\partial^2 \varepsilon_{22}/\partial x_1^2} \tag{2.73}$$

De donde se obtiene la *ecuación de compatibilidad*

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{2.74}$$

Es decir que se cumple la siguiente identidad

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_1^2} \tag{2.75}$$

En forma más general, en tres dimensiones, se tiene la siguiente expresión para el *tensor de deformaciones*,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{21}/2 & \varepsilon_{22} & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{31}/2 & \gamma_{32}/2 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

La ecuación (2.76) constituye el tensor de deformación en tres dimensiones (3-D) cuyas componentes se obtienen considerando las tres direcciones Cartesianas por analogía con las ecuaciones (2.68) y (2.70). De esta manera, el tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ resulta

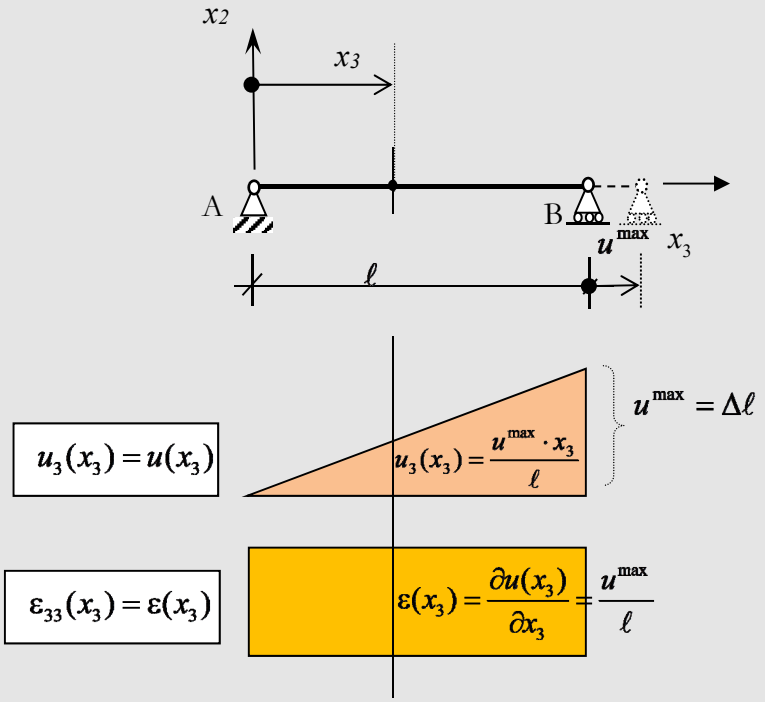
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u} \times \nabla + \left(\mathbf{u} \times \nabla\right)^T\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

siendo

$$\mathbf{u} \times \nabla = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \tag{2.78}$$

Ejemplo 2-4: Obtener la deformación longitudinal de la barra de la figura sometida a un desplazamiento $u^{\max}$ en su extremo.



Se define la función desplazamiento $u(x_3)$ teniendo en cuenta que ésta es lineal y vale cero en el extremo fijo A $\rightarrow u(0)=0$, y es máxima en el apoyo móvil B $\rightarrow u(\ell)=u^{\max}$,

$$\frac{u^{\max}}{\ell}=\frac{u(x_3)}{x_3} \quad \Rightarrow u(x_3)=\frac{u^{\max}}{\ell}x_3$$

Luego, a partir de la ecuación (2.68) se obtiene la deformación longitudinal $\varepsilon(x_3)$ provocada por el desplazamiento $u^{\max}$ impuesto en el extremo B,

$$\varepsilon(x_3)=\frac{\partial u(x_3)}{\partial x_3}=\frac{u^{\max}}{\ell}=cte$$

2.4.2 Estado de deformación esférico y desviador

Siendo el tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ un tensor simétrico, este puede descomponerse en otros dos tensores simétricos, de igual manera que el tensor de tensiones, uno de ellos que representa un estado de deformación volumétrico, denominado *tensor esférico de deformaciones* $\boldsymbol{\varepsilon}_V$, y otro que representa un estado de distorsión pura, denominado *tensor desviador de deformaciones* $\boldsymbol{\varepsilon}_D$, esto es:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_V + \boldsymbol{\varepsilon}_D \tag{2.79}$$

El *tensor esférico de deformaciones* $\boldsymbol{\varepsilon}_V$ está relacionado con el tensor esférico de tensiones $\mathbf{p}$, y representa el cambio de volumen elemental $\varepsilon_V = \dfrac{\Delta V}{V} = 3\mathrm{I}_1' = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, esto es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_V = \underbrace{\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)}_{\varepsilon_V} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3\mathrm{I}_1' \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

donde I_1' es el primer invariante del tensor de deformaciones.

El *tensor desviador de deformaciones* $\boldsymbol{\varepsilon}_D$ resulta de la diferencia entre el tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ y el tensor esférico $\boldsymbol{\varepsilon}_V$,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_D = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_V = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

2.4.3 Medición de la deformación en laboratorio

Se denomina *roseta de deformación* a un dispositivo compuesto por tres galgas extensométricas (sensores) orientadas en tres direcciones distintas (ver Figura 2.16), cuyo objetivo es obtener las componentes del tensor de deformaciones. Debido a

que se trata de una deformación en el plano del cuerpo, es necesario emplear la transformación de la deformación correspondiente a un tensor plano (análogo de deformaciones a los que se presenta en las ecuaciones (2.24) y (2.27) para tensiones). Un caso particular es medir la deformación extensional en tres direcciones distintas, y a partir de allí, inferir el tensor de deformaciones correspondiente.

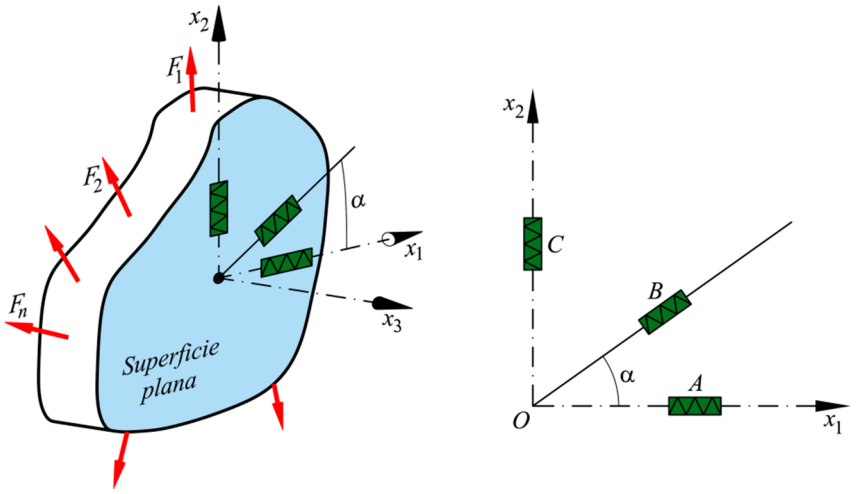


Figura 2.16 – Roseta de deformación adherida sobre un plano de la pieza a analizar.

Debido a que los sensores A y C están orientados según los ejes x_1 y x_2, respectivamente, pueden proporcionar de manera directa las deformaciones $\varepsilon_A = \varepsilon_{11}$ y $\varepsilon_C = \varepsilon_{22}$. Para obtener la deformación angular correspondiente γ_{12} es necesario utilizar las ecuaciones de transformación de la deformación en una dirección cualquiera, así se tiene

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha = \left(\dfrac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2}\right) + \left(\dfrac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\right)\cos 2\alpha + \dfrac{\gamma_{12}}{2}\operatorname{sen} 2\alpha \\ \gamma_\alpha = -\left(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}\right)\operatorname{sen} 2\alpha + \gamma_{12}\cos 2\alpha \end{cases} \tag{2.82}$$

Si se reemplazan las deformaciones específicas obtenidas en el laboratorio en la primera de las ecuaciones (2.82), se tiene

$$\varepsilon_B = \left(\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} \right) + \left(\frac{\varepsilon_A - \varepsilon_C}{2} \right) \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{12}}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \tag{2.83}$$

De la ecuación (2.83) se puede obtener la distorsión como sigue

$$\rightarrow \quad \gamma_{12} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha} \left(\varepsilon_B - \left(\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} \right) - \left(\frac{\varepsilon_A - \varepsilon_C}{2} \right) \cos 2\alpha \right) \tag{2.84}$$

La ecuación (2.84) proporciona la *deformación angular específica* γ_{12} y, de esta forma, se compone el tensor de deformación a partir de las medidas de las galgas extensométricas obtenidas en laboratorio,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12}/2 \\ \gamma_{12}/2 & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \varepsilon_A & \dfrac{1}{\operatorname{sen} 2\alpha} \left(\varepsilon_B - \left(\dfrac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} \right) - \left(\dfrac{\varepsilon_A - \varepsilon_C}{2} \right) \cos 2\alpha \right) \\ \text{sim} & \varepsilon_C \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

Ejemplo 2-5: Sabiendo que el campo de desplazamientos es lineal y que los puntos $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ y $\boxed{C}$ tienen coordenadas $\left(x_1^A, x_2^A\right)$, $\left(x_1^B, x_2^B\right)$ y $\left(x_1^C, x_2^C\right)$ respectivamente, y sabiendo que cada uno de estos puntos se desplaza $\left(u_1^A, u_2^A\right)$, $\left(u_1^B, u_2^B\right)$ y $\left(u_1^C, u_2^C\right)$, obtener:

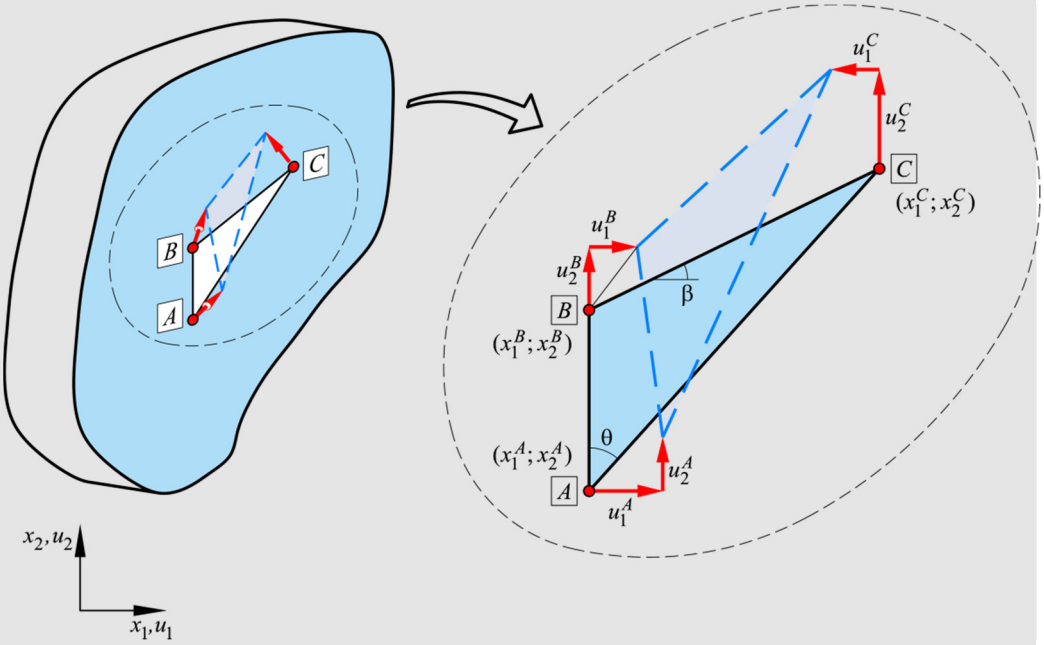
a) El campo de deformaciones.

b) Particularizar el campo de deformaciones al caso donde sea $u_1^A = u_2^A = u_1^B = 0$; $u_1^C = 2u_2^C = \dfrac{u_2^B}{2} = 1cm$, teniendo en cuenta que el lado AB mide $2m$, $\theta = 30^o$ y $\beta = 45^o$.

a) Campo de deformaciones

El campo de desplazamientos queda descripto a través de funciones lineales, que resulta de una cinemática que compone –en su forma más general- una traslación más una rotación respecto de un sistema de referencia:

$$\begin{cases} u_1\left(x_1,x_2\right) = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 \\ u_2\left(x_1,x_2\right) = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 \end{cases}$$



Conocidos los desplazamiento de los puntos A, B, C y reemplazando en la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{cases} u_1^A\left(x_1^A,x_2^A\right) = a_1x_1^A + b_1x_2^A + c_1 \\ u_1^B\left(x_1^B,x_2^B\right) = a_1x_1^B + b_1x_2^B + c_1 \\ u_1^C\left(x_1^C,x_2^C\right) = a_1x_1^C + b_1x_2^C + c_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2^A\left(x_1^A,x_2^A\right) = a_2x_1^A + b_2x_2^A + c_2 \\ u_2^B\left(x_1^B,x_2^B\right) = a_2x_1^B + b_2x_2^B + c_2 \\ u_2^C\left(x_1^C,x_2^C\right) = a_2x_1^C + b_2x_2^C + c_2 \end{cases}$$

Se obtiene un sistema de seis (6) ecuaciones con seis (6) incógnitas cuya solución permite encontrar los valores de los coeficientes de las ecuaciones lineales,

$$a_1 = \frac{u_1^A\left(x_2^B - x_2^C\right) + u_1^B\left(x_2^C - x_2^A\right) + u_1^C\left(x_2^A - x_2^B\right)}{\Delta};$$

$$a_2 = \frac{u_2^A\left(x_2^B - x_2^C\right) + u_2^B\left(x_2^C - x_2^A\right) + u_2^C\left(x_2^A - x_2^B\right)}{\Delta};$$

$$b_1 = -\frac{u_1^A\left(x_1^B - x_1^C\right) + u_1^B\left(x_1^C - x_1^A\right) + u_1^C\left(x_1^A - x_1^B\right)}{\Delta};$$

$$b_2 = -\frac{u_2^A\left(x_1^B - x_1^C\right) + u_2^B\left(x_1^C - x_1^A\right) + u_2^C\left(x_1^A - x_1^B\right)}{\Delta};$$

$$c_1 = \frac{u_1^A\left(x_1^B x_2^C - x_1^C x_2^B\right) + u_1^B\left(x_2^A x_1^C - x_1^A x_2^C\right) + u_1^C\left(x_1^A x_2^B - x_1^B x_2^A\right)}{\Delta};$$

$$c_2 = \frac{u_2^A\left(x_1^B x_2^C - x_1^C x_2^B\right) + u_2^B\left(x_2^A x_1^C - x_1^A x_2^C\right) + u_2^C\left(x_1^A x_2^B - x_1^B x_2^A\right)}{\Delta}$$

donde $\Delta = x_1^A\left(x_2^B - x_2^C\right) + x_1^B\left(x_2^C - x_2^A\right) + x_1^C\left(x_2^A - x_2^B\right)$

Entonces, las funciones de desplazamiento en las direcciones coordenadas x_1 y x_2 se obtienen reemplazando los valores encontrados para a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2.

Finalmente, pueden calcularse las componentes del campo de deformación

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = a_1 \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = b_2 \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{\gamma_{12}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(b_1 + a_2\right) \end{cases}$$

b) Particularización del campo de deformaciones

En función de los datos de este ejemplo, las coordenadas le los puntos A, B, C (en $[m]$) resultan

$$\boxed{A} \rightarrow \left(x_1^A; x_2^A\right) = (0;0)$$

$$\boxed{B} \rightarrow \left(x_1^B; x_2^B\right) = (0;2)$$

$$\boxed{C} \rightarrow \left(x_1^C; x_2^C\right) = \left(2\left(\frac{\text{sen}^2 30^\text{o}}{\text{tg}\,15^\text{o}} + \text{sen}\,30^\text{o}\cos 30^\text{o}\right); 2\left(\frac{\text{sen}\,30^\text{o}\cos 30^\text{o}}{\text{tg}\,15^\text{o}} + \cos^2 30^\text{o}\right)\right)$$

$$\boxed{C} \rightarrow \left(x_1^C; x_2^C\right) = (2.732; 4.732)$$

Con estas coordenadas y los desplazamientos se determinan los coeficientes de las ecuaciones lineales que definen las dos componentes del campo de desplazamientos $u_1^A = u_2^A = u_1^B = 0$

$$u_1^C = 2u_2^C = \frac{u_2^B}{2} = 0.01\,m$$

Y se obtienen los seis coeficientes de las ecuaciones lineales

$$a_1 = 0.00366;\ a_2 = -0.01549;\ b_1 = 0;\ b_2 = 0.01;\ c_1 = 0;\ c_2 = 0;$$

Las componentes del campo de deformación resultan

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = 0.00366 \\ \varepsilon_{22} = 0.01 \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(0 - 0.01549) = -0.007745 \end{cases}$$

2.5 Ecuación constitutiva – Ley de Hooke

2.5.1 Introducción

Una *ecuación constitutiva* vincula el estado de tensión con el estado de deformación de un punto, es decir, vincula los dos campos previamente definidos (ver diagrama de Tonti), permitiendo reproducir el comportamiento mecánico de un punto del sólido. La ecuación o ley constitutiva más simple y elemental es la conocida como *Ley de Hooke*. Ésta establece una relación lineal y elástica entre los campos de deformación y tensión. Hooke[3] enunciaba en 1678 su ley en fuerzas y desplazamientos, diciendo "Según sea la fuerza, así será la deformación", es decir

$$F \approx u \tag{2.86}$$

La relación dada por la ecuación (2.86) se transformaba en igualdad si se introducía el concepto de rigidez (K), esto es

$$F = K \cdot u \tag{2.87}$$

La expresión dada por la ecuación (2.87) constituye la forma inobjetiva de la ley de Hooke porque depende no sólo de parámetros mecánicos sino también de parámetros geométricos. La forma objetiva, obtenida años más tarde, depende sólo de parámetros mecánicos y, para el caso uniaxial, está dada por

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{2.88}$$

donde σ representa la tensión que produce la deformación ε, relacionadas a través del módulo de elasticidad longitudinal E o módulo de Young.

La relación entre la rigidez K y el módulo elástico E, resulta de establecer la compatibilidad y el equilibrio en las ecuaciones (2.87) y (2.88), que para una barra

[3] Timoshenko, Stephen; Goodier J.N. (1951). McGraw-Hill, ed. *Theory of elasticity*.

de longitud ℓ, sección transversal A y cargada con una fuerza axial F aplicada en su centro mecánico, resulta

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{F}{A} = E\frac{u}{\ell} \quad \rightarrow \quad F = \overbrace{\left(\frac{EA}{\ell}\right)}^{K} u \tag{2.89}$$

donde u es el desplazamiento que ha sufrido la barra en su extremo (incremento de longitud).

En la ecuación (2.89) se observa que la rigidez a esfuerzo axil de una pieza depende del material a través del módulo elástico E, de la geometría de la pieza a través del área de la sección transversal A y de la longitud ℓ. En la Figura 2.17 se puede apreciar la representación en forma *inobjetiva* y en forma *objetiva* de la ley de Hooke para el caso uniaxial.

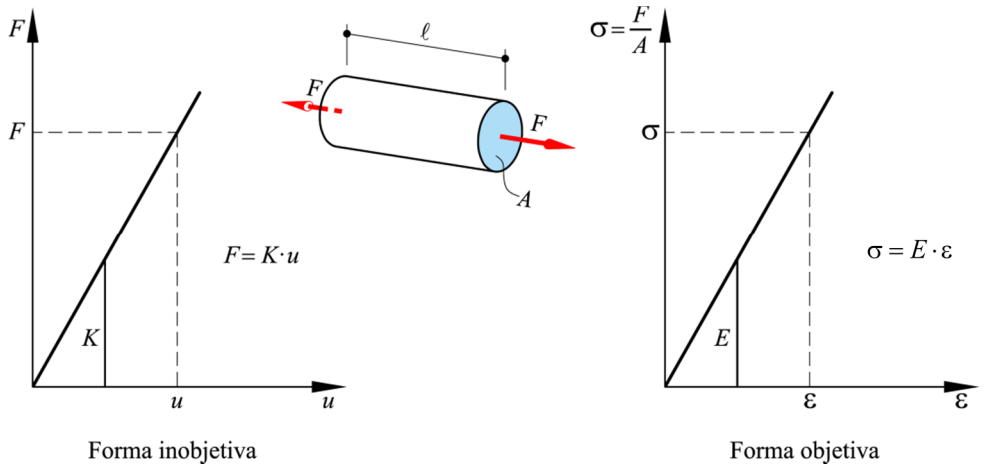


Figura 2.17 – Representación de la Ley de Hooke caso uniaxial (formas inobjetiva y objetiva).

2.5.2 Coeficiente de Poisson y deformación transversal

Al someter una pieza a un estiramiento (o acortamiento) en una dirección, se produce un cambio de dimensión en la dirección transversal (ver Figura 2.18). Este

fenómeno fue estudiado por Siméon D. Poisson en 1828, quien concluyó que existía una relación lineal entre la deformación axial y la transversal.

Dada una barra constituida por un material isótropo y elástico, sometida a una deformación axial ε_{33}, se produce una deformación transversal $\varepsilon_{11} \equiv \varepsilon_{22}$ de signo contrario a ε_{33}, y cuya relación es siempre constante. A esta relación se le denomina coeficiente de Poisson,

$$\nu = \frac{\varepsilon_{11}}{-\varepsilon_{33}} = \frac{\varepsilon_{22}}{-\varepsilon_{33}}$$
$$\text{Dado: } \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} \Rightarrow \varepsilon_{11} \equiv \varepsilon_{22} = -\nu\,\varepsilon_{33} \tag{2.90}$$

Este coeficiente es una propiedad de cada material y está acotado entre $0 \le \nu < 0.5$, siendo 0.5 un límite no alcanzable para los sólidos, ya que corresponde al comportamiento incompresible $\varepsilon_V = \Delta V/V = 0$ propio de un fluido.

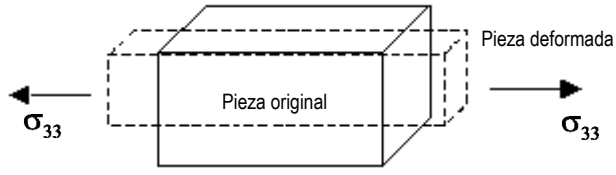


Figura 2.18 – Cambio de dimensión transversal provocado por la acción de una tensión longitudinal.

2.5.3 Ley de Hooke para tensiones tangenciales – Módulo de elasticidad transversal

En forma análoga a la expresión (2.89), que representa la ley de Hooke para un estado de tensión uniaxial, se describe en este apartado la ley de Hooke para un estado de tensión tangencial de corte puro, que ocurre cuando $\sigma_\alpha = 0$. Esto es,

$$\tau = G\gamma \tag{2.91}$$

Siendo τ y γ la tensión tangencial y la deformación angular respectivamente, y G el *módulo de elasticidad transversal o de corte.*

Para obtener la relación entre el módulo de elasticidad axial E y el transversal G, se supone un elemento diferencial de volumen sometido a corte puro (ver Figura 2.19), es decir sometido a un estado tensional de tracción y compresión con el mismo módulo.

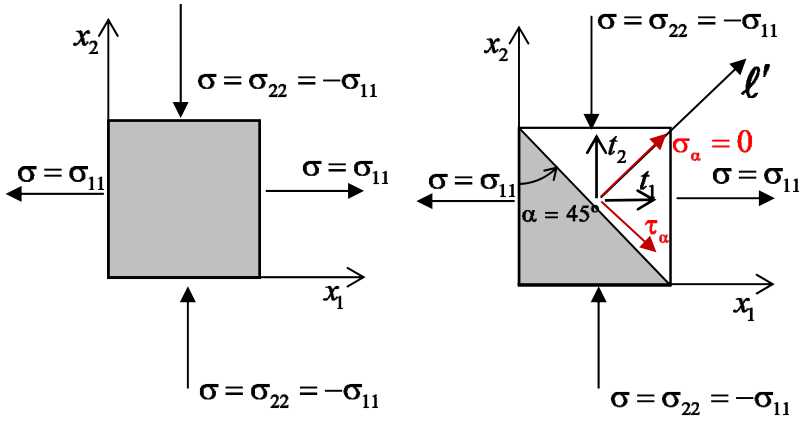


Figura 2.19 – Representación del estado tensional de corte puro.

Haciendo la siguiente sustitución $\sigma = \sigma_{11} = -\sigma_{22}$ y $\sigma_{12} = 0$ en las componentes del tensor de tensiones y fijando el ángulo de la normal saliente en $\alpha = \pi/4$ en la ecuación (2.24) o (2.27), se obtiene el caso de corte puro, es decir un punto que está sometido a un estado de tracción y compresión con el mismo módulo, sobre planos perpendiculares. Esto es,

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_{11}\cos^2\alpha + \sigma_{22}\,\text{sen}^2\alpha + \cancel{\sigma_{12}}\,\text{sen}\,2\alpha = \sigma\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sigma\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 \\ \tau_\alpha = \left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2} - \cancel{\sigma_{12}}\cos 2\alpha = \dfrac{\left(\sigma + \sigma\right)}{2} = \sigma \end{cases} \tag{2.92}$$

Cuando ocurre un estado de corte puro, se produce una distorsión γ en el punto material, sin que haya estiramientos ni acortamientos, sólo cambio de forma. A partir de esta distorsión se obtendrá a continuación el *Módulo Elástico Transversal* o *de Corte* G, que controla la relación que hay entre la tensión tangencial τ y la distorsión γ (ecuación (2.91)).

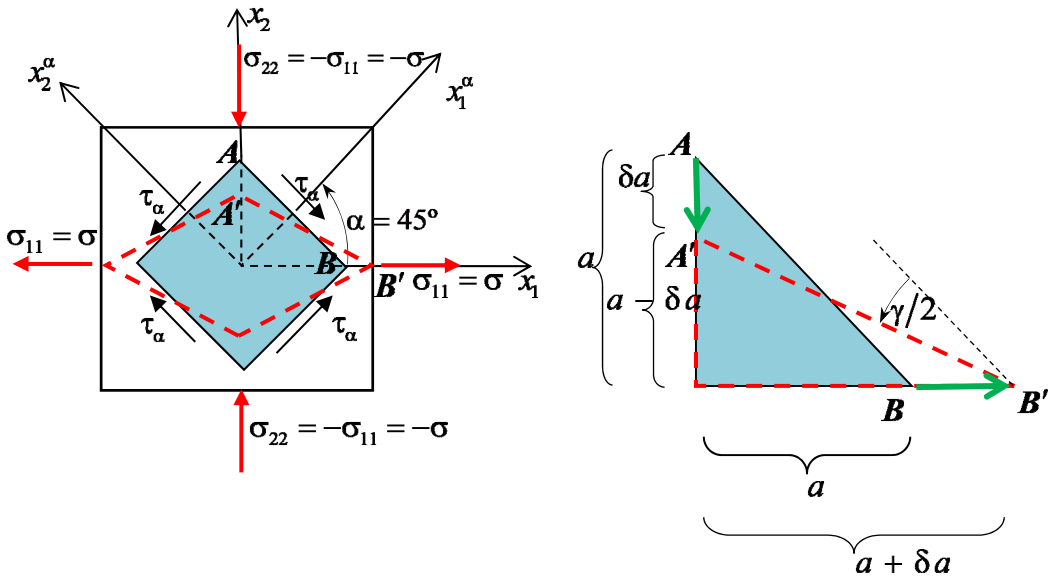


Figura 2.20 – Relación geométrica entre los lados de un elemento diferencial de volumen sometido a un estado de corte puro.

Sabiendo que $\delta a = \varepsilon_{11}\, a = -\varepsilon_{22}\, a$, se puede expresar la siguiente relación geométrica (ver Figura 2.20),

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{a-\delta a}{a+\delta a}=\frac{a+\varepsilon_{22}a}{a+\varepsilon_{11}a}=\frac{1+\varepsilon_{22}}{1+\varepsilon_{11}} \tag{2.93}$$

donde $\gamma_{12}=\gamma$ es la deformación angular específica o distorsión específica.

Teniendo en cuenta que $\sigma_{11}=-\sigma_{22}=\sigma$ y la relación de Poisson expresada en la ecuación (2.90), se pueden escribir las deformaciones en los dos ejes cartesianos originales de la siguiente forma,

$$\begin{cases}\varepsilon_{11}=\dfrac{\sigma_{11}}{E}-\varepsilon_{22}=\dfrac{\sigma_{11}}{E}-\nu\dfrac{\sigma_{22}}{E}=\dfrac{\sigma}{E}(1+\nu)\\ \varepsilon_{22}=\dfrac{\sigma_{22}}{E}-\varepsilon_{11}=\dfrac{\sigma_{22}}{E}-\nu\dfrac{\sigma_{11}}{E}=-\dfrac{\sigma}{E}(1+\nu)\end{cases} \tag{2.94}$$

Sustituyendo la ecuación (2.94) en la ecuación (2.93), y aproximando la tangente de un ángulo por su propio ángulo para valores pequeños del mismo, resulta.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)}{1+\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)}\cong\frac{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}{1+\left(\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{1-\frac{\sigma}{E}(1+\nu)}{1+\frac{\sigma}{E}(1+\nu)} \tag{2.95}$$

De donde se deduce que $\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\sigma}{E}(1+\nu)$, y teniendo en cuenta que en el problema de corte puro $\sigma\equiv\tau_\alpha$ (ver ecuación (2.92)), se puede escribir la siguiente relación,

$$\tau_\alpha=\underbrace{\frac{E}{2(1+\nu)}}_{G}\cdot\gamma\quad\rightarrow\quad\boxed{G=\frac{E}{2(1+\nu)}} \tag{2.96}$$

Siendo *G* el módulo de elasticidad transversal o de corte.

2.5.4 Ley de Hooke generalizada

Sea un punto de un sólido elástico e isótropo, sometido a un estado triaxial de tensiones, es posible obtener, aplicando el principio de superposición, las correspondientes deformaciones, y viceversa, mediante la ley constitutiva denominada *Ley de Hooke Generalizada*.

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\sigma_{11}}{E} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right) \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\sigma_{22}}{E} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{33}\right); \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{\sigma_{33}}{E} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{G} \\ \gamma_{13} = \dfrac{\sigma_{13}}{G} \\ \gamma_{23} = \dfrac{\sigma_{23}}{G} \end{cases} \tag{2.97}$$

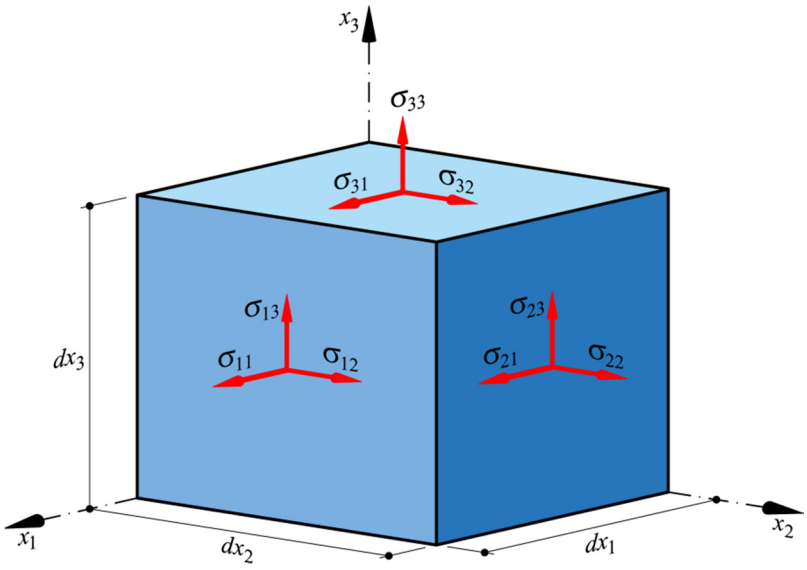


Figura 2.21 – Representación del estado tensional de un punto según tres planos ortogonales.

Las ecuaciones (2.97) se pueden escribir de manera compacta, en forma de matriz cuadrada considerando la simetría de los tensores de tensión y deformación,

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \hline \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1/E & -\nu/E & -\nu/E & & & \\ & 1/E & -\nu/E & & \mathbf{0} & \\ \text{Sim} & & 1/E & & & \\ \hline & & & 1/G & & \\ & \mathbf{0} & & & 1/G & \\ & & & & & 1/G\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \hline \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{array}\right\} \tag{2.98}$$

Que, en forma compacta se representa como,

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{C}^{-1}:\boldsymbol{\sigma} \tag{2.99}$$

donde $\mathbf{C}$ se denomina matriz constitutiva.

O la inversa de la ecuación (2.98),

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \hline \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & & & \\ & \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & & \mathbf{0} & \\ \text{Sim} & & \frac{E}{(1-\nu^2)} & & & \\ \hline & & & G & & \\ & \mathbf{0} & & & G & \\ & & & & & G\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \hline \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{array}\right\} \tag{2.100}$$

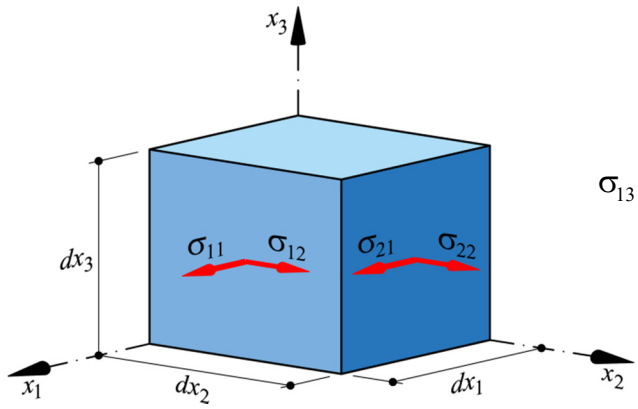
Que, en forma compacta se representa como,

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.101}$$

2.6 Tensión y deformación plana

2.6.1 Problema de tensión plana

El problema de *tensión plana* en un punto k de un sólido en equilibro se define a partir de suponer que el tensor de tensiones verifica la condición que se muestra en la Figura 2.22. Es decir, que el vector de tensión completa para cualquier plano en el punto será siempre perpendicular al eje x_3 (paralelo al plano $x_1 - x_2$).



$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$$

Figura 2.22 – Representación estado de tensión plana.

Entonces, en el caso representado en la Figura 2.22 (tensión plana) el tensor de tensiones en la base cartesiana (x_1, x_2) resulta

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.102}$$

Teniendo en cuenta las simetrías se puede expresar este tensor en la siguiente forma de matriz columna

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.103}$$

Substituyendo en la ley de Hooke generalizada dada por la ecuación (2.98), se obtiene el correspondiente tensor de deformaciones y el tensor constitutivo para el caso particular de tensión plana,

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \hline \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & & & \\ & 1/E & -\nu/E & & \mathbf{0} & \\ \text{Sim} & & 1/E & & & \\ \hline & & & 1/G & & \\ & \mathbf{0} & & & 1/G & \\ & & & & & 1/G \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \sigma_{12} \end{array}\right\} \tag{2.104}$$

O sea, en forma compacta, se tiene

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}; \quad \begin{array}{l} \varepsilon_{33} = -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 \end{array} \tag{2.105}$$

La inversa de la ecuación (2.105) constituye la forma directa de la ecuación constitutiva para tensión plana y está dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{(1-\nu)(1+\nu)} & \dfrac{\nu E}{(1-\nu)(1+\nu)} & 0 \\ \dfrac{\nu E}{(1-\nu)(1+\nu)} & \dfrac{E}{(1-\nu)(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.106}$$

2.6.2 Problema de deformación plana

El problema de *deformación plana* se define a partir de suponer que el tensor de deformaciones verifica la siguiente condición,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0 \tag{2.107}$$

Teniendo en cuenta las simetrías, y reordenando en forma de matriz columna, se tiene

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.108}$$

Substituyendo en la ley de Hooke generalizada, se obtiene el correspondiente tensor de deformaciones y el tensor constitutivo para el caso particular de deformación plana

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \hline \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{array}\right\}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\begin{array}{ccc|cc|c} (1-\nu) & \nu & \nu & & & \\ \nu & (1-\nu) & \nu & & \mathbf{0} & \\ \nu & \nu & (1-\nu) & & & \\ \hline & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & \mathbf{0} & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 0\\ \hline 0\\ 0\\ 2\varepsilon_{12}\end{array}\right\} \quad (2.109)$$

De lo anterior resulta, en forma compacta,

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{array}\right\}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\begin{array}{ccc} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{array}\right\}; \quad (2.110)$$

$$\sigma_{33}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})$$

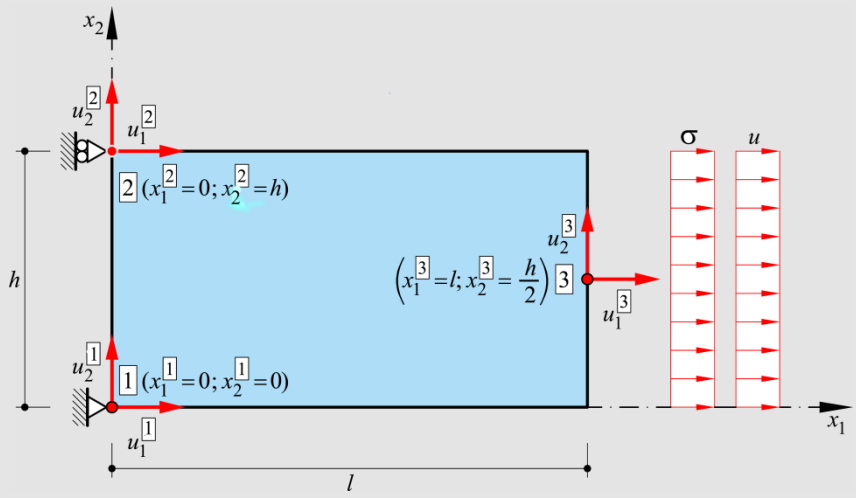
La inversa de la ecuación (2.110) resulta

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{array}\right\}=\frac{(1+\nu)}{E}\left[\begin{array}{ccc} (1-\nu) & -\nu & 0 \\ -\nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{array}\right\} \quad (2.111)$$

Ejemplo 2-6: Dada la lámina cargada de la figura, determinar:

a) La deformación (tensor de deformaciones), conociendo los movimientos (desplazamientos) de tres puntos de la lámina cargada.

b) La deformación a partir del equilibrio, utilizando el tensor constitutivo.



a) Tensor de deformaciones

El campo de desplazamientos en el plano queda descripto a través de funciones lineales (ver Ejemplo 2-3):

$$\begin{cases} u_1\left(x_1,x_2\right)=a_1x_1+b_1x_2+c_1 \\ u_2\left(x_1,x_2\right)=a_2x_1+b_2x_2+c_2 \end{cases}\text{, que en cada punto sería}$$

$$\begin{cases} u_1^{\boxed{1}}\left(x_1,x_2\right)=a_1x_1^{\boxed{1}}+b_1x_2^{\boxed{1}}+c_1 \\ u_1^{\boxed{2}}\left(x_1,x_2\right)=a_1x_1^{\boxed{2}}+b_1x_2^{\boxed{2}}+c_1 \\ u_1^{\boxed{3}}\left(x_1,x_2\right)=a_1x_1^{\boxed{3}}+b_1x_2^{\boxed{3}}+c_1 \end{cases};\quad \begin{cases} u_2^{\boxed{1}}\left(x_1,x_2\right)=a_2x_1^{\boxed{1}}+b_2x_2^{\boxed{1}}+c_2 \\ u_2^{\boxed{2}}\left(x_1,x_2\right)=a_2x_1^{\boxed{2}}+b_2x_2^{\boxed{2}}+c_2 \\ u_2^{\boxed{3}}\left(x_1,x_2\right)=a_2x_1^{\boxed{3}}+b_2x_2^{\boxed{3}}+c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Las condiciones de contorno de los puntos $\boxed{1},\boxed{2},\boxed{3}$ permiten establecer de manera directa cuáles son los desplazamientos nulos. En este caso hay tres desplazamientos nulos que se determinan de manera inmediata $u_1^{\boxed{1}}\left(0,0\right)=0$, $u_2^{\boxed{1}}\left(0,0\right)=0$ y $u_1^{\boxed{2}}\left(0,h\right)=0$; mientras que el desplazamiento del punto $\boxed{3}$ en la dirección x_1 es igual al desplazamiento impuesto, es decir $u_1^{\boxed{3}}\left(l,h/2\right)=u$.

La componente del desplazamiento en la dirección x_2 para el punto $\boxed{2}$ ($u_2^{\boxed{2}}$) se obtiene teniendo en cuenta la contracción por el efecto Poisson,

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{u_2^{\boxed{2}} / h}{u_1^{\boxed{3}} / l} \quad \rightarrow \quad u_2^{\boxed{2}} = -\nu \frac{h}{l} u_1^{\boxed{3}}, \text{ pero } u_1^{\boxed{3}} = u \ \rightarrow u_2^{\boxed{2}}(0,h) = -\nu \frac{h}{l} u$$

Para el punto $\boxed{3}$ la componente de desplazamiento en la dirección x_2 ($u_2^{\boxed{3}}$) se obtiene de manera análoga a la obtenida para el punto $\boxed{2}$,

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{u_2^{\boxed{3}} / (h/2)}{u_1^{\boxed{3}} / l} = -\frac{2u_2^{\boxed{3}} / h}{u / l} \quad \rightarrow \quad u_2^{\boxed{3}}\left(l, \frac{h}{2}\right) = -\nu u \frac{h}{2l}$$

Reemplazando estos desplazamientos en las funciones lineales (1) se obtiene un sistema de seis (6) ecuaciones con seis (6) incógnitas,

$$\begin{cases} 0 = a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \\ 0 = a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot h + c_1 \\ u = a_1 \cdot l + b_1 \cdot \dfrac{h}{2} + c_1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 0 = a_2 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + c_2 \\ -\nu \dfrac{h}{l} u = a_2 \cdot 0 + b_2 \cdot h + c_2 \\ -\nu \dfrac{h}{2l} u = a_2 \cdot l + b_2 \cdot \dfrac{h}{2} + c_2 \end{cases}$$

Cuya solución es,

$$a_1 = \frac{u}{l}, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = -\nu \frac{u}{l}, \quad c_2 = 0$$

Las funciones de desplazamiento en las direcciones coordenadas x_1 , x_2 se obtienen reemplazando los valores encontrados para a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 en (1), es decir:

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2) = \dfrac{u}{l} x_1 \\ u_2(x_1, x_2) = -\nu \dfrac{u}{l} x_2 \end{cases}$$

Finalmente, pueden calcularse las componentes del campo de deformación

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \dfrac{u}{l} = a_1 \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\nu \dfrac{u}{l} = b_2 \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{\gamma_{12}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \dfrac{1}{2}\left(b_1 + a_2 \right) = 0 \end{cases}$$

b) Deformación a partir del equilibrio

Esta forma sería una alternativa a la descrita en el inciso a) obtenida en forma cinemática. La expresión que vincula el tensor de tensiones con el de deformaciones está dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E} & -\dfrac{\nu}{E} & 0 \\ -\dfrac{\nu}{E} & \dfrac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

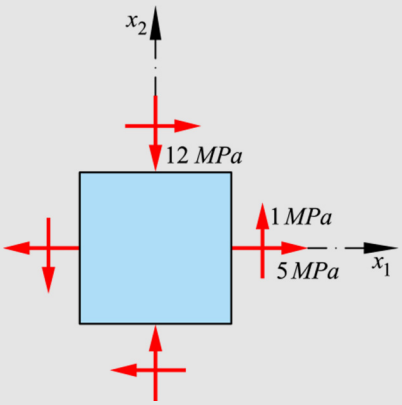
De donde resulta $\varepsilon_{11} = \dfrac{\sigma_{11}}{E}; \quad \varepsilon_{22} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{11}$

Substituyendo estos resultados en los obtenidos en la definición de las deformaciones, se obtiene $\varepsilon_{11} = \dfrac{u}{l} = \dfrac{\sigma_{11}}{E} \quad \rightarrow \sigma_{11} = E\dfrac{u}{l}$; o $\varepsilon_{22} = -\nu\dfrac{u}{l} = -\nu\dfrac{\sigma_{11}}{E} \quad \rightarrow \sigma_{11} = E\dfrac{u}{l}$

Ejemplo 2-7: Suponiendo que el estado tensional de la figura corresponde a un estado de deformación plana si $\varepsilon_{33} = 0$, o tensión plana si $\sigma_{33} = 0$, obtener a partir de la ley de Hooke generalizada el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones en los siguientes casos:

a) $E = 20000\,MPa,\ \nu = 0$

b) $E = 20000\,MPa,\ \nu = 0.3$



● Caso de deformación plana

En el caso de deformación plana es $\sigma_{33} \neq 0$. La tensión normal σ_{33} se determinará a partir de la ley de Hooke generalizada y de la consideración del estado de deformación plana, de acuerdo a la ecuación (2.110).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \frac{(1+\nu)}{E} \begin{bmatrix} (1-\nu) & -\nu & 0 \\ -\nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma_{33} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

a) Para $E = 20000\,MPa,\ \nu = 0$; resulta $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 10000\,MPa$. Reemplazando se obtiene

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{20000} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5 \\ -12 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} 2.5\times10^{-4} \\ -6\times10^{-4} \\ 1\times10^{-4} \end{Bmatrix}; \qquad \sigma_{33} = 0$$

Así los tensores de tensiones y deformaciones están respectivamente dados por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2.5 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

b) Para $E = 20000\,MPa,\ \nu = 0.3$; resulta $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 7692.31\,MPa$. En este caso, se tiene

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{(1+0.3)}{20000}\begin{bmatrix}(1-0.3) & -0.3 & 0\\ -0.3 & (1-0.3) & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}5\\-12\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}4.615\times10^{-4}\\-6.435\times10^{-4}\\1.3\times10^{-4}\end{Bmatrix} \text{ y}$$

$$\sigma_{33} = \frac{0.3\cdot 20000\,MPa}{(1+0.3)(1-2\cdot 0.3)}(4.615-6.435)\cdot10^{-4} = -2.1\,MPa$$

Así los tensores de tensiones y deformaciones, para el caso de deformación plana, están respectivamente dados por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ 1 & -12 & 0\\ 0 & 0 & -2.1\end{bmatrix} MPa; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix}4.615 & 1.3/2 & 0\\ 1.3/2 & -6.435 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\times10^{-4}$$

Para este caso es posible hacer la verificación 3-D. La ley de Hooke generalizada para el caso 3-D de deformación plana puede escribirse como:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \hline \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\begin{array}{ccc|ccc} (1-\nu) & \nu & \nu & & & \\ \nu & (1-\nu) & \nu & & \mathbf{0} & \\ \nu & \nu & (1-\nu) & & & \\ \hline & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & \mathbf{0} & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{array}\right]\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 0\\ \hline 0\\ 0\\ 2\varepsilon_{12}\end{Bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \hline \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{array}\right\}=\frac{20000}{(1+0.3)(1-2\cdot 0.3)}\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 0.7 & 0.3 & 0.3 & & & & \\ 0.3 & 0.7 & 0.3 & & \mathbf{0} & & \\ 0.3 & 0.3 & 0.7 & & & & \\ \hline & & & 0.2 & & & \\ & \mathbf{0} & & & 0.2 & & \\ & & & & & 0.2 & \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} 4.615\\ -6.435\\ 0\\ \hline 0\\ 0\\ 1.3\end{array}\right\}\cdot 10^{-4}$$

Resolviendo, se obtiene

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \hline \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} 5\\ -12\\ -2.1\\ \hline 0\\ 0\\ 1\end{array}\right\}MPa$$

● **Caso de tensión plana**

Para este caso, conocido el tensor de tensiones, se puede utilizar la formulación dada por la ecuación (2.105),

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0\\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{array}\right\};\ \varepsilon_{33}=-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)$$

a) Para $E = 20000\,MPa,\ \nu = 0;\ G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 10000\,MPa$. Reemplazando se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{20000} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{20000} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{10000} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5 \\ -12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.5 \\ -6 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}; \qquad \varepsilon_{33} = 0$$

Así los tensores de tensiones y deformaciones, para el caso de tensión plana, están respectivamente dados por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2.5 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

b) para $E = 20000\,MPa,\ \nu = 0.3$ y $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 7692.31\,MPa$, se tiene

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{20000} & \dfrac{-0.3}{20000} & 0 \\ \dfrac{-0.3}{20000} & \dfrac{1}{20000} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{7692.31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5 \\ -12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.3 \\ -6.75 \\ 1.3 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{0.3}{20000}(5-12) = 1.05 \cdot 10^{-4}$$

Así los tensores de tensiones y deformaciones, para este caso, están respectivamente dados por:

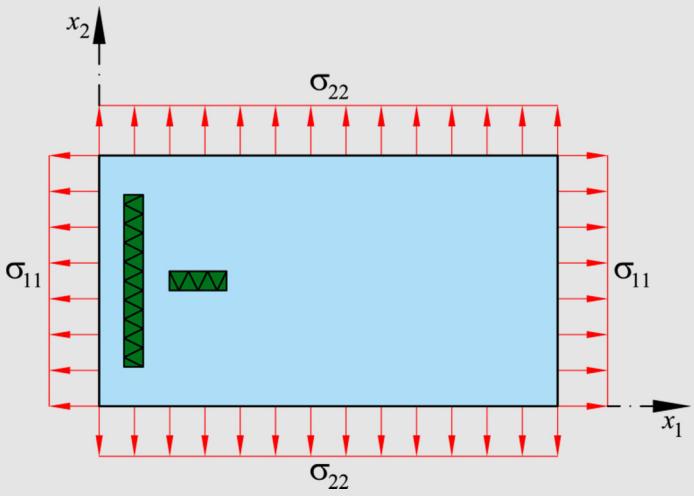
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 4.3 & 1.3/2 & 0 \\ 1.3/2 & -6.75 & 0 \\ 0 & 0 & 1.05 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

De manera análoga, para este caso es posible hacer la verificación 3D. La ley de Hooke generalizada para el caso 3D de tensión plana puede escribirse (ec. (2.109)) como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \hline \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{20000}{(1+0.3)(1-2\cdot 0.3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.7 & 0.3 & 0.3 & & & \\ 0.3 & 0.7 & 0.3 & & \mathbf{0} & \\ 0.3 & 0.3 & 0.7 & & & \\ \hline & & & 0.2 & & \\ & \mathbf{0} & & & 0.2 & \\ & & & & & 0.2 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} 4.3 \\ -6.75 \\ 1.05 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1.3 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \hline \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -12 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} MPa$$

Ejemplo 2-8: Se fijan dos galgas extensométricas a la placa de la figura, en las direcciones x_1 y x_2. La placa está sometida a tensiones normales uniformes σ_{11} y σ_{22}. Los dispositivos de medición proporcionan las lecturas $\varepsilon_{11} = 500 \cdot 10^{-6}$ y $\varepsilon_{22} = 100 \cdot 10^{-6}$. Sabiendo que el módulo de Young del material de la placa es $E = 200\,GPa$ y el coeficiente de Poisson es $\nu = 0.3$, determinar los estados de tensión y de deformación que se producen en el instante de la medición.



Al tratarse de una placa sometida a tensiones en sus lados se admite un problema de tensión plana. De manera que las tres incógnitas del problema son σ_{11}, σ_{22} y ε_{33}, mientras que son válidas las ecuaciones para estado plano de tensión (ecuación (2.105)), es decir:

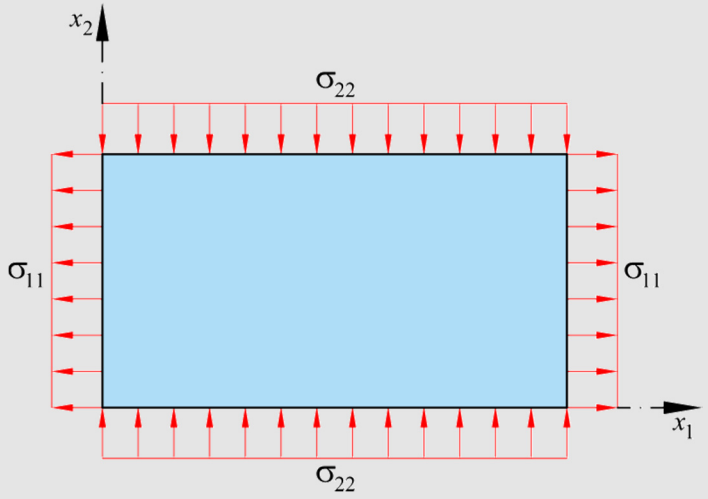
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)$$

De la configuración del problema se observa que no existen tensiones tangenciales, por lo que es $\sigma_{12} = 0 \rightarrow \gamma_{12} = 0$, lo que permite plantear las ecuaciones del estado plano de manera reducida,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 500 \\ 100 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6} = \frac{1}{200GPa}\begin{bmatrix} 1 & -0.3 \\ -0.3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.116 \\ 0.055 \end{Bmatrix} \text{GPa} \quad \text{y} \quad \varepsilon_{33} = -\frac{0.3}{200}\left(0.116 + 0.055\right) = -2.565 \cdot 10^{-4}$$

Ejemplo 2-9: Sobre una placa delgada de acero con módulo elástico $E = 200\,GPa$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, actúan dos tensiones normales uniformes σ_{11} y σ_{22}, como se muestra en la figura. Calcular la deformación angular máxima $\gamma^{\max}$ y el plano en que se produce si $\sigma_{11} = 90\,MPa$ y $\sigma_{22} = -20\,MPa$.



Al tratarse de una placa sometida a tensiones en sus lados se admite un problema de tensión plana. Entonces conocido $\boldsymbol{\sigma}$ se obtendrá $\boldsymbol{\varepsilon}$ para luego, a partir de la ecuación de transformación de deformaciones planas, determinar la distorsión específica máxima $\gamma^{\max}$.

Son válidas las ecuaciones para estado plano de tensión (ecuación (2.105)), es decir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \text{ y } \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) \text{ con } \sigma_{33} = 0$$

De la configuración del problema se observa que son nulas las tensiones tangenciales $\sigma_{12} = 0$ por lo que es $\gamma_{12} = 0$, lo que permite plantear las ecuaciones del estado plano de manera reducida,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \begin{bmatrix} 1 & -0.3 \\ -0.3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 90 \\ -20 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.8 \cdot 10^{-4} \\ -2.35 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

$$\text{y} \quad \varepsilon_{33} = -\frac{0.3}{2 \cdot 10^5}(90 - 20) = -1.05 \cdot 10^{-4}$$

La distorsión específica para un plano cualquiera α (ecuación (2.82)) está dada por $\gamma_\alpha = -(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \operatorname{sen} 2\alpha + \gamma_{12} \cos 2\alpha$, como en este caso es $\gamma_{12} = 0$, resulta

$$\gamma_\alpha = -(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \operatorname{sen} 2\alpha = -\left(4.8 \cdot 10^{-4} + 2.35 \cdot 10^{-4}\right) \operatorname{sen} 2\alpha = -7.15 \cdot 10^{-4} \operatorname{sen} 2\alpha$$

$\frac{d\gamma_\alpha}{d\alpha} = -2 \cdot 7.15 \cdot 10^{-4} \cos 2\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\text{o}$ que define el plano donde la distorsión es máxima. Si ahora se reemplaza $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\text{o}$, se obtiene la deformación angular máxima,

$$\gamma_\alpha = -7.15 \cdot 10^{-4} \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -7.15 \cdot 10^{-4}$$

2.6.3 Ecuación de compatibilidad en función de las componentes del campo de tensiones

El problema de la teoría de la elasticidad consiste en determinar el estado tensional que se origina en un sólido sometido a un sistema de fuerzas. En el caso de un estado bidimensional, es necesario resolver:

a) **Las ecuaciones de equilibrio** (ver ecuaciones (2.7))

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + p_1\left(x_1, x_2\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + p_2\left(x_1, x_2\right) = 0 \end{cases} \tag{2.112}$$

b) La ecuación de equilibrio en el contorno (ver ecuaciones (2.20))

$$\begin{cases} t_1 = \sigma_{11}\ell_1 + \sigma_{21}\ell_2 \\ t_2 = \sigma_{12}\ell_1 + \sigma_{22}\ell_2 \end{cases} \tag{2.113}$$

Cada uno de estos sistemas de ecuaciones tienen tres incógnitas $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$; no bastando el número de ecuaciones para la resolución de los mismos. Para ello es necesaria la ecuación de compatibilidad (ecuación (2.74)) vista en la Sección 2.4.1, la cual ahora puede escribirse en función de las tensiones empleando las ecuaciones constitutivas. Para el caso bidimensional, se tiene

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right) \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}\right) \\ \gamma_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{G} = \dfrac{2\left(1+\nu\right)}{E}\sigma_{12} \end{cases} \tag{2.114}$$

Substituyendo las ecuaciones (2.114) en las ecuaciones de compatibilidad (2.74), se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}\right) = 2\left(1+\nu\right)\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{2.115}$$

Siendo esta la ecuación que permite obtener, junto con las ecuaciones (2.68), (2.69) y (2.70), la solución del problema.

Mediante la ecuación de equilibrio es posible dar a la ecuación (2.115) una forma diferente. Derivando la primera de las ecuaciones de equilibrio (2.112) respecto a x_1 y la segunda respecto a x_2 ; y luego sumando miembro a miembro se tiene:

$$2\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} = -\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial p_2}{\partial x_2} \tag{2.116}$$

Si ahora se substituye la ec. (2.116) en la ec. (2.115) se obtiene otra forma de escribir la ecuación de compatibilidad en función de las tensiones

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2} = -\left(1+\nu\right)\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right) \tag{2.117}$$

2.6.4 Módulo de elasticidad volumétrico

A partir de la definición de la deformación volumétrica $\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V}$, o también $\varepsilon_V = 3\mathrm{I}_1' = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, ecuación (2.80), sustituyendo ésta en la ley de Hooke (ecuación (2.97)), se obtiene:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}\left[\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right) + \left(\sigma_{11} + \sigma_{33}\right) + \left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right]$$

$$\varepsilon_V = \frac{\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)}{E} - \frac{2\nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)}{E} \tag{2.118}$$

Recordando la definición de presión p presentada en la ecuación (2.65), se escribe a continuación la relación constitutiva entre la presión y la deformación volumétrica,

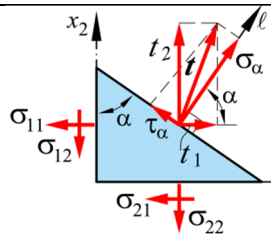
$$p = \frac{\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)}{3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_V = \frac{3p}{E} - \frac{6\nu\, p}{E} = 3p\left(\frac{1}{E} - \frac{2\nu}{E}\right)$$

$$\varepsilon_V = 3\,p\left[\frac{\left(1-2\nu\right)}{E}\right] \quad \Rightarrow \quad p = \underbrace{\frac{E}{3\left(1-2\nu\right)}}_{K_V} \cdot \varepsilon_V \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_V \overset{def}{=} \frac{E}{3\left(1-2\nu\right)}} \tag{2.119}$$

Siendo K_V el *módulo de elasticidad volumétrico* que vincula la presión p con la deformación volumétrica ε_V. Resulta claro, a partir de esta última expresión, que el coeficiente de Poisson debe ser menor que 0.5.

2.7 Resumen de la formulación básica obtenida en el capítulo

Formulaciones 3D		**Ecuación**
Tensor de tensión	$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$	Ec. (2.2)
Tensor de deformación	$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{21}/2 & \varepsilon_{22} & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{31}/2 & \gamma_{32}/2 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$	Ec. (2.76)
Condición de equilibrio en el contorno	$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\ell} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix}$$	Ec. (2.15)
Ley de Hooke generalizada	$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\sigma_{11}}{E} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right) \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\sigma_{22}}{E} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{33}\right) \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{\sigma_{33}}{E} - \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) \\ \gamma_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{G} \\ \gamma_{13} = \dfrac{\sigma_{13}}{G} \\ \gamma_{23} = \dfrac{\sigma_{23}}{G} \end{cases}$$	Ec. (2.97)
Formulaciones 2D		**Ecuación**
Tensor de tensión	$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$	Ec. (2.52)

Tensor de deformación	$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12}/2 \\ \gamma_{21}/2 & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$	Ec. (2.107)
Condición de equilibrio interno de Cauchy	$\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + p_2 = 0 \end{cases}$	Ec. (2.7)
Condición de equilibrio en el contorno	 $\begin{cases} t_1 = \sigma_{11}\cos\alpha + \sigma_{21}\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ t_2 = \sigma_{12}\cos\alpha + \sigma_{22}\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$	Ec. (2.19)
Tensión normal y tangencial sobre un plano cualquiera	$\begin{cases} \sigma_\alpha = \left(\dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right) + \left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)\cos 2\alpha + \sigma_{12}\,\mathrm{sen}\,2\alpha \\ \tau_\alpha = -\left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)\mathrm{sen}\,2\alpha + \sigma_{12}\cos 2\alpha \end{cases}$	Ec. (2.27)
Tensiones principales	$\sigma^{I,II} = \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$	Ec. (2.60)
Planos principales	$\alpha_p = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}\right)$	Ec. (2.28)
Condición de compatibilidad	$\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$	Ec. (2.74)

Capítulo 3

Leyes de Esfuerzos

Estructuras Isostáticas

3.1 Introducción

Una estructura en ingeniería es un sistema material de piezas estables, destinado a soportar las fuerzas propias más acciones exteriores provenientes de su utilización.

Las estructuras pueden ser de muy distintos tipos, pero básicamente se pueden clasificar en estructuras que trabajan por gravedad y por rigidez.

Las *estructuras de gravedad* son aquellas que utilizan su propio peso para conseguir estabilidad, y pueden mantenerse estables cumpliendo con el único requisito que cada uno de sus elementos componentes sean estables por sí mismos (ver Figura 3.1).

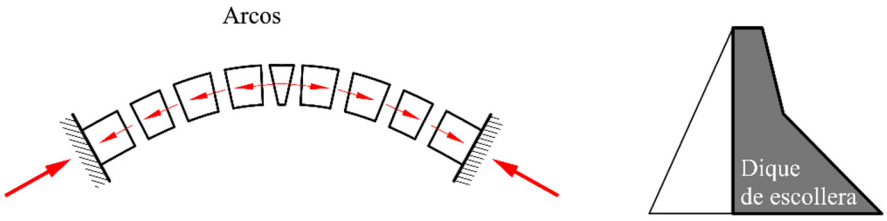


Figura 3.1 – Esquemas de estructuras de gravedad.

Las *estructuras de rigidez* son aquellas que mantienen su estabilidad haciendo uso de su capacidad de responder a las acciones externas mediante sus propiedades elásticas (ver Figura 3.2).

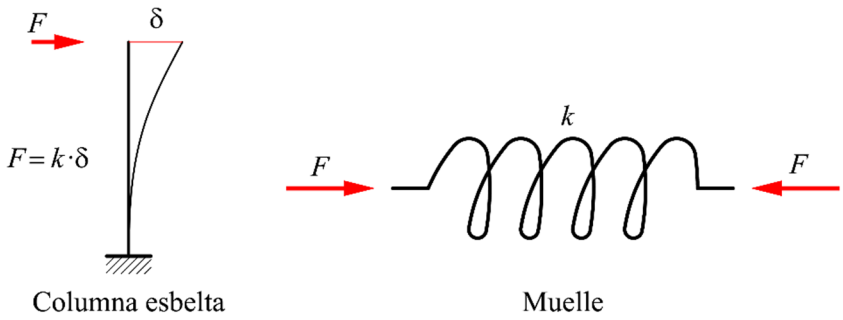


Figura 3.2 – Esquemas de estructuras de rigidez.

En este libro se tratan principalmente las estructuras que mantienen el equilibrio por rigidez y sólo en algunos casos particulares se introducen conceptos que resultan de utilidad para el cálculo de estructuras de gravedad, como es el caso del núcleo central que se tratará en el Capítulo 5.

Dentro de las estructuras que mantienen su estabilidad aprovechando su rigidez hay de muy diversos tipos, como estructuras de barras rectas y/o curvas (arcos, helicoides, etc.), pero en general se pueden clasificar, según sus dimensiones, en los siguientes tipos:

- Estructuras **unidimensionales**, denominadas normalmente estructuras de barras en las que hay una dimensión dominante sobre las otras dos. Por ejemplo: barras (vigas, columnas/pilares), arcos, pórticos (sucesión de barras formando retículas).

- Estructuras **bidimensionales**, placas, lajas, láminas, membranas, etc., en las que hay dos dimensiones dominantes respecto de la tercera dimensión.

- Estructuras **tridimensionales**, estructuras macizas de bloques, presas, etc.

Las estructuras mantienen su estabilidad si las fuerzas exteriores que actúan sobre ellas son equilibradas por fuerzas interiores –*esfuerzos interiores*- que se desarrollan en las partes estructurales que la componen (ver Sección 1.5.2) (Momento Flector, Esfuerzo Cortante, Esfuerzo Normal). A su vez, estas fuerzas resultan del estado tensional que se desarrolla en el interior se las piezas estructurales (ver Capítulo 2).

El comportamiento estructural podría obtenerse directamente relacionando las acciones actuantes con el estado tensional que se desarrolla en la estructura (Mecánica de Medios Continuos), pero en algunos casos este camino tiene una elevada complejidad. Es por esto que se plantea una simplificación a través de un análisis intermedio entre las acciones y las tensiones que consiste en obtener unos esfuerzos interiores en las piezas estructurales, que resultan de las acciones exteriores, y a partir de estos esfuerzos obtener el campo de tensiones y deformaciones estructural (Figura 3.3).

Las fuerzas en las estructuras representan las acciones externas y las de los cuerpos entre sí. En el caso que interese sólo estudiar una pieza estructural que forma parte de una estructura, el resto de ésta actúa como una fuerza exterior sobre la parte que se está estudiando.

Las fuerzas o acciones exteriores pueden ser de volumen o superficie. Las primeras están relacionadas con las fuerzas gravitatorias, inerciales, magnéticas, etc. y las segundas resultan de la acción de un cuerpo sobre otro, es decir cuando existe contacto. Si la superficie de aplicación de la fuerza tiende a cero, ésta recibe el nombre de fuerza puntual.

Las fuerzas exteriores pueden también clasificarse como activas o reactivas. Estas últimas se desarrollan en los apoyos de las estructuras.

Las fuerzas interiores resultan como reacción interna entre partículas del sólido para equilibrar las fuerzas o acciones exteriores (ver Sección 1.5.1). Así, una pieza estructural sometida a P_i acciones exteriores en equilibrio, desarrolla interiormente unas acciones que a su vez también están en equilibrio. De esta manera el equilibrio local –o de cada parte- garantiza el equilibrio global o estructural.

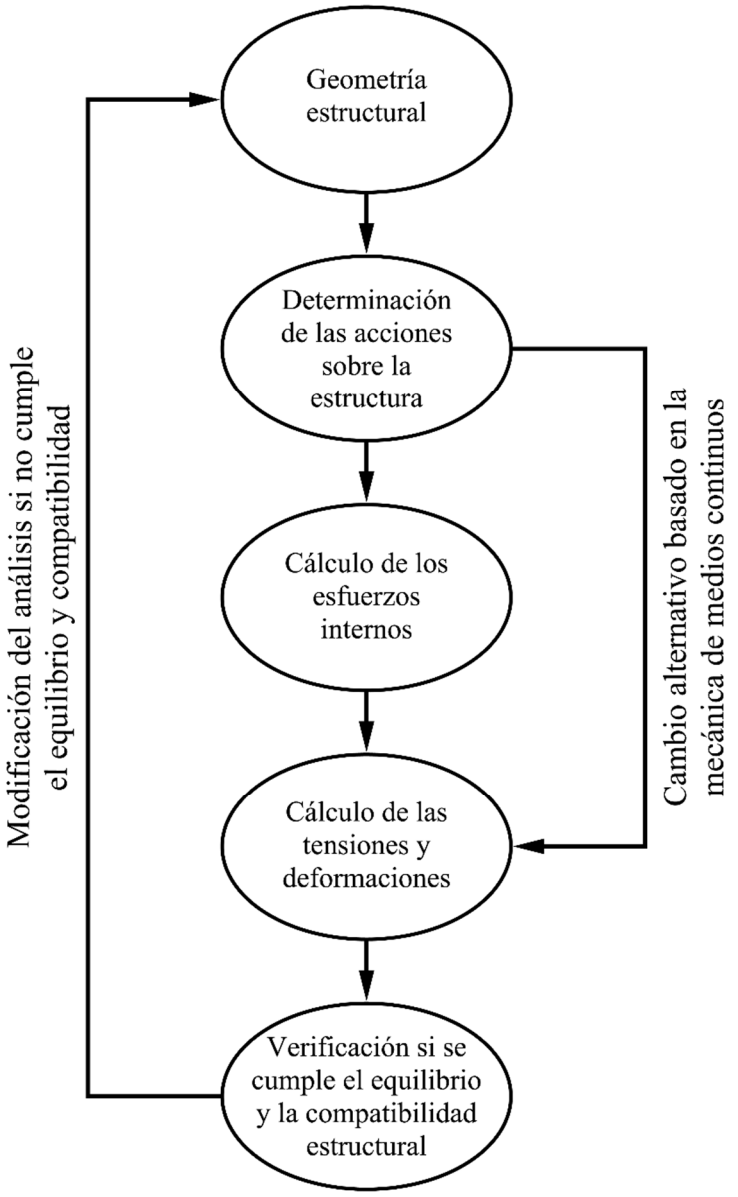


Figura 3.3 – Esquema del procedimiento a seguir para el análisis estructural.

3.2 Equilibrio interno-externo de una rebanada de una barra estructural – Esfuerzo interno

Los esfuerzos internos que se desarrollan en una sección transversal de una barra estructural resultan de reducir al Centro Mecánico (CM) la resultante de la fuerza que actúa en dicha sección transversal (Sección 1.5.1 y 1.5.2).

En el caso de una barra de plano medio $y-z$ (ver Figura 3.4), los esfuerzos internos se reducen a un esfuerzo axil N, un esfuerzo de corte $\mathsf{Q}_y = \mathsf{Q}$, y un momento flector $\mathsf{M}_x = \mathsf{M}$. El conocimiento de estos esfuerzos en una sección transversal de una barra es fundamental para el posterior estudio y valoración de la resistencia de la pieza estructural frente a cada uno de estos esfuerzos. Este análisis se abordará en los capítulos sucesivos de este libro.

Debido a que, en este caso, todos los esfuerzos se producen en el plano $y-z$, las ecuaciones de equilibrio que permiten obtener los esfuerzos internos están dadas en dicho plano por el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Las **ecuaciones diferenciales que expresan el equilibrio de una barra estructural** resultan del equilibrio de las fuerzas externas con los esfuerzos internos que se desarrollan en un elemento de longitud diferencial o rebanada de la barra (ver Figura 3.5). Esto es,

$$\begin{cases} \uparrow & \sum F_y = 0 = \cancel{Q} - (\cancel{Q} + dQ) + q\,ds \;\Rightarrow\; \boxed{q = \dfrac{dQ}{ds}} \\ \rightarrow & \sum F_z = 0 = \cancel{N} - (\cancel{N} + dN) + p\,ds \;\Rightarrow\; \boxed{p = \dfrac{dN}{ds}} \\ \circlearrowleft & \sum M_{CM} = 0 = \cancel{M} + Q\,ds + p\,ds\,y_{CM} + \underbrace{q\,ds\dfrac{ds}{2}}_{\substack{\cong 0 \\ \text{Inf. orden sup.}}} - (\cancel{M} + dM) \;\Rightarrow\; \boxed{Q = \dfrac{dM}{ds} - p\,y_{CM}} \end{cases} \tag{3.2}$$

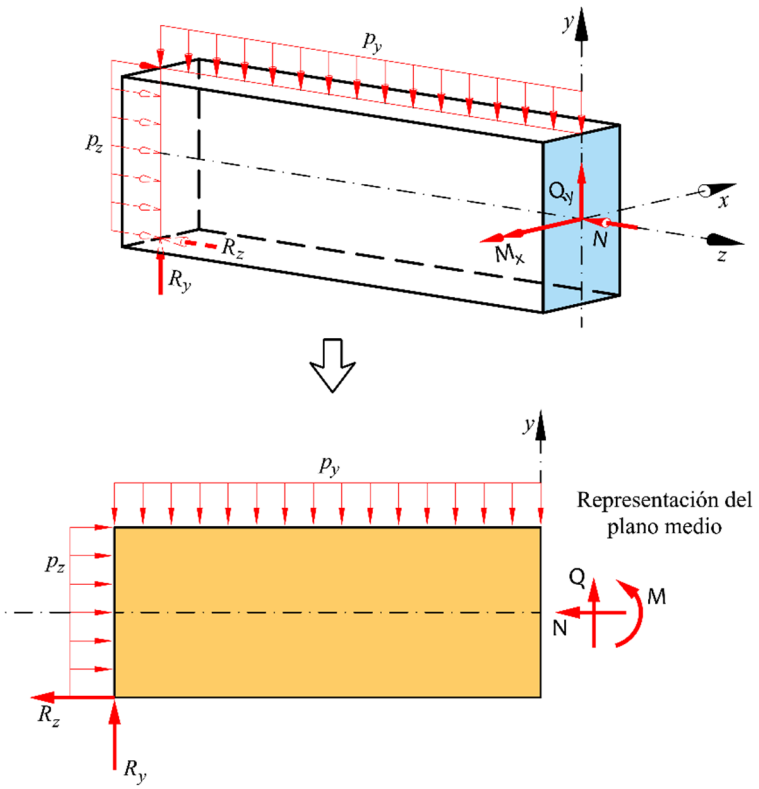


Figura 3.4 – Esfuerzos internos M, Q y N en una barra de plano medio.

donde CM es el punto de la sección ubicado en el centro mecánico de la sección transversal.

Resultando de aquí las tres ecuaciones diferenciales del equilibrio de una barra estructural (ecuaciones (3.2)).

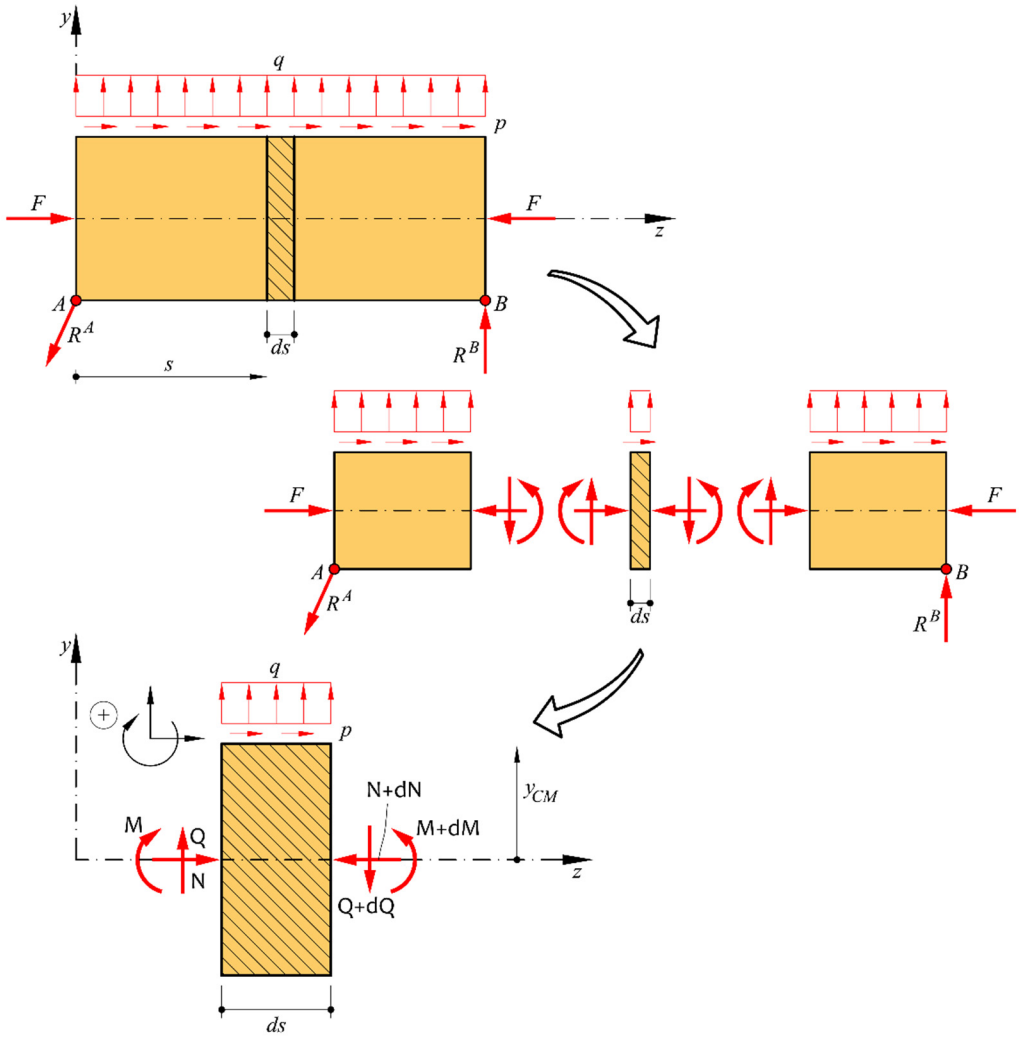


Figura 3.5 – Equilibrio de una rebanada diferencial de una barra estructural.

- **Observación sobre las ecuaciones diferenciales de equilibrio para un sistema de referencia axial distinto al utilizado anteriormente ($y-z$)**

En algunos casos de análisis puede resultar útil emplear un sistema de referencia en el cual uno de los ejes no coincida con el eje axial de la barra. Si, por ejemplo, se toma como sistema de referencia el formado por los ejes $y-s$, es necesario realizar unos cambios en el sistema de ecuaciones dados por las expresiones (3.2) para obtener resultados correctos. Esto es,

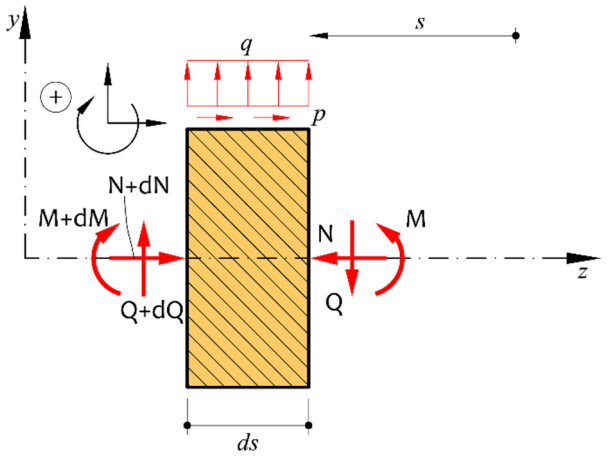


Figura 3.6 – Equilibrio de una rebanada diferencial de una barra estructural para una referencia axial con origen en el extremo opuesto de la barra al anteriormente utilizado.

$$
\begin{cases}
\uparrow & \sum F_y = 0 = -\cancel{Q} + (\cancel{Q} + dQ) + q\,ds \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = -\dfrac{dQ}{ds}} \\
\rightarrow & \sum F_z = 0 = \cancel{N} - (\cancel{N} + dN) + p\,ds \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = -\dfrac{dN}{ds}} \\
\circlearrowleft & \sum M_C = 0 = -\cancel{M} + Q\,ds - p\,ds\,y_{CM} - \underbrace{q\,ds\dfrac{ds}{2}}_{\substack{\cong 0 \\ \text{Inf. orden sup.}}} + (\cancel{M} + dM) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = -\dfrac{dM}{ds} + p\,y_{CM}}
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

3.3 Grado de libertad y vínculos estructurales en el plano

La mecánica comienza por describir el comportamiento de un sistema estructural en función de unas coordenadas apropiadas, denominadas "coordenadas generalizadas" o "coordenadas de Lagrange".

Se denominan *coordenadas generalizadas* a un conjunto cualquiera de parámetros $q_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$, que sirven para representar de manera unívoca la configuración del sistema mecánico estructural de n grados de libertad (NGL) o posibilidades de movimiento.

Estos parámetros pueden representar cualquier magnitud física, sin necesidad que sean homogéneos en cuanto a dimensiones. Por ejemplo, se pueden mezclar desplazamientos $\{u_x, u_z, \theta_x\}$, velocidades $\{\dot{u}_x, \dot{u}_z, \dot{\theta}_x\}$ y aceleraciones $\{\ddot{u}_x, \ddot{u}_z, \ddot{\theta}_x\}$, todas ellas traslacionales y angulares, etc. Una idea clave se basa en la elección de coordenadas que representen a muchos puntos materiales (partículas), incluyendo aquí la elección de los enlaces del sistema. De esta forma, se consigue una doble ventaja: por una parte, el número de parámetros es menor que el correspondiente directamente a las coordenadas de todas las partículas, y por otra, el número de ecuaciones de enlace se ve igualmente reducido.

Un conjunto de coordenadas q_i se denomina *"libre"* cuando su magnitud puede variar independientemente de las otras. Es decir, si las variaciones de las mismas δq_i se pueden escoger de forma arbitraria. En el caso que no sea así, será porque existe alguna "*ligadura*" o "*vínculo*" que relaciona dichas coordenadas, bien de tipo *holónomo* (m ligaduras rígidas expresables mediante coordenadas geométricas o vínculos externos en este caso) o *no-holónomo* o *anholónomo* (k ligaduras que siguen una ley cualquiera, como por ejemplo la elasticidad).

Cuando las coordenadas generalizadas no son libres, se entiende que hay condiciones de ligadura formuladas explícitamente. Éstas se traducirán en relaciones entre

las componentes de las q_i (y también entre sus derivadas $\dot{q}_i$ para enlaces no-holónomos). Debido a estas ligaduras el número de grados de libertad (NGL) de todo el sistema es en realidad menor que n . Por el contrario, si las coordenadas son libres, su número es precisamente n , que coincide con el número de grados de libertad del sistema (ver Figura 3.7). Siendo m_i y $\boldsymbol{r}_i$ la masa y posición de cada partícula. Esta reducción en el número de coordenadas se efectúa gracias a la eliminación de los m enlaces holónomos, que quedarán implícitos en la elección de las coordenadas generalizadas. Por el contrario, los k enlaces no-holónomos no pueden ser eliminados, debiendo quedar planteados de forma explícita.

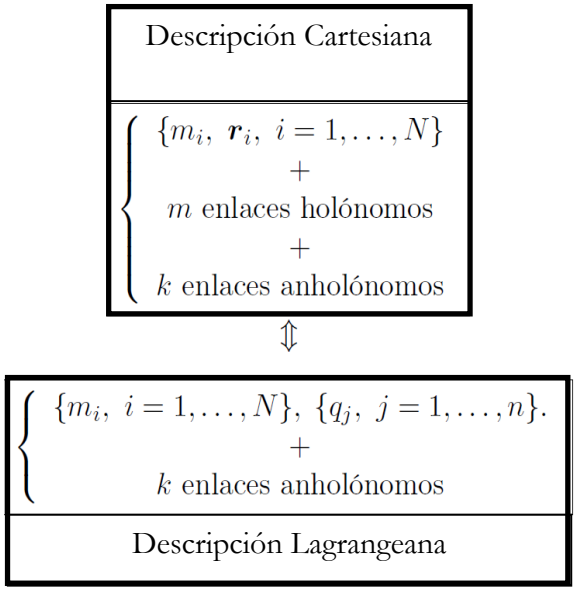


Figura 3.7 – Número de variables intervinientes en una descripción Cartesiana y una descripción Lagrangeana.

Por ejemplo, en el sistema plano rígido articulado de la Figura 3.8, basta con una única coordenada generalizada angular ($n=1$; $q_1 \equiv \theta$). En esta elección ya quedan englobados implícitamente los enlaces o ligaduras internas (ligaduras de sólido rígido) como también los externos (articulación).

Suponemos ahora el caso general de un sistema con un número finito de partículas N, sujeto a m ligaduras holónomas y k no-holónomas. Será posible su descripción mecánica mediante un conjunto más reducido de $n = 3N - m$ parámetros o coordenadas generalizadas.

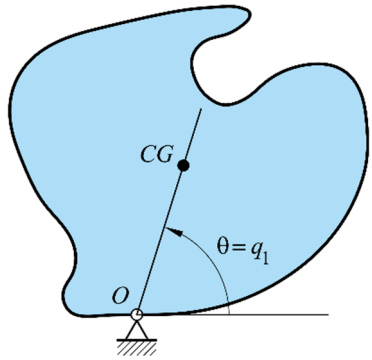


Figura 3.8 –Movimiento de un sólido rígido articulado, descripto por una única coordenada generalizada, el ángulo θ. La posición de todos los puntos de este sólido rígido queda determinada por los enlaces o ligaduras internas (ligaduras de sólido rígido) y externas (rótula cilíndrica en O).

Un caso extremo de reducción en el número de coordenadas es el del sólido rígido. Considerado como sólido continuo, tendría un número infinito de partículas y por lo tanto de coordenadas. Sin embargo, como sólido rígido se consideran enlaces internos holónomos (distancia constante entre dos partículas cualesquiera) permitiendo reducir el número de coordenadas generalizadas del sólido a $n = 3N - m = 6$.

En general, existirán unas relaciones entre los vectores de posición $\boldsymbol{r}_i$ de cada partícula y las coordenadas generalizadas q_j, es decir,

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_j, t) \quad \forall\, i = 1, \ldots, N \quad ; \quad j = 1, \ldots, n \tag{3.4}$$

A los vectores de posición de cada partícula $\boldsymbol{r}_i$ los denominaremos "coordenadas vectoriales". Éstas son equivalentes a definir las $3N$ coordenadas cartesianas

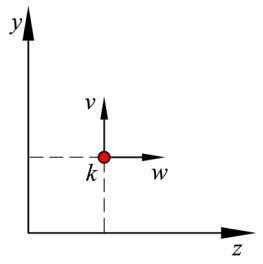
correspondientes. Por otra parte, éstas sólo serán libres para un sistema sin ligadura; en cualquier otro caso, no formarán un conjunto libre.

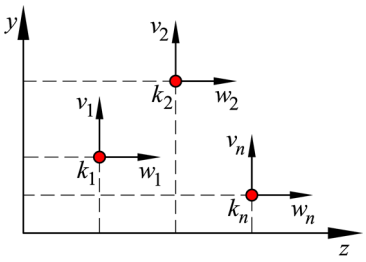
Las coordenadas generalizadas podrán también depender del tiempo, y por lo tanto las velocidades $\mathbf{v}_i$ se obtendrán de la derivada temporal de los respectivos vectores de posición $\boldsymbol{r}_i$,

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} \tag{3.5}$$

En la expresión anterior (ecuación (3.5)) a los términos $\dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}$ se los denomina velocidad generalizada.

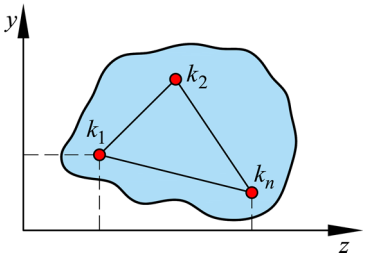
En lo sucesivo se establecerá el concepto de grado de libertad (NGL) y vínculo (restricción al movimiento o grado de libertad) particularizado en sistemas de estructuras en el plano (z, y).

Grados de Libertad de un punto material en el plano	
	$N = 1$ punto tiene $n = (N \times 2) = 2$ grados de libertad en el plano. Se inmoviliza con $m = (N \times 2) = 2$ vínculos externos
Grados de Libertad (NGL) de un sistema de "N" puntos materiales en el plano	



$N=3$ puntos tienen $n=(N\times 2)=6$ grados de libertad en el plano.
Se inmoviliza con $m=N\times 2=6$ vínculos externos.

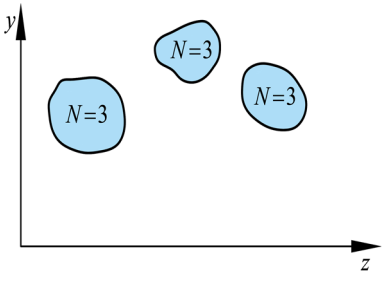
Grados de Libertad (NGL) de un sistema de *"N"* puntos materiales en el plano unidos por el vínculo de la rigidez (sólido rígido)



∞ puntos *i* unidos por vínculos internos de rigidez.
Si fuesen elásticos serían vínculos noholónomos.
El problema se reduce a $N=3$ puntos con $m^i=3$ vínculos internos holónomos.

Tiene $n=(N\times 2)-m^i=3$ grados de libertad.
Se inmoviliza con $m=3$ vínculos externos.

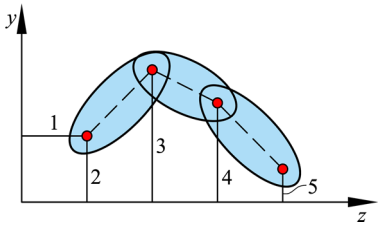
Grados de Libertad de un sistema de *"S"* sólidos rígidos



∞ puntos unidos por vínculos internos de rigidez.
El problema se reduce a $S=3$ sólidos rígidos con $N=3$ puntos cada uno con $m^i=3$ vínculos internos holónomos.

Tiene $n=S\left[(N\times 2)-m^i\right]=S\times 3$ grados de libertad
Se inmobiliza con $m=S\times 3$ vínculos externos.

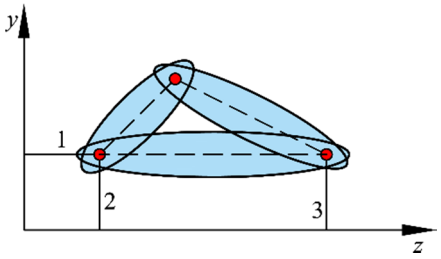
Grados de Libertad (NGL) de un sistema de *"S"* sólidos rígidos vinculados entre sí

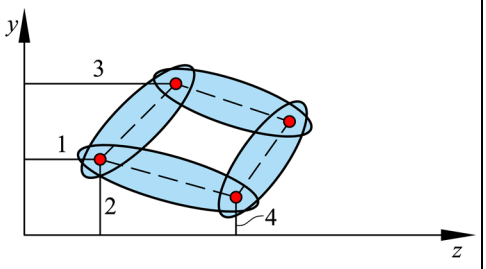


∞ puntos unidos por vínculos internos de rigidez.
El problema se reduce a $S = 3$ sólidos rígidos con $N = 3$ puntos cada uno con $m^i = 3$ vínculos internos holónomos.

Tiene $n = S + 2$ grados de libertad.
Se inmobiliza con $m = S + 2$ vínculos externos.

Grados de Libertad de una cadena cerrada de *"S"* sólidos rígidos vinculados entre sí





∞ puntos unidos por vínculos internos de rigidez.
El problema se reduce a S sólidos rígidos con $N = 3$ puntos cada uno, con $m^i = 3$ vínculos internos holónomos.

Tiene $n = S$ grados de libertad.
Se inmobiliza con $m = S$ vínculos externos.

Figura 3.9 – Número de variables intervinientes en una descripción Lagrangeana. Concepto de fijación o restricción al movimiento.

3.3.1 Estructura isocinemática

El grado de indeterminación cinemática es aquel que resulta de la diferencia entre las posibilidades de movimientos o grados de libertad, y el número de fijaciones o vínculos (Figura 3.9). Así, se dice que una estructura es isocinemática cuando el número de grados de libertad n, o posibilidades de movimiento, es igual al número

de restricciones totales m . Esta afirmación se puede descomponer en dos partes:

- **Isocinemática de vínculos externos**: cuando el número de restricciones, o vínculos externos, es igual al número de posibilidades de movimientos externos o grados de libertad externos.

- **Isocinemática de vínculos internos**: cuando el número de restricciones, o vínculos internos, es igual al número de posibilidades de movimientos internos o grados de libertad internos.

3.3.2 Estructura isostática

Hay un concepto dual al que se ha presentado en el apartado anterior, y es aquel que resulta de un *análisis estático y no cinemático de la estructura*. Es decir que, si se aplican cargas a las estructuras planas antes presentadas, éstas serán estables si los vínculos que fijan la posición de la estructura son capaces de reaccionar con fuerzas que equilibren las cargas aplicadas.

El *grado de indeterminación estático* de una estructura plana resulta de la diferencia entre el número de incógnitas estáticas (reacciones de vínculo) y el número de ecuaciones de equilibrio disponibles (ecuaciones (3.1)). Esto se muestra, a modo de ejemplo, en los dos casos que a continuación se presentan:

1) **Caso 1: Estructura plana inmovilizada (Isocinemática)**

   Sea la estructura de la Figura 3.10 cargada con una fuerza concentrada P , cuyo equilibrio se consigue con las fuerzas Y_1, Y_2, Z_1, que resultan en cada uno de los vínculos que fijan cinemáticamente a la estructura. Así, el equilibrio se expresa como,

$$\left.\begin{array}{l} \uparrow \\ \rightarrow \\ \circlearrowleft \end{array}\right\{\begin{array}{l} \sum F_y = 0 = \ell_y(Y_1, Y_2, P_y) \\ \sum F_z = 0 = \ell_z(Z_1, P_z) \\ \sum M_{k1} = 0 = \ell_M(Y_2, P_y, P_z) \end{array}\Bigg\} \begin{array}{c} \boxed{\text{3 ecuaciones = 3 incógnitas}} \\ \Downarrow \\ \text{Estructura plana Isostática} \end{array} \qquad (3.6)$$

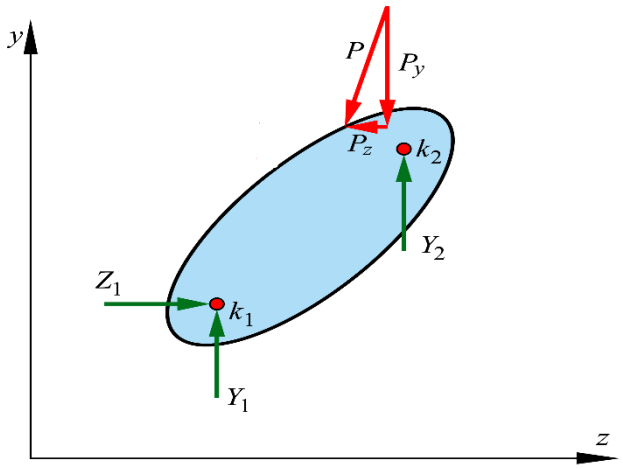


Figura 3.10 – Estructura plana fijada en forma isocinemática

2) Caso 2: Cadena de piezas estructurales planas inmovilizadas (Isocinemática)

Sea la cadena de piezas estructurales planas de la Figura 3.11 cargadas con las fuerzas concentradas P_i, cuyo equilibrio se consigue con las fuerzas que resultan en cada uno de los vínculos que fijan cinemáticamente la cadena de piezas estructurales. Así, el equilibrio se expresa como,

Cada estructura plana S aporta 3 ecuaciones de equilibrio,

$$\Rightarrow \boxed{(3\times S)=9 \text{ Ecuaciones de equilibrio}}$$

$$\text{Incógnitas:} \begin{cases} \text{Externas: } Z_1, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 & & \text{(5 incógnitas)} \\ \text{Internas: } C_2 - D_2 = 0 & \rightarrow C_2 = D_2 & \text{(1 incógnita)} \\ \quad C_3 - D_3 = 0 & \rightarrow C_3 = D_3 & \text{(1 incógnita)} \\ -A_2 + B_2 + Y_2 = 0 & \rightarrow A_2\ ,\ B_2 = -Y_2 + A_2 & \text{(1 incógnita)} \\ -A_3 + B_3 + Y_3 = 0 & \rightarrow A_3\ ,\ B_3 = -Y_3 + A_3 & \text{(1 incógnita)} \\ & & \boxed{\text{(9 incógnitas)}} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\boxed{9 \text{ ecuaciones} = 9 \text{ incógnitas}} \Rightarrow \text{Estructura plana Isostática}$$

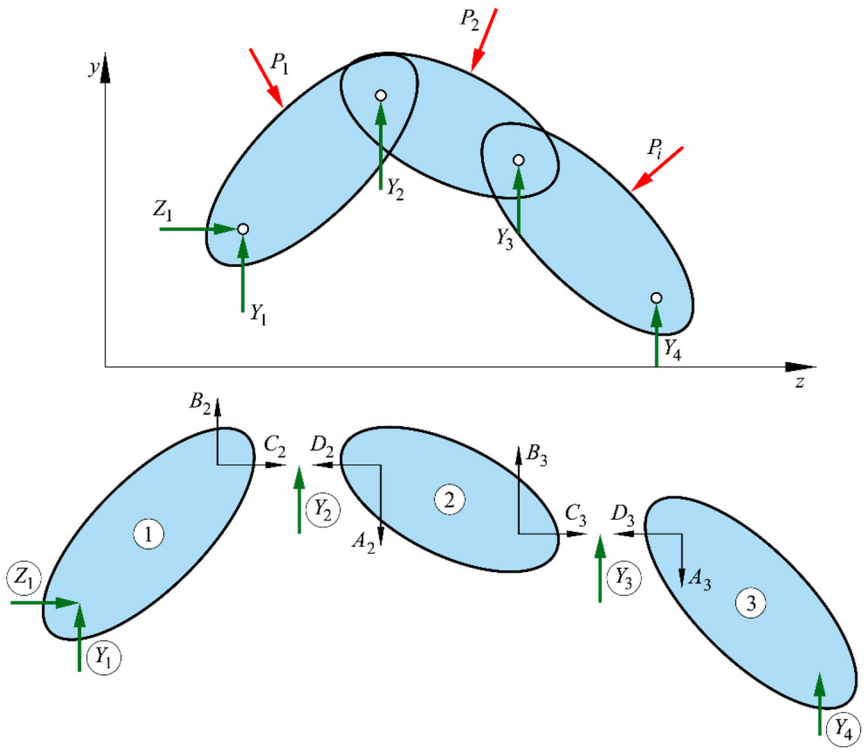


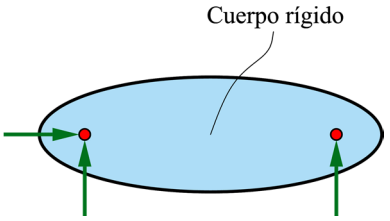
Figura 3.11 – Cadena de piezas estructurales planas fijadas en forma isocinemática

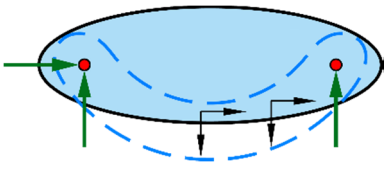
Así, se define *el grado de indeterminación estático* como aquel que resulta de una estructura que tiene más fijaciones que ecuaciones de equilibrio. Es decir, que hay un número de fuerzas incógnitas que no pueden conocerse (indeterminación) empleando las ecuaciones de equilibrio que se han formulado. Esto ocurre en las estructuras sobre-vinculadas, tanto con vínculos externos (fijaciones), como con vínculos internos (interacción entre las piezas que conforman la cadena estructural) (ver Figura 3.11).

En el caso de mecanismos, la estructura tiene menos incógnitas de fuerzas que ecuaciones disponibles (estructuras hipostáticas). En el caso de cuerpos elásticos, los movimientos permitidos por la elasticidad del sólido, desarrollan fuerzas que se auto-equilibran internamente (si la resistencia del material lo permite), y sólo quedan sin equilibrar las fuerzas desarrolladas en los vínculos externos.

Se puede deducir que las estructuras estáticamente determinadas (igual número

de incógnitas de fuerzas que de ecuaciones de equilibrio), dan lugar a estructuras cinemáticamente determinadas (igual número de movimientos posibles que vínculos de fijación), siempre que éstas estén conformadas por cuerpos rígidos. En el caso de las estructuras elásticas, hay vínculos no-holónomos que permiten movimientos sujetos a la elasticidad del sistema (ver Figura 3.12).

<table>
<tr><td colspan="2">Sólido Rígido. Estructura determinada estáticamente y cinemáticamente</td></tr>
<tr><td> 
</td><td>Determinación:
{ Estática: 3 incógnitas - 3 ecuaciones = 0 (Isostática)
{ Cinemática: 3 GºLº - 3 restricciones = 0 (Iso-cinemática)

Estructura Estáticamente Determinada
y
Cinemáticamente Determinada</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sólido Elástico. Estructura determinada estáticamente, pero indeterminada cinemáticamente</td></tr>
<tr><td>  </td><td>Determinación:
{ Estática: 3 incógnitas - 3 ecuaciones = 0 (Isostática)
{ Cinemática: ∞ GºLº – 3 restricciones = ∞ (Indeterminada cinemática)

Estructura Estáticamente Determinada,
pero
Cinemáticamente Indeterminada</td></tr>
</table>

Figura 3.12 – Determinación estática y cinemática en sólidos rígidos y sólidos elásticos.

3.3.3 Tipos de vínculos externos

En la Figura 3.13 se presentan los tres tipos básicos de vínculos externos que se usan para fijar un punto de una estructura plana. Como se ve en esta figura, cada movimiento que se restringe desarrolla una fuerza reactiva externa.

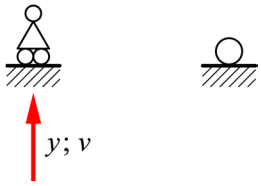
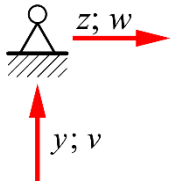
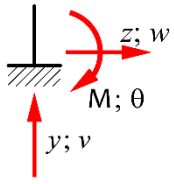
Vínculo de 1ra. Especie (apoyo móvil – restringe el movimiento vertical)	
	– Restringe una posibilidad de movimiento, o grado de libertad. – Desarrolla una única fuerza de reacción.
Vínculo de 2da. Especie (apoyo fijo – restringe los movimientos vertical y horizontal)	
	– Restringe dos posibilidades de movimiento, o grados de libertad. – Desarrolla dos fuerza de reacción.
Vínculo de 3ra. Especie (empotramiento – restringe los movimientos vertical, horizontal y la rotación)	
	– Restringe tres posibilidades de movimiento, o grado de libertad. – Desarrolla tres fuerza de reacción.

Figura 3.13 – Tipo de vínculos para fijar un punto de una estructura plana.

3.3.4 Determinación e indeterminación estática de las estructuras

A continuación, y hasta no volver a tratar el problema de indeterminación cinemático que se verá al formular el método de rigidez, se estudiarán estructuras

sólo desde el punto de vista estático, y por lo tanto siempre se hará referencia a su *determinación o indeterminación estática.*

Para obtener en forma simple la determinación e indeterminación estática se recurrirá a dos métodos básicos: a) Fórmula de determinación estática de cada barra, y b) El método de los cortes.

a) MÉTODO DE LAS BARRAS

Este método consiste en una fórmula que tiene en cuenta el *grado de indeterminación global, o número de incógnitas de fuerza*, a partir de las fuerzas incógnitas de las barras componentes y del número de fuerzas incógnitas que se repiten internamente debido al tipo de vinculación entre barras. Así, el *Grado de Indeterminación Estática* (GIE) se obtiene de la siguiente expresión,

$$GIE = \underbrace{\left(3 \cdot C_6 + 2 \cdot C_5 + C_4\right)}_{\text{Número de incógnitas barras}} - \underbrace{\left(3 \cdot K_3 + 2K_2\right)}_{\text{Número de incónitas repetidas}} - h \tag{3.8}$$

Tal que C_6 es el número de barras doblemente empotradas, C_5 el número de barras empotradas - articuladas, C_4 el número de barras biarticuladas, K_3 las uniones internas rígidas o empotradas, K_2 las uniones internas articuladas, y h los apoyos deslizantes externos. Para más detalles sobre el significado de estas variables se presentan esquemas de barras con diferentes condiciones de vínculo en las Figura 3.14 y Figura 3.15.

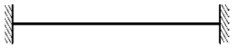
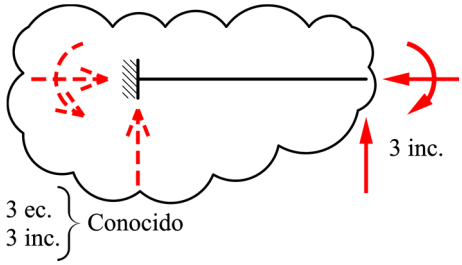
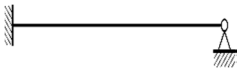
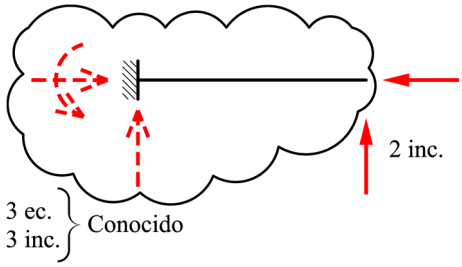
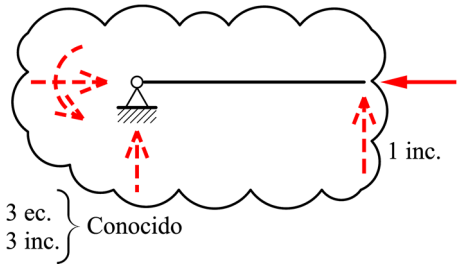
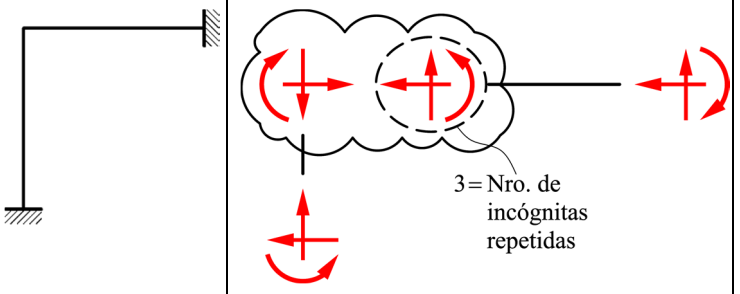
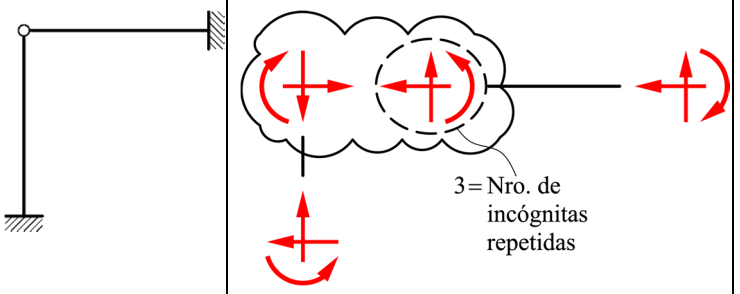
- **Incógnitas añadidas por cada tipo de barras**		
(C_6) Barra doblemente empotrada		Incógnitas de fuerzas por barras
		$3 \cdot C_6$ Las otras 3 incógnitas se conocen mediante las 3 ec. de equilibrio
(C_5) Barra empotrada articulada		
		$2 \cdot C_5$ Las otras 3 incógnitas se conocen mediante las 3 ec. de equilibrio
(C_4) Barra doblemente articulada		
		$1 \cdot C_4$ Las otras 3 incógnitas se conocen mediante las 3 ec. de equilibrio

Figura 3.14 – Incógnitas por barras.

<table>
<tr><td colspan="2">- Incógnitas repetidas por cada tipo de vínculo interno</td></tr>
<tr><td colspan="2">(K_3) Vínculo interno empotrado</td><td>Incógnitas repetidas por vínculo</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td><td>$3 \cdot K_3$

3 incógnitas internas se conocen mediante el equilibrio</td></tr>
<tr><td colspan="2">(K_2) Vínculo interno articulado</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td><td>$2 \cdot K_2$

2 incógnitas internas se conocen mediante el equilibrio</td></tr>
</table>

Figura 3.15 – Incógnitas repetidas en los vínculos internos.

- **Incógnitas por tipos de vínculos externos**

  Los vínculos externos están contenidos en la formulación a través de cada uno de las barras que se vincula al sistema de referencia externo, así sólo quedan por considerar los h vínculos de primera especie o apoyos deslizantes. En caso de existir se deben restar del total de incógnitas el número de estos apoyos.

b) MÉTODO DE LOS CORTES

Este método es uno de los más utilizados y se basa en descomponer toda la estructura en *sub-estructuras isostáticas* que mantienen su equilibrio en forma aislada de la estructura principal, gracias a la imposición de las fuerzas internas en forma de fuerzas externas de extremo de barra. Sobre la estructura así descompuesta se evalúa la siguiente ecuación,

$$GIE = i - 3 \cdot b \tag{3.9}$$

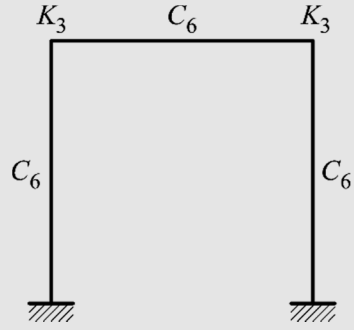
donde i es el número de fuerzas incógnitas y b es el número de barras del sistema estructural.

A continuación, se presentan ejemplos que permiten ejercitar la utilización de las dos formas de obtener el grado de indeterminación estática GIE.

Ejemplo 3-1: Dada las siguientes estructuras planas, representadas en las figuras que se muestran a continuación, obtener en cada caso el grado de indeterminación estática por los dos métodos antes expuestos.

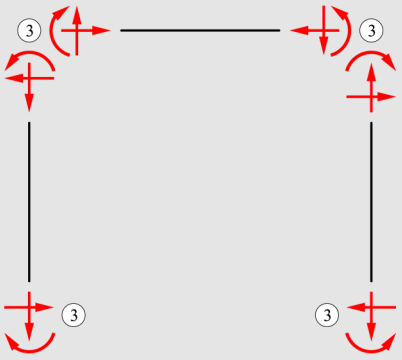
ESTRUCTURA 1
Método de las Barras

$$\left\{\begin{array}{l} C_6 = 3 \\ C_5 = 0 \\ C_4 = 0 \\ K_3 = 2 \\ K_2 = 0 \\ h = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow GIE = (3 \cdot 3) - (3 \cdot 2) = 9 - 6 = 3$$



Método de los Cortes

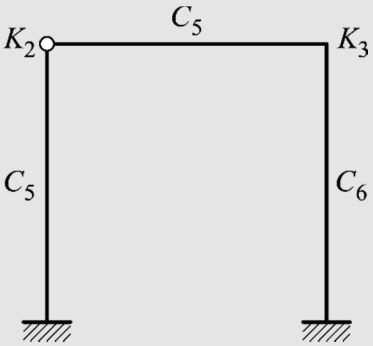
$$\left.\begin{matrix} i = 4\times 3 = 12 \\ b = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow GIE = (4\times 3) - (3\times 3) = 3$$



ESTRUCTURA 2

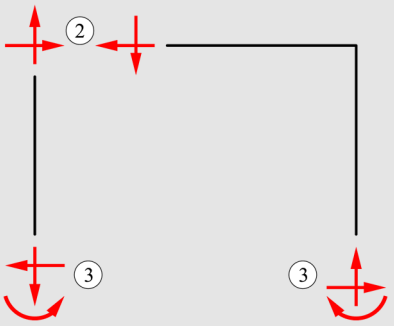
Método de las Barras

$$\left\{\begin{matrix} C_6 = 1 \\ C_5 = 2 \\ C_4 = 0 \\ K_3 = 1 \\ K_2 = 1 \\ h = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow GIE = (3\cdot 1 + 2\cdot 2) - (3\cdot 1 + 2\cdot 1) = 7 - 5 = 2$$



Método de los Cortes

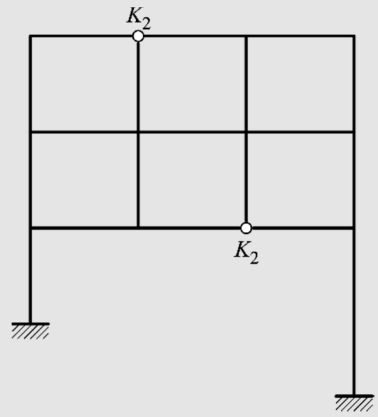
$$\left.\begin{matrix} i = 2\times 3 + 2 = 8 \\ b = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow GIE = (8) - (3\times 2) = 2$$



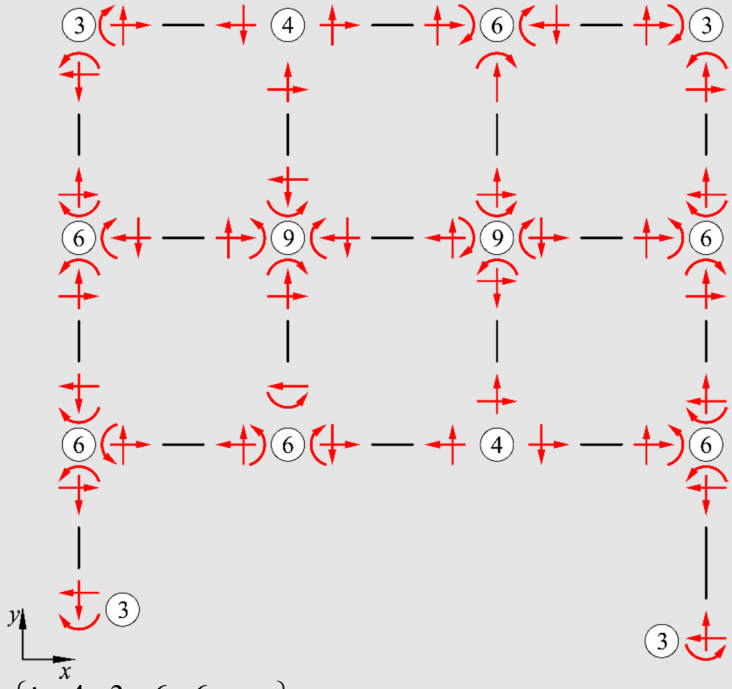
ESTRUCTURA 3

Método de las Barras

$$\left.\begin{array}{l} C_6 = 13 \\ C_5 = 6 \\ C_4 = 0 \\ K_3 = 2 \\ K_2 = 0 \\ h = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow GIE = (39+12)-(30+4) = 17$$



Método de los Cortes



$$\left.\begin{array}{l} i = 4\times 3 + 6\times 6 + \\ \quad 2\times 4 + 2\times 9 = 74 \\ b = 3\times 19 = 57 \end{array}\right\} \Rightarrow GIE = (74)-(57) = 17$$

En este último caso es necesario tener en consideración lo siguiente:

Una unión fija con n barras concurrentes tiene: $\boxed{(n\times 3)-3=\text{Incógnitas de fuerza}}$

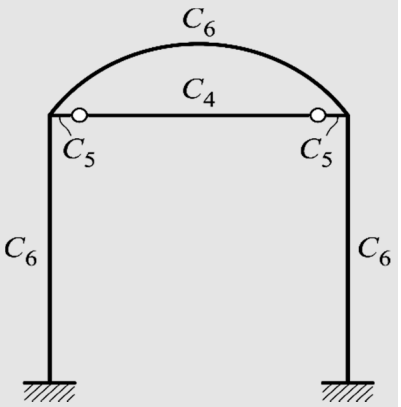
Una unión articulada con n barras concurrentes tiene:

$\boxed{(n\times 2)-2=\text{Incógnitas de fuerza}}$

ESTRUCTURA 4

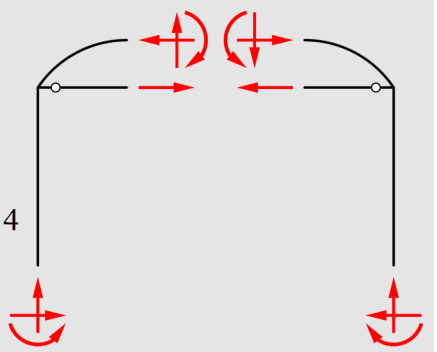
Método de las Barras

$$\left\{\begin{array}{l} C_6=3 \\ C_5=2 \\ C_4=1 \\ K_3=2 \\ K_2=2 \\ h=0 \end{array}\right\} \Rightarrow GIE=(9+4+1)-(6+4)=4$$



Método de los Cortes

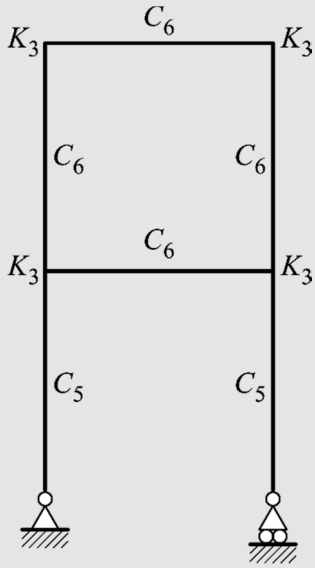
$$\left\{\begin{array}{l} i=6+1+3=10 \\ b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow GIE=(10)-(3\times 2)=4$$



ESTRUCTURA 5

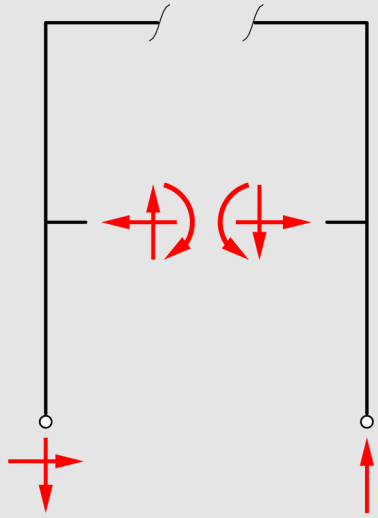
Método de las Barras

$$\left.\begin{array}{l} C_6 = 4 \\ C_5 = 2 \\ C_4 = 0 \\ K_3 = 4 \\ K_2 = 0 \\ h = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow GIE = (12+4) - (12) - 1 = 3$$



Método de los Cortes

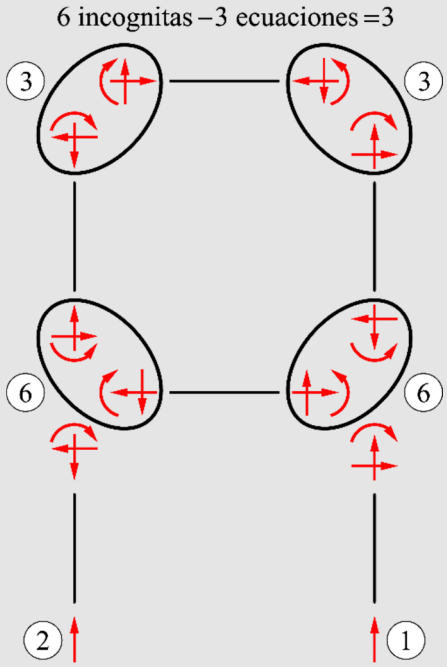
$$\left.\begin{array}{l} i = (2+1)+3 = 6 \\ b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow GIE = (6) - (3\times 1) = 3$$



O también se podría obtener el mismo resultado aislando todas las barras de la estructura

$$\left.\begin{aligned} i &= 3+(2\times 6)+(2\times 3)=21 \\ b &= 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

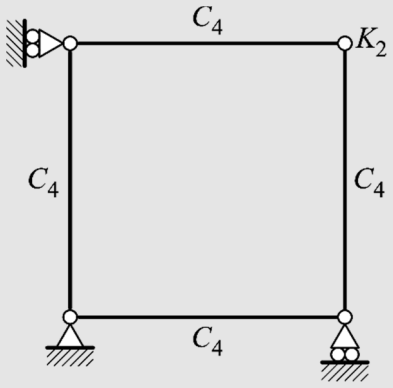
$$GIE=(21)-(3\times 6)=3$$



ESTRUCTURA 6

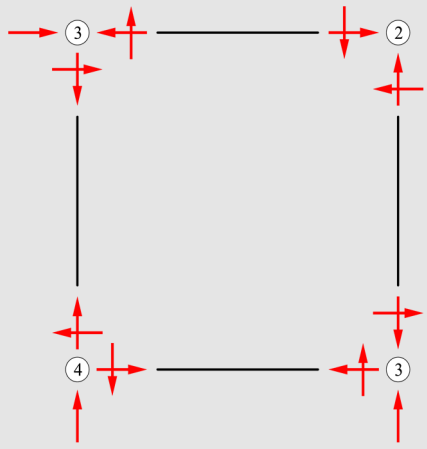
Método de las Barras

$$\left.\begin{aligned} C_6 &= 0 \\ C_5 &= 0 \\ C_4 &= 4 \\ K_3 &= 0 \\ K_2 &= 1 \\ h &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow GIE=(4)-(2)-2=0$$



Método de los Cortes

$$\left.\begin{matrix} i=(12)+3=6 \\ b=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow GIE=(12)-(3\times 4)=0$$

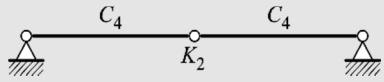


ESTRUCTURA 7

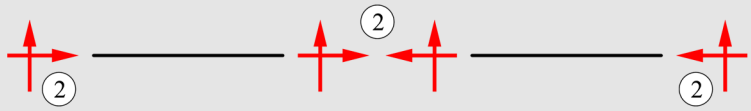
A continuación, se muestra un contraejemplo en el que los métodos anteriores muestran que es una estructura isostática, pero al tener tres rótulas alineadas configura un mecanismo no detectado por la formulación.

Método de las Barras

$$\left.\begin{matrix} C_6=0 \\ C_5=0 \\ C_4=2 \\ K_3=0 \\ K_2=1 \\ h=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow GIE=(2)-(2)=0$$

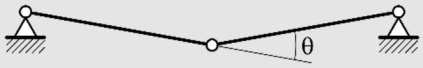


Método de los Cortes



$$\left.\begin{matrix} i=6 \\ b=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow GIE=(6)-(3\times 2)=0$$

Este tipo de estructura necesita trabajar en estado deformado para equilibrarse. Esto se muestra en la siguiente figura,



3.4 Leyes de esfuerzo para una viga simple

3.4.1 Forma matemática de enfocar el problema mecánico de cálculo de esfuerzos internos

En este apartado se aborda el problema de cálculo de los esfuerzos internos, o leyes de esfuerzo, en una viga simplemente apoyada a partir de la integración directa de la ecuación diferencial de equilibrio (3.2).

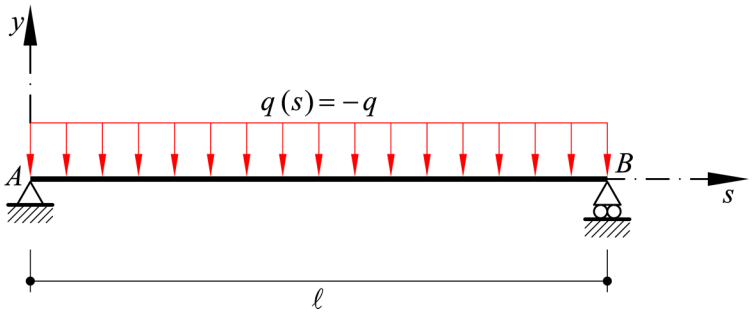


Figura 3.16 – Viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente distribuida en el sentido negativo al sistema de referencias adoptado.

En este caso particular, las ecuaciones de equilibrio (3.2) quedan reducidas a las dos expresiones siguientes: $q(s) = \frac{d\mathrm{Q}(s)}{ds}$ y $\mathrm{Q}(s) = \frac{d\mathrm{M}(s)}{ds}$. Luego, a partir de estas expresiones, la **determinación del momento flector y del esfuerzo de corte se realiza mediante integración de las ecuaciones diferenciales de equilibrio.**

Es decir,

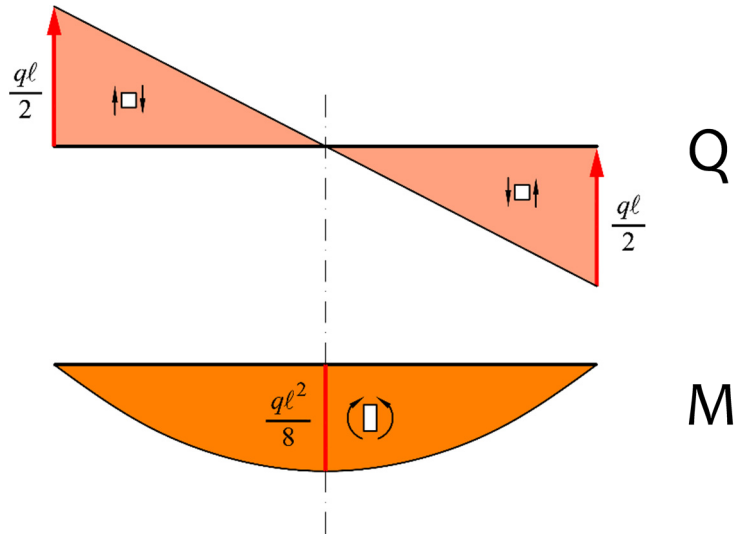
$$\begin{cases} \mathrm{Q}(s) = \int q(s)\, ds \; = \int -q\, ds \; = -q \cdot s + C_{\mathrm{Q}} \\ \mathrm{M}(s) = \int \mathrm{Q}(s)\, ds \; = \int (-q \cdot s + C_{\mathrm{Q}})\, ds \; = -\dfrac{q \cdot s^2}{2} + C_{\mathrm{Q}}\, s + C_{\mathrm{M}} \end{cases} \tag{3.10}$$

donde C_{Q} y C_{M} son constantes de integración.

Las **condiciones de contorno** para obtener C_{Q} y C_{M} están dadas por:

$$\begin{cases} \text{para } s = 0 \rightarrow \mathrm{M}(s=0) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; C_{\mathrm{M}} = 0 \\ \text{para } s = \ell \rightarrow \mathrm{M}(s=\ell) = 0 = -\dfrac{q \cdot \ell^2}{2} + C_{\mathrm{Q}}\, \ell \;\; \Rightarrow \;\; C_{\mathrm{Q}} = \dfrac{q \cdot \ell}{2} \end{cases} \tag{3.11}$$

Sustituyendo estas constantes de integración en las ecuaciones (3.10) se obtienen las siguientes expresiones para el momento flector y esfuerzo de corte,



$$\begin{cases} \mathrm{Q}(s) = -q \cdot s + \dfrac{q\,\ell}{2} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Q}(0) = V_A = \dfrac{q\,\ell}{2} \\ \mathrm{Q}(\ell) = -V_B = -\dfrac{q\,\ell}{2} \end{cases} \\ \mathrm{M}(s) = -\dfrac{q \cdot s^2}{2} + \dfrac{q\,\ell}{2} s \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{M}(0) = 0 \\ \mathrm{M}(\ell) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Puesto que el corte deriva del momento, $\mathrm{Q} = \dfrac{d\mathrm{M}}{ds}$, el máximo valor del momento resulta donde el corte es nulo, esto es,

$$\mathrm{M}^{\max} \text{ para } \mathrm{Q} = \frac{d\mathrm{M}}{ds} = 0 = -q \cdot s + \frac{q\,\ell}{2} \Rightarrow s = \frac{\ell}{2}$$

$$\mathrm{M}^{\max} = \mathrm{M}(s = \frac{\ell}{2}) = -\frac{q\,\ell^2}{8} + \frac{q\,\ell^2}{4} = \frac{q\,\ell^2}{8}$$

Obsérvese que, en la rebanada diferencial contenida dentro del diagrama de corte y momento, se dibuja a la izquierda el sentido del corte y del momento resultante de las expresiones antes obtenidas.

3.4.2 Forma convencional de resolver el problema mecánico de cálculo de esfuerzos internos

En este apartado se aborda el problema de cálculo de los esfuerzos internos, o leyes de esfuerzo, en una viga simplemente apoyada a partir de la forma convencional, basado en el concepto de equilibrio de una rebanada diferencial de la barra. Esta forma de plantear el problema es la clásica y muy útil para aquellos casos simples, evitando así la integración de la ecuación diferencial del equilibrio. Sin embargo, cabe notar que en los casos de cargas complejas se recomienda la utilización del método presentado en la sección anterior.

A continuación, se describe el procedimiento a seguir;

a) **Poner en evidencia las reacciones de los vínculos**. Esto implica remover los vínculos y en sustitución de los mismos poner las fuerzas que éstos hacen sobre la estructura, tal como se muestra en la Figura 3.17.

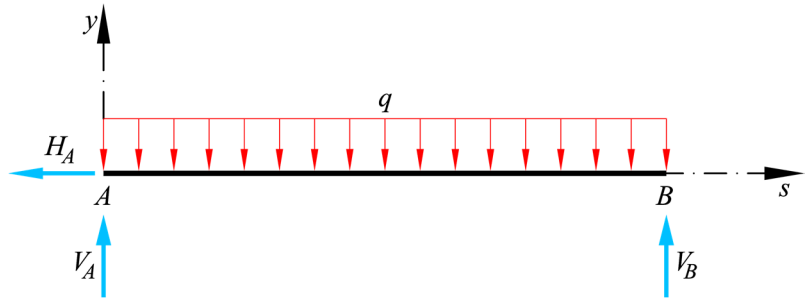


Figura 3.17 – Viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente distribuida con los vínculos sustituidos por las correspondientes fuerzas reactivas.

b) **Cálculo de las reacciones o incógnitas de fuerzas**. Se formulan las ecuaciones de equilibrio para toda la estructura dadas por las ecs. (3.1),

$$\begin{cases} \uparrow & \sum F_s = 0 = -H_A \\ \rightarrow & \sum F_y = 0 = V_A + V_B - q\,\ell \\ \circlearrowright & \sum M_A = 0 = -V_B\,\ell + \dfrac{q\,\ell^2}{2} \;\rightarrow\; V_B = \dfrac{q\,\ell}{2} \xrightarrow{Sust.\sum F_y} V_A = \dfrac{q\,\ell}{2} \end{cases} \tag{3.12}$$

Los signos obtenidos son *signos eficaces*, es decir que son positivos si concuerdan con el sentido de la fuerza supuesta, y son negativos cuando el resultado tiene sentido opuesto al supuesto. Obsérvese también que de aquí resulta que $V_A \equiv C_Q$.

c) **Cálculo de los esfuerzos internos de sección, función del corte y flector.** Se utiliza el método de los cortes para poner en evidencia los esfuerzos internos de corte y flector en la rebanada diferencial. Una vez hecho esto, se exige el equilibrio de cada una de las partes de la estructura. En este caso se ha elegido la parte izquierda (ver detalle en la Figura 3.18),

$$\begin{cases} \uparrow & \sum \left(F_s\right)_s^{izq} = 0 \\ \rightarrow & \sum \left(F_y\right)_s^{izq} = 0 = V_A - q\,s - \mathsf{Q}(s) \;\rightarrow\; \boxed{\mathsf{Q}(s) = V_A - q\,s} \\ \circlearrowleft & \sum \left(M\right)_s^{izq} = 0 = V_A\,s - \frac{q\,s^2}{2} - \mathsf{M}(s) \;\rightarrow\; \boxed{\mathsf{M}(s) = V_A\,s - \frac{q\,s^2}{2}} \end{cases} \tag{3.13}$$

Sustituyendo $V_A = \frac{q\,s}{2}$ en las ecuaciones anteriores, quedan completamente definidas las leyes de variación de los esfuerzos internos para cualquier sección transversal s, de donde resultan definidas las leyes de variación de estos esfuerzos internos:

- **Esfuerzo de Corte** $\mathsf{Q}(s)$ como la suma de todas las fuerzas a la izquierda de la sección transversal, proyectada sobre dicha sección,

$$\boxed{\mathsf{Q}(s) = \frac{q\,\ell}{2} - q\,s} \tag{3.14}$$

- **Momento Flector** $\mathsf{M}(s)$ como la suma de los momentos de todas las fuerzas a la izquierda de la sección, respecto de dicha sección,

$$\boxed{\mathsf{M}(s) = \frac{q\,\ell}{2}s - \frac{q\,s^2}{2}} \quad \xrightarrow{\text{se verifica}} \mathsf{Q}(s) = \frac{d\mathsf{M}(s)}{s} \tag{3.15}$$

De la misma forma se pueden obtener estos dos esfuerzos calculándolos desde la derecha de la barra y cambiándoles el signo, es decir: $\mathsf{Q}(s) = -\mathsf{Q}(\ell - s)$, y $\mathsf{M}(s) = -\mathsf{M}(\ell - s)$ (ver Figura 3.18).

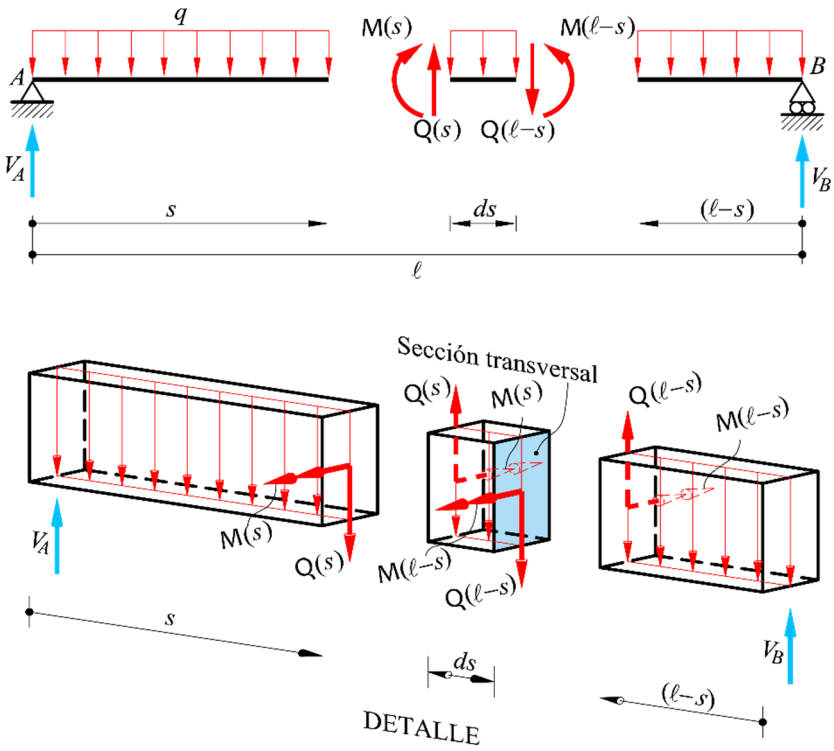


Figura 3.18 – Representación de los esfuerzos de corte y momento flector en la sección transversal de una rebanada deferencial de una barra.

d) **Trazado de las leyes de esfuerzos internos de sección, función de corte y flector**. Se representan gráficamente a continuación las ecuaciones de los esfuerzos internos obtenidas mediante las ecuaciones (3.14) y (3.15). Como se observa en la Figura 3.19, el **Esfuerzo de Corte** se grafica teniendo en cuenta el signo de la resultante de las fuerzas a la izquierda de la sección *s* respecto del eje positivo "*y*" (es decir positivo hacia la parte superior de la barra). Por el contrario, el **Momento Flector** se ciñe al signo de giro de su correspondiente vector que está sobre el eje "*x*", ortogonal al plano de la viga (*z*-*y*), y por lo tanto no tiene ninguna relación con el eje positivo "*y*". Esto da lugar a establecer una representación convencional, que en este libro se conviene graficarlo siempre del lado de las fibras traccionadas de la barra y, para evitar confusión en su trazado, los momentos representados en la sección diferencial siempre deben converger hacia la barra (ver Figura 3.19).

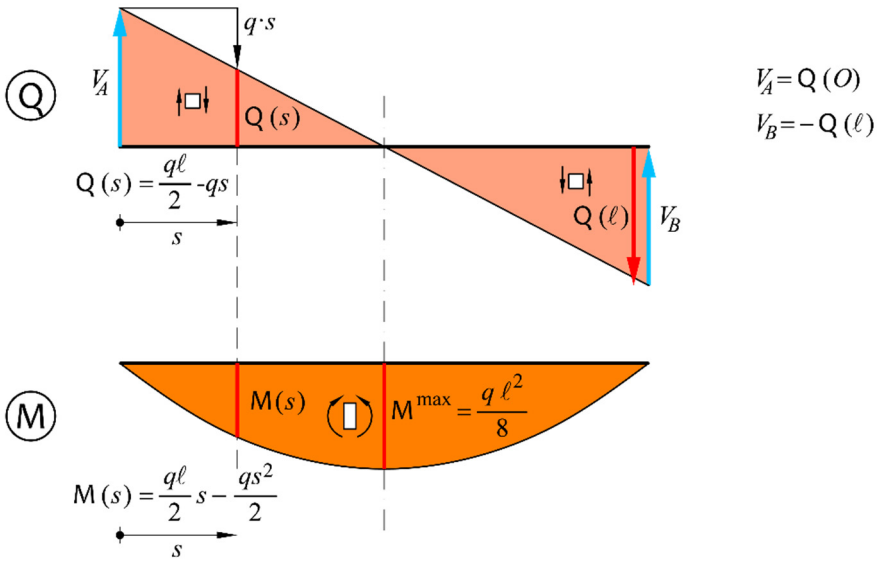


Figura 3.19 – Representación gráfica del trazado de los esfuerzos de corte y momento flector para cualquier sección transversal *s*.

En resumen, se puede decir que **el diagrama de momentos flectores** se representa del lado de las fibras traccionadas o estiradas, tal como muestra la Figura 3.20. Se dice que un ***momento flector es positivo*** cuando este signo coincide con el sentido de rotación del momento flector de la izquierda de la rebanada diferencial (o de la derecha cambiada de signo).

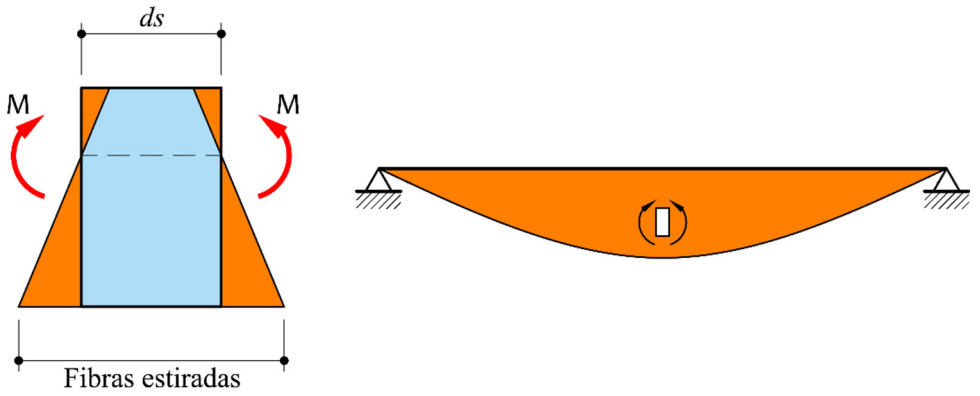


Figura 3.20 – Representación gráfica del momento flector para una sección transversal *s*.

En el caso del **diagrama de esfuerzo de corte**, se representa la dirección y sentido del corte en la rebanada diferencial, a la izquierda de la sección en análisis (ver Figura 3.21) (o de la derecha cambiada de signo). Se dice que un ***esfuerzo de corte es positivo*** cuando el signo en la cara izquierda de la rebanada coincide con el sentido positivo del sistema de referencia local.

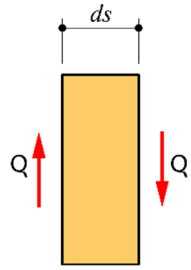


Figura 3.21 – Representación gráfica del esfuerzo de corte para una sección transversal *s*.

En el caso del **diagrama de esfuerzo axil o normal**, se representa la dirección y sentido de este esfuerzo en la rebanada diferencial, a la izquierda de la sección en análisis (ver Figura 3.22) (o de la derecha cambiada de signo). Al sistema de fuerzas axiles, en equilibrio, que aparece en la rebanada de la mencionada figura se le llama de tracción porque produce estiramientos.

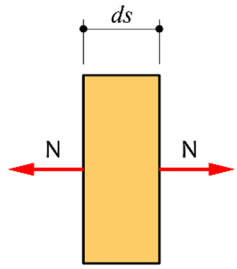
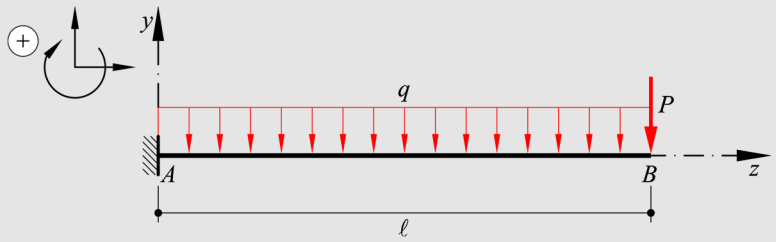


Figura 3.22 – Representación gráfica del esfuerzo axil para una sección transversal *s*.

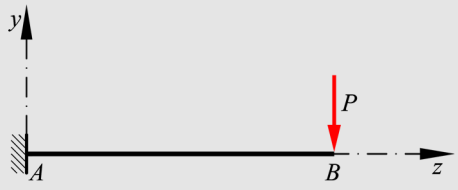
Ejemplo 3-2: Dada la estructura plana de la figura, obtener:

a) Las leyes o diagramas de momento flector y esfuerzo de corte siguiendo la forma convencional de cálculo,

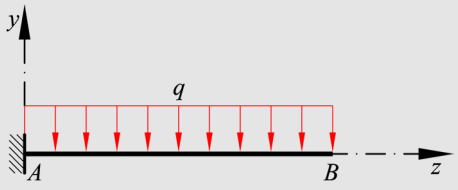
b) Representar gráficamente dichos diagramas,



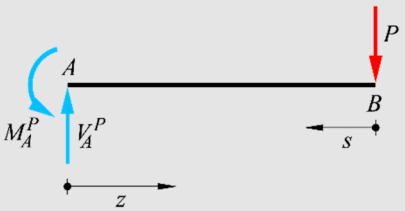
Se resuelve este ejemplo a través del principio de superposición, descomponiendo la viga en dos vigas con cargas más simples cada una de ellas y luego superponiendo los resultados,

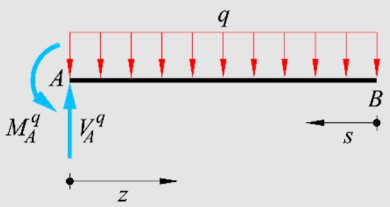


a) **Puesta en evidencia los vínculos y cálculo de reacciones**



a) **Puesta en evidencia los vínculos y cálculo de reacciones**





$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum F_y = 0 = V_A^P - P \rightarrow \boxed{V_A^P = P} \\ \sum M_A = 0 = -M_A^P + P\,\ell \rightarrow \boxed{M_A^P = P \cdot \ell} \end{cases}$$

b) **Ecuaciones de Corte y Momento flector**

$$\begin{cases} \mathrm{Q}^P(z)\Big|_A^B = V_A^P = P \\ \mathrm{M}^P(z)\Big|_A^B = -M_A^P + V_A^P\, z = P(z-\ell) \end{cases}$$

c) **Verificación de los esfuerzos**

$$\mathrm{Q}^P(z)\Big|_A^B = \frac{d\mathrm{M}^P(z)\Big|_A^B}{dz} = \frac{d}{dz}\big(P(z-\ell)\big) = P$$

d) **Ecuaciones del Escuerzo de Corte y Momento flector desde la derecha**

$$\begin{cases} \mathrm{Q}^P(s)\Big|_B^A = -P \\ \mathrm{M}^P(s)\Big|_B^A = P\,s \end{cases} \xrightarrow{s=\ell-z} \begin{cases} \mathrm{Q}^P(z)\Big|_A^B = -\mathrm{Q}^P(s)\Big|_B^A = P \\ \mathrm{M}^P(z)\Big|_A^B = -\mathrm{M}^P(s)\Big|_B^A = P(z-\ell) \end{cases}$$

Recuperando así las mismas expresiones anteriores para los esfuerzos $\mathrm{Q}^P(z)\Big|_A^B$ y $\mathrm{M}^P(z)\Big|_A^B$.

e) **Trazado de las Leyes de Esfuerzo Cortante y Momento flector**

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum F_y = 0 = V_A^q - q\ell \rightarrow \boxed{V_A^q = q\ell} \\ \sum M_A = 0 = -M_A^q + \dfrac{q\ell^2}{2} \rightarrow \boxed{M_A^q = \dfrac{q\ell^2}{2}} \end{cases}$$

b) **Ecuaciones de Corte y Momento flector**

$$\begin{cases} \mathrm{Q}^q(z)\Big|_A^B = V_A^q - qz = q(\ell - z) \\ \mathrm{M}^q(z)\Big|_A^B = -M_A^q + V_A^q\, z - \dfrac{qz^2}{2} = \\ \qquad = -\dfrac{q\ell^2}{2} + q\ell z - \dfrac{qz^2}{2} = -\dfrac{q}{2}(\ell - z)^2 \end{cases}$$

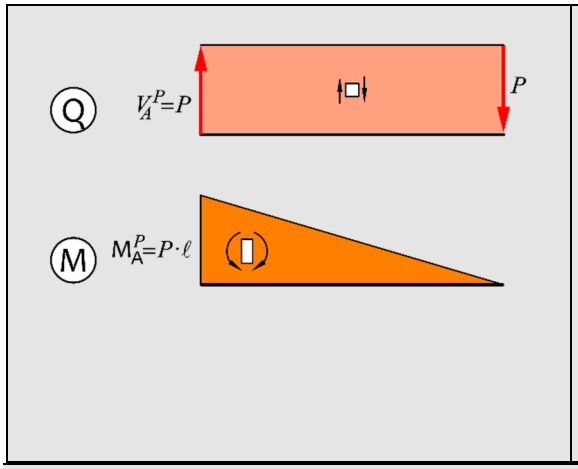
c) **Verificación de los esfuerzos**

$$\mathrm{Q}^q(z)\Big|_A^B = \frac{d\mathrm{M}^q(z)\Big|_A^B}{dz} = \frac{d}{dz}\left(-\frac{q}{2}(\ell - z)^2\right) = q(\ell - z)$$

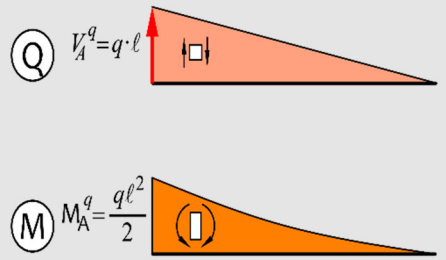
d) **Ecuaciones del Escuerzo de Corte y Momento flector desde la derecha**

$$\begin{cases} \mathrm{Q}^q(s)\Big|_B^A = -qs \\ \mathrm{M}^q(s)\Big|_B^A = \dfrac{qs^2}{2} \end{cases} \xrightarrow{s=\ell-z} \begin{cases} \mathrm{Q}^q(z)\Big|_A^B = -\mathrm{Q}^q(s)\Big|_B^A = q(\ell - z) \\ \mathrm{M}^q(z)\Big|_A^B = -\mathrm{M}^q(s)\Big|_B^A = -\dfrac{q}{2}(\ell - z)^2 \end{cases}$$

Recuperando así las mismas expresiones anteriores para los esfuerzos $\mathrm{Q}^q(z)\Big|_A^B$ y $\mathrm{M}^q(z)\Big|_A^B$.

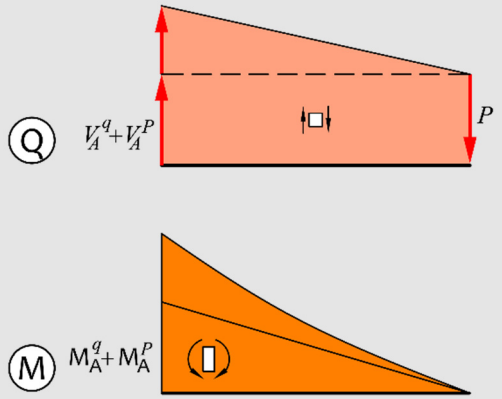


e) **Trazado de las Leyes de Esfuerzo Cortante y Momento flector**



Superponiendo los resultados antes obtenidos, resultan las leyes de **Momento Flector y Esfuerzo Cortante** de la viga propuesta, esto es,

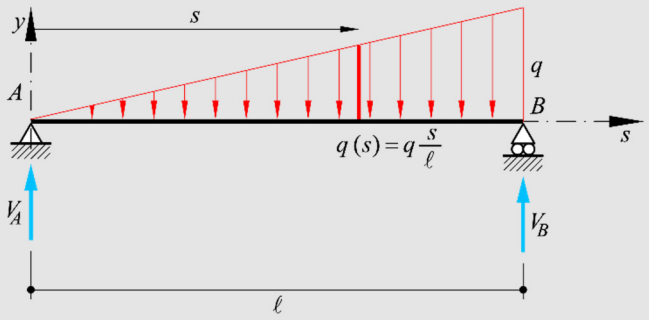
$$\begin{cases} Q(z)\Big|_A^B = Q^P(z)\Big|_A^B + Q^q(z)\Big|_A^B = P + q(\ell - z) \\ M(z)\Big|_A^B = M^P(z)\Big|_A^B + M^q(z)\Big|_A^B = P(z-\ell) - \dfrac{q}{2}(\ell - z)^2 \end{cases}$$



Ejemplo 3-3: Dada la viga plana de la figura, obtener:

a) La ley o diagrama de Momento Flector y Esfuerzo de Corte integrando la ecuación diferencial del equilibrio.

b) Representar gráficamente dichos diagramas.



En este caso se utilizan las ecuaciones de equilibrio (3.2), $q(s)=\dfrac{d\mathrm{Q}(s)}{ds}$ y $\mathrm{Q}(s)=\dfrac{d\mathrm{M}(s)}{ds}$, tal que integrándolas se obtienen las expresiones del momento flector y del esfuerzo de corte,

$$\begin{cases} \mathrm{Q}(s)=\int q(s)\,ds = \int -q\dfrac{s}{\ell}\,ds = -\dfrac{q\cdot s^2}{2\,\ell}+C_{\mathrm{Q}} \\ \mathrm{M}(s)=\int \mathrm{Q}(s)\,ds = \int (-\dfrac{q\cdot s^2}{2\,\ell}+C_{\mathrm{Q}})\,ds = -\dfrac{q\cdot s^3}{6\,\ell}+C_{\mathrm{Q}}\,s+C_{\mathrm{M}} \end{cases}$$

Condiciones de contorno en los apoyos A y B para obtener las constantes de integración C_{Q} y C_{M}

$$\begin{cases} \text{para } s=0 \rightarrow \mathrm{M}(s=0)=0 \;\Rightarrow\; C_{\mathrm{M}}=0 \\ \text{para } s=\ell \rightarrow \mathrm{M}(s=\ell)=0=-\dfrac{q\cdot \ell^2}{6}+C_{\mathrm{Q}}\,\ell \;\Rightarrow\; C_{\mathrm{Q}}=\dfrac{q\cdot\ell}{6} \end{cases}$$

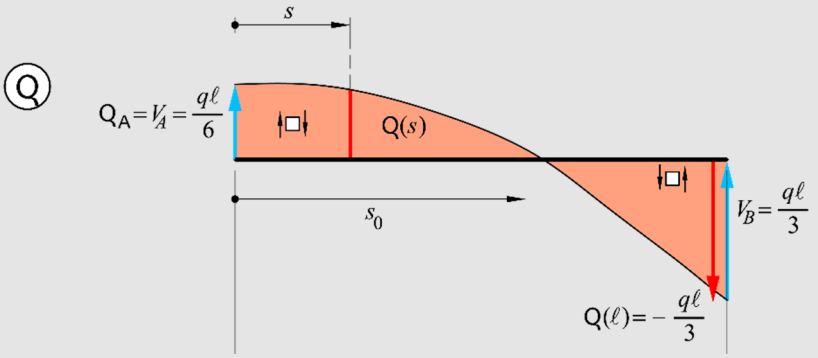
Sustituyendo estas constantes de integración en la **Ecuación del Corte** $\mathrm{Q}(s)$, se obtiene,

$$\mathrm{Q}(s) = -\frac{q\cdot s^2}{2\,\ell} + \frac{q\cdot \ell}{6} \;\rightarrow\; \begin{cases} \mathrm{Q}(0) = \dfrac{q\cdot\ell}{6} \\ \mathrm{Q}(\ell) = -\dfrac{q\cdot\ell}{2} + \dfrac{q\cdot\ell}{6} = -\dfrac{q\cdot\ell}{3} \end{cases}$$

Tal que los ceros de esta función de Corte están en,

$$\mathrm{Q}(s_0) = 0 = -\frac{q\cdot s_0^2}{2\,\ell} + \frac{q\cdot\ell}{6} \;\Rightarrow s_0 = \pm\sqrt{\frac{\ell^2}{3}} = \pm\frac{\ell}{\sqrt{3}}\ ,$$

siendo $s_0 = \dfrac{\ell}{\sqrt{3}}$ la única raíz que está dentro del dominio de la viga.

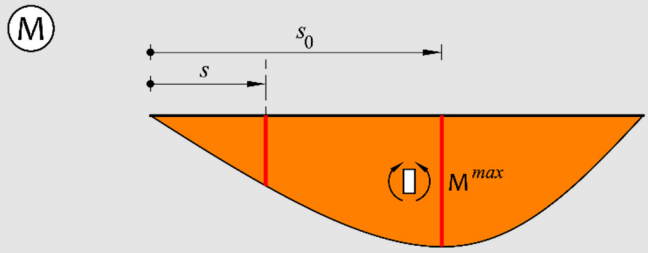


Sustituyendo las constantes de integración en las **ecuaciones del Momento** $\mathrm{M}(s)$, se obtiene,

$$\mathrm{M}(s) = -\frac{q\cdot s^3}{6\,\ell} + \frac{q\cdot\ell}{6}s \;\rightarrow\; \begin{cases} \mathrm{M}(0) = 0 \\ \mathrm{M}(\ell) = -\dfrac{q\cdot\ell^2}{6} + \dfrac{q\cdot\ell^2}{6} = 0 \end{cases}$$

Puesto que $\mathrm{Q}(s)\big|_{s=s_0} = 0 = \left.\dfrac{d\mathrm{M}(s)}{ds}\right|_{s=s_0}$, se obtiene el máximo de esta función de Momento Flector en s_0, punto en que el Esfuerzo de Corte es nulo,

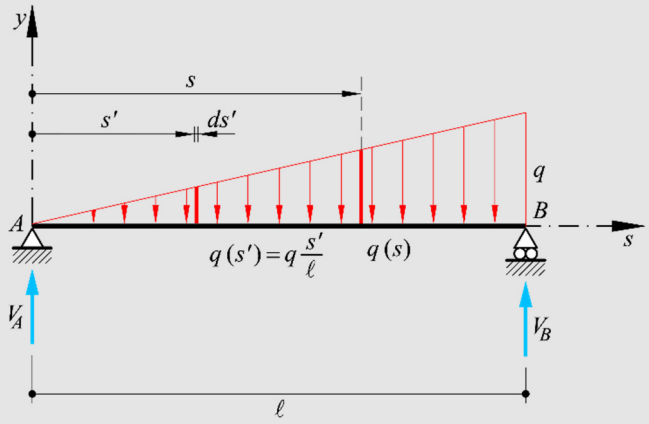
$$M^{max} = M(s_0) = -\frac{q \cdot s_0^3}{6\,\ell} + \frac{q \cdot \ell}{6} s_0 = 0.06415\, q\, \ell^2$$



Ejemplo 3-4: Dada la misma viga plana que se ha resuelto en el **Ejemplo 3-3**, se pide ahora obtener:

a) La ley o diagrama de momento flector y esfuerzo de corte siguiendo la forma convencional de cálculo.

b) Representar gráficamente dichos diagramas.



Puesta en evidencia los vínculos y cálculo de reacciones

En este caso es necesario obtener las reacciones de vínculo V_A y V_B a través de las ecuaciones de equilibrio (3.1) de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura,

$$\begin{cases} \uparrow \sum F_y = 0 = V_A + V_B - \int_0^{\ell} (\frac{q\,s'}{\ell}) ds' = V_A + V_B - \frac{q\ell}{2} \\ \rightarrow \sum F_z = 0 \\ \circlearrowleft \sum M_A = 0 = -V_B\,\ell + \int_0^{\ell} (\frac{q\,s'}{\ell}) s' ds' = -V_B\,\ell + \frac{q\ell^2}{3} \end{cases}$$

Resultando de la tercera ecuación $V_B = \frac{q}{3}\ell$ y, sustituyendo ésta en la primera de las ecuaciones, resulta $V_A = -V_B + \frac{q\ell}{2} = -\frac{q\ell}{3} + \frac{q\ell}{2} = \frac{q\ell}{6}$, siendo esta última la constante de integración $V_A \equiv C_Q = \frac{q\,\ell}{6}$ obtenida de la condición de contorno en B encontrada en el ejemplo anterior.

Ecuaciones del Esfuerzo de Corte y Momento Flector

En este caso, al conocer las condiciones de contorno del problema, se puede hacer una integral definida para cada función, de la siguiente forma,

$$\begin{cases} \mathrm{Q}(s) = V_A + \int_0^{s} q(s')ds' = V_A + \int_0^{s} -\frac{q\,s'}{\ell} ds' = \frac{q\,\ell}{6} - \frac{q\,s^2}{2\,\ell} \\ \mathrm{M}(s) = \cancel{M_A}^{=0} + \int_0^{s} \mathrm{Q}(s')ds' = \int_0^{s} \left(\frac{q\,\ell}{6} - \frac{q\,s'^2}{2\,\ell} \right) ds' = \frac{q\,\ell}{6} s - \frac{q\,s^3}{6\,\ell} \end{cases}$$

Que, como puede verse, coinciden con las expresiones obtenidas en el ejemplo anterior (Ejemplo 3-3).

Trazado de las Leyes de Esfuerzo Cortante y Momento Flector

Puesto que las ecuaciones son las mismas que las obtenidas anteriormente, los diagramas correspondientes a los respectivos Esfuerzos de Corte y Momento Flector no se volverán a representar.

Ejemplo 3-5: Dada la misma viga plana que se ha resuelto en el **Ejemplo 3-3** y en el **Ejemplo 3-4** se pide ahora obtener:

a) Las leyes o diagramas de momento flector y esfuerzo de corte siguiendo la forma convencional de cálculo, pero aprovechando el conocimiento de la posición de los centros geométricos de cada figura plana que intervenga en los cálculos (cargas, diagrama de corte, diagrama de momento).

b) Representar gráficamente dichos diagramas.

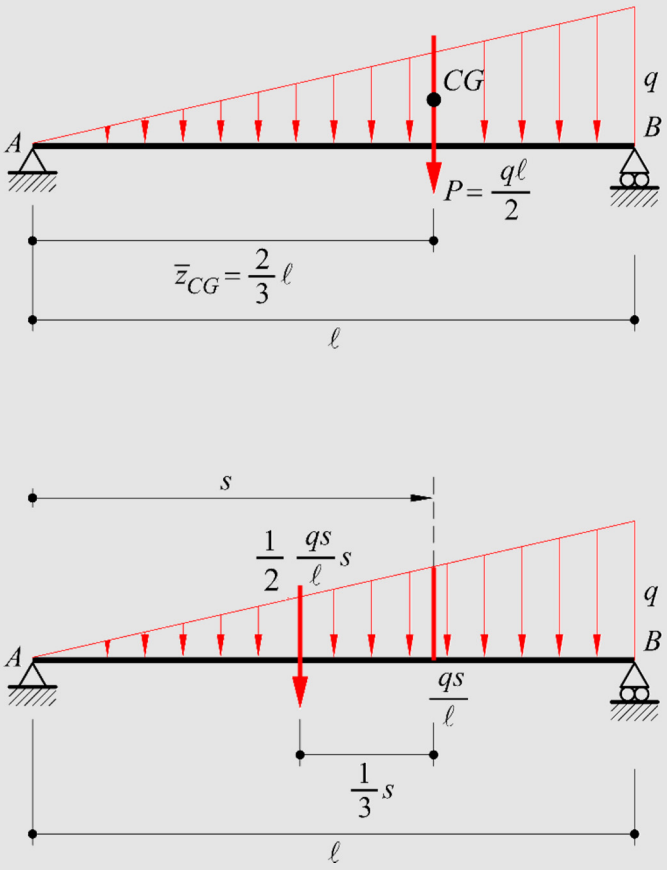
La obtención de estas leyes de esfuerzo se puede simplificar aún más, si se conoce el centro geométrico CG por donde pasa la resultante del diagrama de cargas. Así, para este caso particular, la resultante de la carga triangular actuante es una fuerza $P = q\ell/2$ aplicada en el centro geométrico del triángulo ubicado a una distancia $\overline{z}_{CG} = 2\ell/3$ del apoyo *A*. En este caso se puede proceder de la siguiente forma.

Cálculo de reacciones

Nuevamente se obtienen las reacciones de vínculo V_A y V_B a través de las ecuaciones de equilibrio (3.1) de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura, y que igualmente coinciden con las condiciones de contorno obtenidas en el ejemplo anterior.

$$\begin{cases} \uparrow & \sum F_y = 0 = V_A + V_B - P = V_A + V_B - \dfrac{q\ell}{2} \\ \rightarrow & \sum F_z = 0 \\ \circlearrowleft & \sum M_A = 0 = -V_B\,\ell + P\,\overline{z}_{CG} = -V_B\,\ell + \left(\dfrac{q\ell}{2}\right)\left(\dfrac{2\ell}{3}\right) = -V_B\,\ell + \dfrac{q\ell^2}{3} \end{cases}$$

Resultando, al igual que antes, de la tercera ecuación $V_B = \dfrac{q}{3}\ell$, y sustituyendo ésta en la primera de las ecuaciones resulta $V_A = -V_B + \dfrac{q\ell}{2} = -\dfrac{q\ell}{3} + \dfrac{q\ell}{2} = \dfrac{q\ell}{6}$, coincidiendo aquí también esta última con la contante de integración $V_A \equiv C_{\mathrm{Q}} = \dfrac{q \cdot \ell}{6}$ obtenida de la condición de contorno en *B* determinada en el ejemplo anterior.



Ecuaciones del Esfuerzo de Corte y Momento Flector

En este caso, al conocer la fuerza total actuante $P=\frac{q\ell}{2}$, y la distancia del apoyo *A* al centro geométrico del triángulo $\overline{z}_{CG}=\frac{2\ell}{3}$, se procede de la siguiente forma,

$$\begin{cases} \mathrm{Q}(s)=V_A-\left(\frac{1}{2}\frac{q\,s}{\ell}s\right)=V_A-\frac{q\cdot s^2}{2\ell}=\frac{q\cdot\ell}{6}-\frac{q\cdot s^2}{2\ell} \\ \mathrm{M}(s)=\cancel{M_A}^{=0}+V_A s-\left(\frac{1}{2}\frac{q\,s}{\ell}s\right)\left(\frac{s}{3}\right)=\frac{q\cdot\ell}{6}s-\frac{q\cdot s^3}{6\ell} \end{cases}$$

Que, como puede verse, coinciden nuevamente con las expresiones obtenidas en el **Ejemplo 3-3** y **Ejemplo 3-4**.

Trazado de las Leyes de Esfuerzo Cortante y Momento Flector

Puesto que las ecuaciones son las mismas que las obtenidas anteriormente, los diagramas correspondientes a los respectivos Esfuerzos de Corte y Momento Flector no se volverán a representar.

Comentario Adicional

Este último procedimiento puede resultar muy simple en algunos casos estructurales. Sin embargo, hay otros casos en que puede ser extremadamente complejo y por lo tanto resulta más simple la resolución que se ha presentado en el **Ejemplo 3-3**.

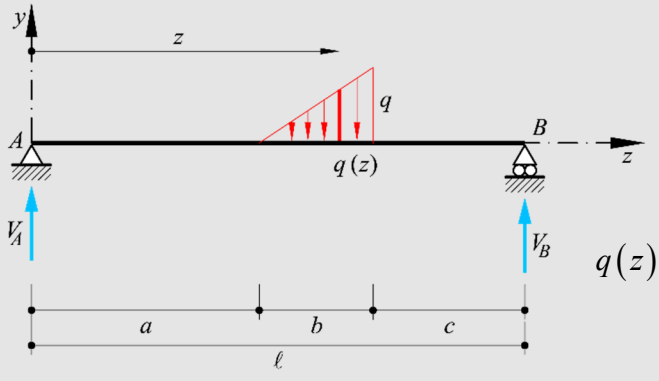
Ejemplo 3-6: Dada la viga plana representada en la figura:

a) Calcular las reacciones de vínculo.

b) Obtener las leyes o diagramas de momento flector y esfuerzo de corte, y representar gráficamente.

Reacciones de vínculo

Par obtener las reacciones de vínculo, en primer lugar se las evidencia, tal como lo muestra la siguiente figura,



$$q(z)=\begin{cases}0;\ \forall\ 0\le z\le a\\ \dfrac{q}{b}(z-a);\ \forall\ a\le z\le a+b\\ 0;\ \forall\ a+b\le z\le \underbrace{a+b+c}_{\ell}\end{cases}$$

A continuación, se calculan las reacciones de vínculo a través de las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{cases} \uparrow & \sum F_y = 0 = V_A + V_B - \dfrac{qb}{2} \\ \rightarrow & \sum F_z = 0 = H_A \\ \circlearrowleft & \sum M_A = 0 = \left(\dfrac{qb}{2}\right)\left(\dfrac{2}{3}b + a\right) - V_B\,\ell \quad \rightarrow \quad \boxed{V_B = \dfrac{qb}{6\ell}(2b+3a)} \end{cases}$$

y reemplazando en la primera ecuación se obtiene la reacción vertical en el apoyo A ,

$$V_A = \frac{qb}{2} - V_B = \frac{qb}{2} - \frac{qb}{6\ell}(2b+3a) = \frac{qb}{12\ell}\left(6\ell - 2(2b+3a)\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{V_A = \frac{qb}{6\ell}(b+3c)}$$

Leyes de Esfuerzo

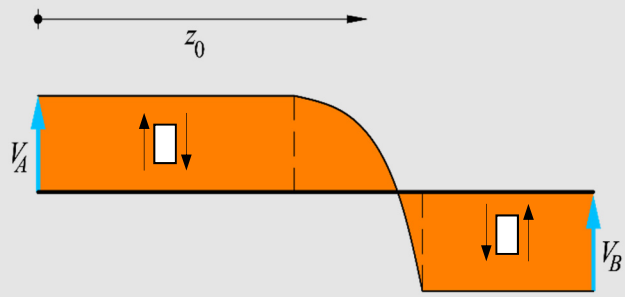
La Ley del **Esfuerzo de Corte** viene dada por

$$\mathrm{Q}(z) = \begin{cases} V_A = \dfrac{qb}{6\ell}(b+3c); & \forall \quad 0 \le z \le a \\ V_A - \dfrac{q(z)(z-a)}{2} = \dfrac{qb}{6\ell}(b+3c) - \dfrac{q}{2b}(z-a)^2; & \forall \quad a \le z \le a+b \\ V_A - \dfrac{qb}{2} = \dfrac{qb}{6\ell}(b+3c) - \dfrac{qb}{2}; & \forall \quad a+b \le z \le \ell \end{cases}$$

La posición z_0 , para la cual el cortante es nulo, se obtiene igualando a cero la ecuación del corte correspondiente al tramo $a \le z \le a+b$, o sea,

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(z) = 0 &= \frac{qb}{6\ell}(b+3c) - \frac{q}{2b}(z_0 - a)^2 \\ &\rightarrow (z_0 - a)^2 = \frac{b^2}{3\ell}(b+3c) \\ &\rightarrow \quad z_0 = a + \frac{b\sqrt{3\ell}\sqrt{b+3c}}{3\ell} \quad \rightarrow \quad \boxed{z_0 = a + \frac{b}{3\ell}\sqrt{3\ell(b+3c)}} \end{aligned}$$

Q



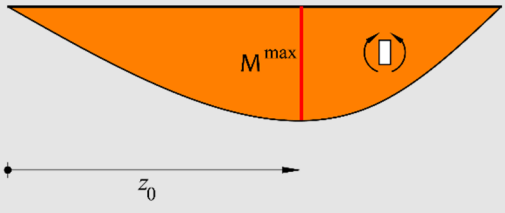
La Ley del **Momento Flector** resulta:

$$\mathrm{M}(z)=\begin{cases} V_A z=\dfrac{qb}{6\ell}(b+3c)z; \quad \forall \quad 0\le z\le a \\ V_A z-\dfrac{q(z)(z-a)}{2}\dfrac{(z-a)}{3}=\dfrac{qb}{6\ell}(b+3c)z-\dfrac{q}{b}\dfrac{(z-a)^3}{6}; \quad \forall \quad a\le z\le a+b \\ V_A z-\dfrac{qb}{2}\left[\dfrac{b}{3}+\left(z-(a+b)\right)\right]=\dfrac{qb}{6\ell}(b+3c)z-\dfrac{q}{2b}\left[\dfrac{b}{3}+\left(z-(a+b)\right)\right] \\ \qquad =-\left[-V_B(\ell-z)\right]=\dfrac{qb}{6\ell}(2b+3a)(\ell-z); \quad \forall \quad a+b\le z\le \ell \end{cases}$$

El momento máximo se produce en $z=z_0$, y vale

$$\boxed{\mathrm{M}^{\max}=\frac{qb(b+3c)}{54\ell^2}\left(2b\sqrt{3\ell(b+3c)}+9a\ell\right)}$$

M



3.5 Viga Gerber o en Cantiléver

3.5.1 Definición

Se denomina viga Gerber o en Cantiléver a aquella estructura isostática en la que el número de articulaciones internas es igual al número de apoyos móviles menos uno. Es decir, que se verifica

$$N_A = N_V - 1 \tag{3.16}$$

donde N_A es el número de articulaciones internas y N_V es el número de vínculos móviles. En la Figura 3.23 se representan ejemplos de este tipo de vigas.

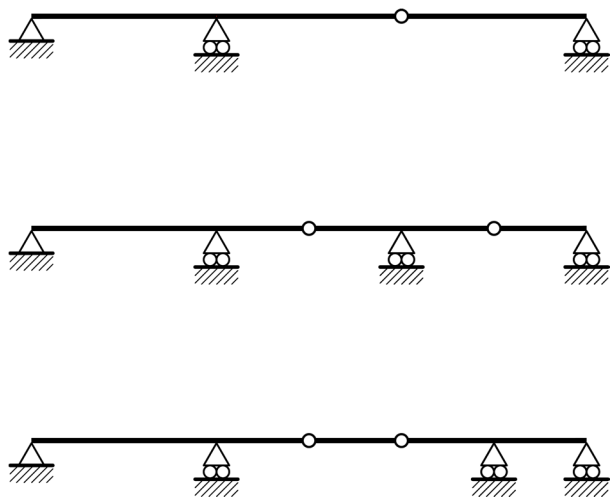


Figura 3.23 – Ejemplos de vigas Gerber.

Existen otros tipos de estructuras articuladas rectilíneas isostáticas, que no son vigas Gerber y que, sin embargo, se resuelven de la misma forma que éstas, tal como se verá en la Sección 3.5.2 y 3.5.3, y como se ilustra en la Figura 3.24.

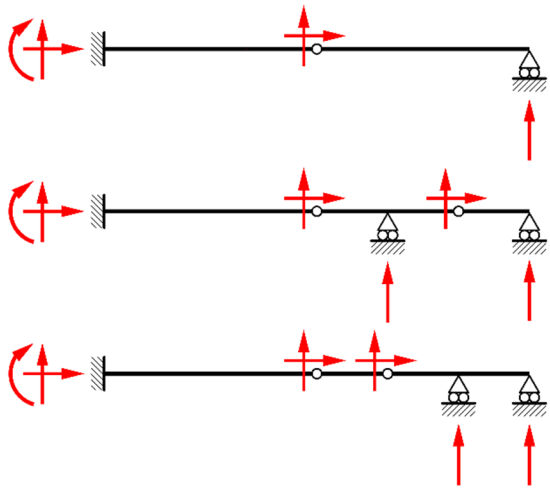


Figura 3.24 – Ejemplos de vigas Gerber.

3.5.2 Método analítico

El problema fundamental en este tipo de estructuras es el cálculo de las reacciones externas; para determinarlas se utilizan las tres ecuaciones básicas de la estática ya estudiadas, y se añaden tantas ecuaciones linealmente independientes como articulaciones internas tenga la estructura. Sea por ejemplo la viga representada en la Figura 3.25, las correspondientes ecuaciones vienen dadas por

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = f_z\left(H_A\right) \\ \sum F_y = 0 = f_y\left(V_A, V_B, V_D, P_1, P_2\right) \\ \sum M_A = 0 = f_{M_A}\left(V_B, V_D, P_1, P_2\right) \end{cases} \tag{3.17}$$

El conjunto de ecuaciones (3.17) contiene 3 ecuaciones con 4 incógnitas (H_A, V_A, V_B, V_D). La ecuación adicional, en este caso, se puedo obtener tomando equilibrio de momentos a la derecha de la articulación C, de la siguiente manera

$$\sum M_C^{Der} = 0 = f_{M_C}\left(V_D, P_2\right) \tag{3.18}$$

Esta última expresión (ecuación (3.18)) podría ser establecida respecto de cualquier punto del plano, siempre que se conozca allí el valor del momento.

Por ello es conveniente elegir el punto "C" ubicado en la articulación, donde se sabe que el momento allí es nulo.

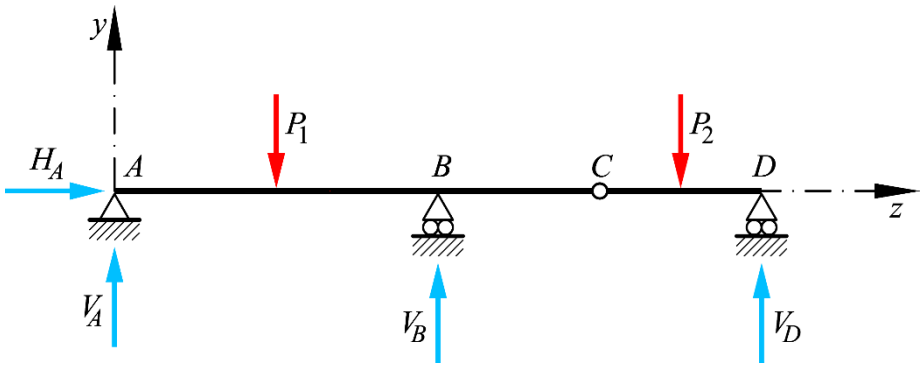


Figura 3.25 – Viga Gerber, determinación de reacciones.

3.5.3 Método de descomposición

En este caso se descompone la estructura en "n" estructuras isostáticas, siendo n el número de articulaciones menos uno.

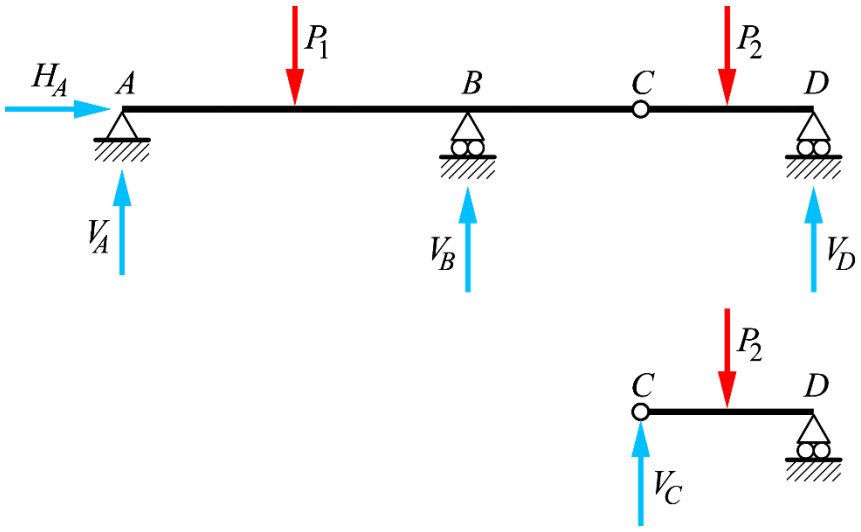


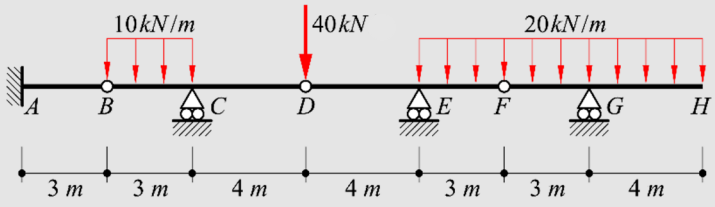
Figura 3.26 – Viga Gerber, método de descomposición.

Ejemplo 3-7: Dada la viga plana representada en la figura:

a) Calcular las reacciones de vínculo por descomposición.

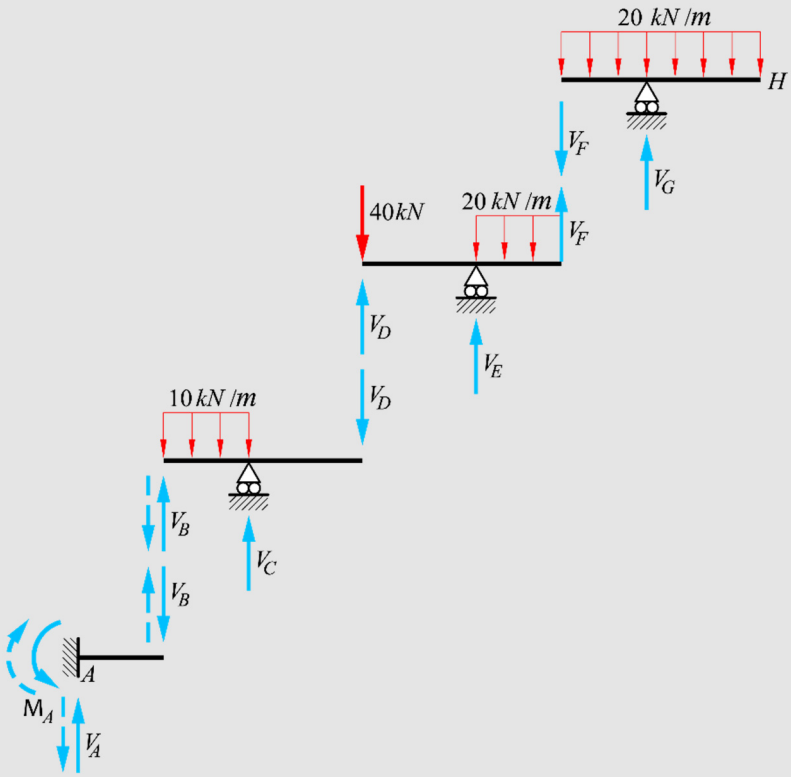
b) Calcular las reacciones de vínculo por el método analítico

c) Obtener las leyes de esfuerzos y representarlas gráficamente.



a) Reacciones de vínculo por descomposición

Para obtener las reacciones de vínculo en primer lugar se las ponen en evidencia, tal como lo muestra la siguiente figura,



A continuación, se calculan las reacciones de vínculo a través de las ecuaciones de equilibrio

$$\overline{FGH}\begin{cases}\sum F_y = 0 = -V_F + V_G - 20(3+4) \\ \sum M_F = 0 = -V_G 3 + 20\dfrac{(3+4)^2}{2} \rightarrow \boxed{V_G = \dfrac{490}{3} = 163.33kN}\end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{V_F = 163.33 - 140 = 23.33kN}$$

$$\overline{DEF}\begin{cases}\sum F_y = 0 = V_D - 40 + V_E - 20\cdot 3 + 23.33 \\ \sum M_D = 0 = -V_E 4 + 20\cdot 3(1.5+4) - 23.33(3+4) \rightarrow \boxed{V_E = 41.67kN}\end{cases}$$

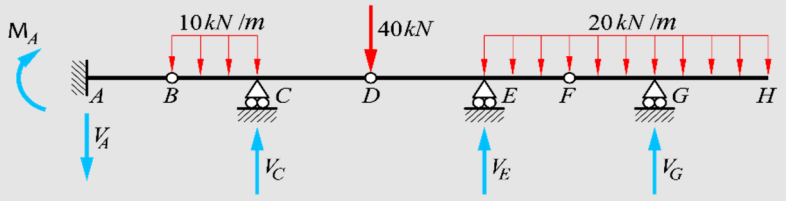
$$\rightarrow \boxed{V_D = 35kN}$$

$$\overline{BCD}\begin{cases}\sum F_y = 0 = V_B - 10\cdot 3 + V_C - \overbrace{35}^{V_D} \\ \sum M_B = 0 = 10\cdot\dfrac{3^2}{2} - V_C\cdot 3 + 35\cdot(4+3) \rightarrow \boxed{V_C = 96.67kN}\end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{V_B = -31.67kN}$$

$$\overline{AB}\begin{cases}\sum F_y = 0 = V_A - (-31.67) \rightarrow \boxed{V_A = -31.67kN} \\ \sum M_A = 0 = -M_A + V_B 3 = -M_A + (-31.67)3 \rightarrow \boxed{M_A = -95.01kNm}\end{cases}$$

b) Reacciones de vínculo, método analítico



El problema tiene 5 incógnitas: M_A, V_A, V_C, V_E y V_G; es necesario plantear 5 ecuaciones, de las cuales 2 provienen de la estática y las 3 restantes de plantear los momentos en las articulaciones.

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = -V_A - (10\cdot 3) + V_C - 40 + V_E - (20\cdot 10) + V_G \\ \sum M_A = 0 = M_A + (10\cdot 3)(1.5+3) - V_C 6 + 40\cdot 10 - V_E 14 + (20\cdot 10)(5+14) - V_G 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum M_F^{Der} = 0 = (20\cdot 7)\dfrac{7}{2} - V_G 3 \\ \sum M_D^{Der} = 0 = (20\cdot 10)(5+4) - V_G 10 - V_E 4 \\ \sum M_B^{Izq} = 0 = M_A - V_A 3 \end{cases}$$

La solución de estas 5 ecuaciones permite obtener los resultados determinados anteriormente para las reacciones de vínculo: M_A, V_A, V_C, V_E y V_G.

c) Leyes de Esfuerzo y representación gráfica

Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$ $(0 \le z \le 3)$: $\mathrm{Q}(z)\big|_A^B = -V_A$ $\quad \begin{cases} \mathrm{Q}_A\big|_A^B = \mathrm{Q}(z=0)\big|_A^B = -31.67kN \\ \mathrm{Q}_B\big|_A^B = \mathrm{Q}(z=3)\big|_A^B = -31.67kN \end{cases}$

Tramo $\overline{BC}$ $(3 \le z \le 6)$:

$$\mathrm{Q}(z)\big|_B^C = -V_A - 10\cdot(z-3) \begin{cases} \mathrm{Q}_B\big|_B^C = \mathrm{Q}(z=3)\big|_B^C = -31.67kN \\ \mathrm{Q}_C\big|_B^C = \mathrm{Q}(z=6)\big|_B^C = -61.67kN \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$ $(6 \le z \le 10)$:

$$\mathrm{Q}(z)\big|_C^D = \underbrace{-V_A - 10\cdot 3}_{\mathrm{Q}_C\big|_B^C = -61.67} + V_C = 35 \begin{cases} \mathrm{Q}_C\big|_C^D = \mathrm{Q}(z=6)\big|_C^D = 35kN \\ \mathrm{Q}_D\big|_C^D = \mathrm{Q}(z=10)\big|_C^D = 35kN \end{cases}$$

Tramo $\overline{DE}$ **(**$10 \le z \le 14$**):**

$$\mathrm{Q}(z)\Big|_D^E = \underbrace{-V_A - 10\cdot 3 + V_C}_{Q_D\big|_C^D = 35} - 40 \begin{cases} \mathrm{Q}_D\big|_D^E = \mathrm{Q}(z=10)\Big|_D^E = -5kN \\ \mathrm{Q}_E\big|_D^E = \mathrm{Q}(z=14)\Big|_D^E = -5kN \end{cases}$$

Tramo $\overline{EF}$ $(14 \le z \le 17)$:

$$\mathrm{Q}(z)\Big|_E^F = \underbrace{-V_A - 10\cdot 3 + V_C - 40}_{Q_E\big|_D^E = -5} + V_E - 20\cdot(z-14) = -5 + 41.67 - 20\cdot(z-14)$$

$$316.67 - 20\cdot z \begin{cases} \mathrm{Q}_E\big|_E^F = \mathrm{Q}(z=14)\Big|_E^F = 36.67kN \\ \mathrm{Q}_F\big|_E^F = \mathrm{Q}(z=17)\Big|_E^F = -23.33kN \end{cases}$$

El valor de z que hace nulo el esfuerzo de corte en el tramo $\overline{EF}$ $(14 \le z \le 17)$ resulta:

$$\mathrm{Q}(z)\Big|_E^F = 316.67 - 20\cdot z_0 = 0 \quad \rightarrow \quad z_0 = 15.83m$$

La ley de esfuerzo de corte en el Tramo $\overline{EF}$ puede obtenerse empleando ejes locales. Para ello se adopta un eje local z' con origen en el apoyo E, tal que $0 \le z' \le 3$. Entonces el esfuerzo de corte está dado por

$$\mathrm{Q}(z')\Big|_E^F = -5 + 41.67 - 20\cdot z' = 36.67 - 20\cdot z' \begin{cases} \mathrm{Q}_E\big|_E^F = \mathrm{Q}(z'=0)\Big|_E^F = 36.67kN \\ \mathrm{Q}_F\big|_E^F = \mathrm{Q}(z'=3)\Big|_E^F = -23.33kN \end{cases}$$

Luego, el valor de z' que hace nulo el corte resulta,

$$\mathrm{Q}(z') = 36.67 - 20\cdot z_0' = 0 \quad \rightarrow \quad z_0' = 1.83m$$

Tramo $\overline{FG}$ $(17 \le z \le 20)$:

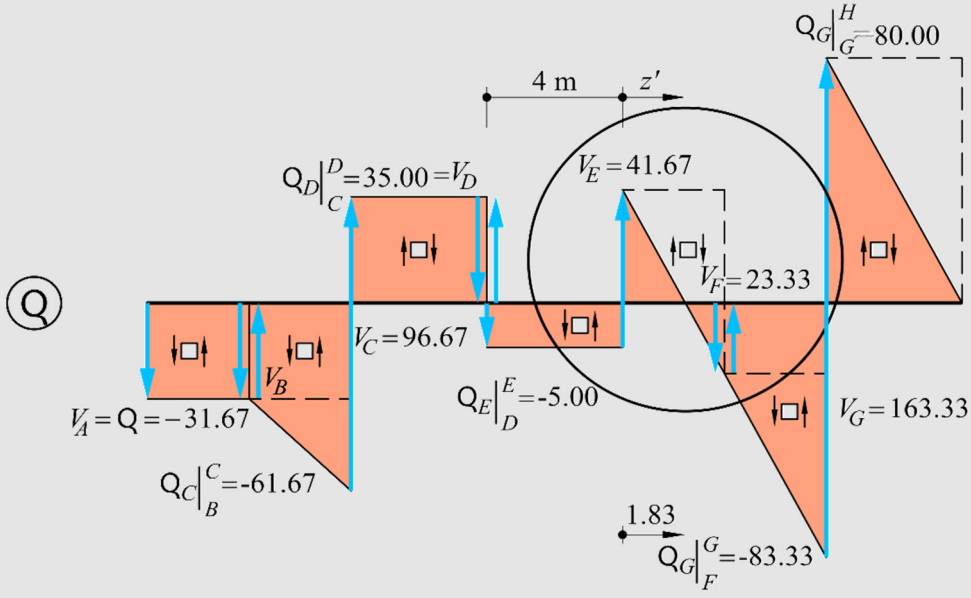
$$\mathrm{Q}(z)\Big|_F^G = \underbrace{-23.33}_{Q_F\big|_E^F} - 20\cdot(z-17) =$$

$$= 316.67 - 20\cdot z \begin{cases} \mathrm{Q}_F\big|_F^G = Q(z=17)\Big|_F^G = -23.33kN \\ \mathrm{Q}_G\big|_F^G = Q(z=20)\Big|_F^G = -83.33kN \end{cases}$$

Tramo $\overline{GH}$ $(20 \le z \le 24)$:

$$\mathrm{Q}(z)\Big|_G^H = \underbrace{-83.33}_{Q_G\big|_F^G} + V_G - 20\cdot(z-20) = -83.33 + 163.33 - 20\cdot(z-20)$$

$$= 480 - 20\cdot z \begin{cases} \mathrm{Q}_G\big|_G^H = \mathrm{Q}(z=20)\big|_G^H = 80kN \\ \mathrm{Q}_H\big|_G^H = \mathrm{Q}(z=24)\big|_G^H = 0 \end{cases}$$



Ley de Momentos Flectores

Tramo $\overline{AB}$ $(0 \le z \le 3)$:

$$\mathrm{M}(z)\Big|_A^B = \underbrace{95.01}_{M_A} - \underbrace{31.67}_{V_A} z \begin{cases} \mathrm{M}_A\big|_A^B = \mathrm{M}(z=0)\big|_A^B = 95.01kN\cdot m \\ \mathrm{M}_B\big|_A^B = \mathrm{M}(z=3)\big|_A^B = 0 \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$ $(3 \le z \le 6)$:

$$\mathrm{M}(z)\Big|_B^C = \cancel{\mathrm{M}_B\big|_A^B}^{=0} + \underbrace{\mathrm{Q}_B\big|_B^C}_{-31.67}\cdot(z-3) - 10\cdot\frac{(z-3)^2}{2}$$

$$= 50.01 - 1.67 \cdot z - 5 \cdot z^2 \begin{cases} \mathrm{M}_B\big|_B^C = \mathrm{M}\big(z=3\big)\big|_B^C = 0 \\ \mathrm{M}_C\big|_B^C = \mathrm{M}\big(z=6\big)\big|_B^C = -140.01 kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$ $(6 \le z \le 10)$:

$$\mathrm{M}(z)\big|_C^D = \underbrace{-140.01}_{M_C|_B^C} + \underbrace{35}_{Q_C|_C^D} \cdot (z-6) \begin{cases} \mathrm{M}_C\big|_C^D = \mathrm{M}\big(z=6\big)\big|_C^D = -140.01 kN \cdot m \\ \mathrm{M}_D\big|_C^D = \mathrm{M}\big(z=10\big)\big|_C^D = 0 \end{cases}$$

Tramo $\overline{DE}$ $(10 \le z \le 14)$:

$$\mathrm{M}(z)\big|_D^E = \cancel{M_D\big|_C^D}^{=0} + \underbrace{(-5)}_{Q_D|_D^E} \cdot (z-10) \begin{cases} \mathrm{M}_D\big|_D^E = \mathrm{M}\big(z=10\big)\big|_D^E = 0 \\ \mathrm{M}_E\big|_D^E = \mathrm{M}\big(z=14\big)\big|_D^E = -20 kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{EF}$ $(14 \le z \le 17)$:

$$\mathrm{M}(z)\big|_E^F = \underbrace{-20}_{M_E|_D^E} + \underbrace{36.67}_{Q_E|_E^F} \cdot (z-14) - 20 \cdot \frac{(z-14)^2}{2}$$

$$= -2493.38 + 316.67 \cdot z - 10 \cdot z^2 \begin{cases} \mathrm{M}_E\big|_E^F = \mathrm{M}\big(z=14\big)\big|_E^F = -20 kN \cdot m \\ \mathrm{M}^{\max}\big|_E^F = \mathrm{M}\big(z_0 = 15.83\big)\big|_E^F = 13.62 kN \cdot m \\ \mathrm{M}_F\big|_E^F = \mathrm{M}\big(z=17\big)\big|_E^F = 0 \end{cases}$$

Tramo $\overline{EF}$ utilizando el eje local z' con $0 \le z' \le 3$.

$$\mathrm{M}(z')\big|_E^F = \underbrace{-20}_{M_E|_D^E} + \underbrace{36.67}_{Q_E|_E^F} \cdot z' - 20 \cdot \frac{z'^2}{2}$$

$$= -20 + 36.67 \cdot z - 10 \cdot z^2 \begin{cases} \mathrm{M}_E\big|_E^F = \mathrm{M}\big(z'=0\big)\big|_E^F = -20 kN \cdot m \\ \mathrm{M}^{\max}\big|_E^F = \mathrm{M}\big(z'_0 = 1.83\big)\big|_E^F = 13.62 kN \cdot m \\ \mathrm{M}_F\big|_E^F = \mathrm{M}\big(z'=3\big)\big|_E^F = 0 \end{cases}$$

Tramo $\overline{FG}$ $(17 \le z \le 20)$:

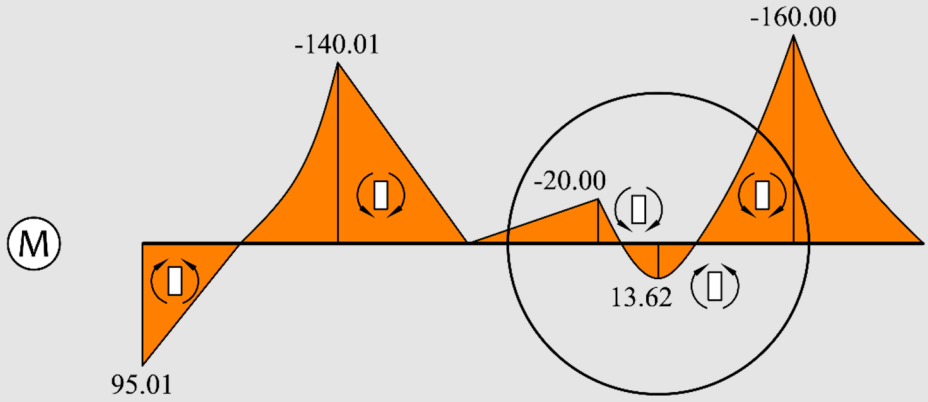
$$\mathrm{M}(z)\Big|_F^G = \cancel{\mathrm{M}_F\Big|_E^F}^{=0} + \underbrace{(-23.33)}_{Q_F\big|_F^G}\cdot(z-17) - 20\frac{(z-17)^2}{2} =$$

$$= -2493.39 + 316.67\cdot z - 10\cdot z^2 \begin{cases} \mathrm{M}_F\Big|_F^G = \mathrm{M}(z=17)\Big|_F^G = 0 \\ \mathrm{M}_G\Big|_F^G = \mathrm{M}(z=20)\Big|_F^G = -160kN\cdot m \end{cases}$$

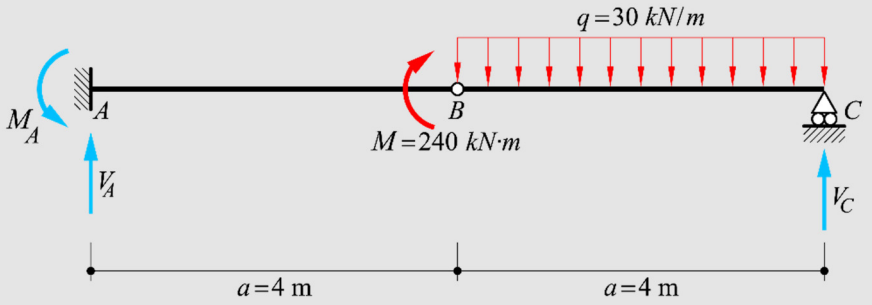
Tramo $\overline{GH}$ $(20 \le z \le 24)$:

$$\mathrm{M}(z)\Big|_G^H = \underbrace{-160}_{M_G\big|_F^G} + \underbrace{80}_{Q_G\big|_G^H}\cdot(z-20) - 20\cdot\frac{(z-20)^2}{2}$$

$$= -5760 + 480\cdot z - 10\cdot z^2 \begin{cases} \mathrm{M}_G\Big|_G^H = \mathrm{M}(z=20)\Big|_G^H = -160kN\cdot m \\ \mathrm{M}_H\Big|_G^H = \mathrm{M}(z=24)\Big|_G^H = 0 \end{cases}$$



Ejemplo 3-8: Dada la viga plana representada en la figura, obtener y representar gráficamente las leyes de esfuerzos.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_C - \overbrace{30}^{q} \cdot 4 \\ \sum M_A = 0 = -M_A + \overbrace{240}^{M} + 30 \cdot 4 \cdot (4+2) - V_C \cdot (4+4) \\ \sum M_B^{Der} = 0 = \overbrace{30}^{q} \cdot 4 \cdot \dfrac{4}{2} - V_C \cdot 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_C = 60kN}; \quad \boxed{V_A = 60kN}; \quad \boxed{M_A = 480kN \cdot m}$$

Verificación $\sum M_C = 0 = -480 + 60 \cdot 8 + 240 - \dfrac{30 \cdot 4^2}{2} \equiv 0$

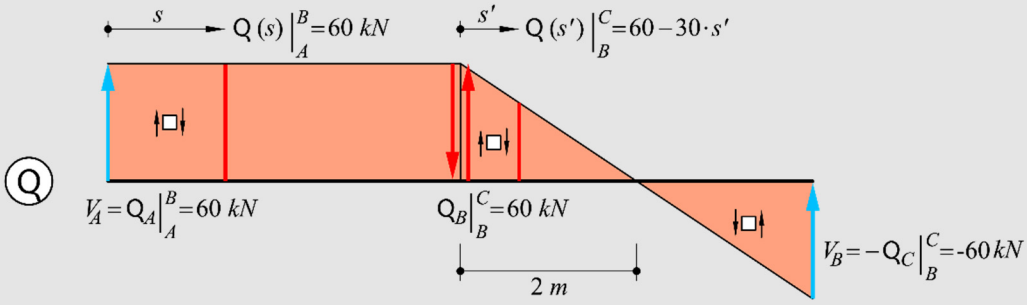
b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$: $\mathrm{Q}(s)\big|_A^B = V_A$ $\quad \begin{cases} \mathrm{Q}_A\big|_A^B = \mathrm{Q}(s=0)\big|_A^B = 60kN \\ \mathrm{Q}_B\big|_A^B = \mathrm{Q}(s=4)\big|_A^B = 60kN \end{cases}$

Tramo $\overline{BC}$: $\mathrm{Q}(s')\big|_B^C = \mathrm{Q}_B\big|_A^B - q \cdot s' = 60 - 30 \cdot s'$ $\quad \begin{cases} \mathrm{Q}_B\big|_B^C = \mathrm{Q}(s'=0)\big|_B^C = 60kN \\ \mathrm{Q}_C\big|_B^C = \mathrm{Q}(s'=4)\big|_B^C = -60kN \end{cases}$

El corte en este tramo se anula en la coordenada local s_0', que se obtiene como

$$\mathrm{Q}(s')\Big|_B^C = 60 - 30 \cdot s'_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{s'_0 = 2m}$$



c) Ley de Momento Flector

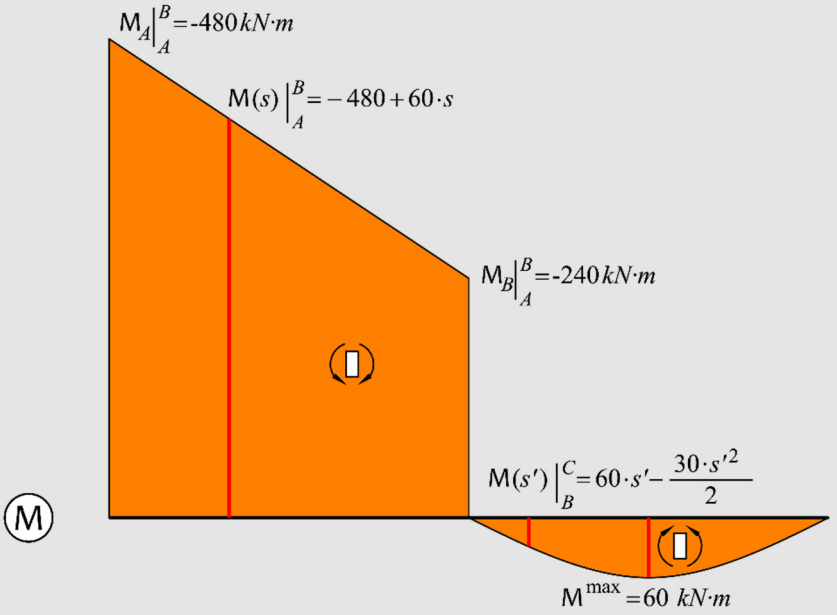
Tramo $\overline{AB}$:

$$\mathrm{M}(s)\Big|_A^B = -M_A + V_A \cdot s = -480 + 60 \cdot s \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\Big|_A^B = -480kN \cdot m \\ \mathrm{M}_B\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=4)\Big|_A^B = -240kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$:

$$\mathrm{M}(s')\Big|_B^C = \mathrm{M}_B\Big|_A^B + \mathrm{M}_B + \mathrm{Q}_B\Big|_B^C \cdot s' - q \cdot \frac{s'^2}{2} = -240 + 240 + 60 \cdot s' - \frac{30 \cdot s'^2}{2}$$

$$= 60 \cdot s' - 15 \cdot s'^2 \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_B^C = 0 \\ \mathrm{M}^{\max} = \mathrm{M}(s'_0=2)\Big|_B^C = 60kN \cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=4)\Big|_B^C = 0 \end{cases}$$



Ejemplo 3-9: Dada la viga plana representada en la figura, obtener y representar gráficamente las leyes de esfuerzos.

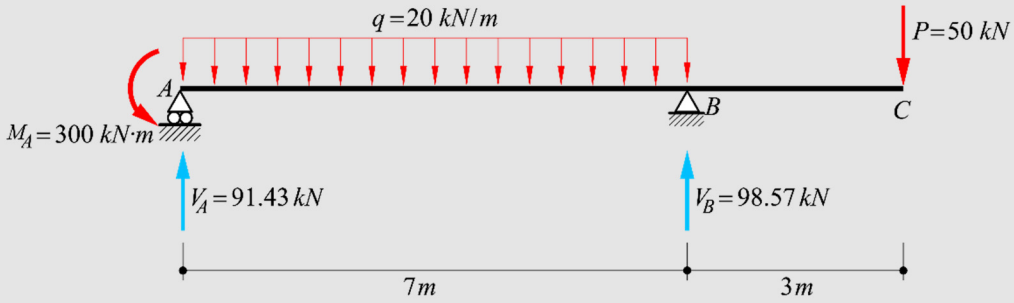
a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_B - 50 - 20\cdot 7 \\ \sum M_A = 0 = -300 + 20\cdot\frac{7^2}{2} - V_B\cdot 7 + 50\cdot(7+3) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 91.43kN} \qquad \boxed{V_B = 98.57kN}$$

Verificación $\sum M_B = 0 = -300 + 91.43\cdot 7 - (20\cdot 7)\frac{7}{2} + 50\cdot 3 \equiv 0$



b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$: $\left.\mathrm{Q}(s)\right|_A^B = V_A - q\cdot s = 91.43 - 20\cdot s$ $\quad \begin{cases} \left.\mathrm{Q}_A\right|_A^B = \left.\mathrm{Q}(s=0)\right|_A^B = 91.43kN \\ \left.\mathrm{Q}_B\right|_A^B = \left.\mathrm{Q}(s=7)\right|_A^B = -48.57kN \end{cases}$

El cero del esfuerzo de corte se obtiene como

$$\left.\mathrm{Q}(s_0)\right|_A^B = 0 = 91.43 - 20\cdot s_0 \rightarrow \boxed{s_0 = 4.57m}$$

Tramo $\overline{BC}$ **:**

$$\left.\mathrm{Q}(s')\right|_B^C = \left.\mathrm{Q}_B\right|_A^B + V_B = -48.57 + 98.57 = 50 \quad \begin{cases} \left.\mathrm{Q}_B\right|_B^C = \left.\mathrm{Q}(s'=0)\right|_B^C = 50kN \\ \left.\mathrm{Q}_C\right|_B^C = \left.\mathrm{Q}(s'=3)\right|_B^C = 50kN \end{cases}$$

c) Ley de Momento Flector

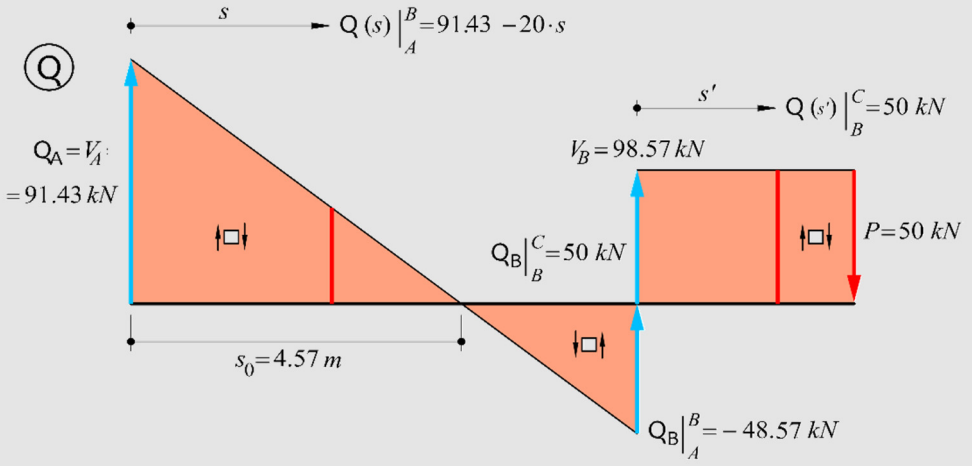
Tramo $\overline{AB}$ **:**

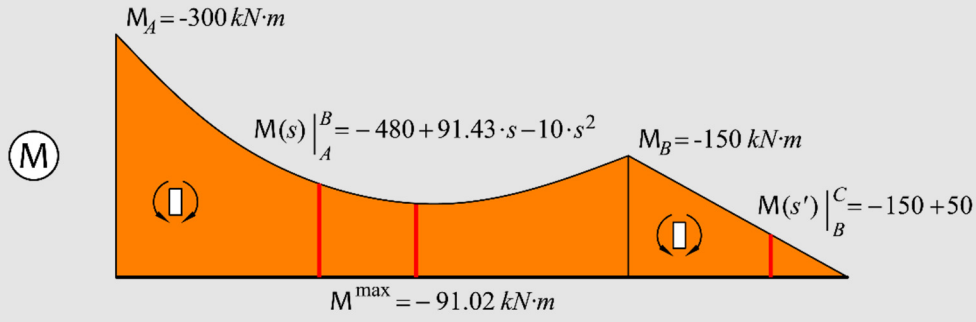
$$\left.\mathrm{M}(s)\right|_A^B = -M_A + V_A\cdot s - q\frac{s^2}{2} = -300 + 91.43\cdot s - 20\frac{s^2}{2}$$

$$= -300 + 91.43\cdot s - 10\cdot s^2 \quad \begin{cases} \left.\mathrm{M}_A\right|_A^B = \left.\mathrm{M}(s=0)\right|_A^B = -300kN\cdot m \\ \left.\mathrm{M}^{\max}\right|_A^B = \left.\mathrm{M}(s_0=4.57)\right|_A^B = -91.02kN\cdot m \\ \left.\mathrm{M}_B\right|_A^B = \left.\mathrm{M}(s=7)\right|_A^B = -150kN\cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$:

$$M(s')\Big|_B^C = M_B\Big|_A^B + Q_B\Big|_B^C \cdot s' = -150 + 50 \cdot s' \qquad \begin{cases} M_B\Big|_B^C = M(s'=0)\Big|_B^C = -150kN \cdot m \\ M_C\Big|_B^C = M(s'=3)\Big|_B^C = 0 \end{cases}$$





Ejemplo 3-10: Dada la viga plana representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.
b) Ley de esfuerzos cortantes con sus máximos, mínimos y ceros.
c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.

a) Cálculo de Reacciones

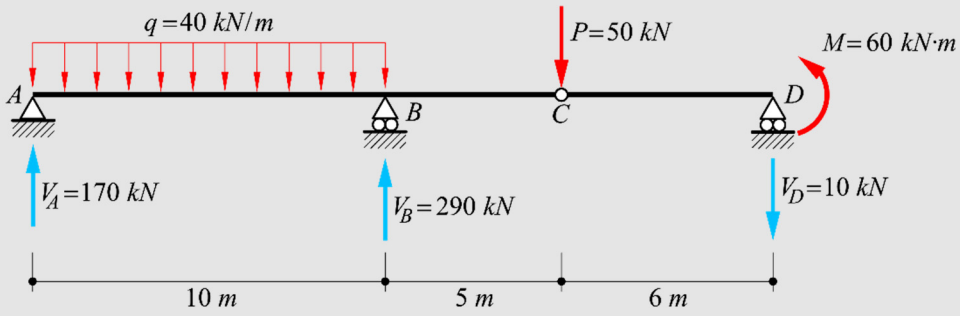
$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_B - V_D - 40\cdot 10 - 50 \\ \sum M_A = 0 = 40\cdot \dfrac{10^2}{2} - V_B\cdot 10 + 50\cdot(10+5) + V_D\cdot(10+5+6) - 60 \\ \sum M_C^{Der} = 0 = V_D\cdot 6 - 60 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 170kN};\quad \boxed{V_B = 290kN};\quad \boxed{V_D = 10kN}$$

Verificación

$$\sum M_D = 0 = V_A(10+5+6) + V_B(5+6) - (40\cdot 10)\left(\frac{10}{2}+5+6\right) - 50\cdot 6 - 60 \equiv 0$$



b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$ **:** $\left.\mathrm{Q}(s)\right|_A^B = V_A - q\cdot s = 170 - 40\cdot s$ $\quad \begin{cases} \left.\mathrm{Q}_A\right|_A^B = \left.\mathrm{Q}(s=0)\right|_A^B = 170kN \\ \left.\mathrm{Q}_B\right|_A^B = \left.\mathrm{Q}(s=10)\right|_A^B = -230kN \end{cases}$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\left.\mathrm{Q}(s_0)\right|_A^B = 0 = 170 - 40\cdot s_0 \rightarrow \boxed{s_0 = 4.25m}$$

Tramo $\overline{BC}$ **:** $\left.\mathrm{Q}(s')\right|_B^C = \left.Q_B\right|_A^B + 290 = -230 + 290$ $\quad \begin{cases} \left.\mathrm{Q}_B\right|_B^C = 60kN \\ \left.\mathrm{Q}_C\right|_B^C = 60kN \end{cases}$

Tramo $\overline{CD}$: $\mathrm{Q}(s'')\big|_C^D = \mathrm{Q}_C\big|_B^C - 50 = 60 - 50$ $\quad \begin{cases} \mathrm{Q}_C\big|_C^D = 10kN \\ \mathrm{Q}_D\big|_C^D = 10kN \end{cases}$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$:

$$\mathrm{M}(s)\big|_A^B = V_A \cdot s - q\frac{s^2}{2} = 170 \cdot s - 20 \cdot s^2 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\big|_A^B = 0 \\ \mathrm{M}^{\max}\big|_A^B = \mathrm{M}(s_0 = 4.25)\big|_A^B = 361.25kN \cdot m \\ \mathrm{M}_B\big|_A^B = \mathrm{M}(s=10)\big|_A^B = -300kN \cdot m \end{cases}$$

El momento flector, en este tramo se anula para:

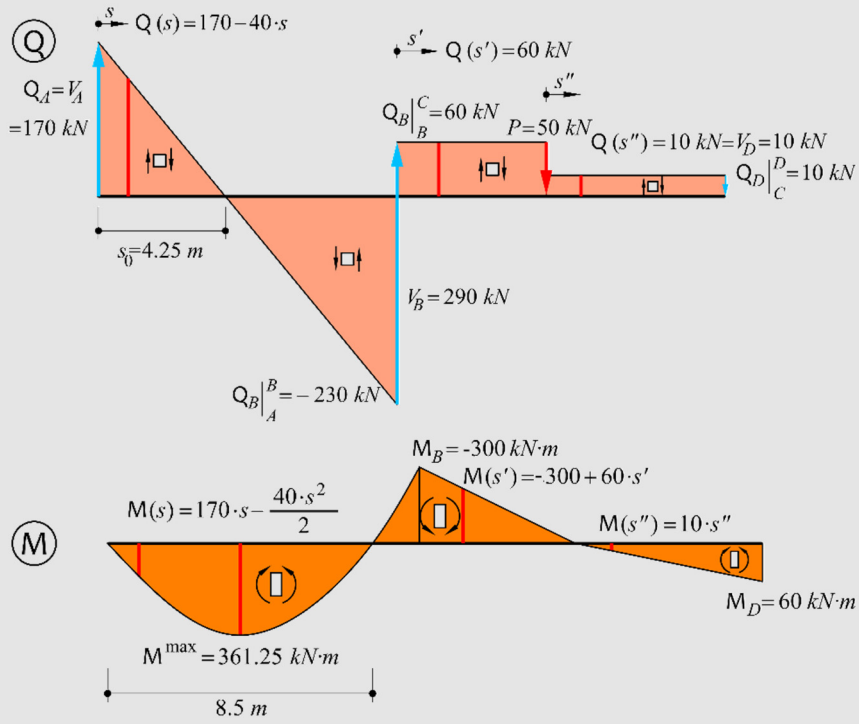
$$\mathrm{M}(s_*)\big|_A^B = 170 \cdot s_* - 20 \cdot s_*^2 = 0 \quad \rightarrow \quad s_* = 8.5m$$

Tramo $\overline{BC}$:

$$\mathrm{M}(s')\big|_B^C = \mathrm{M}_B\big|_A^B + Q_B\big|_B^C \cdot s' = -300 + 60 \cdot s' \quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\big|_B^C = \mathrm{M}(s'=0)\big|_B^C = -300kN \cdot m \\ \mathrm{M}_C\big|_B^C = \mathrm{M}(s'=5)\big|_B^C = 0 \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$:

$$\mathrm{M}(s'')\big|_C^D = \cancel{\mathrm{M}_C\big|_B^C}^{=0} + \mathrm{Q}_C\big|_C^D \cdot s'' = 10 \cdot s'' \quad \begin{cases} \mathrm{M}_C\big|_C^D = \mathrm{M}(s''=0)\big|_C^D = 0 \\ \mathrm{M}_D\big|_C^D = \mathrm{M}(s''=6)\big|_C^D = 60kN \cdot m \end{cases}$$



Ejemplo 3-11: Dada la viga plana representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.

a) Cálculo de Reacciones

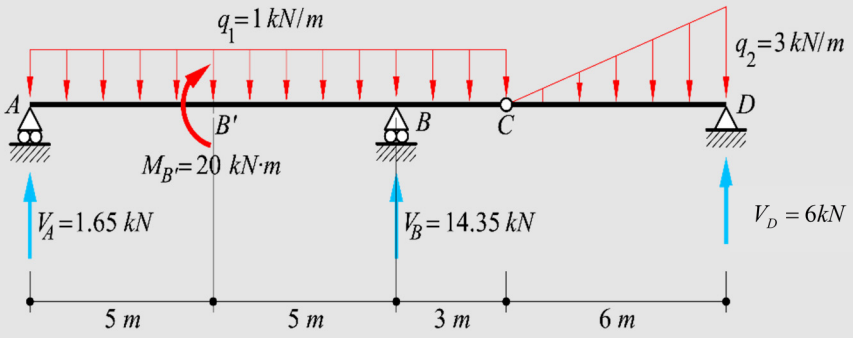
$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_B + V_D - 1\cdot(10+3) - \dfrac{3\cdot 6}{2} \\ \sum M_A = 0 = 1\cdot\dfrac{(10+3)^2}{2} + 20 - V_B\cdot 10 + \left(\dfrac{3\cdot 6}{2}\right)\cdot\left(10+3+\dfrac{2}{3}\cdot 6\right) - V_D\cdot(10+3+6) \\ \sum M_C^{Der} = 0 = -V_D\cdot 6 + \left(\dfrac{3\cdot 6}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\cdot 6\right) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 1.65kN}; \quad \boxed{V_B = 14.35kN}; \quad \boxed{V_D = 6kN}$$

Verificación

$$\sum M_D = 0 = \overbrace{1.65}^{V_A} \cdot (10+3+6) + \overbrace{14.35}^{V_B} \cdot (3+6) +$$
$$+ \overbrace{20}^{M_{B'}} - \overbrace{1}^{q_1} \cdot (10+3) \cdot \left(\frac{10+3}{2} + 6 \right) - \left(\overbrace{\frac{3 \cdot 6}{2}}^{q_2} \right) \cdot \frac{6}{3} \equiv 0$$



b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$: $\left. Q(s) \right|_A^B = V_A - q_1 \cdot s = 1.65 - 1 \cdot s$ $\quad \begin{cases} \left. Q_A \right|_A^B = \left. Q(s=0) \right|_A^B = 1.65kN \\ \left. Q_B \right|_A^B = \left. Q(s=10) \right|_A^B = -8.35kN \end{cases}$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\left. Q(s_0) \right|_A^B = 0 = V_A - q_1 \cdot s_0 \rightarrow \boxed{s_0 = 1.65m}$$

Tramo $\overline{BC}$:

$$\mathrm{Q}(s')\big|_B^C = \mathrm{Q}_B\big|_A^B + V_B - q_1 \cdot s' = -8.35 + 14.35 - 1 \cdot s' = 6 - s' \begin{cases} \mathrm{Q}_B\big|_B^C = \mathrm{Q}(s'=0)\big|_B^C = 6kN \\ \mathrm{Q}_C\big|_B^C = \mathrm{Q}(s'=3)\big|_B^C = 3kN \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$: $\dfrac{q(s'')}{s''} = \dfrac{q_2}{6} \quad \rightarrow \quad q(s'') = \dfrac{q_2}{6} s'' = \dfrac{1}{2} s'' = 0.5 \cdot s''$

$$\mathrm{Q}(s'')\big|_C^D = \mathrm{Q}_C\big|_B^C - \frac{q(s'') \cdot s''}{2} = 3 - 0.25 \cdot (s'')^2 \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_C\big|_C^D = \mathrm{Q}(s''=0)\big|_C^D = 3kN \\ \mathrm{Q}_D\big|_C^D = \mathrm{Q}(s''=6)\big|_C^D = -6kN \end{cases}$$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\mathrm{Q}(s_0'')\big|_C^D = 0 = 3 - 0.25 \cdot (s_0'')^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_0'' = 3.46m}$$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$:

$$\mathrm{M}(s)\big|_A^B \rightarrow \begin{cases} \mathrm{M}(s)\big|_A^{B'} = V_A \cdot s - q_1 \dfrac{s^2}{2} = 1.65 \cdot s - 0.5 \cdot s^2; \forall\, 0 \le s \le 5 \\ \mathrm{M}(s)\big|_{B'}^B = V_A \cdot s - q_1 \dfrac{s^2}{2} + M_{B'} = 1.65 \cdot s - 0.5 \cdot s^2 + 20; \forall\, 5 \le s \le 10 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathrm{de}\,\mathrm{M}(s)\big|_A^{B'} & \begin{cases} \mathrm{M}_A\big|_A^{B'} = \mathrm{M}(s=0)\big|_A^B = 0 \\ \mathrm{M}^{\max}\big|_A^{B'} = \mathrm{M}(s_0 = 1.65)\big|_A^B = 1.36kN \cdot m \\ \mathrm{M}_{B'}\big|_A^{B'} = \mathrm{M}(s=5)\big|_A^B = -4.25kN \cdot m \end{cases} \\ \mathrm{de}\,\mathrm{M}(s)\big|_{B'}^B & \begin{cases} \mathrm{M}_{B'}\big|_{B'}^B = \mathrm{M}(s=5)\big|_{B'}^B = -4.25kN \cdot m \\ \mathrm{M}_B\big|_{B'}^B = \mathrm{M}(s=10)\big|_{B'}^B = -13.5kN \cdot m \end{cases} \end{cases}$$

El momento flector, en este tramo, se anula para:

$$\text{de} \rightarrow \mathrm{M}(s_{*1})\Big|_{A}^{B'} = 1.65 \cdot s_* - 0.5 \cdot s_{*1}^2 = 0 \quad \rightarrow \quad s_{*1} = 3.3m$$

$$\text{de} \rightarrow \mathrm{M}(s_{*2})\Big|_{B'}^{B} = 1.65 \cdot s_* - 0.5 \cdot s_{*2}^2 + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad s_{*2} = 8.19m$$

Tramo $\overline{BC}$:

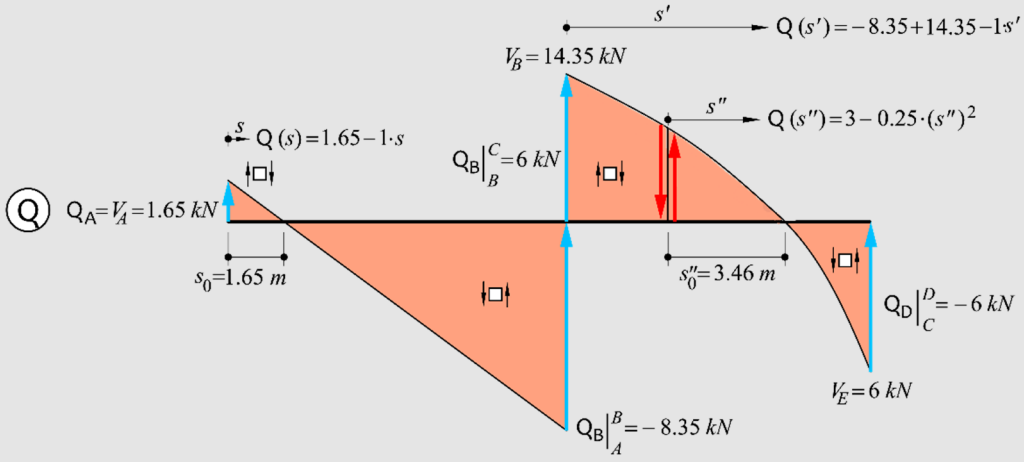
$$\mathrm{M}(s')\Big|_{B}^{C} = \mathrm{M}_B\Big|_{B'}^{B} + \overbrace{\left(\mathrm{Q}_B\Big|_{A}^{B} + V_B\right)}^{\mathrm{Q}_B\Big|_{B}^{C}} \cdot s' - q\frac{s'^2}{2} = -13.5 + \left(-8.35 + 14.35\right) \cdot s' - 0.5 \cdot s'^2$$

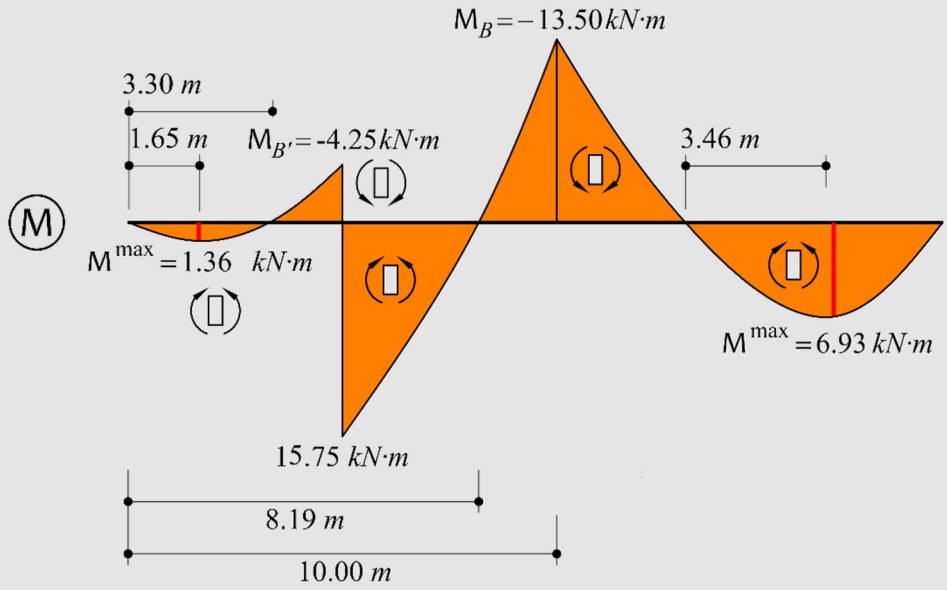
$$= -13.5 + 6 \cdot s' - 0.5 \cdot s'^2 \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_{B}^{C} = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_{B}^{C} = -13.5kN \cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_{B}^{C} = \mathrm{M}(s'=3)\Big|_{B}^{C} = 0 \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$:

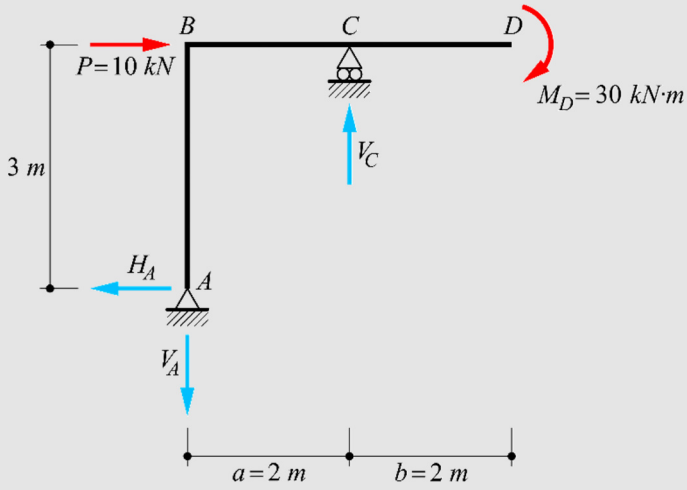
$$\mathrm{M}(s'')\Big|_{C}^{D} = \cancel{\mathrm{M}_C\Big|_{B}^{C}}^{=0} + \mathrm{Q}_C\Big|_{C}^{D} \cdot s'' - \frac{q(s'') \cdot s''}{2}\frac{s''}{3} = 3 \cdot s'' - \frac{0.5 \cdot s'' \cdot s''}{6}s''$$

$$= 3 \cdot s'' - \frac{1}{12} \cdot s''^3 \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_C\Big|_{C}^{D} = \mathrm{M}(s''=0)\Big|_{C}^{D} = 0 \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_{C}^{D} = \mathrm{M}(s''=3.46)\Big|_{C}^{D} = 6.93kN \cdot m \\ \mathrm{M}_D\Big|_{C}^{D} = \mathrm{M}(s''=6)\Big|_{C}^{D} = 0 \end{cases}$$





Ejemplo 3-12: En la siguiente estructura plana obtener las leyes de momento flector, esfuerzo cortante y esfuerzo normal.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = -V_A + V_C \\ \sum F_z = 0 = -H_A + 10 \\ \sum M_A = 0 = \underbrace{10}_{P} \cdot 3 - V_C \cdot 2 + \underbrace{30}_{M_D} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 30kN}; \quad \boxed{H_A = 10kN}; \quad \boxed{V_C = 30kN}$$

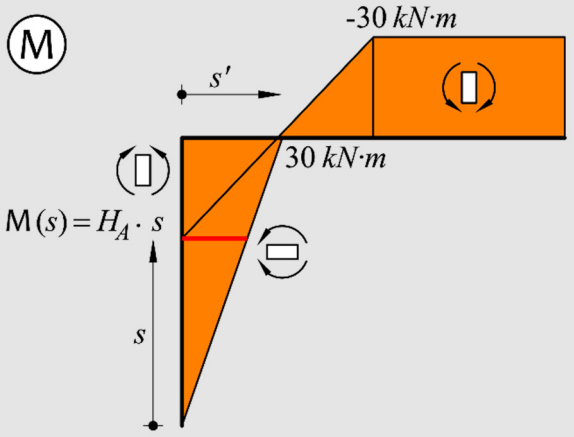
b) Ley de Momento Flector

$$\mathrm{M}(s)\Big|_A^B = H_A \cdot s = 10 \cdot s \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\Big|_A^B = 0 \\ \mathrm{M}_B\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=3)\Big|_A^B = 30kN \cdot m \end{cases}$$

$$\mathrm{M}(s')\Big|_B^C = H_A \cdot 3 - V_A \cdot s'$$

$$= 30 - 30 \cdot s' \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_B^C = 30kN \cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=2)\Big|_B^C = -30kN \cdot m \end{cases}$$

$$\mathrm{M}(s'')\Big|_D^C = -\mathrm{M}_D = -30kN \cdot m$$

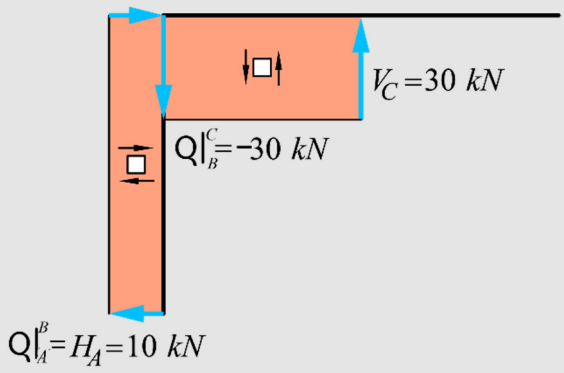


c) Ley de Esfuerzo Corte

$$Q(s)\Big|_A^B = H_A = 10kN$$

$$Q(s')\Big|_B^C = -V_A = -30kN$$

$$Q(s'')\Big|_D^C = 0$$



d) Ley de Esfuerzo Normal

$$N(s)\Big|_A^B = V_A = 30kN$$

$$N(s')\Big|_B^C = H_A - P = 10 - 10 = 0$$

$$N(s'')\Big|_D^C = 0$$



Ejemplo 3-13: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.

a) Cálculo de Reacciones

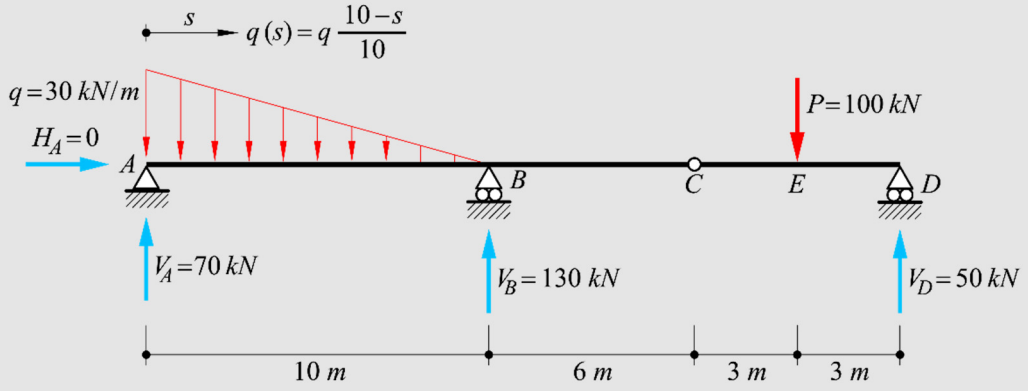
$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_B + V_D - \dfrac{30\cdot 10}{2} - 100 \\ \sum F_z = 0 = H_A \\ \sum M_A = 0 = \dfrac{(30\cdot 10)}{2}\cdot\dfrac{10}{3} - V_B\cdot 10 + 100\cdot(10+6+3) - V_D\cdot(10+6+3+3) \\ \sum M_C^{Der} = 0 = 100\cdot 3 - V_D\cdot(3+3) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 70kN};\quad \boxed{V_B = 130kN};\quad \boxed{V_D = 50kN}$$

Verificación

$$\sum M_D = 0 = 70\cdot 22 - \left(\frac{30\cdot 10}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 10 + 12\right) + 130\cdot 12 - 100\cdot 3 \equiv 0$$



b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$:

$$Q(s)\Big|_A^B = V_A - \int_0^s q(z)\,dz = 70 - \int_0^s 30\left(\frac{10-z}{10}\right)dz$$

$$= 70 - 30\cdot s + 1.5\cdot s^2 \qquad \begin{cases} Q_A\Big|_A^B = Q(s=0)\Big|_A^B = 70kN \\ Q_B\Big|_A^B = Q(s=10)\Big|_A^B = -80kN \end{cases}$$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$Q(s_0)\Big|_A^B = 0 = 70 - 30\cdot s_0 + 1.5\cdot s_0^2 \rightarrow s_0 = \begin{cases} \boxed{2.70m} \\ 17.30m \end{cases}$$

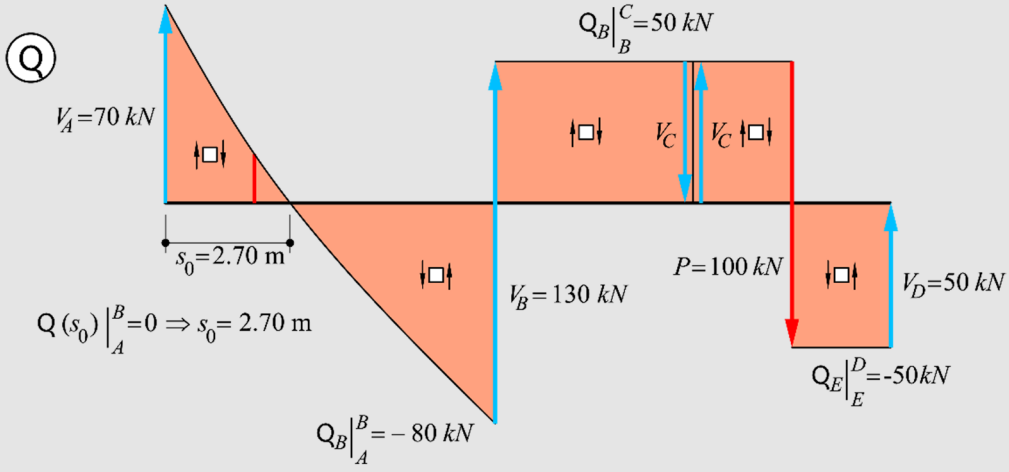
Tramo $\overline{BC}$ **y** $\overline{CE}$**:** $Q\Big|_B^C = Q\Big|_C^E = Q_B\Big|_A^B + V_B = -80 + 130 = 50kN$

Tramo $\overline{ED}$**:** $Q\Big|_E^D = Q\Big|_C^E - P = 50 - 100 = -50kN$

$$Q(s)\Big|_A^B = V_A - \int_0^s q(z)\,dz = 70 - \int_0^s 30\left(\frac{10-z}{10}\right)dz$$

s

$$Q(s)\Big|_A^B = 70 - 1.5\cdot s^2 = \begin{cases} Q_A = 70\ kN \\ Q_B = -80\ kN \end{cases}$$



c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$**:**

$$\mathrm{M}(s)\Big|_A^B = \int_0^s \mathrm{Q}(z)\Big|_A^B dz = \int_0^s \left(70 - 30\cdot z + 1.5\cdot z^2\right) dz$$

$$= 70\cdot s - 15\cdot s^2 + 0.5\cdot s^3 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\Big|_A^B = 0 \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_A^B = \mathrm{M}(s_0 = 2.70)\Big|_A^B = 89.49kN\cdot m \\ \mathrm{M}_B\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=10)\Big|_A^B = -300kN\cdot m \end{cases}$$

El momento flector, en este tramo, se anula para:

$$\mathrm{M}(s_*)\Big|_A^B = 70\cdot s_* - 15\cdot s_*^2 + 0.5\cdot s_*^3 \quad \rightarrow \quad s_* = \begin{cases} 0 \\ 24.22m \\ \boxed{5.78m} \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$:

$$\mathrm{M}(s')\Big|_B^C = \mathrm{M}_B\Big|_A^B + Q_B\Big|_B^C \cdot s' = -300 + 50\cdot s' \quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_B^C = -300kN\cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=6)\Big|_B^C = 0 \end{cases}$$

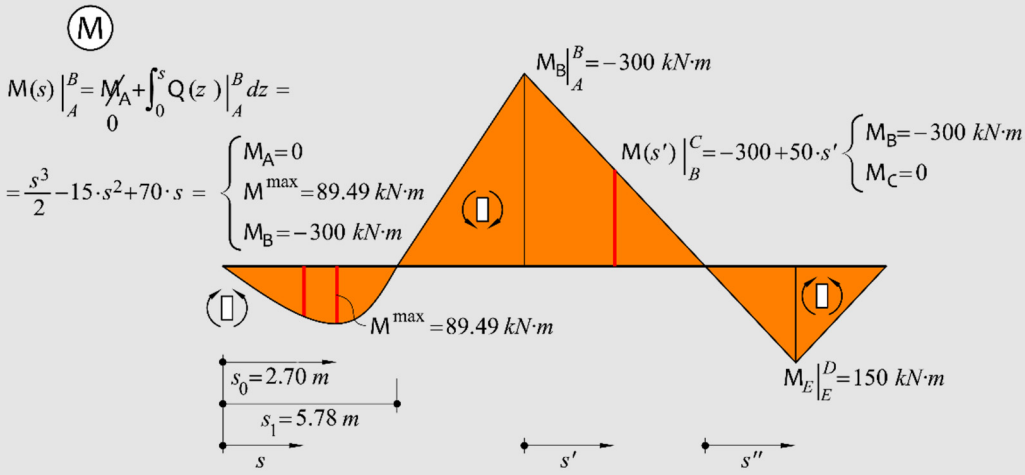
Tramo $\overline{CE}$:

$$\mathrm{M}(s'')\Big|_C^E = \cancel{\mathrm{M}_C\Big|_B^{C=0}} + \mathrm{Q}_C\Big|_C^D \cdot s'' = 50\cdot s'' \quad \begin{cases} \mathrm{M}_C\Big|_C^E (s''=0) = 0 \\ \mathrm{M}_E\Big|_C^E (s''=3) = 150kN\cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{ED}$:

$$\mathrm{M}(s'')\Big|_E^D = \mathrm{M}_E\Big|_C^E + \mathrm{Q}_E\Big|_E^D \cdot (s''-3) = 150 - 50\cdot(s''-3)$$

$$= 300 - 50\cdot s'' \quad \begin{cases} \mathrm{M}_E\Big|_E^D = \mathrm{M}(s''=3)\Big|_E^D = 150kN\cdot m \\ \mathrm{M}_D\Big|_E^D = \mathrm{M}(s''=6)\Big|_E^D = 0 \end{cases}$$

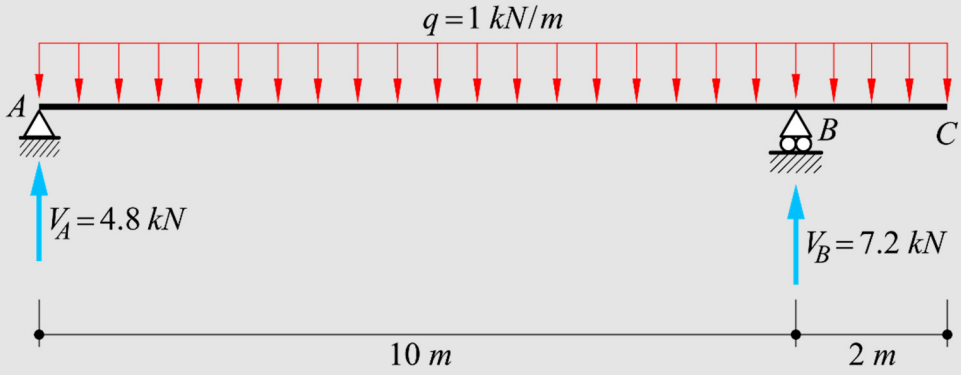


Ejemplo 3-14: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_B - 1\cdot(10+2) \\ \sum F_z = 0 = H_A \\ \sum M_A = 0 = 1\cdot(10+2)\cdot\dfrac{12}{2} - V_B\cdot 10 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 4.8kN}; \quad \boxed{V_B = 7.2kN}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$ $(0 \le s \le 10)$:

$$\mathrm{Q}(s)\Big|_A^B = V_A - q\cdot s = 4.8 - 1\cdot s = \begin{cases} \mathrm{Q}_A\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=0)\Big|_A^B = 4.8kN \\ \mathrm{Q}_B\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=10)\Big|_A^B = -5.2kN \end{cases}$$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\mathrm{Q}(s_0)\Big|_A^B = 0 = 4.8 - 1\cdot s_0 \rightarrow s_0 = 4.8m$$

Tramo $\overline{BC}$ $(10 \le s \le 12)$:

$$\mathrm{Q}(s)\Big|_B^C = \mathrm{Q}_B\Big|_A^B + V_B - q(s-10) = -5.2 + 7.2 - 1\cdot(s-10)$$

$$= 2 - (s-10) \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_B\Big|_B^C = \mathrm{Q}(s=10)\Big|_B^C = 2kN \\ \mathrm{Q}_C\Big|_B^C = \mathrm{Q}(s=12)\Big|_B^C = 0 \end{cases}$$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$ $(0 \le s \le 10)$:

$$\mathrm{M}(s)\Big|_A^B = \int_0^s \mathrm{Q}(z)\Big|_A^B dz = \int_0^s (4.8 - s)\, dz$$

$$= 4.8 \cdot s - 0.5 \cdot s^2 \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\Big|_A^B = 0 \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_A^B = \mathrm{M}(s_0 = 4.8)\Big|_A^B = 11.52 kN \cdot m \\ \mathrm{M}_B\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=10)\Big|_A^B = -2 kN \cdot m \end{cases}$$

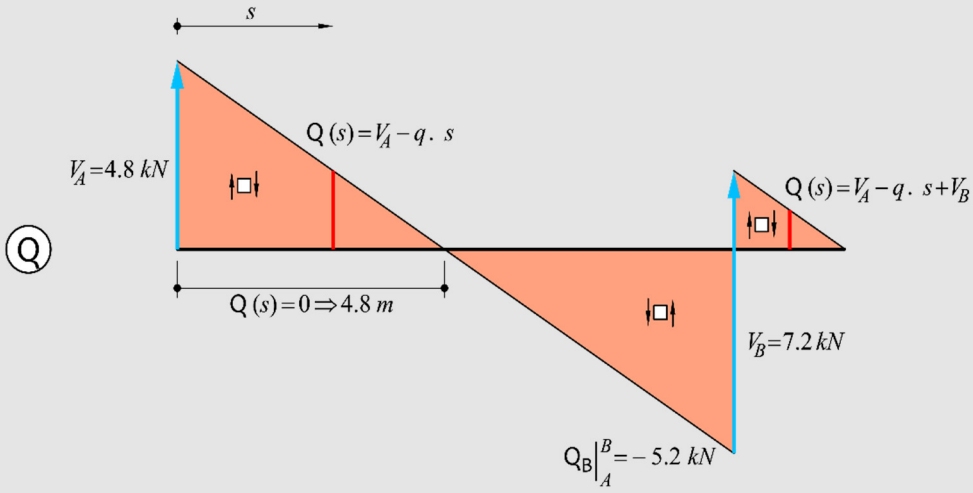
El momento flector, en este tramo, se anula para:

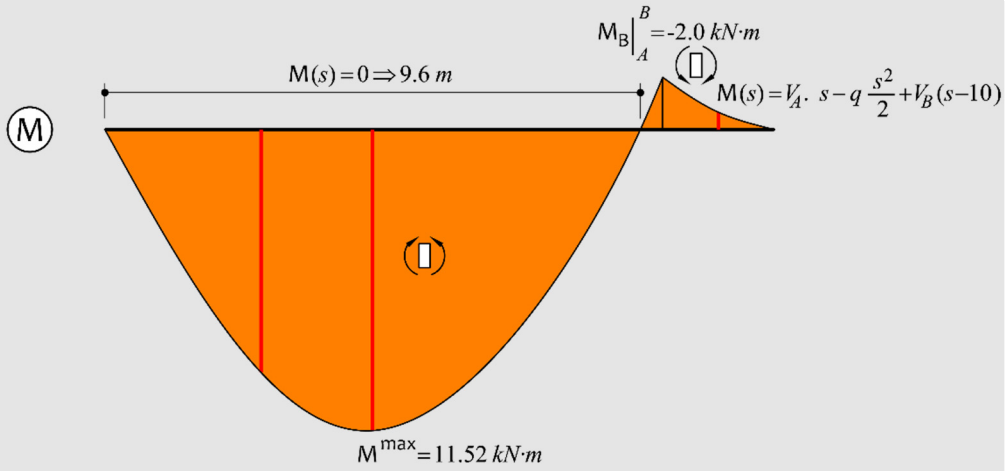
$$\mathrm{M}(s_*)\Big|_A^B = 4.8 \cdot s_* - 1 \cdot \frac{s_*^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad s_* = \begin{cases} 0m \\ \boxed{9.6m} \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$ $(10 \le s \le 12)$:

$$\mathrm{M}(s)\Big|_B^C = V_A \cdot s - q \cdot \frac{s^2}{2} + V_B \cdot (s - 10)$$

$$= 4.8 \cdot s - 0.5 \cdot s^2 + 7.2 \cdot (s - 10) \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_B^C = \mathrm{M}(s=10)\Big|_B^C = -2 kN \cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C = \mathrm{M}(s=12)\Big|_B^C = 0 \end{cases}$$



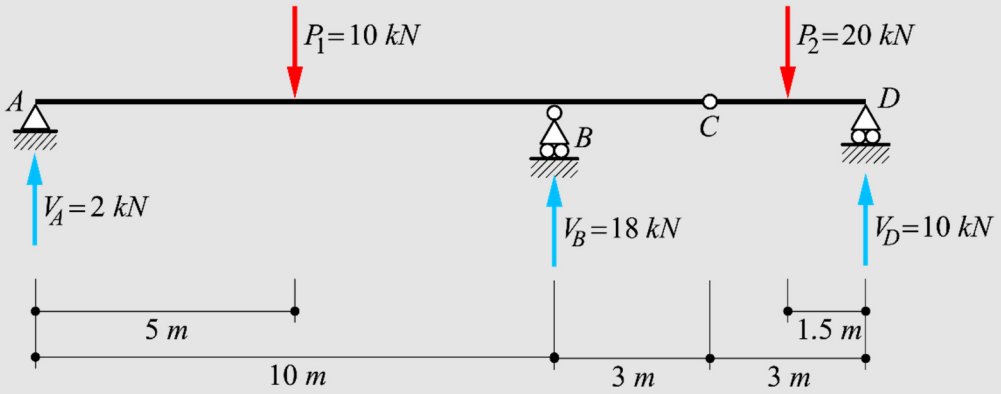


Ejemplo 3-15: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_B + V_D - \overbrace{10}^{P_1} - \overbrace{20}^{P_2} \\ \sum M_A = 0 = -V_B \cdot 10 + \overbrace{10}^{P_1} \cdot 5 + \overbrace{20}^{P_2} \cdot 14.5 - V_D \cdot 16 \\ \sum M_C^{Der} = 0 = -V_D \cdot 3 + \overbrace{20}^{P_2} \cdot 1.5 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 2kN}; \quad \boxed{V_B = 18kN}; \quad \boxed{V_D = 10kN}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AP_1}$: $\mathrm{Q}(s)\big|_A^{P_1} = V_A = 2kN$

Tramo $\overline{P_1B}$: $\mathrm{Q}(s)\big|_{P_1}^{B} = V_A - P_1 = 2 - 10 = -8kN$

Tramo $\overline{BP_2}$: $\mathrm{Q}(s)\big|_B^{P_2} = \mathrm{Q}(s)\big|_{P_1}^{B} + V_B = -8 + 18 = 10kN$

Tramo $\overline{P_2D}$: $\mathrm{Q}(s)\big|_{P_2}^{D} = \mathrm{Q}(s)\big|_B^{P_2} - P_2 = 10 - 20 = -10kN$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AP_1}$ $(0 \le s \le 5)$:

$$\mathrm{M}(s)\big|_A^{P_1} = \int_0^s \mathrm{Q}(z)\big|_A^{P_1} dz = 2 \cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\big|_A^{P_1} = \mathrm{M}(s=0)\big|_A^{P_1} = 0 \\ \mathrm{M}_{P_1}\big|_A^{P_1} = \mathrm{M}(s=5)\big|_A^{P_1} = 10kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{P_1B}$ $(5 \le s \le 10)$:

$$M(s)\Big|_{P_1}^{B} = V_A \cdot s - P_1 \cdot (s-5) = 2 \cdot s - 10 \cdot (s-5)$$

$$= -8 \cdot s + 50 \quad \begin{cases} M_{P_1}\Big|_{P_1}^{B} = M(s=5)\Big|_{P_1}^{B} = 10kN \cdot m \\ M_B\Big|_{P_1}^{B} = M(s=10)\Big|_{P_1}^{B} = -30kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{BP_2}$ $(10 \le s \le 14.5)$:

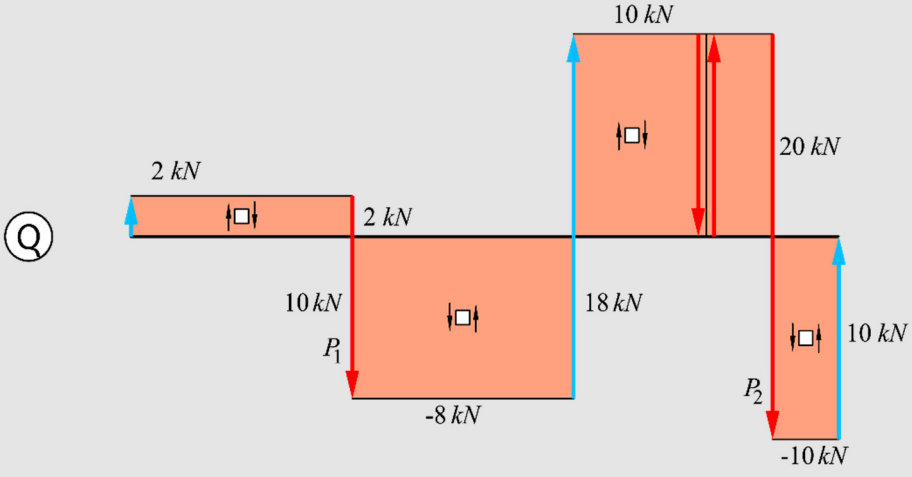
$$M(s)\Big|_{B}^{P_2} = V_A \cdot s - P_1 \cdot (s-5) + V_B \cdot (s-10) = 2 \cdot s - 10 \cdot (s-5) + 18 \cdot (s-10)$$

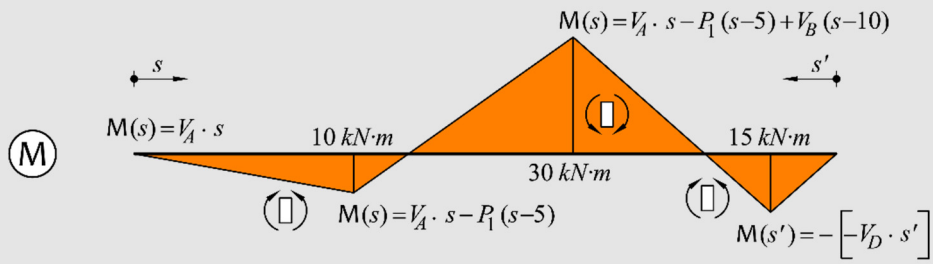
$$= 10 \cdot s - 130 \quad \begin{cases} M_B\Big|_{B}^{P_2}(s=10) = -30kN \cdot m \\ M_{P_2}\Big|_{B}^{P_2}(s=14.5) = 15kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{P_2D}$ $(14.5 \le s \le 16)$:

$$M(s)\Big|_{P_2}^{D} = V_A \cdot s - P_1 \cdot (s-5) + V_B \cdot (s-10) - P_2 \cdot (s-14.5)$$

$$= -10 \cdot s + 160 \quad \begin{cases} M_{P_2}\Big|_{P_2}^{D}(s=14.5) = 15kN \cdot m \\ M_D\Big|_{P_2}^{D}(s=16) = 0 \end{cases}$$



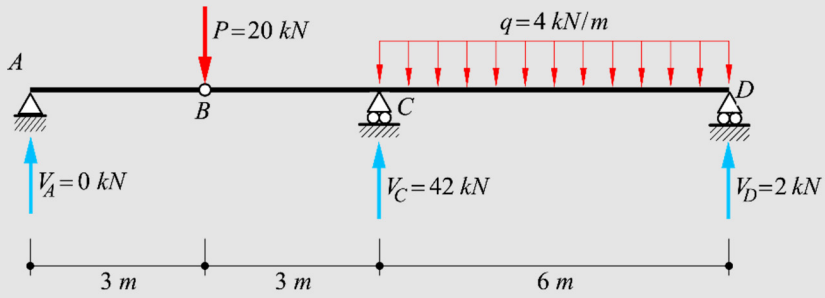


Ejemplo 3-16: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_C + V_D - P - q \cdot 6 = V_A + V_C + V_D - 20 - 4 \cdot 6 \\ \sum M_A = 0 = P \cdot 3 - V_C \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot 9 - V_D \cdot 12 = 20 \cdot 3 - V_C \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 9 - V_D \cdot 12 \\ \sum M_B^{Izq} = 0 = V_A \cdot 3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 0kN}; \quad \boxed{V_C = 42kN}; \quad \boxed{V_D = 2kN}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$ $(0 \le s \le 3)$: $\mathrm{Q}(s)\big|_A^B = V_A = 0$

Tramo $\overline{BC}$ $(0 \le s \le 3)$: $\mathrm{Q}(s)\big|_B^C = V_A - P = 0 - 20 = -20kN$

Tramo $\overline{CD}$ $(0 \le s' \le 6)$:

$$\mathrm{Q}(s')\big|_C^D = \mathrm{Q}_C\big|_B^C + V_C - q \cdot s' = -20 + 42 - 4 \cdot s'$$

$$= 22 - 4 \cdot s' \quad \begin{cases} \mathrm{Q}(s'=0)\big|_C^D = 22kN \\ \mathrm{Q}(s'=6)\big|_C^D = -2kN \end{cases}$$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\mathrm{Q}(s_0')\big|_C^D = 0 = 22 - 4 \cdot s_0' \rightarrow s_0' = 5.5m$$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$ $(0 \le s \le 3)$: $\mathrm{M}(s)\big|_A^B = 0$

Tramo $\overline{BC}$ $(0 \le s \le 3)$:

$$\mathrm{M}(s)\big|_B^C = -P_1 \cdot s = -20 \cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\big|_B^C = \mathrm{M}(s=0)\big|_B^C = 0 \\ \mathrm{M}_C\big|_B^C = \mathrm{M}(s=3)\big|_B^C = -60kN \cdot m \end{cases}$$

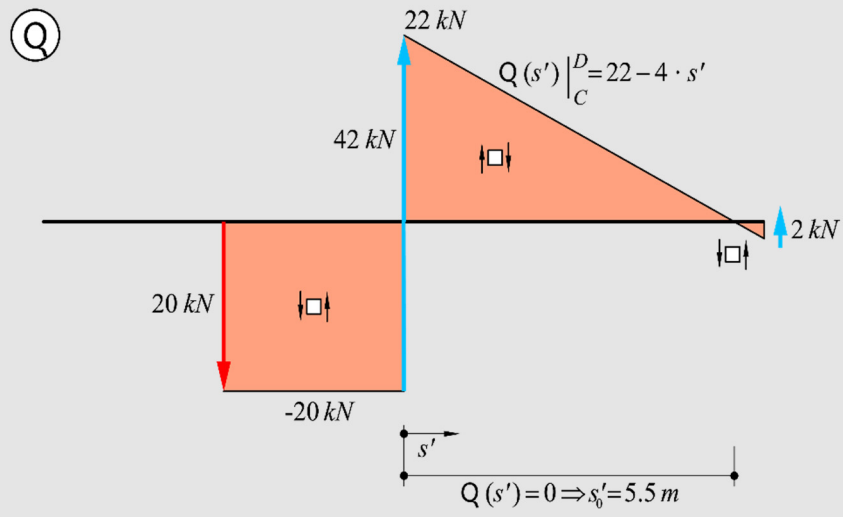
Tramo $\overline{CD}$ $(0 \le s' \le 6)$:

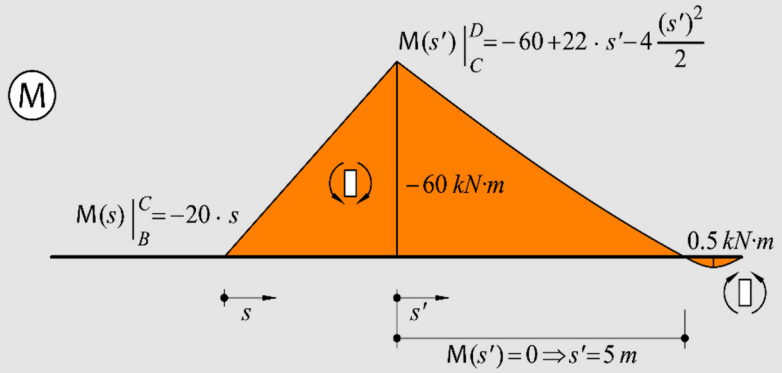
$$\mathrm{M}(s')\Big|_C^D = \mathrm{M}_C\Big|_B^C + \mathrm{Q}_C\Big|_B^C \cdot s' - q \cdot \frac{(s')^2}{2}$$

$$= -60 + 22 \cdot s' - 2 \cdot (s')^2 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_C\Big|_C^D = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_C^D = -60kN \cdot m \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_C^D = \mathrm{M}(s'=5.5)\Big|_C^D = 0.5kN \cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_C^D = \mathrm{M}(s'=6)\Big|_C^D = 0 \end{cases}$$

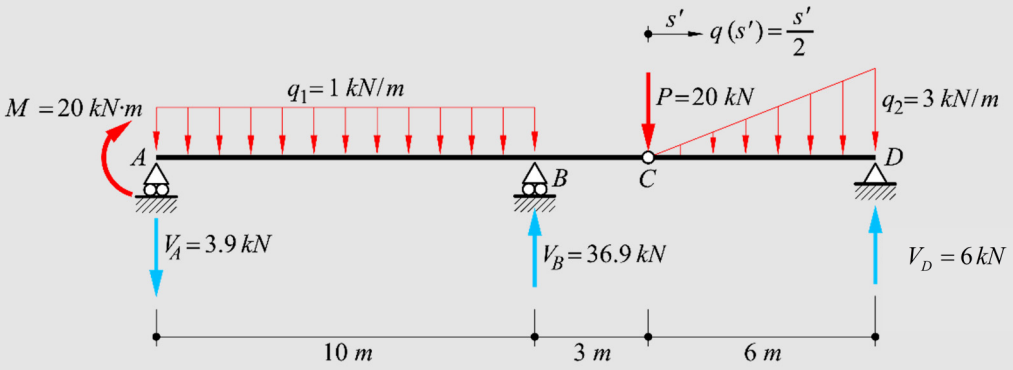
El momento flector, en este tramo, se anula para:

$$\mathrm{M}(s'_*)\Big|_C^D = -60 + 22 \cdot s'_* - 4 \cdot \frac{(s'_*)^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad s'_* = \begin{cases} 5m \\ 6m \end{cases}$$





Ejemplo 3-17: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:
a) Reacciones en los apoyos.
b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.
c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = -V_A - \overset{q_1}{\overbrace{1}} \cdot 10 + V_B - \overset{P}{\overbrace{20}} - \overset{q_2}{\overbrace{3}} \cdot 3 + V_D \\ \sum M_A = 0 = M + q_1 \cdot \frac{10^2}{2} - V_B \cdot 10 + P \cdot 13 + q_2 \cdot \frac{6}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + 13 \right) - V_D \cdot 19 \\ \sum M_C^{Der} = 0 = 3 \cdot \frac{6}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 \right) - V_D \cdot 6 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 3.9kN}; \quad \boxed{V_B = 36.9kN}; \quad \boxed{V_D = 6kN}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$ $(0 \le s \le 10)$:

$$\mathrm{Q}(s)\Big|_A^B = -V_A - q_1 \cdot s = -3.9 - 1 \cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_A\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=0)\Big|_A^B = -3.9kN \\ \mathrm{Q}_B\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=10)\Big|_A^B = -13.9kN \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$ $(10 \le s \le 13)$: $\mathrm{Q}(s)\Big|_B^C = \mathrm{Q}_B\Big|_A^B + V_B = -13.9 + 36.9 = 23kN$

Tramo $\overline{CD}$ $(0 \le s' \le 6)$: $\dfrac{q(s')}{s'} = \dfrac{q_2}{6} \rightarrow q(s') = \dfrac{3}{6}s' \rightarrow \boxed{q(s') = \dfrac{s'}{2}}$

$$\mathrm{Q}(s')\Big|_C^D = \mathrm{Q}_C\Big|_B^C - P - q(s') \cdot \frac{s'}{2} = 23 - 20 - \frac{(s')^2}{4}$$

$$= 3 - 0.25 \cdot (s')^2 \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_C\Big|_C^D = \mathrm{Q}(s'=0)\Big|_C^D = 3kN \\ \mathrm{Q}_D\Big|_C^D = \mathrm{Q}(s'=6)\Big|_C^D = -6kN \end{cases}$$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\mathrm{Q}(s_0')\Big|_C^D = 0 = 3 - 0.25 \cdot (s_0')^2 \rightarrow s_0' = 3.46m$$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$ $(0 \le s \le 10)$:

$$\mathrm{M}(s)\Big|_A^B = M - V_A \cdot s - q_1 \cdot \frac{s^2}{2}$$

$$= 20 - 3.9 \cdot s - 0.5 \cdot s^2 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\Big|_A^B = 20kN \cdot m \\ \mathrm{M}_B\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=10)\Big|_A^B = -69kN \cdot m \end{cases}$$

El momento flector, en este tramo, se anula para:

$$\mathrm{M}(s_*)\Big|_A^B = 20 - 3.9 \cdot s_* - 0.5 \cdot (s_*)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad s_* = \begin{cases} -11.33m \\ \boxed{3.53m} \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$ $(10 \le s \le 13)$:

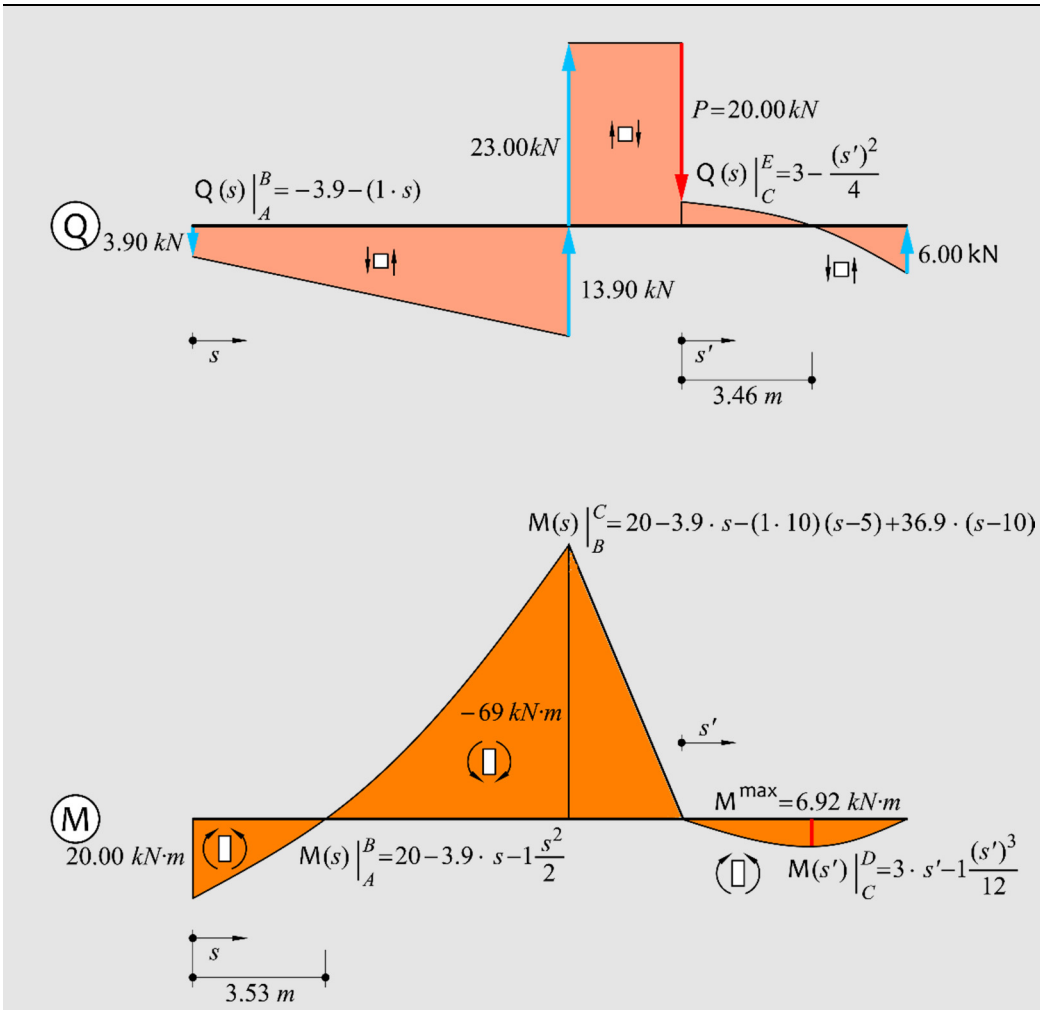
$$\mathrm{M}(s)\Big|_B^C = M - V_A \cdot s - q_1 \cdot 10 \cdot (s-5) + V_B (s-10) = 20 - 3.9 \cdot s - 1 \cdot 10 \cdot (s-5) + 36.9(s-10)$$

$$= -299 + 23 \cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_B^C = \mathrm{M}(s=10)\Big|_B^C = -69kN \cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C = \mathrm{M}(s=13)\Big|_B^C = 0 \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$ $(0 \le s' \le 6)$:

$$\mathrm{M}(s')\Big|_C^D = \mathrm{Q}_C\Big|_C^D \cdot s' - q(s')\frac{s'}{2}\frac{s'}{3} = 3 \cdot s' - \frac{s'}{2}\frac{s'}{2}\frac{s'}{3}$$

$$= 3 \cdot s' - \frac{(s')^3}{12} \quad \begin{cases} \mathrm{M}_C\Big|_C^D = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_C^D = 0 \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_C^D = \mathrm{M}(s'=3.46)\Big|_C^D = 6.93kN \cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_C^D = \mathrm{M}(s'=6)\Big|_C^D = 0 \end{cases}$$



Ejemplo 3-18: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

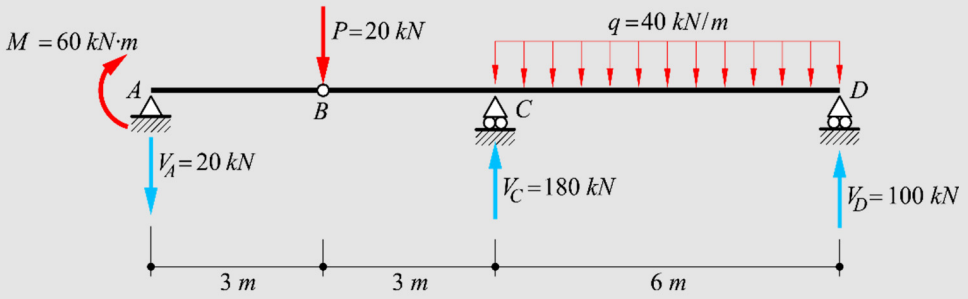
c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.

a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = -V_A + V_C + V_D - P - q\cdot 6 = -V_A + V_C + V_D - 20 - 40\cdot 6 \\ \sum M_D = 0 = M - V_A\cdot 12 - P\cdot 9 + V_C\cdot 6 - q\cdot 6\cdot \dfrac{6}{2} = 60 - V_A\cdot 12 - 20\cdot 9 + V_C\cdot 6 - 40\cdot 18 \\ \sum M_B^{Izq} = 0 = -V_A\cdot 3 + M = -V_A\cdot 3 + 60 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 20kN};\quad \boxed{V_C = 180kN};\quad \boxed{V_D = 100kN}$$



b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$ $(0 \le s \le 3)$: $\mathrm{Q}(s)\big|_A^B = -20kN$

Tramo $\overline{BC}$ $(3 \le s \le 6)$: $\mathrm{Q}(s)\big|_B^C = \mathrm{Q}_B\big|_A^B - P = -20 - 20 = -40kN$

Tramo $\overline{CD}$ $(0 \le s' \le 6)$:

$$\mathrm{Q}(s')\big|_C^D = \mathrm{Q}_C\big|_B^C + V_C - q\cdot s' = -40 + 180 - 40\cdot s'$$

$$= 140 - 40\cdot s' \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_C\big|_C^D = \mathrm{Q}(s'=0)\big|_C^D = 140kN \\ \mathrm{Q}_D\big|_C^D = \mathrm{Q}(s'=6)\big|_C^D = -100kN \end{cases}$$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\mathrm{Q}\left(s_0'\right)=0=140-40\cdot s_0' \rightarrow s_0'=3.5m$$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$**:** $\mathrm{M}(s)\Big|_A^B = M - V_A\cdot s = 60-20\cdot s$ $\quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\Big|_A^B = 60kN\cdot m \\ \mathrm{M}_B\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=3)\Big|_A^B = 0 \end{cases}$

Tramo $\overline{BC}$:

$$\mathrm{M}(s)\Big|_B^C = M - V_A\cdot s - P\cdot(s-3) = 60-20\cdot s-20\cdot(s-3)$$

$$=120-40\cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_B^C = \mathrm{M}(s=3)\Big|_B^C = 0 \\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C = \mathrm{M}(s=6)\Big|_B^C = -120kN\cdot m \end{cases}$$

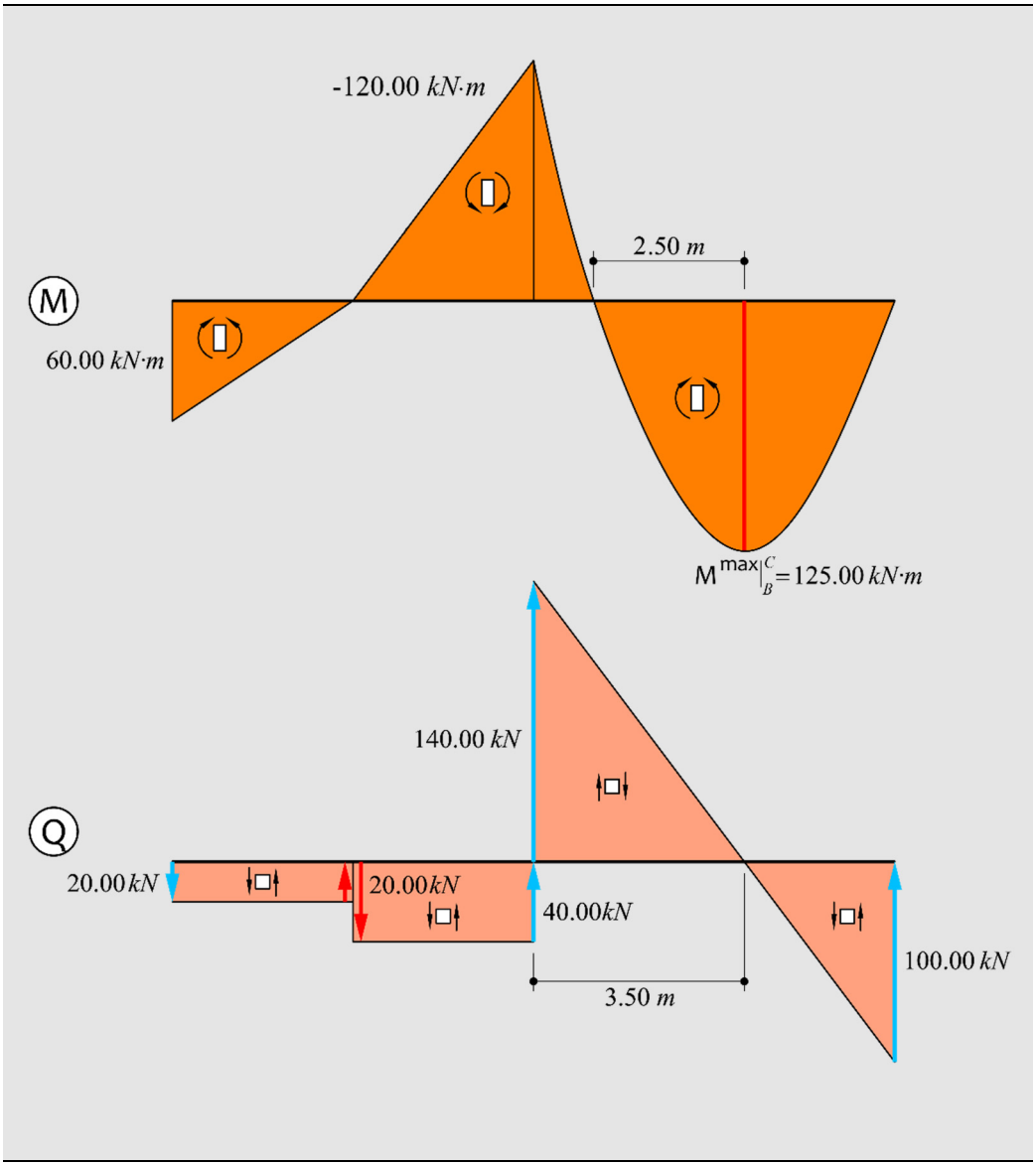
Tramo $\overline{CD}$**:**

$$\mathrm{M}(s')\Big|_C^D = \mathrm{M}_C\Big|_B^C + Q_C\Big|_B^C\cdot s' - q\cdot\frac{(s')^2}{2}$$

$$=-120+140\cdot s'-40\cdot\frac{(s')^2}{2} \quad \begin{cases} \mathrm{M}_C\Big|_C^D = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_C^D = -120kN\cdot m \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_C^D = \mathrm{M}(s'=3.5)\Big|_C^D = 125kN\cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_C^D = \mathrm{M}(s'=6)\Big|_C^D = 0 \end{cases}$$

El momento flector, en este tramo, se anula para:

$$\mathrm{M}\left(s_*'\right)\Big|_C^D = -120+140\cdot s_*'-40\cdot\frac{\left(s_*'\right)^2}{2}=0 \quad \rightarrow \quad s_*' = \begin{cases} 1m \\ 6m \end{cases}$$

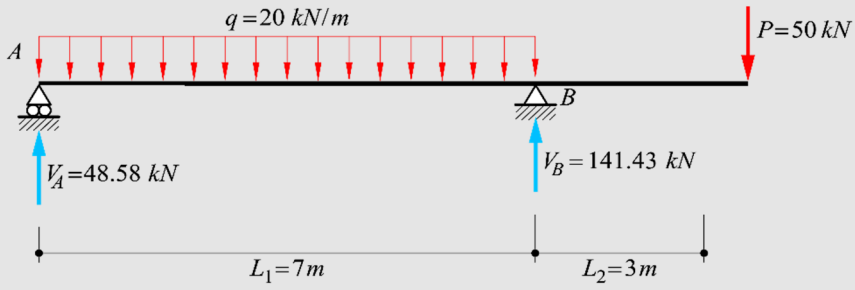


Ejemplo 3-19: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = H_B \\ \sum F_y = 0 = V_A + V_B - P - q \cdot L_1 = V_A + V_B - 50 - 20 \cdot 7 \\ \sum M_A = 0 = q \cdot \dfrac{L_1^2}{2} - V_B \cdot L_1 + P \cdot (L_1 + L_2) = 20 \cdot \dfrac{49}{2} - V_B \cdot 7 + 50 \cdot 10 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 48.57kN}; \quad \boxed{V_B = 141.43kN}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$: $\mathrm{Q}(s)\Big|_A^B = V_A - q \cdot s = 48.57 - 20 \cdot s$ $\quad \begin{cases} \mathrm{Q}_A\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=0)\Big|_A^B = 48.57kN \\ \mathrm{Q}_B\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=7)\Big|_A^B = -91.43kN \end{cases}$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\mathrm{Q}(s_0)\Big|_A^B = 0 = 48.57 - 20 \cdot s_0 \rightarrow s_0 = 2.43m$$

Tramo $\overline{BC}$: $\mathrm{Q}(s')\Big|_B^C = \mathrm{Q}_B\Big|_A^B + V_B = -91.43 + 141.43 = 50kN$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$:

$$\mathrm{M}(s)\Big|_A^B = \int_0^s (V_A - q\cdot s_1)\,ds_1 = V_A\cdot s - q\cdot\frac{s^2}{2}$$

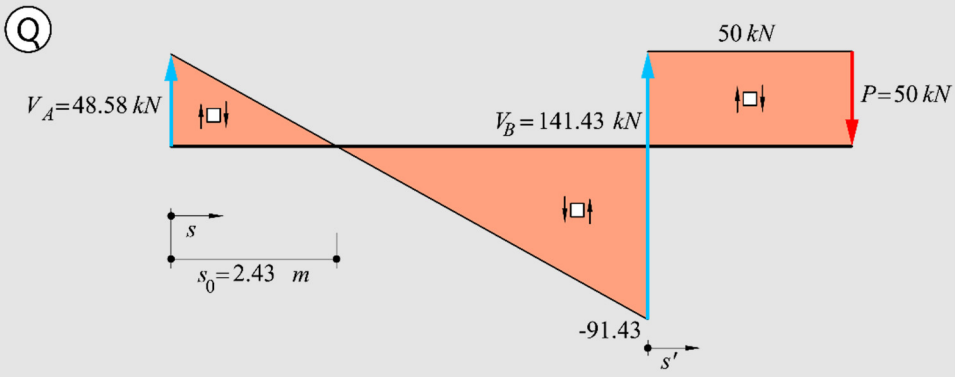
$$= 48.57\cdot s - 10\cdot s^2 \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\Big|_A^B = 0 \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_A^B = \mathrm{M}(s_0 = 2.43)\Big|_A^B = 59kN\cdot m \\ \mathrm{M}_B\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=7)\Big|_A^B = -150kN\cdot m \end{cases}$$

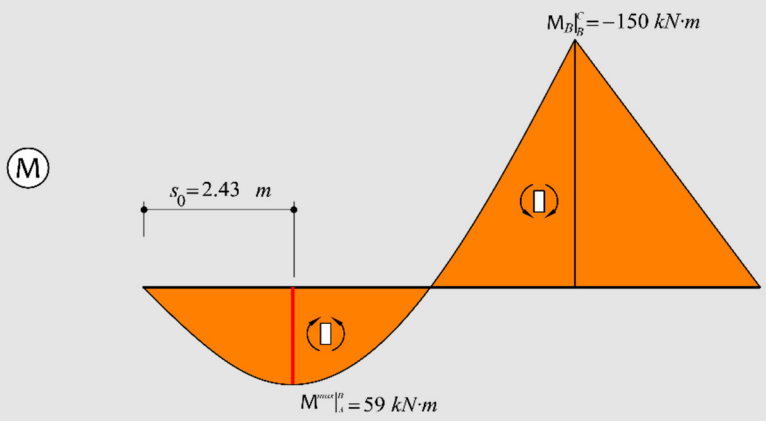
El momento flector, en este tramo, se anula para:

$$\mathrm{M}(s_*)\Big|_A^B = 48.57\cdot s_* - 10\cdot s_*^2 = 0 \quad\rightarrow\quad s_* = \begin{cases} 0 \\ 4.86m \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$:

$$\mathrm{M}(s')\Big|_B^C = \mathrm{M}_B\Big|_A^B + \int_0^{s'} \mathrm{Q}(s_1)\Big|_B^C ds_1 = -150 + 50\cdot s' \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_B^C = -150kN\cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=3)\Big|_B^C = 0 \end{cases}$$



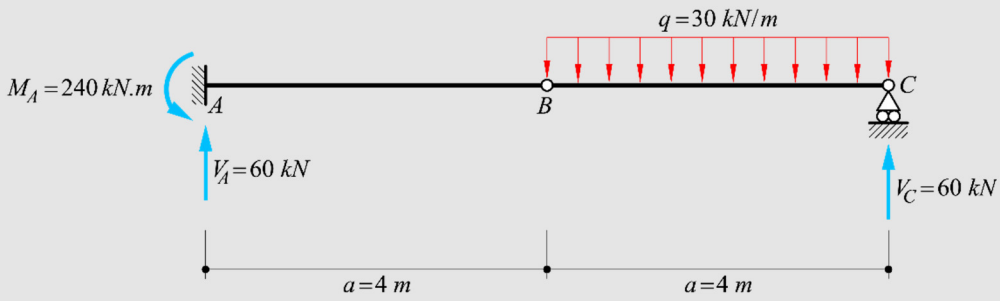


Ejemplo 3-20: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = H_A \\ \sum F_y = 0 = V_A - q\cdot a + V_C = V_A + V_C - 30\cdot 4 \\ \sum M_B^{Der} = 0 = q\cdot \dfrac{a^2}{2} - V_C\cdot a = 30\cdot 8 - V_C\cdot 4 \\ \sum M_A = 0 = -M_A + q\cdot a\cdot\left(\dfrac{a}{2}+a\right) - V_C\cdot 2a = -M_A + 30\cdot 4\cdot 6 - V_C\cdot 8 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 60kN};\quad \boxed{V_C = 60kN};\quad \boxed{M_A = 240kN\cdot m}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$**:** $\mathrm{Q}(s)\big|_A^B = V_A = 60kN$

Tramo $\overline{BC}$**:**

$$\mathrm{Q}(s')\big|_B^C = \mathrm{Q}_B\big|_A^B - q\cdot s' = 60 - 30\cdot s' \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_B\big|_B^C = \mathrm{Q}(s'=0)\big|_B^C = 60kN \\ \mathrm{Q}_C\big|_B^C = \mathrm{Q}(s'=4)\big|_B^C = -60kN \end{cases}$$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\mathrm{Q}(s_0') = 0 = 60 - 30\cdot s_0' \rightarrow s_0' = 2m$$

c) Ley de Momento Flector

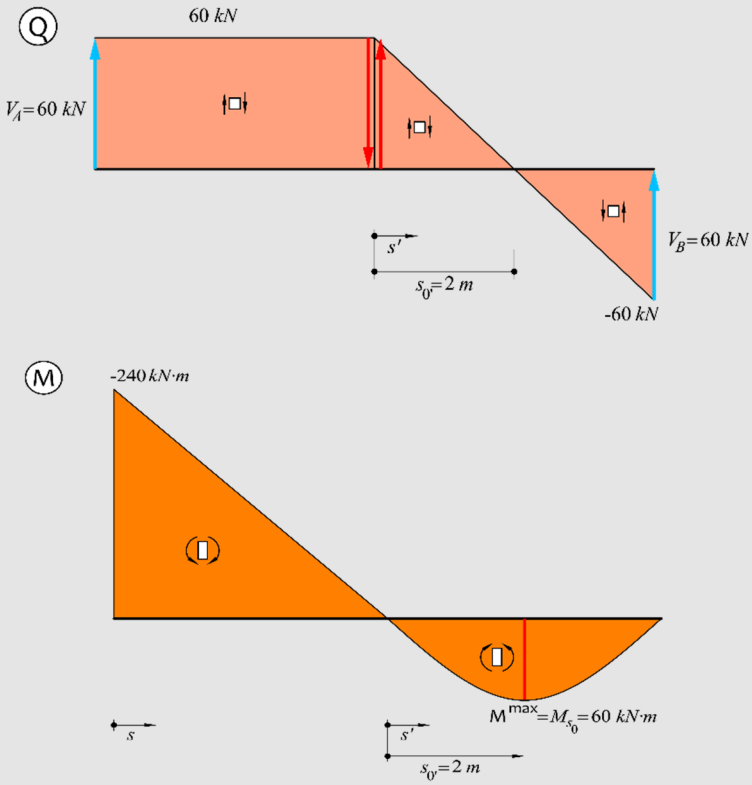
Tramo $\overline{AB}$**:**

$$\mathrm{M}(s)\big|_A^B = -M_A + \int_0^s V_A\, dz = -240 + 60\cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\big|_A^B = -240kN\cdot m \\ \mathrm{M}_B\big|_A^B = \mathrm{M}(s=4)\big|_A^B = 0 \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$**:**

$$\mathrm{M}(s')\Big|_B^C = \mathrm{M}_B\Big|_A^B + \int_0^{s'} \mathrm{Q}(z)\Big|_B^C dz = 0 + \int_0^{s'} (60 - 30\cdot z)\, dz = 60\cdot s' - 30\cdot\frac{(s')^2}{2}$$

$$= 60\cdot s' - 15\cdot(s')^2 \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_B^C = 0 \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'_0=2)\Big|_B^C = 60kN\cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=4)\Big|_B^C = 0 \end{cases}$$



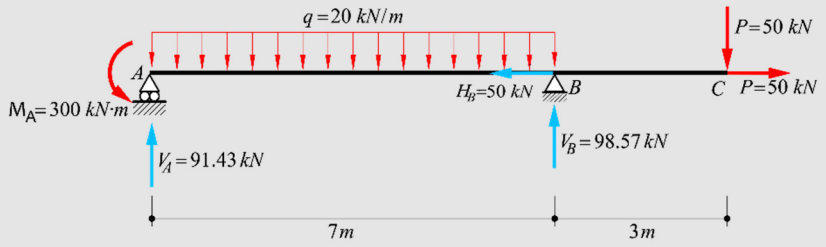
Ejemplo 3-21: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.

d) Ley de esfuerzos normales.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_B - P - q \cdot L_1 = V_A + V_B - 50 - 20 \cdot 7 \\ \sum F_z = 0 = -H_B + P = -H_B + 50 \\ \sum M_A = 0 = -M_A + q \cdot \dfrac{L_1^2}{2} - V_B \cdot L_1 + P \cdot (L_1 + L_2) = -300 + 20 \cdot \dfrac{49}{2} - V_B \cdot 7 + 50 \cdot 10 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 91.43kN}; \quad \boxed{V_B = 98.57kN}; \quad \boxed{H_B = 50kN}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$: $\left. Q(s) \right|_A^B = V_A - q \cdot s = 91.43 - 20 \cdot s$ $\quad \begin{cases} \left. Q_A \right|_A^B = Q(s=0)\Big|_A^B = 91.43kN \\ \left. Q_B \right|_A^B = Q(s=7)\Big|_A^B = -48.57kN \end{cases}$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, resulta $s_0 = 4.57m$

Tramo $\overline{BC}$: $\left. Q(s') \right|_B^C = \left. Q_B \right|_A^B + V_B = -48.57 + 98.57 = 50kN$

c) Ley de Momento Flector

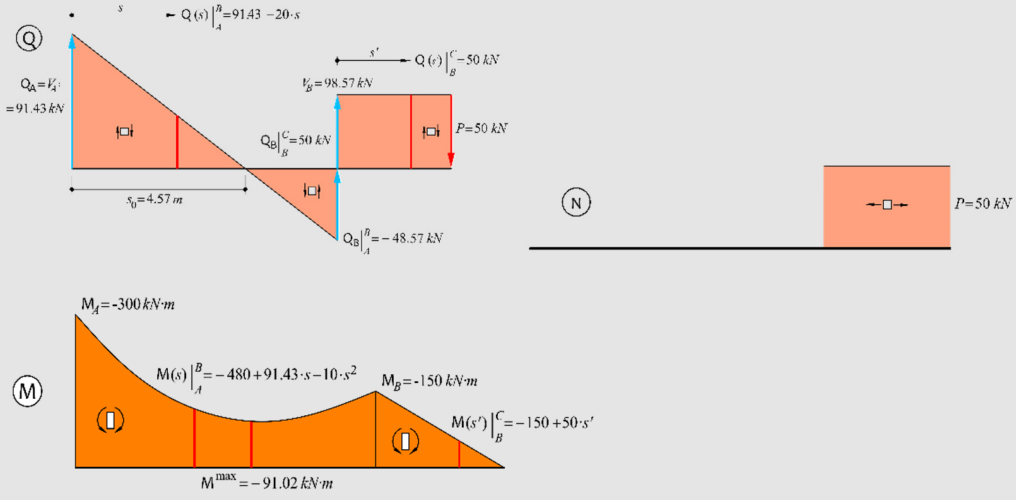
Tramo $\overline{AB}$:

$$\mathrm{M}(s)\Big|_A^B = -M_A + \int_0^s (V_A - q\cdot z)\,dz = -M_A + V_A\cdot s - q\cdot\frac{s^2}{2}$$

$$= -300 + 91.43\cdot s - 10\cdot s^2 \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\Big|_A^B = -300kN\cdot m \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_A^B = \mathrm{M}(s_0=4.57)\Big|_A^B = -91.02kN\cdot m \\ \mathrm{M}_B\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=7)\Big|_A^B = -150kN\cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$:

$$\mathrm{M}(s')\Big|_B^C = \mathrm{M}_B\Big|_A^B + \int_0^{s'} \mathrm{Q}(z)\Big|_B^C\,dz = -150 + 50\cdot s' \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_B^C = -150kN\cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=3)\Big|_B^C = 0 \end{cases}$$



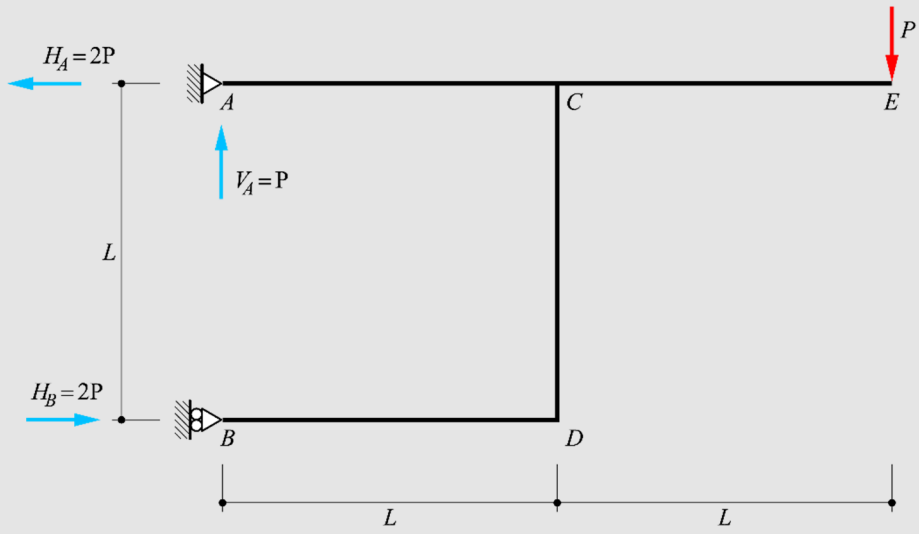
Ejemplo 3-22: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante.

c) Ley de momentos flectores.

d) Ley de esfuerzo normal.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = -H_A + H_B \\ \sum F_y = 0 = V_A - P \\ \sum M_A = 0 = -H_B \cdot L + P \cdot 2L \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = P}; \quad \boxed{H_A = H_B = 2P}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AC}$: $Q(s)\Big|_A^C = V_A = P$

Tramo $\overline{DC}$: $Q(s')\Big|_D^C = H_A = 2P$

Tramo $\overline{EC}$: $Q(s)\Big|_C^E = P$

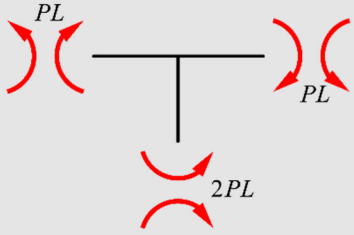
c) Ley de Momento Flector

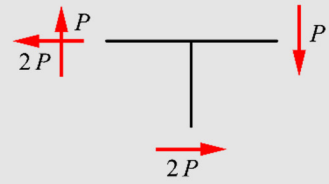
Tramo $\overline{AC}$: $\mathrm{M}\left(s^{AC}\right)\Big|_A^C = V_A \cdot s^{AC} = P \cdot s^{AC}$ $\quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\big|_A^C = \mathrm{M}\left(s^{AC}=0\right)\Big|_A^C = 0 \\ \mathrm{M}_C\big|_A^C = \mathrm{M}\left(s^{AC}=L\right)\Big|_A^C = P \cdot L \end{cases}$

Tramo $\overline{DC}$:

$\mathrm{M}\left(s^{DC}\right)\Big|_D^C = -H_B \cdot s^{DC} = -2P \cdot s^{DC}$ $\quad \begin{cases} \mathrm{M}_D\big|_D^C = \mathrm{M}\left(s^{DC}=0\right)\Big|_D^C = 0 \\ \mathrm{M}_C\big|_D^C = \mathrm{M}\left(s^{DC}=L\right)\Big|_D^C = -2P \cdot L \end{cases}$

Tramo $\overline{CE}$: $\mathrm{M}\left(s^{EC}\right)\Big|_E^C = -P \cdot s^{EC}$ $\quad \begin{cases} \mathrm{M}_E\big|_E^C = \mathrm{M}\left(s^{EC}=0\right)\Big|_E^C = 0 \\ \mathrm{M}_C\big|_E^C = \mathrm{M}\left(s^{EC}=L\right)\Big|_E^C = -P \cdot L \end{cases}$





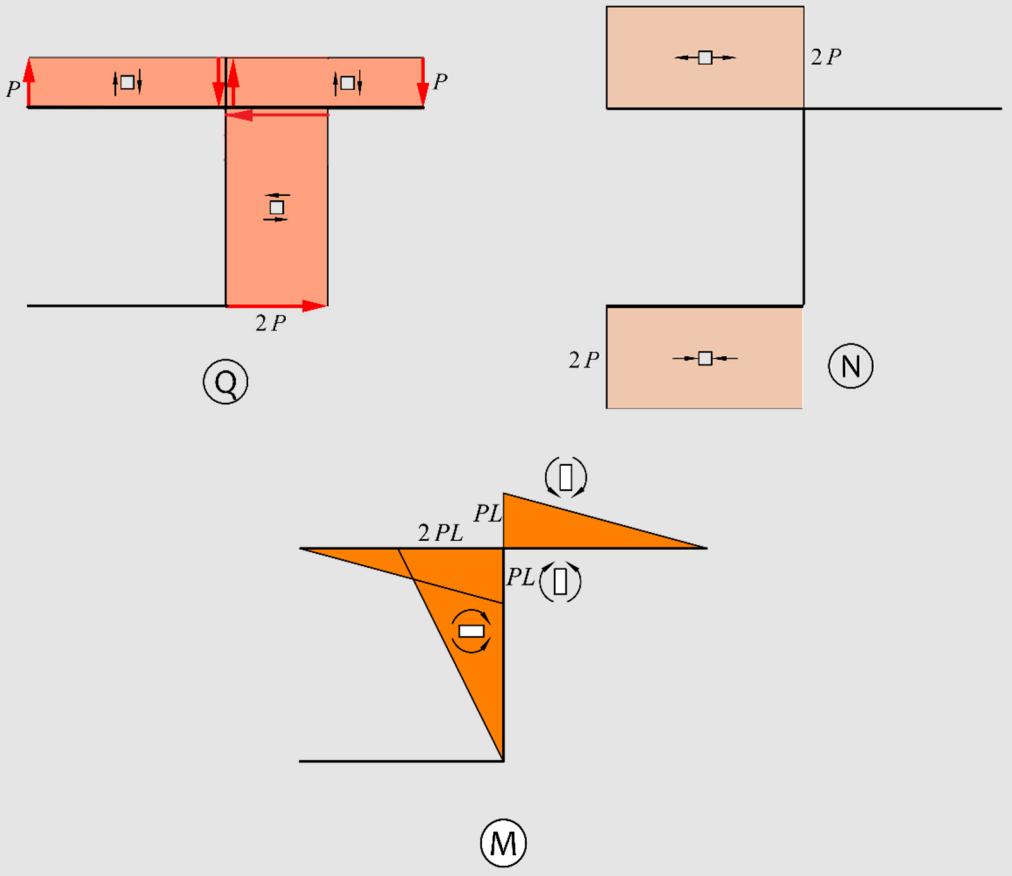
b) Ley de Esfuerzo Normal

Tramo $\overline{AC}$: $\mathrm{N}\left(s^{AC}\right)\Big|_A^C = H_A = -2P$

Tramo $\overline{EC}$: $\mathrm{N}\left(s^{EC}\right)\Big|_E^C = 0$

Tramo $\overline{DC}$: $\mathrm{N}\left(s^{DC}\right)\Big|_D^C = 0$

Tramo $\overline{BD}$: $\left.\mathrm{N}\left(s^{BD}\right)\right|_B^D = H_B = 2P$

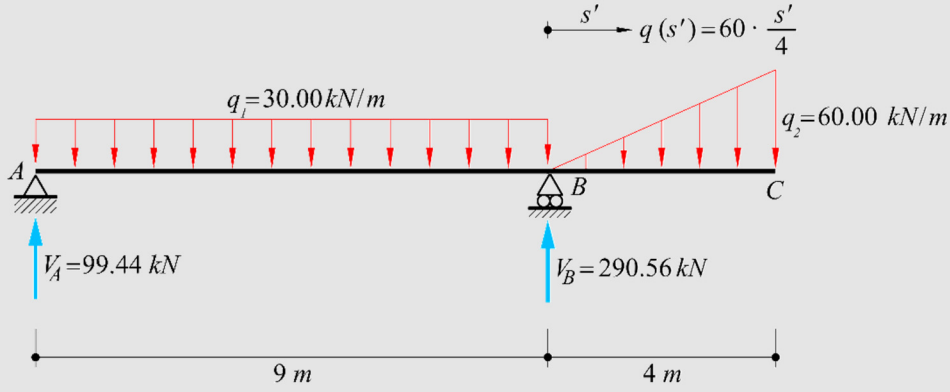


Ejemplo 3-23: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_B - q_1 \cdot 9 - \dfrac{q_2 \cdot 4}{2} = V_A + V_B - 30 \cdot 9 - 60 \cdot 2 \\ \sum M_B = 0 = V_A \cdot 9 - q_1 \cdot \dfrac{9^2}{2} + \left(\dfrac{q_2 \cdot 4}{2} \right) \cdot \dfrac{2}{3} \cdot 4 = V_A \cdot 9 - 30 \cdot \dfrac{81}{2} + 120 \cdot \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 99.44 kN}; \quad \boxed{V_B = 290.56 kN}$$

Verificación

$$\sum M_A = -V_B \cdot 9 + 30 \cdot \frac{9^2}{2} + \frac{60 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + 9 \right) = -2615 + 1215 + 1400 = 0$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$:

$$\mathrm{Q}(s)\Big|_A^B = V_A - q \cdot s = 99.44 - 30 \cdot s \qquad \begin{cases} \mathrm{Q}_A\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=0)\Big|_A^B = 99.44 kN \\ \mathrm{Q}_B\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=9)\Big|_A^B = -170.56 kN \end{cases}$$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\mathrm{Q}(s_0) = 0 = 99.44 - 30 \cdot s_0 \rightarrow s_0 = 3.31m$$

Tramo $\overline{BC}$:

$$\mathrm{Q}(s')\Big|_B^C = \mathrm{Q}_B\Big|_A^B + V_B - \left(\frac{60 \cdot s'}{4}\right) \cdot \frac{s'}{2} = -170.56 + 290.56 - 7.5 \cdot s'^2$$

$$= 120 - 7.5 \cdot s'^2 \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_B\Big|_B^C = \mathrm{Q}(s'=0)\Big|_B^C = 120kN \\ \mathrm{Q}(s'=2)\Big|_B^C = 90kN \\ \mathrm{Q}_C\Big|_B^C = \mathrm{Q}(s'=4)\Big|_B^C = 0 \end{cases}$$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$:

$$\mathrm{M}(s)\Big|_A^B = V_A \cdot s - q_1 \cdot \frac{s^2}{2} = 99.44 \cdot s - 15 \cdot s^2 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\Big|_A^B = 0 \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=3.31)\Big|_A^B = 164.82kN \cdot m \\ \mathrm{M}_B\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=9)\Big|_A^B = -320kN \cdot m \end{cases}$$

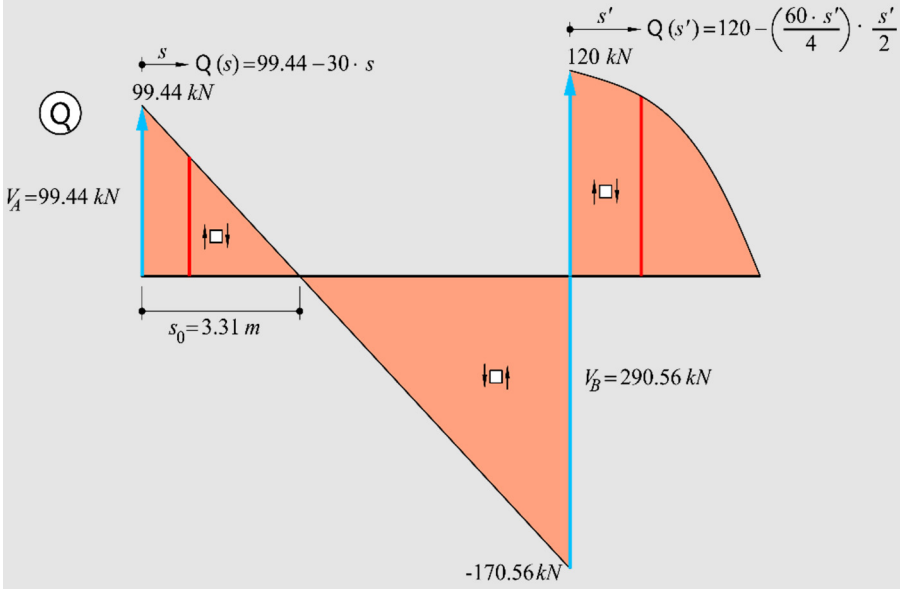
El momento flector, en este tramo, se anula para:

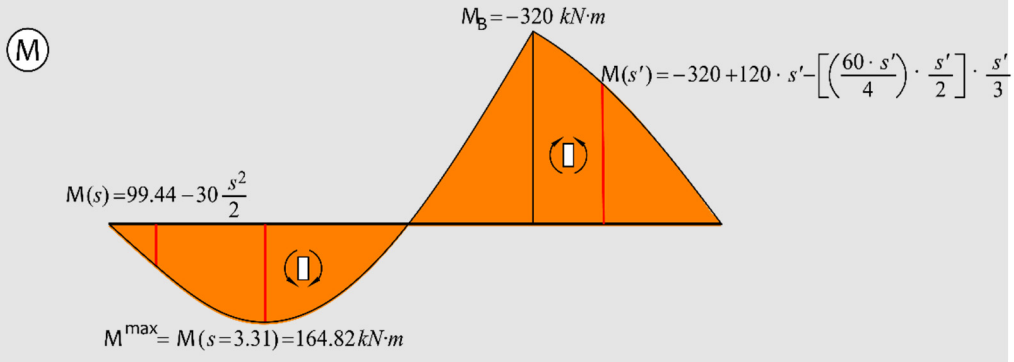
$$\mathrm{M}(s_*)\Big|_A^B = 99.44 \cdot s_* - 15 \cdot s_*^2 = 0 \quad \rightarrow \quad s_* = \begin{cases} 0 \\ 6.63m \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$: $\dfrac{q_2}{4} = \dfrac{q(s')}{s'} \quad \rightarrow \quad q(s') = \dfrac{q_2 \cdot s'}{4} = \dfrac{60 \cdot s'}{4} = 15 \cdot s'$

$$M(s')\Big|_B^C = M_B\Big|_A^B + Q_B\Big|_B^C \cdot s' - \overbrace{\left(\frac{60\cdot s'}{4}\right)}^{q(s')} \cdot \frac{s'}{2} \cdot \frac{s'}{3} =$$

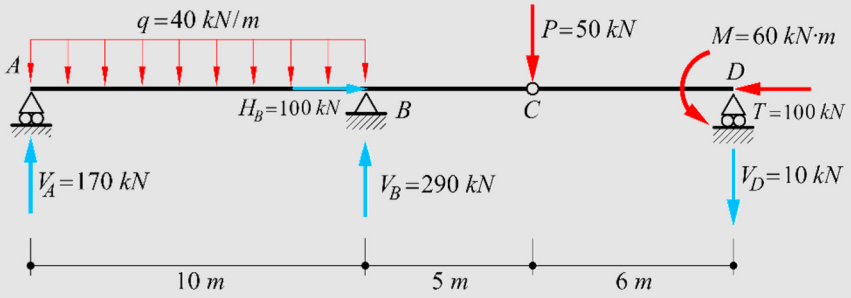
$$-320 + 120\cdot s' - 2.5\cdot (s')^3 \qquad \begin{cases} M_B\Big|_B^C = M(s'=0)\Big|_B^C = -320 kN\cdot m \\ M(s'=2)\Big|_B^C = -100 kN\cdot m \\ M_C\Big|_B^C = M(s'=4)\Big|_B^C = 0 \end{cases}$$





Ejemplo 3-24: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.
b) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.
c) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = H_B - T = H_B - 100 \\ \sum F_y = 0 = V_A + V_B - V_D - q\cdot 10 - P = V_A + V_B - V_D - 40\cdot 10 - 50 \\ \sum M_A = 0 = (q\cdot 10)\cdot\dfrac{10}{2} - V_B\cdot 10 + P\cdot(10+5) + V_D\cdot(10+5+6) - M \\ \qquad\qquad = 400\cdot 5 - V_B\cdot 10 + 50\cdot 15 + V_D\cdot 21 - 60 \\ \sum M_C^{Der} = 0 = V_B\cdot 6 - M = V_B\cdot 6 - 60 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 170kN};\quad \boxed{V_B = 290kN};\quad \boxed{V_D = 10kN};\quad \boxed{H_B = 100kN}$$

Verificación

$$\sum M_D = V_A\cdot(10+5+6) + V_B\cdot(5+6) - (40\cdot 10)\cdot\left(\frac{10}{2}+5+6\right) - 50\cdot 6 - 60$$
$$= 3570 + 3190 - 640 - 6400 - 60 = 0$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$: $\left.\mathrm{Q}(s)\right|_A^B = V_A - q\cdot s = 170 - 40\cdot s$ $\quad \begin{cases} \left.\mathrm{Q}_A\right|_A^B = \left.\mathrm{Q}(s=0)\right|_A^B = 170kN \\ \left.\mathrm{Q}_B\right|_A^B = \left.\mathrm{Q}(s=10)\right|_A^B = -230kN \end{cases}$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, resulta $s_0 = 4.25m$

Tramo $\overline{BC}$: $\left.\mathrm{Q}(s')\right|_B^C = \left.\mathrm{Q}_B\right|_A^B + V_B = -230 + 290$ $\quad \begin{cases} \left.\mathrm{Q}_B\right|_B^C = \left.\mathrm{Q}(s'=0)\right|_B^C = 60kN \\ \left.\mathrm{Q}_C\right|_B^C = \left.\mathrm{Q}(s'=5)\right|_B^C = 60kN \end{cases}$

Tramo $\overline{CD}$: $\left.\mathrm{Q}(s'')\right|_C^D = \left.\mathrm{Q}_C\right|_B^C - P = 60 - 50$ $\quad \begin{cases} \left.\mathrm{Q}_C\right|_C^D = \left.\mathrm{Q}(s''=0)\right|_B^C = 10kN \\ \left.\mathrm{Q}_D\right|_C^D = \left.\mathrm{Q}(s''=6)\right|_B^C = 10kN \end{cases}$

c) Ley de Momento Flector

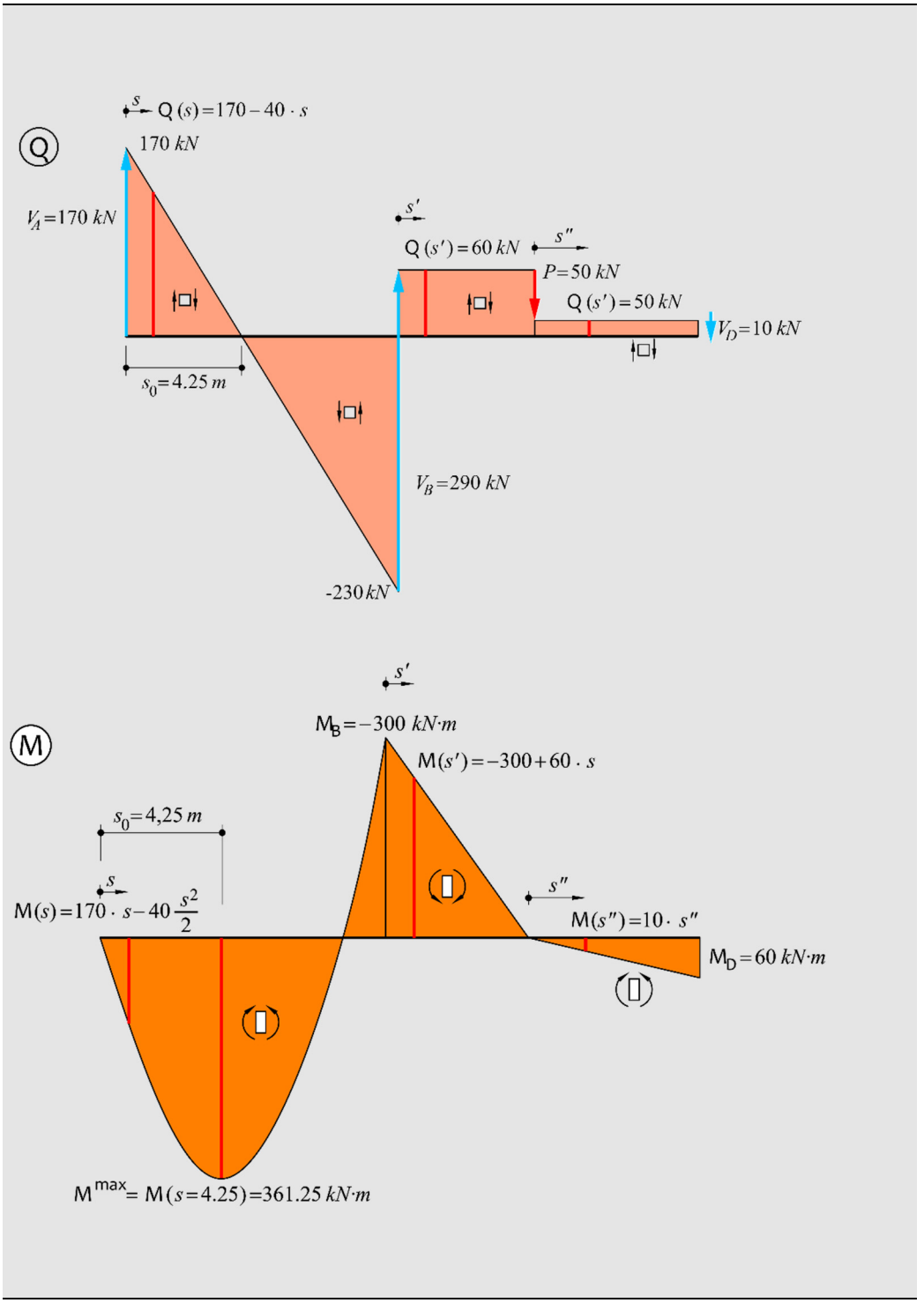
Tramo $\overline{AB}$:

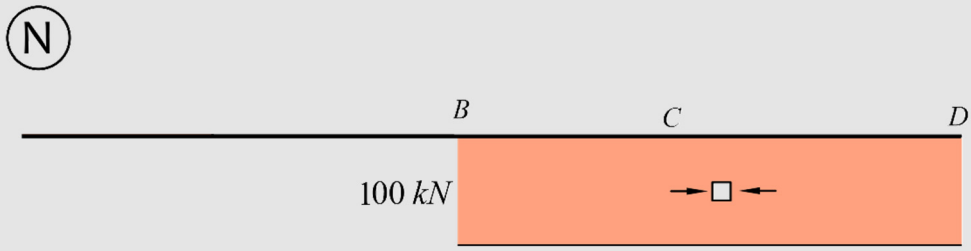
$\left.\mathrm{M}(s)\right|_A^B = V_A\cdot s - q\cdot\dfrac{s^2}{2} = 170\cdot s - 20\cdot s^2$ $\quad \begin{cases} \left.\mathrm{M}_A\right|_A^B = \left.\mathrm{M}(s=0)\right|_A^B = 0 \\ \left.\mathrm{M}^{\max}\right|_A^B = \left.\mathrm{M}(s=4.25)\right|_A^B = 361.25kN\cdot m \\ \left.\mathrm{M}_B\right|_A^B = \left.\mathrm{M}(s=10)\right|_A^B = -300kN\cdot m \end{cases}$

El momento flector, en este tramo, se anula para: $s_* = 0; \quad s_* = 8.5m$

Tramo $\overline{BC}$: $\left.\mathrm{M}(s')\right|_B^C = -300 + 60\cdot s'$ $\quad \begin{cases} \left.\mathrm{M}_B\right|_B^C = \left.\mathrm{M}(s'=0)\right|_B^C = -300kN\cdot m \\ \left.\mathrm{M}_C\right|_B^C = \left.\mathrm{M}(s'=5)\right|_B^C = 0 \end{cases}$

Tramo $\overline{CD}$: $\left.\mathrm{M}(s'')\right|_C^D = 10\cdot s''$ $\quad \begin{cases} \left.\mathrm{M}_C\right|_C^D = \left.\mathrm{M}(s''=0)\right|_B^C = 0 \\ \left.\mathrm{M}_D\right|_C^D = \left.\mathrm{M}(s''=6)\right|_B^C = 60kN\cdot m \end{cases}$


Q
s
Q (s) = 170 − 40 · s
170 kN
V_A = 170 kN
s'
Q (s') = 60 kN
s''
P = 50 kN
Q (s') = 50 kN
V_D = 10 kN
s_0 = 4.25 m
V_B = 290 kN
-230 kN
M
s'
M_B = −300 kN·m
M(s') = −300 + 60 · s
s_0 = 4,25 m
s
M(s) = 170 · s − 40 s²/2
s''
M(s'') = 10 · s''
M_D = 60 kN·m
M^max = M(s = 4.25) = 361.25 kN·m



Ejemplo 3-25: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

d) Ley de esfuerzos normales.

a) Cálculo de Reacciones

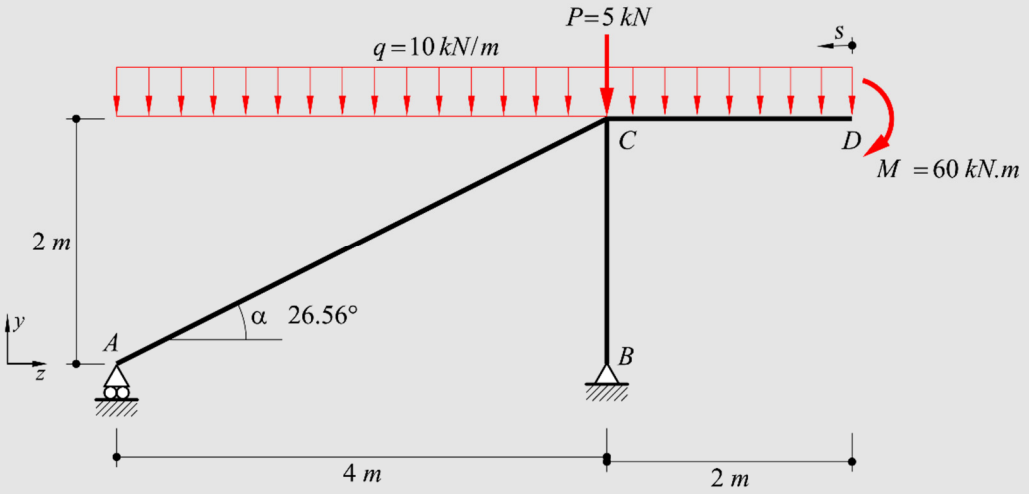
$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = H_B \\ \sum F_y = 0 = -P - q\cdot(2+4) + V_A + V_B = -5 - 10\cdot 6 + V_A + V_B \\ \sum M_A = 0 = (q\cdot 6)\cdot\dfrac{6}{2} + P\cdot 4 - V_B\cdot 4 + M = (10\cdot 6)\cdot 3 + 5\cdot 4 - V_B\cdot 4 + 60 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 0}; \quad \boxed{V_B = 65kN}$$

Verificación

$$\sum M_B = -10\cdot\frac{4^2}{2}+10\cdot\frac{2^2}{2}+60 = -80+20+60 = 0$$



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{2}{4} = 0.5 \quad \rightarrow \quad \alpha = 26.56^{\circ}$$

b) Leyes de Esfuerzos

Barra $\overline{AC}$:

$$Q(z)\Big|_A^C = \left(\not{V}_A^{=0} - q\cdot z\right)\cos(26.56^{\circ}) = -10\cdot z\cdot\cos(26.56^{\circ})$$

$$= -8.94\cdot z \quad \begin{cases} Q_A\Big|_A^C = Q(z=0)\Big|_A^C = 0 \\ Q_C\Big|_A^C = Q(z=4)\Big|_A^C = -35.78kN \end{cases}$$

$$M(z)\Big|_A^C = \not{V}_A^{=0}\cdot z - q\cdot\frac{z^2}{2} = -5\cdot z^2 \quad \begin{cases} M_A\Big|_A^C = M(z=0)\Big|_A^C = 0 \\ M_{AC/2}\Big|_A^C = M(z=2)\Big|_A^C = -20kN\cdot m \\ M_C\Big|_A^C = M(z=4)\Big|_A^C = -80kN\cdot m \end{cases}$$

$$\mathrm{N}(z)\Big|_A^C = \left(\cancel{V_A}^{=0} - q\cdot z\right)\mathrm{sen}\left(26.56^{\circ}\right) = -4.47\cdot z \quad \begin{cases} \mathrm{N}_A\Big|_A^C = \mathrm{N}(z=0)\Big|_A^C = 0 \\ \mathrm{N}_C\Big|_A^C = \mathrm{N}(z=4)\Big|_A^C = -17.89kN \end{cases}$$

Barra $\overline{BC}$:

$$\mathrm{Q}(y)\Big|_B^C = 0; \qquad \mathrm{M}(y)\Big|_B^C = 0; \qquad \mathrm{N}(y)\Big|_B^C = V_B = 65kN$$

Barra $\overline{DC}$:

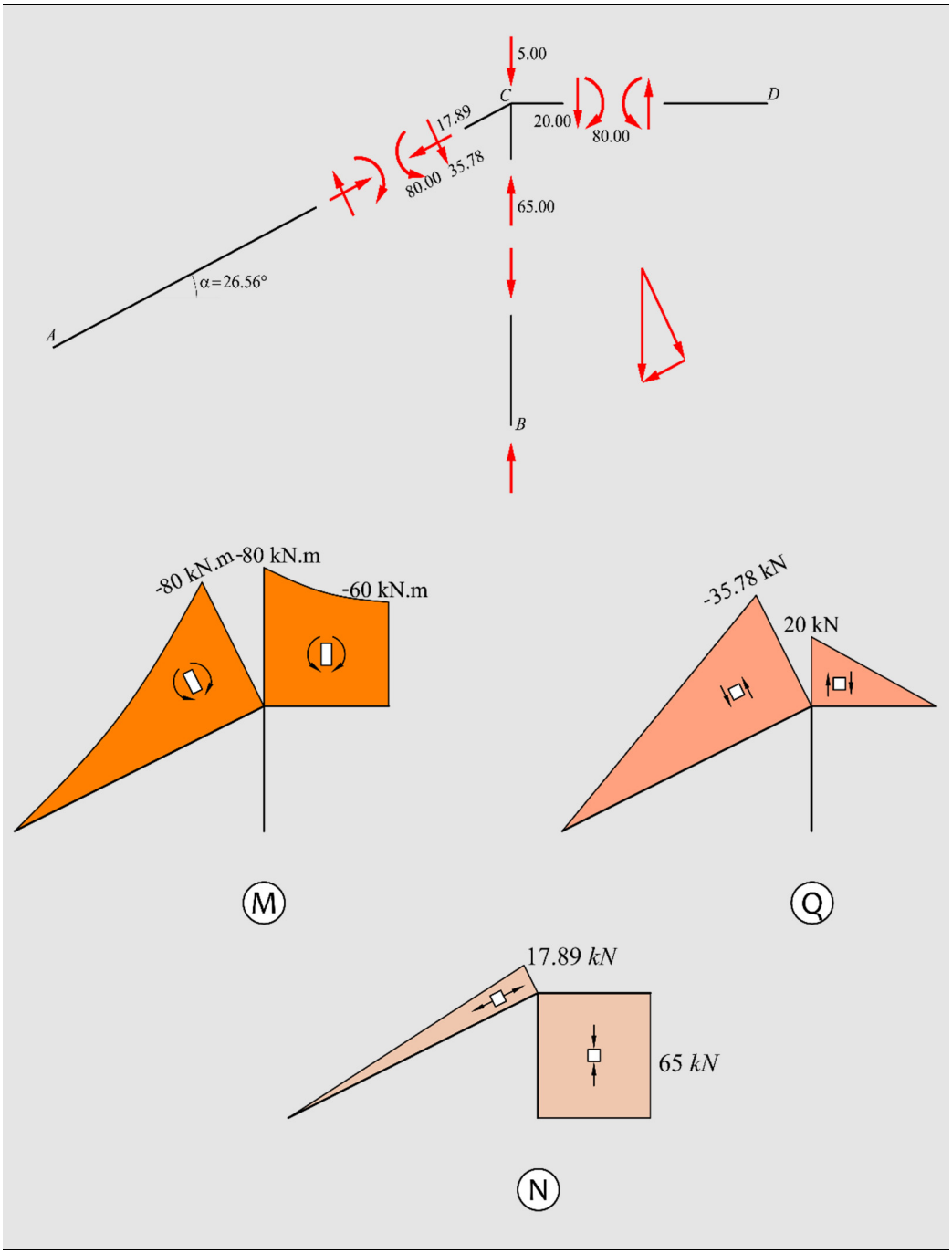
$$\mathrm{Q}(s)\Big|_D^C = q\cdot s = 10\cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_D\Big|_D^C = \mathrm{Q}(s=0)\Big|_A^C = 0 \\ \mathrm{Q}_C\Big|_D^C = \mathrm{Q}(s=2)\Big|_C^D = 20kN \end{cases}$$

$$\mathrm{M}(s)\Big|_D^C = -\mathrm{M}_D - q\cdot\frac{s^2}{2} = -60 - 5\cdot s^2 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_D\Big|_D^C = \mathrm{M}(s=0)\Big|_D^C = -60kN\cdot m \\ \mathrm{M}_{DC/2}\Big|_D^C = \mathrm{M}(s=1)\Big|_D^C = -65kN\cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_D^C = \mathrm{M}(s=2)\Big|_D^C = -80kN\cdot m \end{cases}$$

$$\mathrm{N}(s)\Big|_D^C = 0$$

Equilibrio en el nudo C

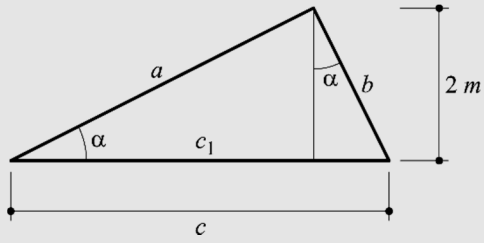
$$\begin{cases} \sum F_z = -17.885\cdot\cos(26.56^{\circ}) + 35.778\cdot\mathrm{sen}(26.56^{\circ}) \simeq 0 \\ \sum F_y = -35.778\cdot\cos(26.56^{\circ}) - 17.885\cdot\mathrm{sen}(26.56^{\circ}) - 20 + 65 - 5 \simeq 0 \\ \sum M_C = -80 + 80 = 0 \end{cases}$$


5.00
C
D
17.89
20.00
80.00
80.00
35.78
65.00
α=26.56°
A
B
-80 kN.m-80 kN.m
-60 kN.m
M
-35.78 kN
20 kN
Q
17.89 kN
65 kN
N

Ejemplo 3-26: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.
b) Leyes de esfuerzos con sus máximos, mínimos y ceros.

Determinación del ángulo α



$b \cdot \cos\alpha = 2m$

Suponiendo el caso en que el dato sea b , se obtiene la magnitud c mediante el teorema del seno: $\frac{c}{\text{sen}\,90^o} = \frac{b}{\text{sen}\,\alpha} \quad \rightarrow \quad b = c \cdot \text{sen}\,\alpha$, sustituyendo en la expresión anterior se obtiene: $c \cdot \underbrace{\left(\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha\right)}_{\frac{\text{sen}\,2\alpha}{2}} = 2 \quad \rightarrow \quad c \cdot \frac{\text{sen}2\alpha}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad c \cdot \text{sen}2\alpha = 4$

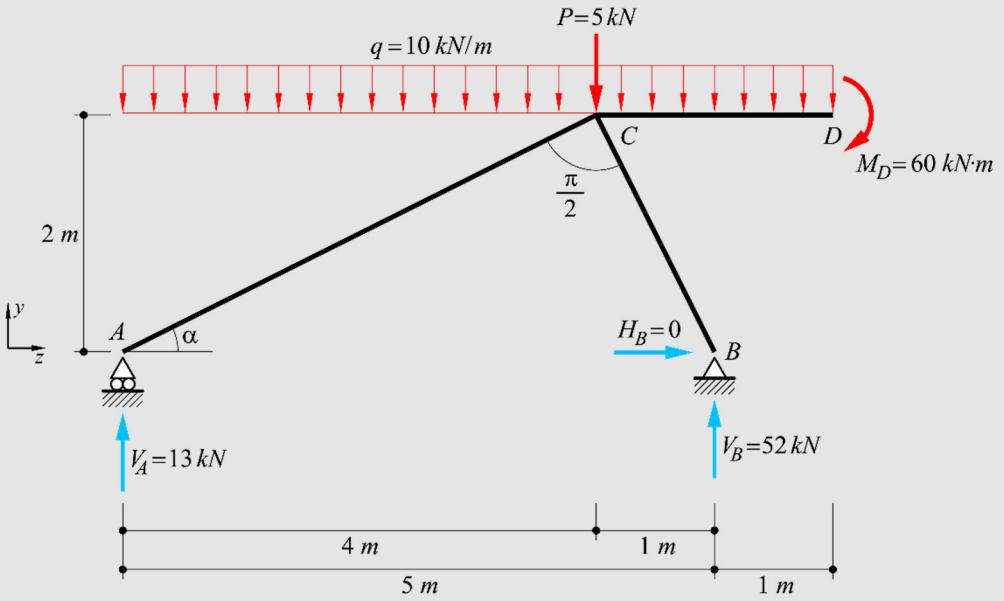
$$\alpha = c \cdot \text{sen}2\alpha = \frac{1}{2}\text{sen}^{-1}\left(\frac{4}{c}\right) = 26.56^o$$

a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = H_B \\ \sum F_y = 0 = V_A + V_B - q \cdot 6 - P = V_A + V_B - 10 \cdot 6 - 5 \\ \sum M_B = 0 = V_A \cdot 5 - \left(q \cdot 6\right) \cdot \left(3 - 1\right) - P \cdot 1 + M = V_A \cdot 5 - \left(10 \cdot 6\right) \cdot 2 - 5 + 60 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 13kN}; \quad \boxed{V_B = 52kN}$$



b) Leyes de Esfuerzos

Barra $\overline{AC}$:

$$Q(z)\Big|_A^C = (V_A - q\cdot z)\cos\alpha = (13-10\cdot z)\cos(26.56^\circ) \quad \begin{cases} Q_A\Big|_A^C = Q(z=0)\Big|_A^C = 11.63kN \\ Q_C\Big|_A^C = Q(z=4)\Big|_A^C = -24.15kN \end{cases}$$

El corte en este tramo se anula para,

$$Q(z_0)\Big|_A^C = (13-10\cdot z_0)\cos 26.56^\circ = 0 \quad \rightarrow \quad z_0 = 1.3m$$

$$M(z)\Big|_A^C = 13\cdot z - 10\cdot\frac{z^2}{2} = 13\cdot z - 5\cdot z^2 \quad \begin{cases} M_A\Big|_A^C = M(z=0)\Big|_A^C = 0 \\ M^{max}\Big|_A^C = M(z_0=1.3)\Big|_A^C = 8.45kN\cdot m \\ M_C\Big|_A^C = M(z=4)\Big|_A^C = -28kN\cdot m \end{cases}$$

El momento en este tramo se anula para:

$$\mathrm{M}(z_*)\Big|_A^C = 13\cdot z_* - 5\cdot z_*^2 = 0 \begin{cases} z_* = 0 \\ z_* = 2.6m \end{cases}$$

$$\mathrm{N}(z)\Big|_A^C = (V_A - q\cdot z)\,\mathrm{sen}(26.56^\circ)$$

$$= (13 - 10\cdot x)\,\mathrm{sen}(26.56^\circ) \quad \begin{cases} \mathrm{N}_A\Big|_A^C = N(z=0)\Big|_A^C = 5.81kN \\ \mathrm{N}_C\Big|_A^C = N(z=4)\Big|_A^C = -12.07kN \end{cases}$$

Barra $\overline{DC}$:

$$\mathrm{Q}(s^{DC})\Big|_D^C = 10\cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_D\Big|_D^C = \mathrm{Q}(s^{DC}=0)\Big|_C^D = 0 \\ \mathrm{Q}_C\Big|_D^C = \mathrm{Q}(s^{DC}=2)\Big|_A^C = 20kN \end{cases}$$

$$\mathrm{M}(s^{DC})\Big|_D^C = -\left(60 + 10\cdot\frac{(s^{DC})^2}{2}\right)$$

$$= -60 - 5\cdot(s^{DC})^2 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_D\Big|_D^C = \mathrm{M}(s^{DC}=0)\Big|_D^C = -60kN\cdot m \\ \mathrm{M}_{DC/2}\Big|_D^C = \mathrm{M}(s^{DC}=1)\Big|_D^C = -65kN\cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_D^C = \mathrm{M}(s^{DC}=2)\Big|_D^C = -80kN\cdot m \end{cases}$$

$$\mathrm{N}(s^{DC})\Big|_D^C = 0$$

Barra $\overline{BC}$:

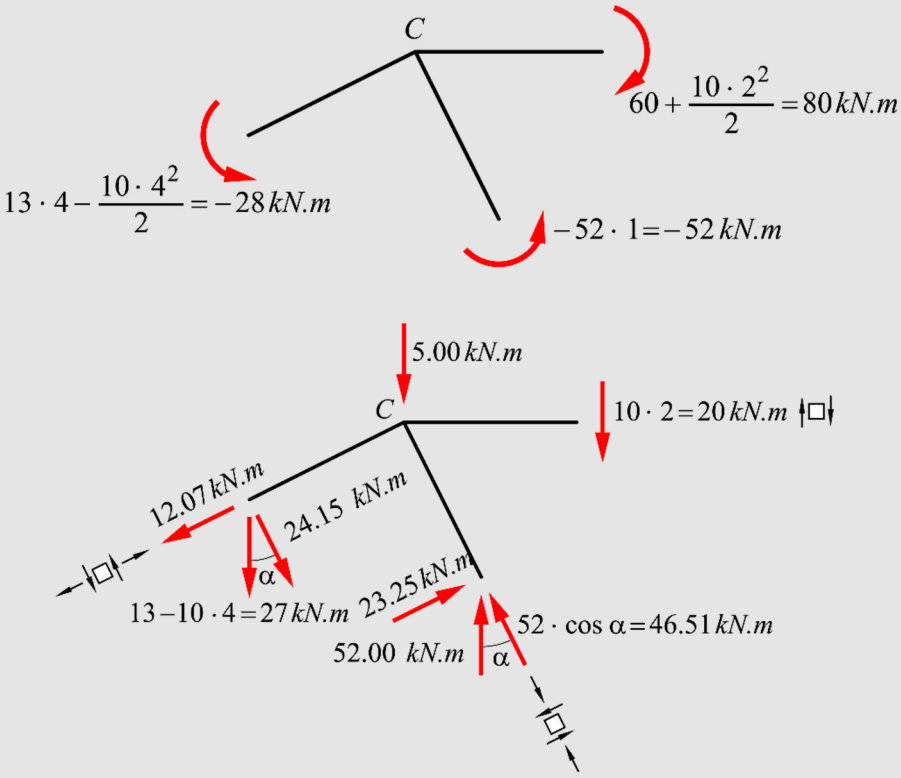
$$\mathrm{Q}(s^{BC})\Big|_B^C = -(V_B\cdot\mathrm{sen}\alpha) = -52\cdot\mathrm{sen}(26.565^\circ) = -23.5kN$$

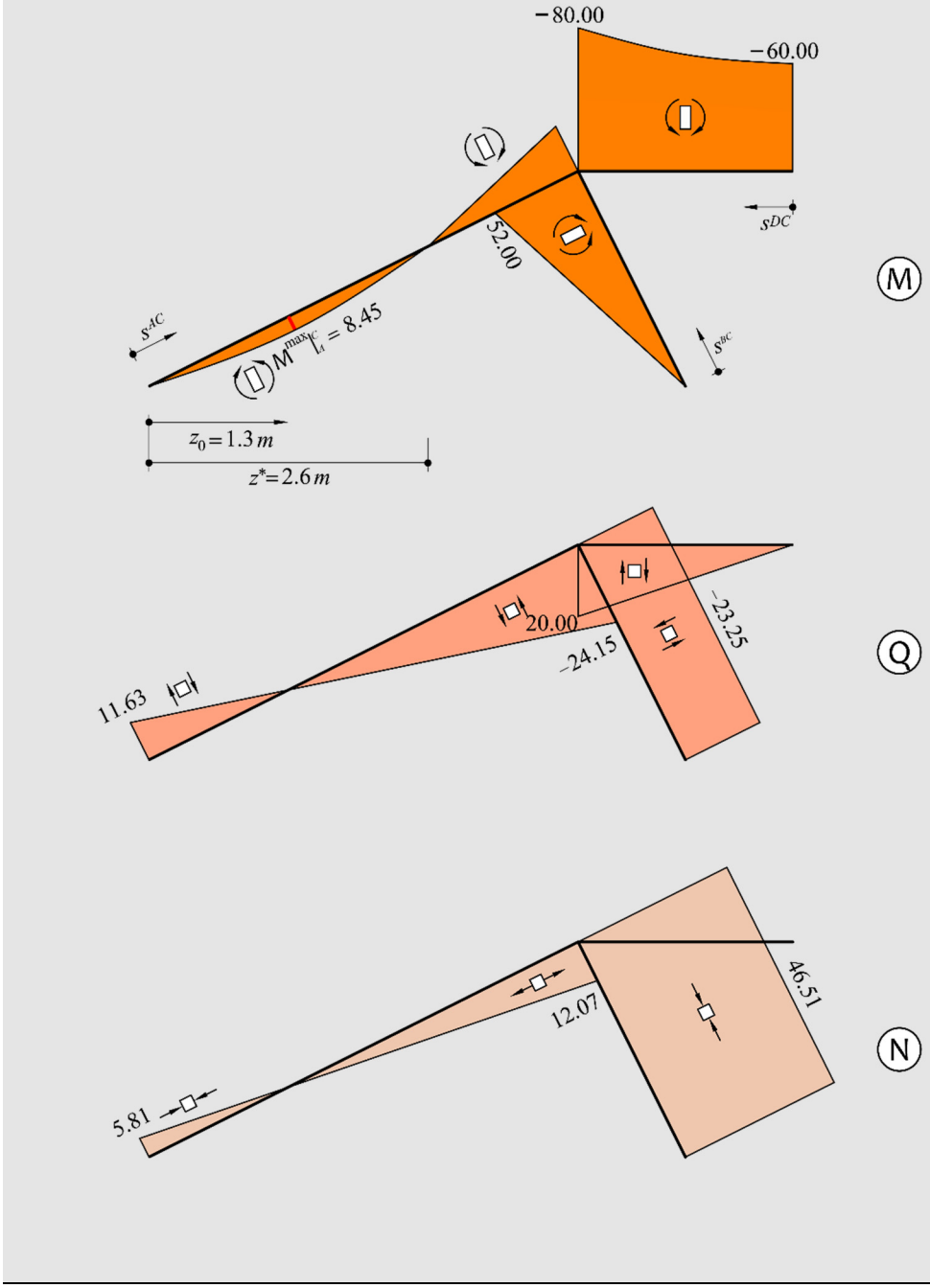
$$\mathrm{M}\left(s^{BC}\right)\Big|_B^C = -\left(V_B \cdot \operatorname{sen}\alpha\right)\cdot s^{BC}$$

$$= -52\cdot\left[\underbrace{s^{BC}\cdot \operatorname{sen}\left(26.565^{\circ}\right)}_{z'}\right] \quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_B^C = \mathrm{M}\left(z'=0\right)\Big|_B^C = 0 \\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C = \mathrm{M}\left(z'=1\right)\Big|_B^C = -52kN\cdot m \end{cases}$$

$$\mathrm{N}\left(s^{BC}\right)\Big|_B^C = V_B\cdot\cos\alpha = 52\cdot\cos\left(26.565^{\circ}\right) = 46.51kN$$

Equilibrio en el nudo C




−80.00
−60.00
52.00
s^{DC}
s^{AC}
$M^{max}_{IC} = 8.45$
s^{BC}
$z_0 = 1.3\,m$
$z^* = 2.6\,m$
M
20.00
−24.15
−23.25
11.63
Q
12.07
46.51
5.81
N

Ejemplo 3-27: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

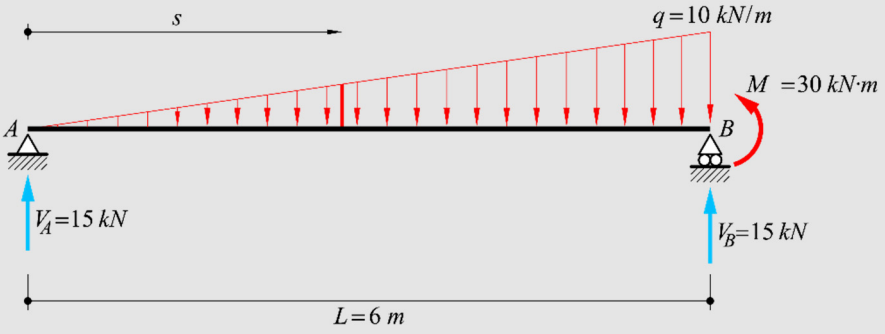
a) Reacciones en los apoyos.
b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.
c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.

a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_B - \dfrac{q \cdot L}{2} = V_A + V_B - \dfrac{10 \cdot 6}{2} \\ \sum M_A = 0 = \left(\dfrac{q \cdot L}{2}\right) \cdot \dfrac{2}{3} \cdot L - M - V_B \cdot 6 = \left(\dfrac{10 \cdot 6}{2}\right) \cdot \dfrac{2}{3} \cdot 6 - 30 - V_B \cdot 6 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 15kN}; \quad \boxed{V_B = 15kN}$$



b) Ley de Esfuerzo de Corte $\dfrac{q(s)}{s} = \dfrac{q}{6} \rightarrow q(s) = \dfrac{10}{6} \cdot s = 1.67 \cdot s$

Tramo $\overline{AB}$: $\mathrm{Q}(s)\Big|_A^B = V_A - \dfrac{q(s) \cdot s}{2} = 15 - 0.83 \cdot s^2$

$$\begin{cases} \mathrm{Q}_A\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=0)\Big|_A^B = 15kN \\ \mathrm{Q}_{AB/2}\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=3)\Big|_A^B = 7.5kN \\ \mathrm{Q}_B\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=6)\Big|_A^B = -15kN \end{cases}$$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

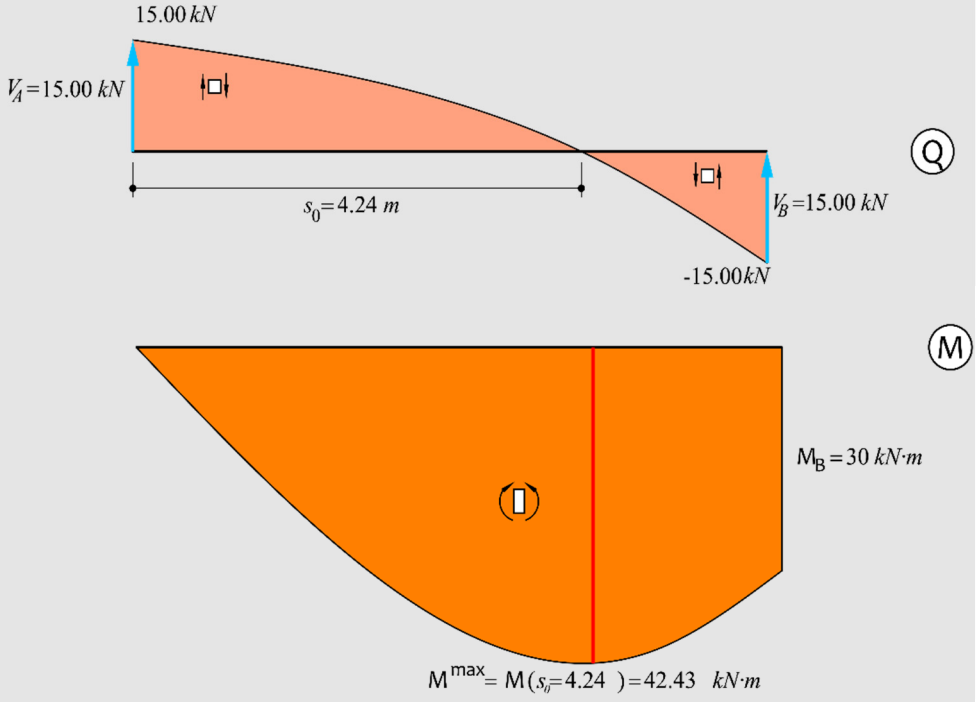
$$\mathrm{Q}(s_0)\Big|_A^B = 0 = 15 - 1.67 \cdot s_0^2 \rightarrow s_0 = 4.24m$$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$:

$$\mathrm{M}(s)\Big|_A^B = V_A \cdot s - \left(\frac{q(s)\cdot s}{2}\right)\cdot\frac{s}{3} = 15\cdot s - \left(\frac{1.67\cdot s\cdot s}{2}\right)\cdot\frac{s}{3}$$

$$= 15\cdot s - 0.28\cdot s^3 \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\Big|_A^B = 0 \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_A^B = \mathrm{M}(s_0 = 4.24)\Big|_A^B = 42.43kN\cdot m \\ \mathrm{M}_B\Big|_A^B = \mathrm{M}(s=6)\Big|_A^B = 30kN\cdot m \end{cases}$$

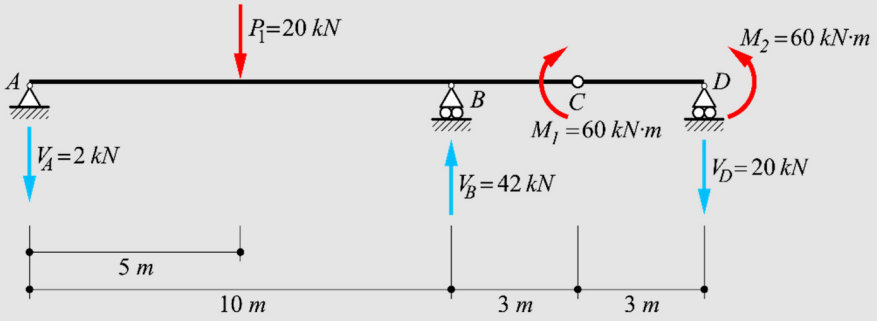


Ejemplo 3-28: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = -V_A + V_B - V_D - P_1 = -V_A + V_B - V_D - 20 \\ \sum M_A = 0 = P_1 \cdot 5 - V_B \cdot 10 + V_D \cdot 16 = 20 \cdot 5 - V_B \cdot 10 + V_D \cdot 16 \\ \sum M_C^{Der} = 0 = -M_2 + V_D \cdot 3 = -60 + V_D \cdot 3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 2kN}; \quad \boxed{V_B = 42kN}; \quad \boxed{V_D = 20kN}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AP_1}$: $\mathrm{Q}(s)\Big|_A^{P_1} = -V_A = -2kN$

Tramo $\overline{P_1B}$: $\mathrm{Q}(s)\Big|_{P_1}^{B} = \mathrm{Q}\Big|_A^{P_1} - P_1 = -2 - 20 = -22kN$

Tramo $\overline{BC}$: $\mathrm{Q}(s')\Big|_B^{C} = \mathrm{Q}_C\Big|_{P_1}^{B} + V_B = -22 + 42 = 20kN$

Tramo $\overline{CD}$: $\mathrm{Q}(s')\Big|_C^{D} = \mathrm{Q}_C\Big|_C^{D} = 20kN$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AP_1}$ $(0 \le s \le 5)$:

$$\mathrm{M}(s)\Big|_A^{P_1} = -V_A \cdot s = -2 \cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^{P_1} = \mathrm{M}(s=0)\Big|_A^{P_1} = 0 \\ \mathrm{M}_{P_1}\Big|_A^{P_1} = \mathrm{M}(s=5)\Big|_A^{P_1} = -10kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{P_1B}$ $(5 \le s \le 10)$:

$$\mathrm{M}(s)\Big|_{P_1}^{B} = -V_A \cdot s - P_1 \cdot (s-5) = -2 \cdot s - 20 \cdot (s-5)$$

$$= -22 \cdot s + 100 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_{P_1}\Big|_{P_1}^{B} = \mathrm{M}(s=5)\Big|_{P_1}^{B} = -10kN \cdot m \\ \mathrm{M}_B\Big|_{P_1}^{B} = \mathrm{M}(s=10)\Big|_{P_1}^{B} = -120kN \cdot m \end{cases}$$

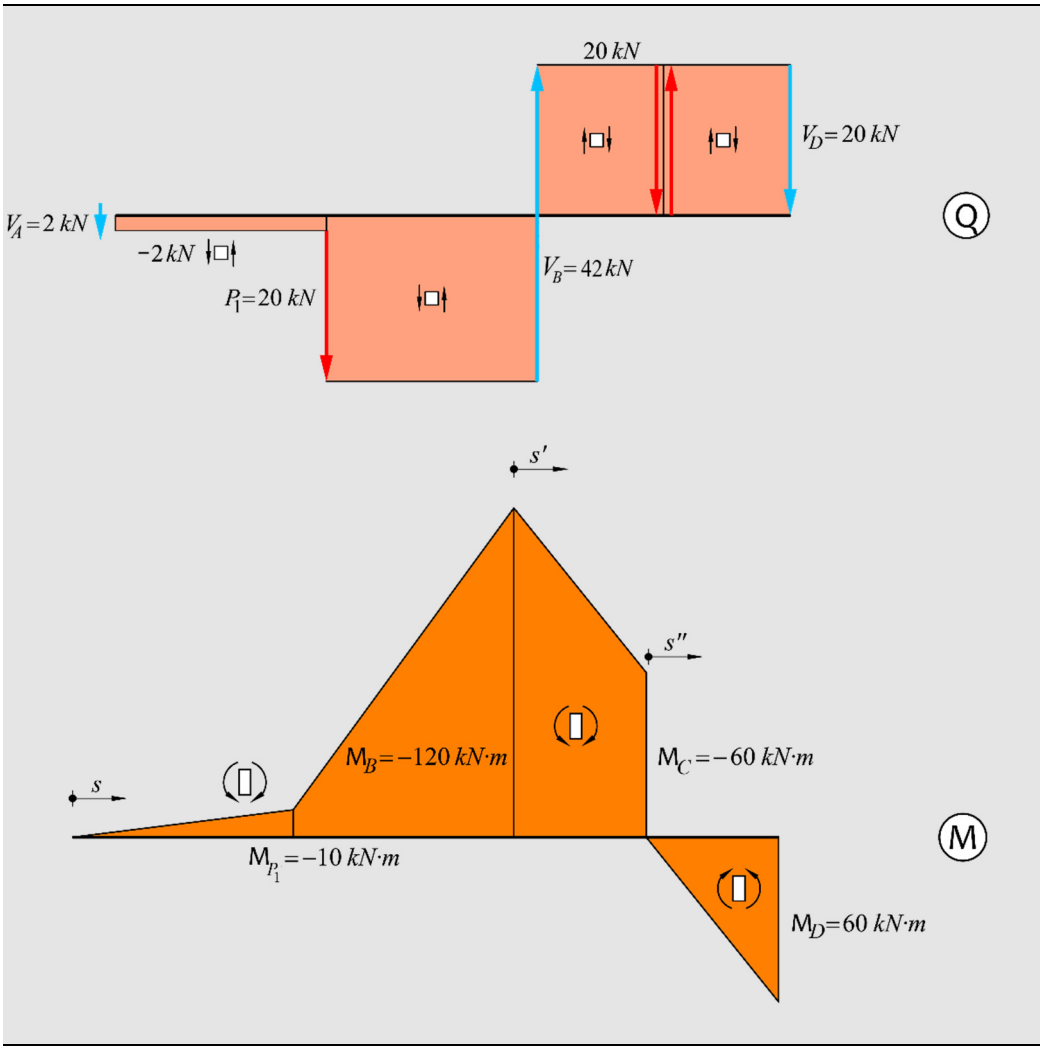
Tramo $\overline{BC}$ $(0 \le s' \le 3)$:

$$\mathrm{M}(s')\Big|_B^C = \mathrm{M}_B\Big|_{P_1}^{B} + \mathrm{Q}_B\Big|_{P_1}^{B} \cdot s'$$

$$= -120 + 20 \cdot s' \quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_B^C = -120kN \cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C = \mathrm{M}(s'=3)\Big|_B^C = -60kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$ $(0 \le s'' \le 3)$:

$$\mathrm{M}(s'')\Big|_C^D = \mathrm{Q}_C\Big|_C^D \cdot s'' = 20 \cdot s'' \quad \begin{cases} \mathrm{M}_C\Big|_C^D = \mathrm{M}(s''=0)\Big|_C^D = 0 \\ \mathrm{M}_D\Big|_C^D = \mathrm{M}(s''=3)\Big|_C^D = 60kN \cdot m \end{cases}$$



Ejemplo 3-29: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

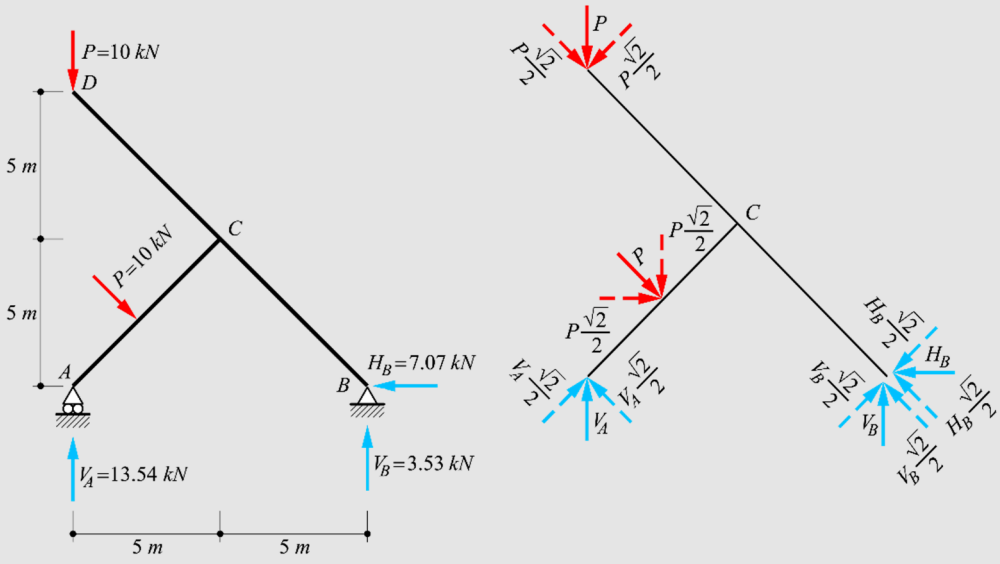
b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.

d) Ley de esfuerzos axiles.

a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - H_B \\ \sum F_y = 0 = -10 - 10 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + V_A + V_B \\ \sum M_A = 0 = 10 \cdot \dfrac{2.5}{\left(\sqrt{2}/2\right)} - V_B \cdot 10 \end{cases}$$



Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 13.54kN}; \quad \boxed{V_B = 3.53kN}; \quad \boxed{H_B = 7.07kN}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Barra $\overline{AE}$: $\left. Q \right|_A^E = V_A \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 13.54 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 9.57kN$

Barra $\overline{EC}$: $\left. Q \right|_E^C = \left. Q \right|_A^E - P = 9.574 - 10 = -0.43kN$

Barra $\overline{BC}$: $\left.\mathrm{Q}\right|_B^C = H_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - V_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = (7.07 - 3.53) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.5kN$

Barra $\overline{DC}$: $\left.\mathrm{Q}\right|_D^C = -P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -7.07kN$

c) Ley de Momento flector

Barra $\overline{AE}$:

$$\left.\mathrm{M}\left(s^{AE}\right)\right|_A^E = V_A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s^{AE} = 9.57 \cdot s^{AE} \quad \begin{cases} \left.\mathrm{M}_A\right|_A^E = \left.\mathrm{M}\left(s^{AE} = 0\right)\right|_A^E = 0 \\ \left.\mathrm{M}_E\right|_A^E = \left.\mathrm{M}\left(s^{AE} = 2.5 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right|_A^E = 33.85kN \cdot m \end{cases}$$

Barra $\overline{EC}$:

$$\left.\mathrm{M}\left(s^{EC}\right)\right|_E^C = V_A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s^{EC} - P \cdot \left(s^{EC} - 5/\sqrt{2}\right) =$$

$$-0.43 \cdot s^{EC} + 35.36 \quad \begin{cases} \left.\mathrm{M}_E\right|_E^C = \left.\mathrm{M}\left(s^{EC} = 5/\sqrt{2}\right)\right|_E^C = 33.85kN \cdot m \\ \left.\mathrm{M}_C\right|_E^C = \left.\mathrm{M}\left(s^{EC} = 10/\sqrt{2}\right)\right|_E^C = 32.35kN \cdot m \end{cases}$$

Barra $\overline{BC}$:

$$\left.\mathrm{M}\left(s^{BC}\right)\right|_B^C = -H_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s^{BC} + V_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s^{BC} =$$

$$-2.503 \cdot s^{BC} \quad \begin{cases} \left.\mathrm{M}_B\right|_B^C = \left.\mathrm{M}\left(s^{BC} = 0\right)\right|_B^C = 0 \\ \left.\mathrm{M}_C\right|_B^C = \left.\mathrm{M}\left(s^{BC} = 10/\sqrt{2}\right)\right|_B^C = -17.70kN \cdot m \end{cases}$$

Barra $\overline{DC}$:

$$\mathrm{M}\left(s^{DC}\right)\Big|_D^C = -P\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot s^{DC} = -7.07\cdot s^{DC} \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_C\big|_D^C = \mathrm{M}\left(s^{DC}=0\right)\Big|_D^C = 0 \\ \mathrm{M}_D\big|_D^C = \mathrm{M}\left(s^{DC}=10/\sqrt{2}\right)\Big|_D^C = -50kN\cdot m \end{cases}$$

d) Ley de Esfuerzo Normal

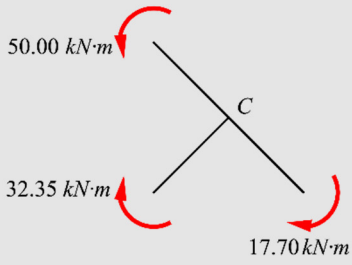
Barra $\overline{AE}$**:** $\mathrm{N}\big|_A^E = V_A\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 13.54\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 9.57kN$

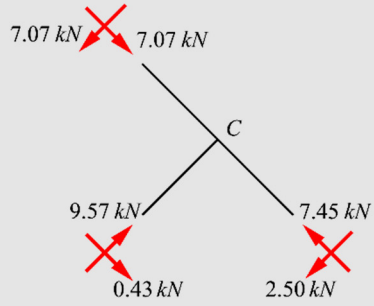
Barra $\overline{EC}$**:** $\mathrm{N}\big|_E^C = \mathrm{N}\big|_A^E = 9.57kN$

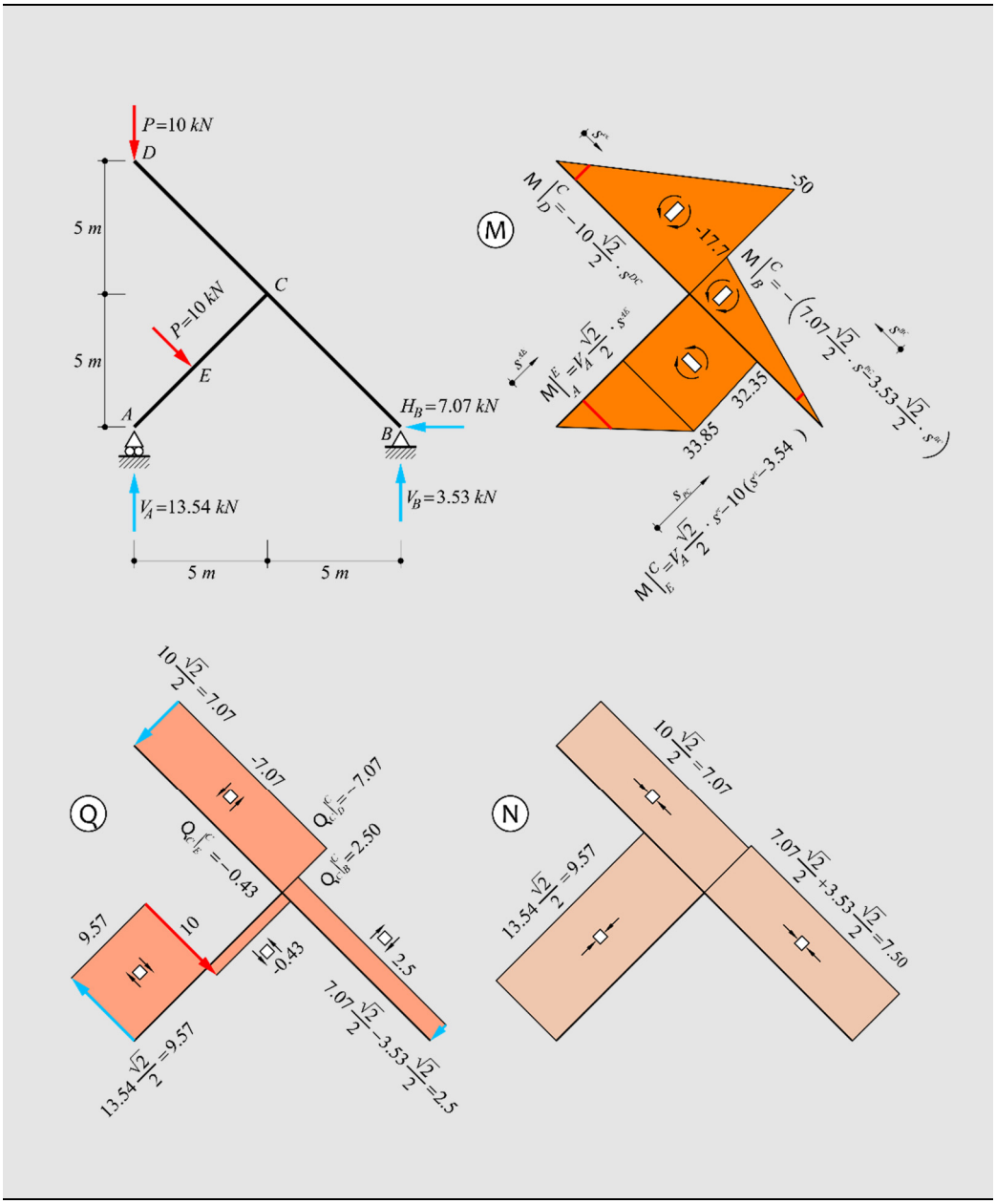
Barra $\overline{BC}$**:** $\mathrm{N}\big|_B^C = H_B\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}V_B\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 7.50kN$

Barra $\overline{DC}$**:** $\mathrm{N}\big|_D^C = P\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 10\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 7.07kN$

Equilibrio en el nudo C





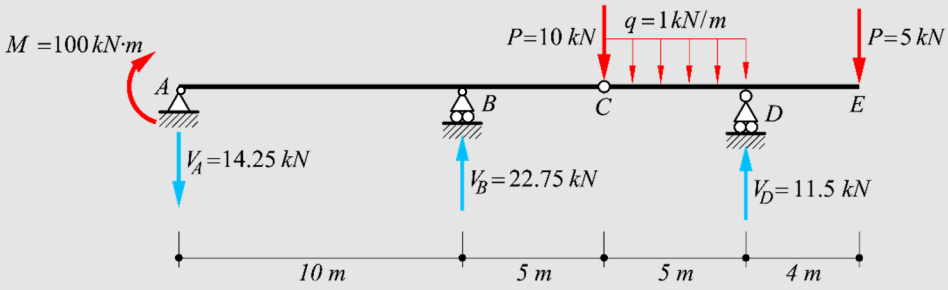

P=10 kN
D
5 m
C
P=10 kN
5 m
E
A
B
H_B=7.07 kN
V_A=13.54 kN
V_B=3.53 kN
5 m
5 m
M
-50
-17.7
32.35
33.85
Q
10 √2/2 =7.07
-7.07
-0.43
2.50
9.57
10
-0.43
2.5
13.54 √2/2 =9.57
7.07 √2/2 −3.53 √2/2 =2.5
N
10 √2/2 =7.07
13.54 √2/2 =9.57
7.07 √2/2 +3.53 √2/2 =7.50

Ejemplo 3-30: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = -V_A + V_B + V_D - 10 - 5 - 1\cdot 5 \\ \sum M_A = 0 = 100 - V_B \cdot 10 - V_D \cdot 20 + 10\cdot 15 + (1\cdot 5)\cdot 17.5 + 5\cdot 24 \\ \sum M_C^{Izq} = 0 = 100 - V_A \cdot 15 + V_B \cdot 5 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 14.25kN}; \quad \boxed{V_B = 22.75kN}; \quad \boxed{V_D = 11.5kN}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$ **:** $\mathrm{Q}(s)\big|_A^B = -V_A = -14.25kN$

Tramo $\overline{BC}$ **:** $\mathrm{Q}(s)\big|_B^C = \mathrm{Q}_B\big|_A^B + V_B = -14.25 + 22.75 = 8.5kN$

Tramo $\overline{CD}$ **:**

$$\mathrm{Q}(s')\big|_C^D = \mathrm{Q}_C\big|_B^C - P - q\cdot s' = 8.5 - 10 - 1\cdot s'$$

$$= -1.5 - s' \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_C\big|_C^D = \mathrm{Q}(s'=0)\big|_C^D = -1.5kN \\ \mathrm{Q}_D\big|_C^D = \mathrm{Q}(s'=5)\big|_C^D = -6.5kN \end{cases}$$

Tramo $\overline{ED}$**:** $\mathrm{Q}(s'')\big|_D^E = -(-P) = 5kN$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$ $(0 \le s \le 10)$:

$$\mathrm{M}(s)\big|_A^B = M - V_A\cdot s = 100 - 14.25\cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\big|_A^B = 100kN\cdot m \\ \mathrm{M}_B\big|_A^B = \mathrm{M}(s=10)\big|_A^B = -42.5kN\cdot m \end{cases}$$

En este tramo el momento flector se anula para:

$$\mathrm{M}(s_*)\big|_A^B = 100 - 14.25\cdot s_* = 0 \quad \rightarrow \quad s_* = 7.02m$$

Tramo $\overline{BC}$ $(10 \le s \le 15)$:

$$\mathrm{M}(s)\big|_B^C = M - V_A\cdot s + V_B\cdot(s-10) = 100 - 14.25\cdot s - 22.75\cdot(s-10)$$

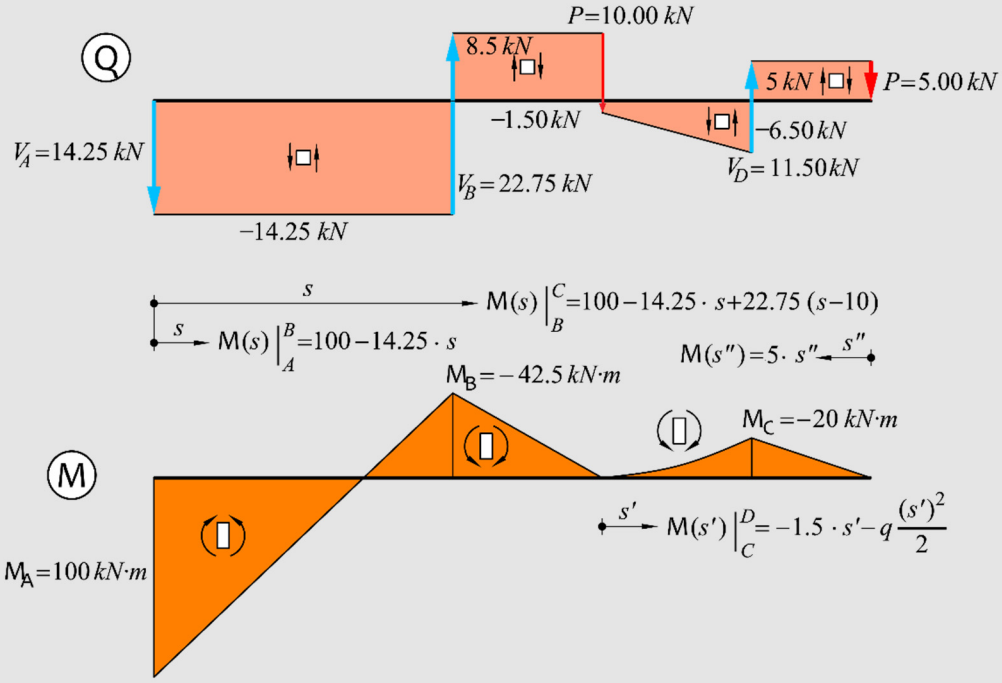
$$= -127.5 + 8.5\cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\big|_B^C = \mathrm{M}(s=10)\big|_B^C = -42.5kN\cdot m \\ \mathrm{M}_C\big|_B^C = \mathrm{M}(s=15)\big|_B^C = 0 \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$ $(0 \le s' \le 5)$:

$$\mathrm{M}(s')\big|_C^D = \mathrm{Q}_C\big|_C^D\cdot s' - q\cdot\frac{(s')^2}{2} = -1.5\cdot s' - 0.5(s')^2 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_C\big|_C^D = \mathrm{M}(s'=0)\big|_C^D = 0 \\ \mathrm{M}_D\big|_C^D = \mathrm{M}(s'=5)\big|_C^D = -20kN\cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{ED}$ $(0 \le s'' \le 4)$

$$M(s'')\Big|_E^D = -P \cdot s'' = -5 \cdot s'' \qquad \begin{cases} M_E\Big|_E^D = M(s''=0)\Big|_E^D = 0 \\ M_D\Big|_E^D = M(s''=4)\Big|_E^D = -20 kN \cdot m \end{cases}$$



Ejemplo 3-31: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.

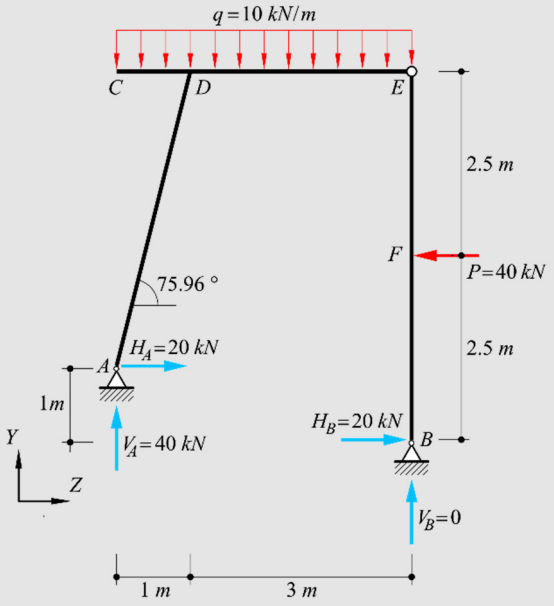
d) Ley de esfuerzos axiles.

a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = H_A + H_B - 40 \\ \sum F_y = 0 = V_A + V_B - 10 \cdot 4 \\ \sum M_B = 0 = H_A \cdot 1 + V_A \cdot 4 - 10 \cdot \dfrac{4^2}{2} - 40 \cdot 2.5 \\ \sum M_E^{Der} = 0 = -H_B \cdot 5 + 40 \cdot 2.5 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 40kN}; \quad \boxed{V_B = 0}; \quad \boxed{H_A = 20kN}; \quad \boxed{H_B = 20kN}$$



b) Ley de esfuerzo de corte

Barra $\overline{AD}$: $\left. Q\left(s^{AD}\right)\right|_A^D = V_A \cdot \cos(75.96^\circ) - H_A \cdot \operatorname{sen}(75.96^\circ) = -9.69kN$

Barra $\overline{CD}$: $\left. Q\left(s^{CD}\right)\right|_C^D = -q \cdot s^{CD} = -10 \cdot s^{CD}$ $\quad \begin{cases} \left. Q_C\right|_C^D = \left. Q\left(s^{CD} = 0\right)\right|_C^D = 0 \\ \left. Q_D\right|_C^D = \left. Q\left(s^{CD} = 1\right)\right|_C^D = -10kN \end{cases}$

Barra $\overline{BE}$**:** $\begin{cases} \mathrm{Q}\left(s^{BE}\right)\Big|_B^F = H_B = 20kN; \quad 0 \le s^{BE} \le 2.5 \\ \mathrm{Q}\left(s^{BE}\right)\Big|_F^E = H_B - 40 = -20kN; \quad 2.5 \le s^{BE} \le 5 \end{cases}$

Barra $\overline{ED}$**:** $\mathrm{Q}\left(s^{ED}\right)\Big|_E^D = -\left(-q \cdot s^{ED}\right) = 10 \cdot s^{ED}$ $\quad \begin{cases} \mathrm{Q}_E\big|_E^D = \mathrm{Q}\left(s^{ED}=0\right)\Big|_E^D = 0 \\ \mathrm{Q}_D\big|_E^D = \mathrm{Q}\left(s^{ED}=3\right)\Big|_E^D = 30kN \end{cases}$

b) Ley de Momento Flector

Barra $\overline{AD}$**:**

$\mathrm{M}\left(s^{AD}\right)\Big|_A^D = \mathrm{Q}\big|_A^D \cdot s^{AD} = -9.69 \cdot s^{AD}$ $\quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\big|_A^D = \mathrm{M}\left(s^{AD}=0\right)\Big|_A^D = 0 \\ \mathrm{M}_D\big|_A^D = \mathrm{M}\left(s^{AD}=1/\cos\left(75.96^{\circ}\right)\right)\Big|_A^D = -40kN \cdot m \end{cases}$

Barra $\overline{CD}$**:**

$\mathrm{M}\left(s^{CD}\right)\Big|_C^D = -q \cdot \dfrac{\left(s^{CD}\right)^2}{2} = -5 \cdot \left(s^{CD}\right)^2$ $\quad \begin{cases} \mathrm{M}_C\big|_C^D = \mathrm{M}\left(s^{CD}=0\right)\Big|_C^D = 0 \\ \mathrm{M}_{CD/2}\big|_C^D = \mathrm{M}\left(s^{CD}=0.5\right)\Big|_C^D = -1.25kN \cdot m \\ \mathrm{M}_D\big|_C^D = \mathrm{M}\left(s^{CD}=1\right)\Big|_C^D = -5kN \cdot m \end{cases}$

Barra $\overline{BE}$**:**

$\mathrm{M}\left(s^{BE}\right)\Big|_B^F = H_B \cdot s^{BE} = 20 \cdot s^{BE}$ $\quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\big|_B^F = \mathrm{M}\left(s^{BE}=0\right)\Big|_B^F = 0 \\ \mathrm{M}_F\big|_B^F = \mathrm{M}\left(s^{BE}=2.5\right)\Big|_B^F = 50kN \cdot m \end{cases}$ $; 0 \le s^{BE} \le 2.5$

$\mathrm{M}\left(s^{BE}\right)\Big|_F^E = H_B \cdot s^{BE} - 40 \cdot \left(s^{BE} - 2.5\right)$

$= 100 - 20 \cdot s^{BE}$ $\quad \begin{cases} \mathrm{M}_F\big|_F^E = \mathrm{M}\left(s^{BE}=2.5\right)\Big|_F^E = 50kN \cdot m \\ \mathrm{M}_E\big|_F^E = \mathrm{M}\left(s^{BE}=5\right)\Big|_F^E = 0 \end{cases}$ $; 2.5 \le s^{BE} \le 5$

Barra $\overline{ED}$:

$$\mathrm{M}\left(s^{ED}\right)\Big|_E^D = -q\cdot\frac{\left(s^{ED}\right)^2}{2} = -5\cdot\left(s^{ED}\right)^2 \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_E\big|_E^D = \mathrm{M}\left(s^{ED}=0\right)\Big|_E^D = 0 \\ \mathrm{M}_{ED/2}\big|_E^D = \mathrm{M}\left(s^{ED}=1.5\right)\Big|_E^D = -11.25kN\cdot m \\ \mathrm{M}_D\big|_E^D = \mathrm{M}\left(s^{ED}=3\right)\Big|_E^D = -45kN\cdot m \end{cases}$$

b) Leyes de Esfuerzo Axil

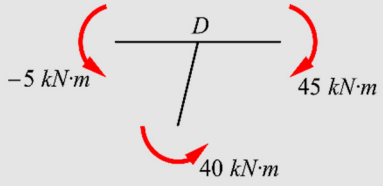
Barra $\overline{AD}$: $\mathrm{N}\left(s^{AD}\right)\Big|_A^D = V_A\cdot\mathrm{sen}\left(75.96^\circ\right) + H_A\cdot\cos\left(75.96^\circ\right) = 43.65kN$

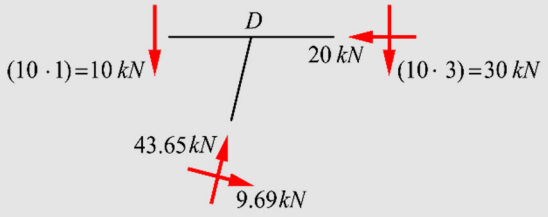
Barra $\overline{CD}$: $\mathrm{N}\left(s^{CD}\right)\Big|_C^D = 0$

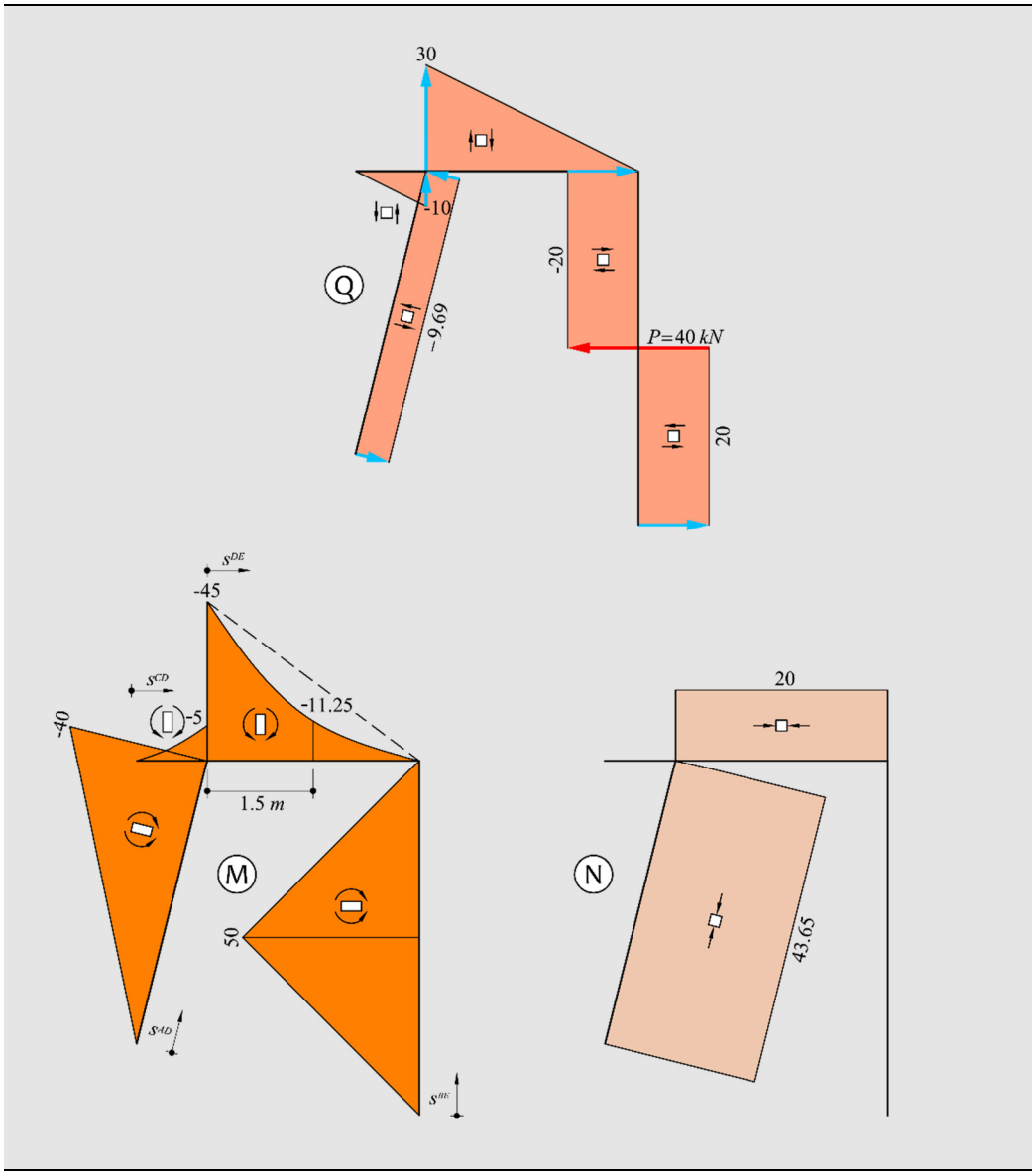
Barra $\overline{BE}$: $\mathrm{N}\left(s^{EB}\right)\Big|_B^E = V_B = 0$

Barra $\overline{ED}$: $\mathrm{N}\left(s^{ED}\right)\Big|_E^D = Q\big|_F^E = -20kN$

Equilibrio en el nudo D







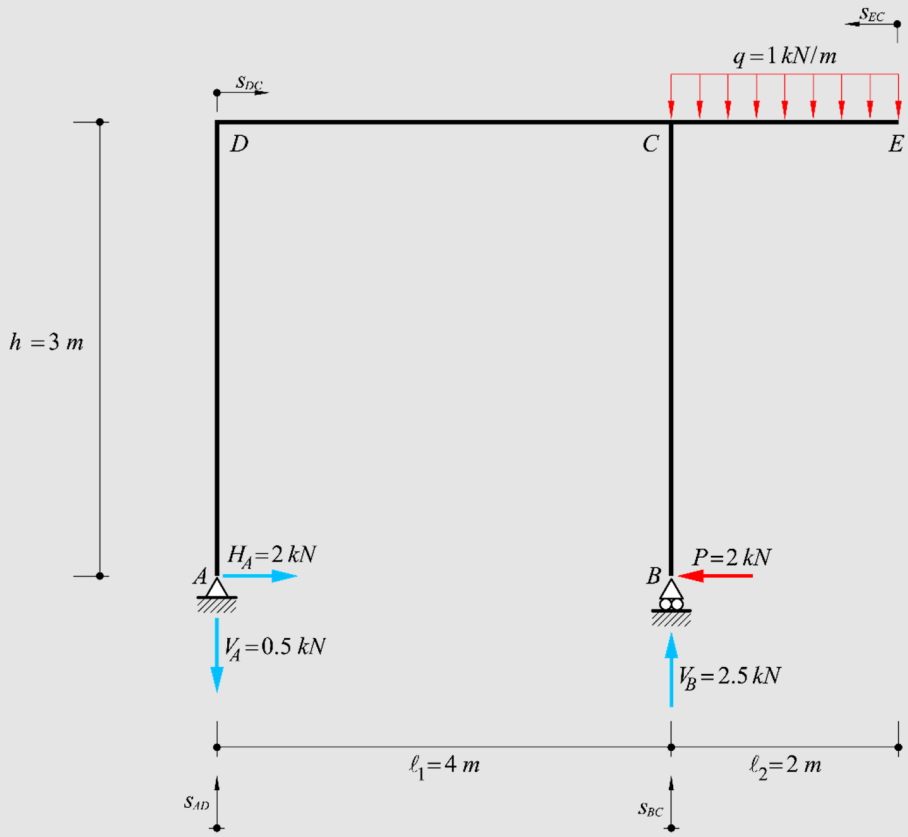
Ejemplo 3-32: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

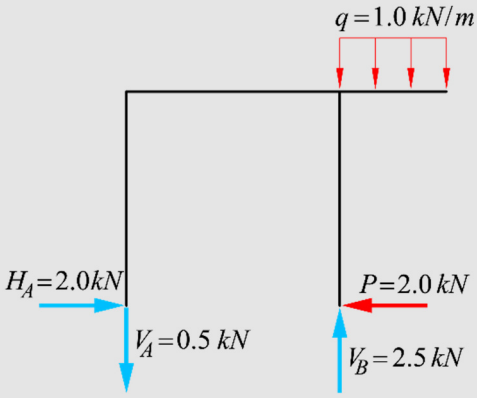
b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.

d) Ley de esfuerzos normales.



a) Cálculo de Reacciones



$$\begin{cases}\sum F_z=0=H_A-P=H_A-2\\ \sum F_y=0=-V_A+V_B-q\cdot 2=-V_A+V_B-2\\ \sum M_A=0=-V_B\cdot 4+(q\cdot 2)\cdot(1+4)=-V_B\cdot 4+10\end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A=0.5kN};\quad \boxed{V_B=2.5};\quad \boxed{H_A=2kN}$$

b) Ley de Esfuerzos de Corte

Barra $\overline{AD}$: $\mathrm{Q}\left(s^{AD}\right)\Big|_A^D=H_A=2kN$

Barra $\overline{DC}$: $\mathrm{Q}\left(s^{DC}\right)\Big|_D^C=-V_A=-0.5kN$

Barra $\overline{EC}$: $\mathrm{Q}\left(s^{EC}\right)\Big|_E^C=q\cdot s^{EC}=s^{EC}$ $\quad\begin{cases}\mathrm{Q}_E\big|_E^C=\mathrm{Q}\left(s^{EC}=0\right)\Big|_E^C=0\\ \mathrm{Q}_D\big|_E^C=\mathrm{Q}\left(s^{EC}=2\right)\Big|_E^C=2kN\end{cases}$

Barra $\overline{BC}$: $\mathrm{Q}\left(s^{BC}\right)\Big|_B^C=P=2kN$

c) Ley de Momentos Flectores

Barra $\overline{AD}$: $\mathrm{M}\left(s^{AD}\right)\Big|_A^D=-H_A\cdot s^{AD}=-2\cdot s^{AD}$ $\quad\begin{cases}\mathrm{M}_A\big|_A^D=\mathrm{M}\left(s^{AD}=0\right)\Big|_A^D=0\\ \mathrm{M}_D\big|_A^D=\mathrm{M}\left(s^{AD}=3\right)\Big|_A^D=-6kN\cdot m\end{cases}$

Barra $\overline{DC}$:

$$\mathsf{M}\left(s^{DC}\right)\Big|_D^C = -H_A \cdot 3 - V_A \cdot s^{DC} = -6 - 0.5 \cdot s^{DC} \quad \begin{cases} \mathsf{M}_D\big|_D^C = \mathsf{M}\left(s^{DC}=0\right)\Big|_D^C = -6kN \cdot m \\ \mathsf{M}_C\big|_D^C = \mathsf{M}\left(s^{DC}=4\right)\Big|_D^C = -8kN \cdot m \end{cases}$$

Barra $\overline{EC}$:

$$\mathsf{M}\left(s^{EC}\right)\Big|_E^C = -q \cdot \frac{\left(s^{EC}\right)^2}{2} = -0.5 \cdot \left(s^{EC}\right)^2 \quad \begin{cases} \mathsf{M}_E\big|_E^C = \mathsf{M}\left(s^{EC}=0\right)\Big|_E^C = 0 \\ \mathsf{M}_{EC/2}\big|_E^C = \mathsf{M}\left(s^{EC}=1\right)\Big|_E^C = -05kN \cdot m \\ \mathsf{M}_C\big|_E^C = \mathsf{M}\left(s^{EC}=2\right)\Big|_E^C = -2kN \cdot m \end{cases}$$

Barra $\overline{BC}$:

$$\mathsf{M}\left(s^{BC}\right)\Big|_B^C = P \cdot s^{BC} = 2 \cdot s^{BC} \quad \begin{cases} \mathsf{M}_C\big|_B^C = \mathsf{M}\left(s^{BC}=0\right)\Big|_B^C = 0 \\ \mathsf{M}_B\big|_B^C = \mathsf{M}\left(s^{BC}=3\right)\Big|_B^C = 6kN \cdot m \end{cases}$$

d) Ley de Esfuerzos Axil

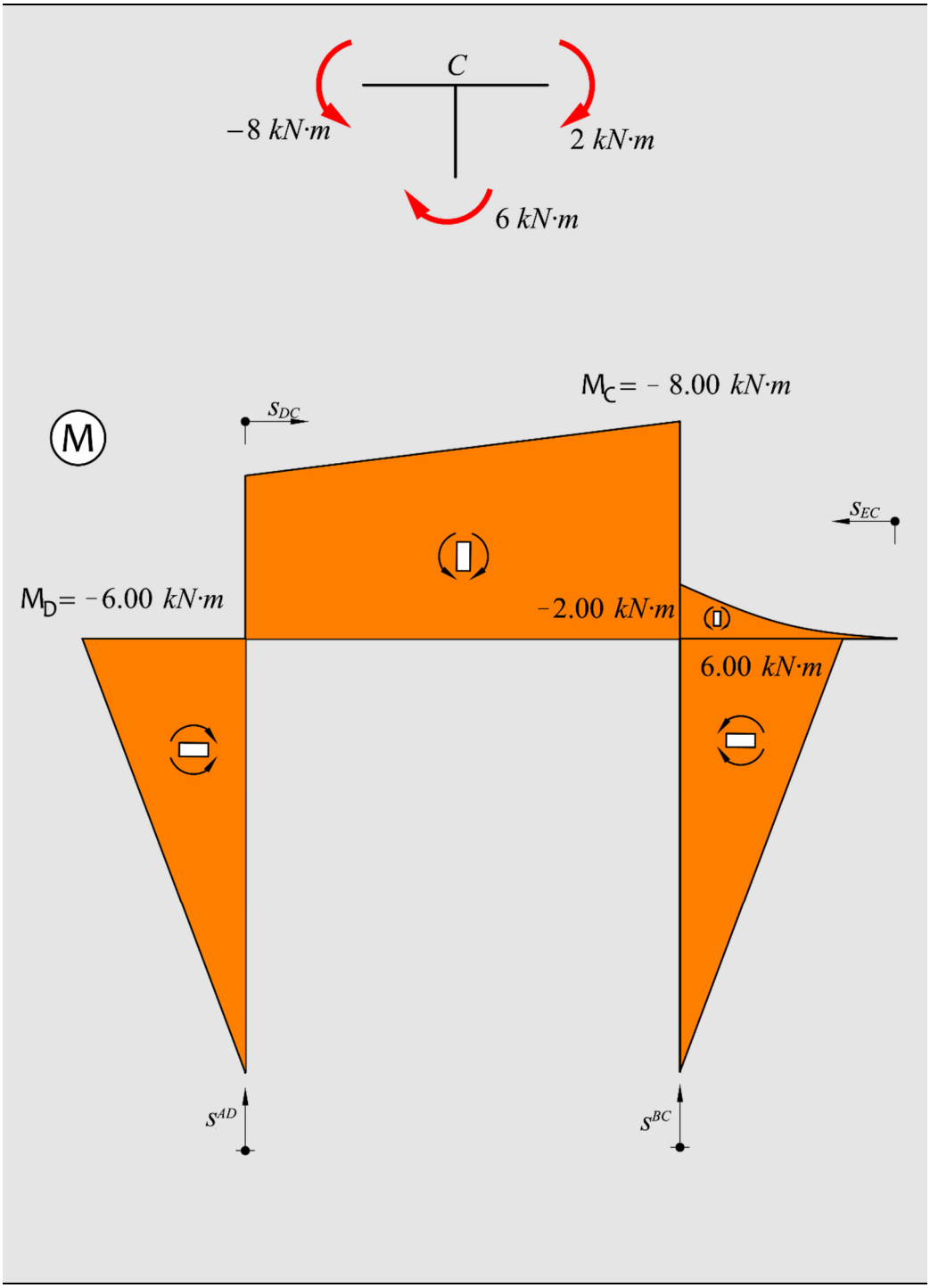
Barra $\overline{AD}$: $\mathsf{N}\big|_A^D = -V_A = -0.5kN$

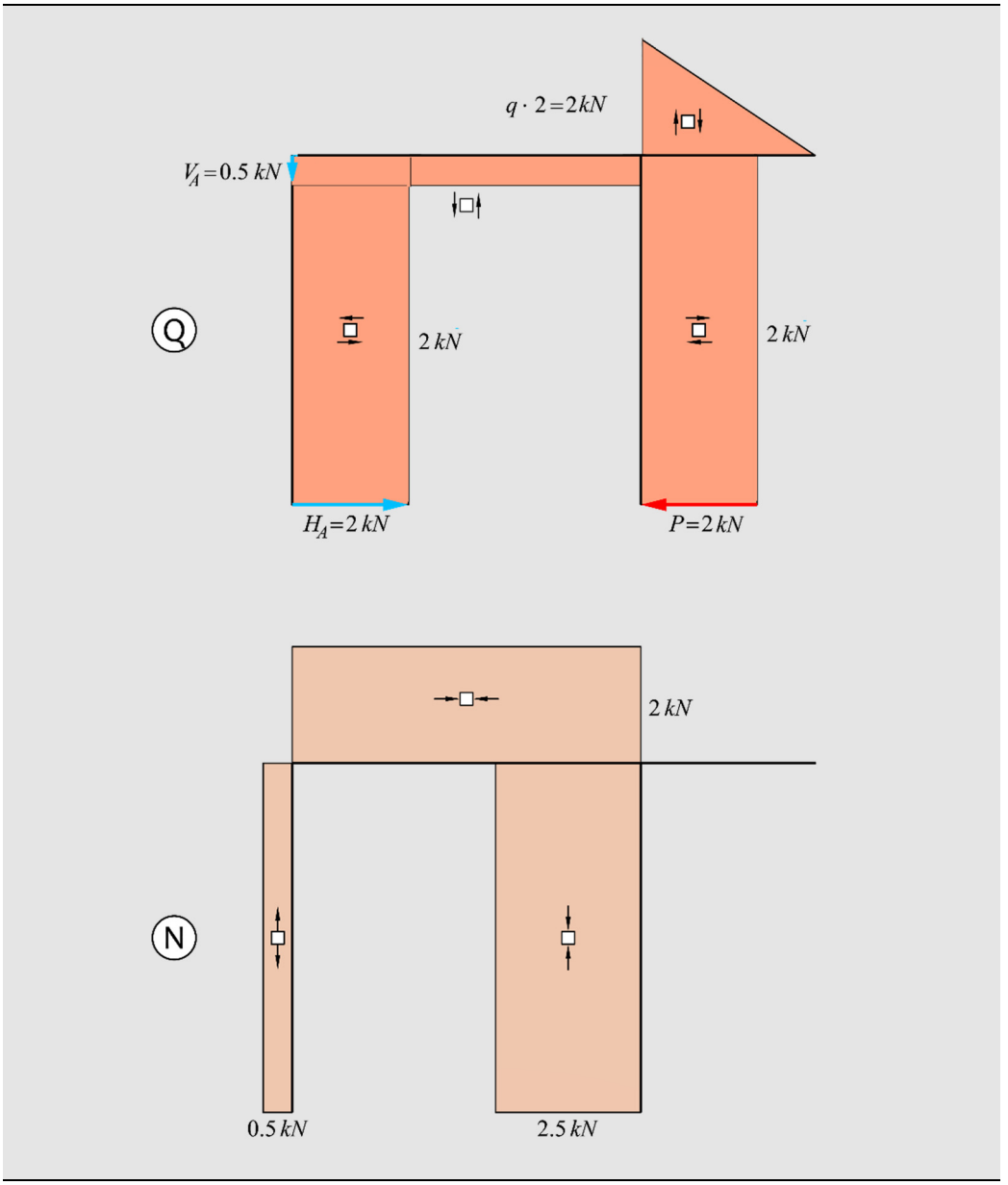
Barra $\overline{DC}$: $\mathsf{N}\big|_D^C = P = 2kN$

Barra $\overline{EC}$: $\mathsf{N}\big|_E^C = 0$

Barra $\overline{BC}$: $\mathsf{N}\big|_B^C = V_B = 2.5kN$

Equilibrio en el nudo C


C
−8 kN·m
2 kN·m
6 kN·m
M
S_{DC}
M_C = − 8.00 kN·m
S_{EC}
M_D = −6.00 kN·m
−2.00 kN·m
6.00 kN·m
S^{AD}
S^{BC}

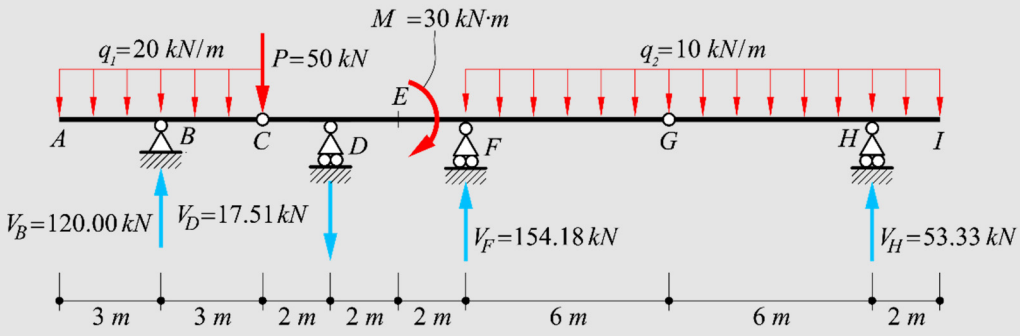


Ejemplo 3-33: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = H_B \\ \sum F_y = 0 = V_B - V_D + V_F + V_H - 20\cdot(3+3) - 50 - 10\cdot(6+6+2) \\ \sum M_B = 0 = 50\cdot 3 + V_D\cdot 5 + 30 - V_F\cdot(3+2\cdot 3) + (10\cdot 14)\cdot\left(\frac{14}{2}+9\right) - V_H\cdot 21 \\ \sum M_C^{Izq} = 0 = V_B\cdot 3 - (20\cdot 6)\cdot 3 \\ \sum M_G^{Der} = 0 = -V_H\cdot 6 + (10\cdot 8)\cdot 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_B = 120kN};\quad \boxed{V_D = 17.51kN};\quad \boxed{V_F = 154.18kN};\quad \boxed{V_H = 53.33kN}$$

Verificación

$$\begin{aligned} \sum M_D &= V_B\cdot 5 - (20\cdot 6)\cdot 5 - 50\cdot 2 + 30 - V_F\cdot 4 + 10\cdot 14\cdot 11 - V_H\cdot 16 \\ &= 600 - 600 - 100 + 30 - 616.68 + 1540 - 853.28 \simeq 0 \end{aligned}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$ $(0 \le s \le 3)$:

$$\mathrm{Q}(s)\Big|_A^B = -q\cdot s = -20\cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_A\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=0)\Big|_A^B = 0 \\ \mathrm{Q}_B\Big|_A^B = \mathrm{Q}(s=3)\Big|_A^B = -60kN \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$ $(3 \le s \le 6)$:

$$\mathrm{Q}(s)\Big|_B^C = -q\cdot s + V_B = -20\cdot s + 120 \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_B\Big|_B^C = \mathrm{Q}(s=3)\Big|_B^C = 60kN \\ \mathrm{Q}_C\Big|_B^C = \mathrm{Q}(s=6)\Big|_B^C = 0 \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$ $(0 \le s' \le 2)$: $\mathrm{Q}(s')\Big|_C^D = \cancel{\mathrm{Q}_C\Big|_B^C}^{=0} - P = -50kN$

Tramo $\overline{DE}$ $(2 \le s' \le 4)$: $\mathrm{Q}(s')\Big|_D^E = \mathrm{Q}_D\Big|_C^D - V_D = -50 - 17.50 = -67.50kN$

Tramo $\overline{EF}$ $(4 \le s' \le 6)$: $\mathrm{Q}(s')\Big|_E^F = \mathrm{Q}\Big|_D^E = -67.50kN$

Tramo $\overline{FG}$ $(0 \le s'' \le 6)$: $\mathrm{Q}(s'')\Big|_F^G = \mathrm{Q}\Big|_E^F + V_F - q\cdot s'' = -67.50 + 154.17 - 10\cdot s''$

$$= 86.67 - 10\cdot s'' \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_F\Big|_F^G = \mathrm{Q}(s''=0)\Big|_F^G = 86.67kN \\ \mathrm{Q}_G\Big|_F^G = \mathrm{Q}(s''=6)\Big|_F^G = 26.67kN \end{cases}$$

Tramo $\overline{GH}$ $(0 \le s''' \le 6)$:

$$\mathrm{Q}(s''')\Big|_G^H = \mathrm{Q}_G\Big|_F^G - q\cdot s'''$$

$$= 26.67 - 10\cdot s''' \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_G\Big|_G^H = \mathrm{Q}(s'''=0)\Big|_G^H = 26.67kN \\ \mathrm{Q}_H\Big|_G^H = \mathrm{Q}(s'''=6)\Big|_G^H = -33.33kN \end{cases}$$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\mathrm{Q}\left(s_0'''\right)=0=26.67-10\cdot s_0'''\rightarrow s_0'''=2.67m$$

Tramo $\overline{HI}$ $(6\le s'''\le 8)$:

$$\mathrm{Q}\left(s'''\right)\Big|_H^I=\mathrm{Q}_H\Big|_G^H+V_H-q\cdot\left(s'''-6\right)=-33.33+53.33-10\cdot\left(s'''-6\right)$$

$$=80-10\cdot s'''\quad\begin{cases}\mathrm{Q}_H\Big|_H^I=\mathrm{Q}\left(s'''=6\right)\Big|_H^I=20kN\\ \mathrm{Q}_I\Big|_H^I=\mathrm{Q}\left(s'''=8\right)\Big|_H^I=0\end{cases}$$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$ $(0\le s\le 3)$:

$$\mathrm{M}\left(s\right)\Big|_A^B=-q\cdot\frac{s^2}{2}=-10\cdot s^2\quad\begin{cases}\mathrm{M}_A\Big|_A^B=\mathrm{M}\left(s=0\right)\Big|_A^B=0\\ \mathrm{M}_{AB/2}\Big|_A^B=\mathrm{M}\left(s=1.5\right)\Big|_A^B=-22.50kN\cdot m\\ \mathrm{M}_B\Big|_A^B=\mathrm{M}\left(s=3\right)\Big|_A^B=-90kN\cdot m\end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$ $(3\le s\le 6)$:

$$\mathrm{M}\left(s\right)\Big|_B^C=-q\cdot\frac{s^2}{2}+V_B\cdot\left(s-3\right)=-20\cdot\frac{s^2}{2}+120\cdot\left(s-3\right)$$

$$=-360+120\cdot s-10\cdot s^2\quad\begin{cases}\mathrm{M}_B\Big|_B^C=\mathrm{M}\left(s=3\right)\Big|_B^C=-90kN\cdot m\\ \mathrm{M}_{BC/2}\Big|_B^C=\mathrm{M}\left(s=4.5\right)\Big|_B^C=-22.5kN\cdot m\\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C=\mathrm{M}\left(s=6\right)\Big|_B^C=0\end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$ $(0\le s'\le 2)$:

$$\mathrm{M}\left(s'\right)\Big|_C^D=\cancel{\mathrm{M}_C\Big|_B^{C=0}}+\mathrm{Q}_C\Big|_C^D\cdot s'=-50\cdot s'\quad\begin{cases}\mathrm{M}_C\Big|_C^D=\mathrm{M}\left(s'=0\right)\Big|_C^D=0\\ \mathrm{M}_D\Big|_C^D=\mathrm{M}\left(s'=2\right)\Big|_C^D=-100kN\cdot m\end{cases}$$

Tramo $\overline{DE}$ $(2 \le s' \le 4)$:

$$\mathrm{M}(s')\Big|_D^E = \mathrm{M}_D\Big|_C^D + \mathrm{Q}_D\Big|_D^E \cdot (s'-2) = -100 - 67.5 \cdot (s'-2)$$

$$= 35 - 67.5 \cdot s' \quad \begin{cases} \mathrm{M}_D\Big|_D^E = \mathrm{M}(s'=2)\Big|_D^E = -100kN \cdot m \\ \mathrm{M}_E\Big|_D^E = \mathrm{M}(s'=4)\Big|_D^E = -235kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{EF}$ $(4 \le s' \le 6)$:

$$\mathrm{M}(s')\Big|_E^F = \mathrm{M}_E\Big|_D^E + \mathrm{Q}_E\Big|_E^F \cdot (s'-4) + 30 = -235 - 67.5 \cdot (s'-4) + 30$$

$$= 65 - 67.5 \cdot s' \quad \begin{cases} \mathrm{M}_E\Big|_E^F = \mathrm{M}(s'=4)\Big|_E^F = -205kN \cdot m \\ \mathrm{M}_F\Big|_E^F = \mathrm{M}(s'=6)\Big|_E^F = -340kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{FG}$ $(0 \le s'' \le 6)$:

$$\mathrm{M}(s'')\Big|_F^G = \mathrm{M}_F\Big|_E^F + \mathrm{Q}_F\Big|_F^G \cdot s'' - q \cdot \frac{(s'')^2}{2}$$

$$= -340 + 86.67 \cdot s'' - 5 \cdot (s'')^2 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_F\Big|_F^G = \mathrm{M}(s''=0)\Big|_F^G = -125kN \cdot m \\ \mathrm{M}_{FG/2}\Big|_F^G = \mathrm{M}(s''=3)\Big|_F^G = 0 \\ \mathrm{M}_G\Big|_F^G = \mathrm{M}(s''=6)\Big|_F^G = -340kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{GH}$ $(0 \le s''' \le 6)$:

$$\mathrm{M}(s''')\Big|_G^H = \cancel{\mathrm{M}_G\Big|_F^{G=0}} + \mathrm{Q}_G\Big|_G^H \cdot s''' - q \cdot \frac{(s''')^2}{2}$$

$$= 26.67 \cdot s''' - 5 \cdot (s''')^2 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_G\Big|_G^H = \mathrm{M}(s'''=0)\Big|_G^H = 0 \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_G^H = \mathrm{M}(s_0'''=2.67)\Big|_G^H = 35.56kN \cdot m \\ \mathrm{M}_H\Big|_G^H = \mathrm{M}(s'''=6)\Big|_G^H = -20kN \cdot m \end{cases}$$

En este tramo el momento se anula para

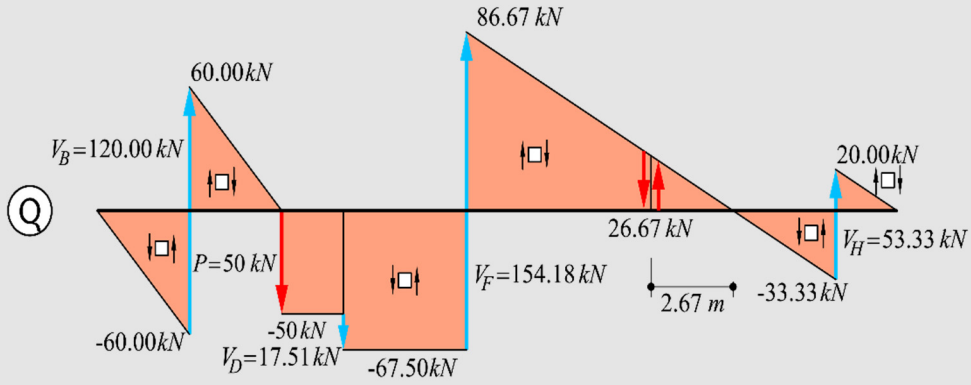
$$\mathrm{M}\left(s_*'''\right)\Big|_G^H = 26.67 \cdot s_*''' - 5 \cdot \left(s_*'''\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad s_*''' = 5.33m$$

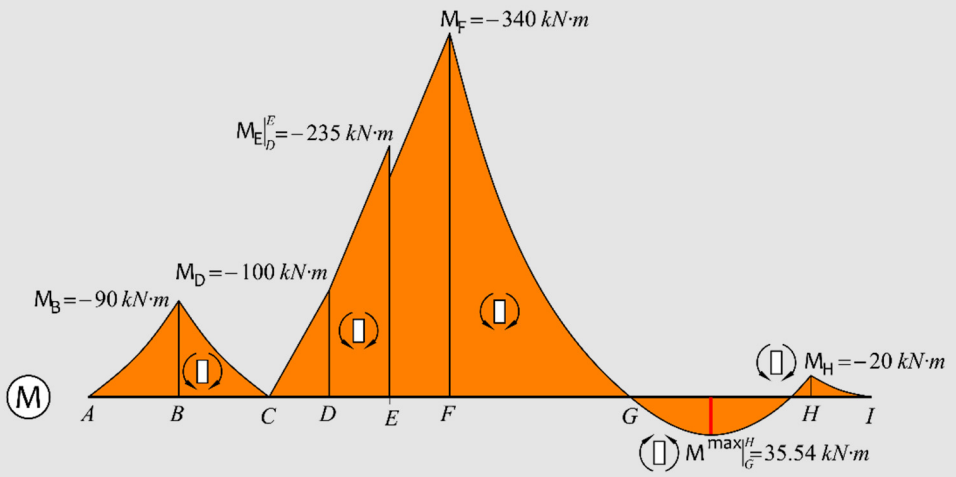
Tramo $\overline{HI}$ $(6 \le s'' \le 8)$:

$$\mathrm{M}\left(s'''\right)\Big|_H^I = \mathrm{M}_H\Big|_G^H + \mathrm{Q}_H\Big|_H^I \cdot \left(s''' - 6\right) - q \cdot \frac{\left(s''' - 6\right)^2}{2} = -20 + 20 \cdot \left(s''' - 6\right) - 10 \cdot \frac{\left(s''' - 6\right)^2}{2}$$

$$= -320 + 80 \cdot s''' - 5 \cdot \left(s'''\right)^2 \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_H\Big|_H^I = \mathrm{M}\left(s''' = 6\right)\Big|_H^I = -20kN \cdot m \\ \mathrm{M}_{HI/2}\Big|_H^I = \mathrm{M}\left(s''' = 7\right)\Big|_H^I = -5kN \cdot m \\ \mathrm{M}_I\Big|_H^I = \mathrm{M}\left(s''' = 8\right)\Big|_H^I = 0 \end{cases}$$

Leyes de esfuerzos





Ejemplo 3-34: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzos de corte con sus máximos, mínimos y ceros.

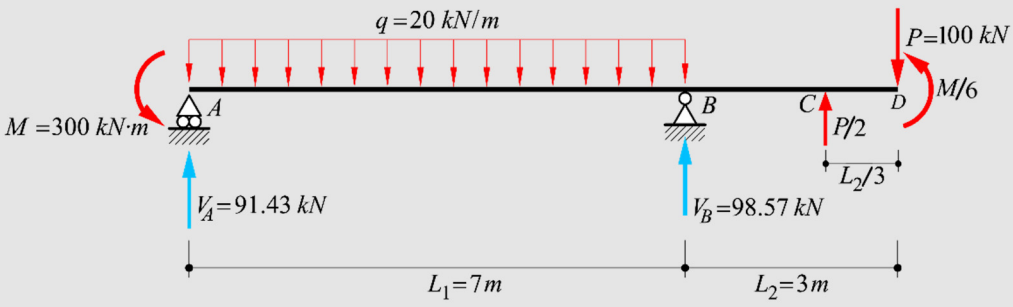
c) Ley de momentos flectores con su s máximos, mínimos y ceros.

a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = H_B \\ \sum F_y = 0 = V_A + V_B - P + \dfrac{P}{2} - q \cdot L_1 = V_A + V_B - 190 \\ \sum M_A = 0 = -M + q \cdot \dfrac{L_1^2}{2} - V_B \cdot L_1 - \dfrac{P}{2} \cdot \left(L_1 + \dfrac{2}{3} L_2 \right) + P \cdot (L_1 + L_2) - \dfrac{M}{3} = 690 - V_B \cdot 7 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 91.43kN}; \quad \boxed{V_B = 98.57kN}$$



b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$: $\left.\mathrm{Q}(s)\right|_A^B = V_A - q\cdot s = 91.43 - 20\cdot s$ $\quad \begin{cases} \left.\mathrm{Q}_A\right|_A^B = \left.\mathrm{Q}(s=0)\right|_A^B = 91.43kN \\ \left.\mathrm{Q}_B\right|_A^B = \left.\mathrm{Q}(s=7)\right|_A^B = -48.56kN \end{cases}$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\left.\mathrm{Q}(s_0)\right|_A^B = 0 = 91.43 - 20\cdot s_0 \rightarrow s_0 = 4.57m$$

Tramo $\overline{BC}$: $\left.\mathrm{Q}(s')\right|_B^C = \left.\mathrm{Q}_B\right|_A^B + V_B = -48.56 + 98.57 = 50kN$

Tramo $\overline{CD}$: $\left.\mathrm{Q}(s')\right|_C^D = \left.\mathrm{Q}_C\right|_B^C + P/2 = 50 + 50 = 100kN$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$:

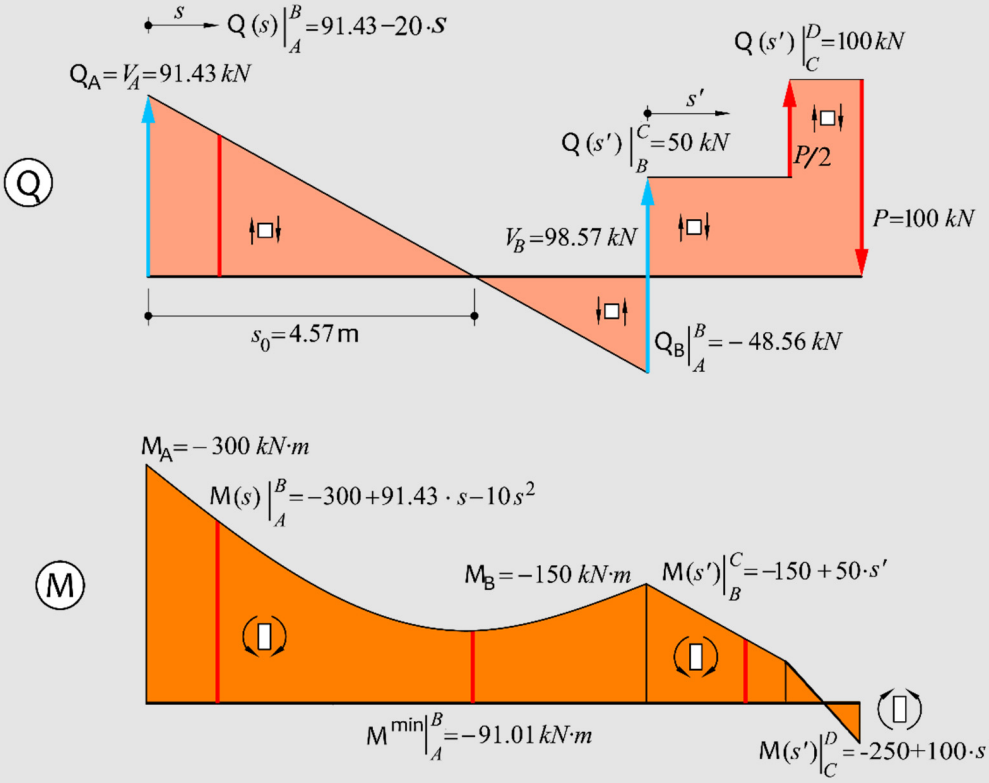
$$\left.\mathrm{M}(s)\right|_A^B = -300 + 91.43\cdot s - 10\cdot s^2 \quad \begin{cases} \left.\mathrm{M}_A\right|_A^B = \left.\mathrm{M}(s=0)\right|_A^B = -300kN\cdot m \\ \left.\mathrm{M}^{\min}\right|_A^B = \left.\mathrm{M}(s=4.57)\right|_A^B = -91.01kN\cdot m \\ \left.\mathrm{M}_B\right|_A^B = \left.\mathrm{M}(s=7)\right|_A^B = -150kN\cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$:

$$\left.\mathrm{M}(s')\right|_B^C = \left.\mathrm{M}_B\right|_A^B - \left.\mathrm{Q}_B\right|_A^B \cdot s' + V_B\cdot s' = -150 - 48.56\cdot s' + 98.57\cdot s'$$

$$= -150 + 50 \cdot s' \quad \begin{cases} M_B\big|_B^C = M(s'=0)\big|_B^C = -150 kN \cdot m \\ M_C\big|_B^C = M(s'=2)\big|_B^C = -50 kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$: $M(s')\big|_C^D = M_C\big|_B^C + Q_C\big|_C^D \cdot (s'-2) = -50 + 100 \cdot (s'-2)$



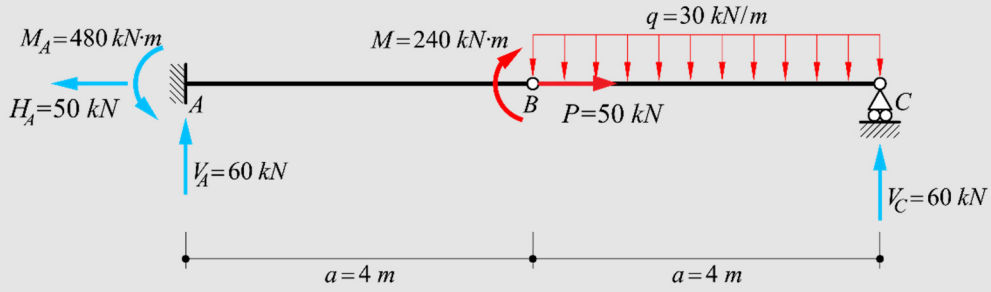
Ejemplo 3-35: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzos de corte con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.

d) Ley de esfuerzos normales.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = -H_A + P = -H_A + 50 \\ \sum F_y = 0 = V_A + V_C - q \cdot a = V_A + V_C - 30 \cdot 4 \\ \sum M_A = 0 = -M_A + M + q \cdot a \left(a + \dfrac{a}{2} \right) - V_C \cdot (2a) = -M_A + 240 + 30 \cdot 4 \cdot 6 - V_C \cdot 8 \\ \sum M_B^{Der} = 0 = q \cdot a \cdot \left(\dfrac{a}{2} \right) - V_C \cdot a = 30 \cdot 4 \cdot 2 - V_C \cdot 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 60kN}; \quad \boxed{V_C = 60kN}; \quad \boxed{M_A = 480kN \cdot m}; \quad \boxed{H_A = 50kN}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$: $\mathrm{Q}(s)\Big|_A^B = V_A = 60kN$

Tramo $\overline{BC}$: $\mathrm{Q}(s')\Big|_B^C = \mathrm{Q}_B\Big|_A^B - q \cdot s' = 60 - 30 \cdot s'$ $\quad \begin{cases} \mathrm{Q}_B\Big|_B^C = \mathrm{Q}(s'=0)\Big|_B^C = 60kN \\ \mathrm{Q}_C\Big|_B^C = \mathrm{Q}(s'=4)\Big|_B^C = -60kN \end{cases}$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\mathrm{Q}(s_0') = 0 = 60 - 30 \cdot s_0' \rightarrow s_0' = 2m$$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$: $\left.\mathrm{M}(s)\right|_A^B = -480 + 60 \cdot s$

$$\begin{cases} \left.\mathrm{M}_A\right|_A^B = \left.\mathrm{M}(s=0)\right|_A^B = -480 kN \cdot m \\ \left.\mathrm{M}_B\right|_A^B = \left.\mathrm{M}(s=4)\right|_A^B = -240 kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$:

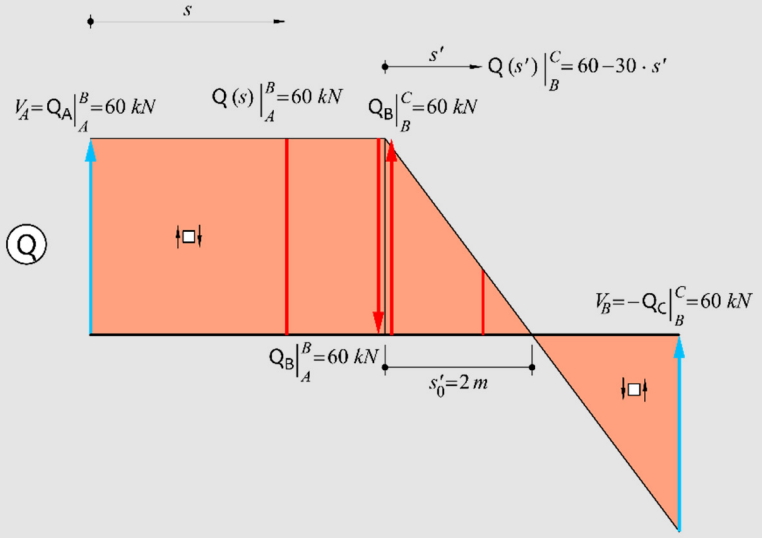
$$\left.\mathrm{M}(s')\right|_B^C = 60 \cdot s' - 15 \cdot (s')^2$$

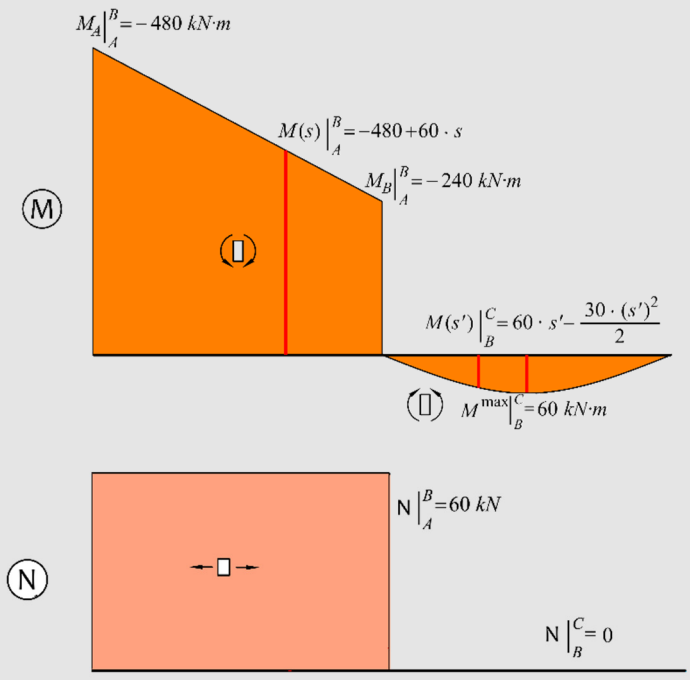
$$\begin{cases} \left.\mathrm{M}_B\right|_B^C = \left.\mathrm{M}(s'=0)\right|_B^C = 0 \\ \left.\mathrm{M}^{\max}\right|_B^C = \left.\mathrm{M}(s'=2)\right|_B^C = 60 kN \cdot m \\ \left.\mathrm{M}_C\right|_B^C = \left.\mathrm{M}(s'=4)\right|_B^C = 0 \end{cases}$$

d) Ley de Esfuerzo Normal

Tramo $\overline{AB}$: $\left.\mathrm{N}(s)\right|_A^B = H_A = 50 kN$

Tramo $\overline{AB}$: $\left.\mathrm{N}(s')\right|_B^C = H_A - P = 0$



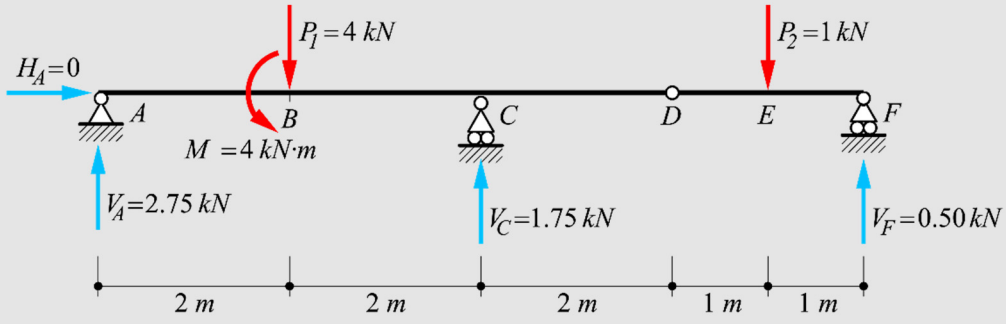


Ejemplo 3-36: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_C + V_F - P_1 - P_2 = V_A + V_C + V_F - 4 - 1 \\ \sum M_A = 0 = P_1 \cdot 2 - M - V_C \cdot 4 + P_2 \cdot 7 - V_F \cdot 8 = 4 \cdot 2 - 4 - V_C \cdot 4 + 1 \cdot 7 - V_F \cdot 8 \\ \sum M_D^{Der} = 0 = -V_F \cdot 2 + P_2 \cdot 1 = -V_F \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 2.75kN}; \quad \boxed{V_C = 1.75kN}; \quad \boxed{V_F = 0.5kN}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$**:** $\mathrm{Q}(s)\big|_A^B = V_A = 2.75kN$

Tramo $\overline{BC}$**:** $\mathrm{Q}(s)\big|_B^C = \mathrm{Q}_B\big|_A^B - P_1 = 2.75 - 4 = -1.25kN$

Tramo $\overline{CE}$**:** $\mathrm{Q}(s')\big|_C^E = \mathrm{Q}_C\big|_B^C + V_C = -1.25 + 1.75 = 0.5kN$

Tramo $\overline{EF}$**:** $\mathrm{Q}(s')\big|_E^F = \mathrm{Q}_E\big|_C^E - P_2 = 0.5 - 1 = -0.5kN$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$ $(0 \le s \le 2)$:

$$\mathrm{M}(s)\big|_A^B = V_A \cdot s = 2.75 \cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\big|_A^B = 0 \\ \mathrm{M}_B\big|_A^B = \mathrm{M}(s=2)\big|_A^B = 5.5kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$ $(2 \le s \le 4)$:

$$\mathrm{M}(s)\big|_B^C = \mathrm{M}_B\big|_A^B - M + \mathrm{Q}_B\big|_B^C \cdot (s-2) = 5.5 - 4 - 1.25 \cdot (s-2)$$

$$= 4 - 1.25 \cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\big|_B^C = \mathrm{M}(s=2)\big|_B^C = 1.5kN \cdot m \\ \mathrm{M}_C\big|_B^C = \mathrm{M}(s=4)\big|_B^C = -1kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{CE}$ $(0 \le s' \le 3)$:

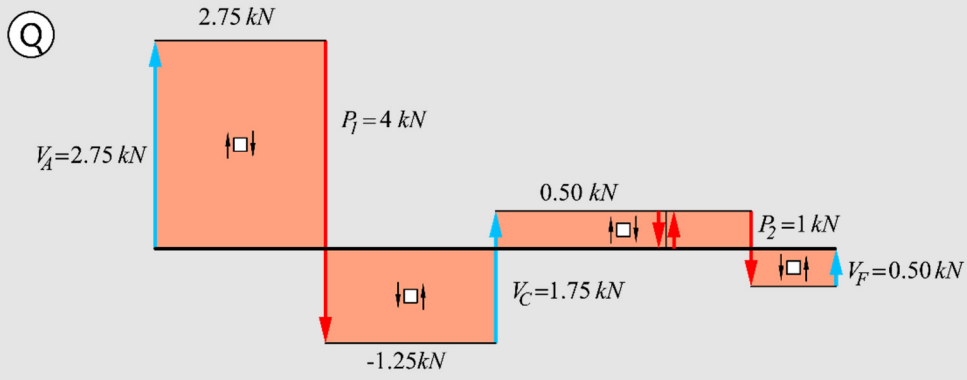
$$\mathrm{M}(s')\Big|_C^E = \mathrm{M}_C\Big|_B^C + \mathrm{Q}_C\Big|_C^D \cdot s'$$

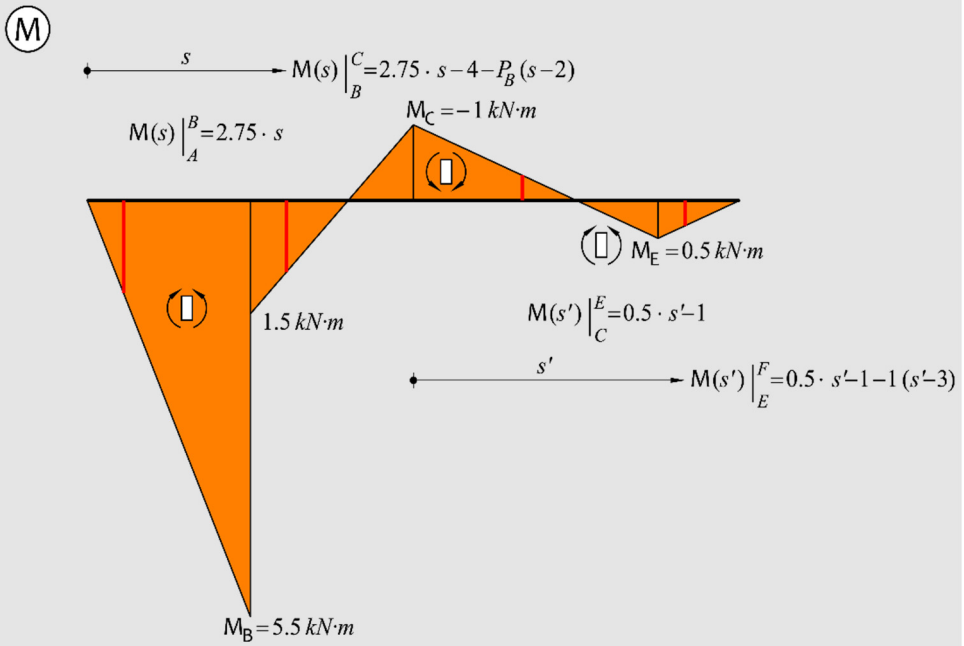
$$= -1 + 0.5 \cdot s' \quad \begin{cases} \mathrm{M}_C\Big|_C^E = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_C^E = -1kN \cdot m \\ \mathrm{M}_D\Big|_C^E = \mathrm{M}(s'=2)\Big|_C^E = 0 \\ \mathrm{M}_E\Big|_C^E = \mathrm{M}(s'=3)\Big|_C^E = 0.5kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{EF}$ $(3 \le s' \le 4)$:

$$\mathrm{M}(s')\Big|_E^F = \mathrm{M}_E\Big|_C^E + \mathrm{Q}_E\Big|_E^F \cdot (s'-3) = 0.5 - 0.5 \cdot (s'-3)$$

$$= 2 - 0.5 \cdot s' \quad \begin{cases} \mathrm{M}_E\Big|_E^F = \mathrm{M}(s'=3)\Big|_C^E = 0.5kN \cdot m \\ \mathrm{M}_F\Big|_E^F = \mathrm{M}(s'=4)\Big|_C^E = 0 \end{cases}$$



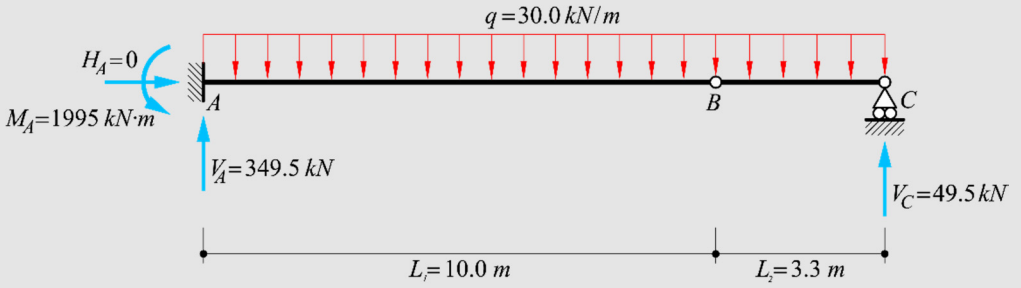


Ejemplo 3-37: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 = H_A \\ \sum F_y = 0 = V_A + V_C - q \cdot \left(L_1 + L_2 \right) = V_A + V_C - 30 \cdot 13.3 \\ \sum M_A = 0 = -M_A + q \cdot \dfrac{\left(L_1 + L_2 \right)^2}{2} - V_C \cdot \left(L_1 + L_2 \right) = -M_A + 30 \cdot \dfrac{13.3^2}{2} - V_C \cdot 13.3 \\ \sum M_C^{Der} = 0 = q \cdot \dfrac{L_2^2}{2} - V_C \cdot L_2 = 30 \cdot \dfrac{3.3^2}{2} - V_C \cdot 3.3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 349.5kN}; \quad \boxed{V_C = 49.5kN}; \quad \boxed{M_A = 1995kN \cdot m}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AC}$:

$$\mathrm{Q}(s)\Big|_A^C = V_A - q \cdot s = 349.5 - 30 \cdot s \qquad \begin{cases} \mathrm{Q}_A\Big|_A^C = \mathrm{Q}(s=0)\Big|_A^C = 349.5kN \\ \mathrm{Q}_B\Big|_A^C = \mathrm{Q}(s=10)\Big|_A^C = 49.5kN \\ \mathrm{Q}_C\Big|_A^C = \mathrm{Q}(s=13.3)\Big|_A^C = -49.5kN \end{cases}$$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\mathrm{Q}(s_0) = 0 = 349.5 - 30 \cdot s_0 \rightarrow s_0 = 11.65m$$

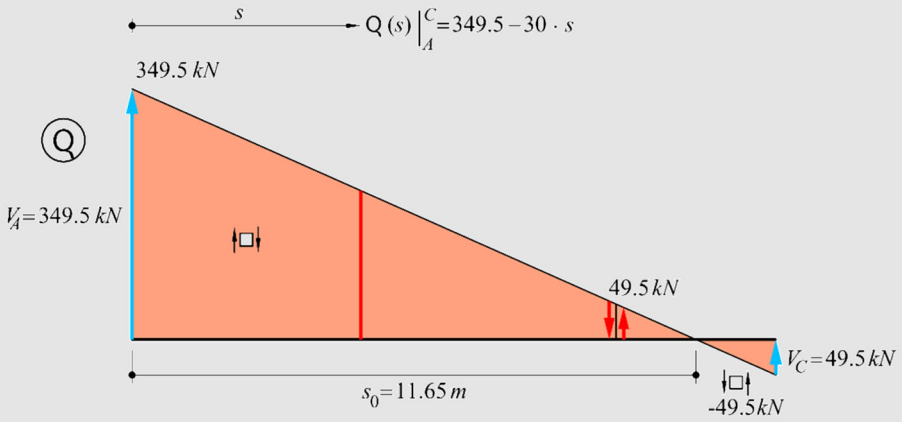
c) Ley de Momento Flector

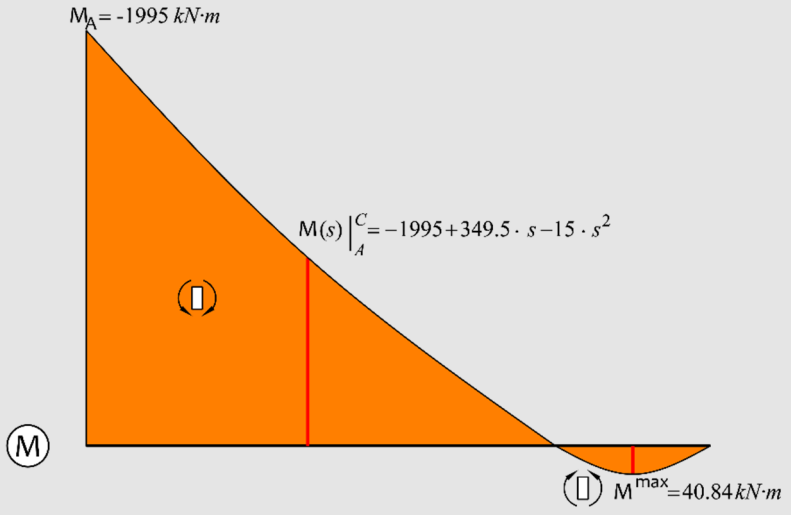
Tramo $\overline{AC}$:

$$\mathrm{M}(s)\Big|_A^C = -M_A + V_A \cdot s - q \cdot \frac{s^2}{2}$$

$$= -1995 + 349.5 \cdot s - 15 \cdot s^2$$

$$\begin{cases} M_A\big|_A^C = M(s=0)\big|_A^C = -1995 kN \cdot m \\ M_B\big|_A^C = M(s=10)\big|_A^C = 0 \\ M^{max}\big|_A^C = M(s_0 = 11.65)\big|_A^C = 40.84 kN \cdot m \\ M_C\big|_A^C = M(s=13.3)\big|_A^C = 0 \end{cases}$$



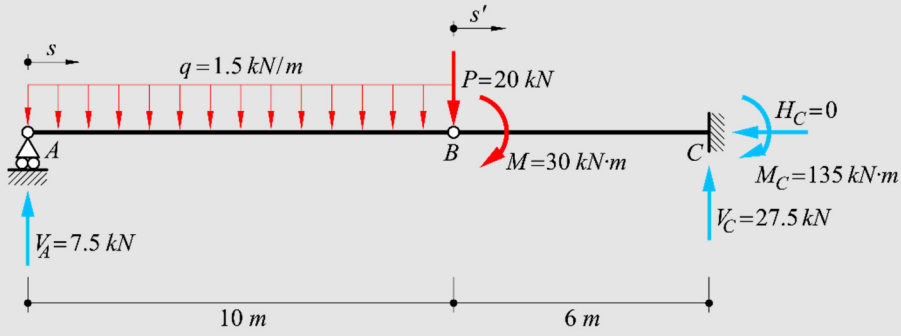


Ejemplo 3-38: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = V_A + V_C - P - q\cdot 10 = V_A + V_C - 20 - 1.5\cdot 10 \\ \sum M_C = 0 = V_A\cdot(10+6) - \overbrace{(q\cdot 10)\cdot\left(\frac{10}{2}+6\right)}^{165} - \overbrace{P\cdot 6}^{120} + \overbrace{M}^{30} + M_C = V_A\cdot 16 - 255 + M_C \\ \sum M_B^{Izq} = 0 = V_A\cdot 10 - (q\cdot 10)\cdot\frac{10}{2} = V_A\cdot 10 - 15\cdot 5 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = 7.5kN};\quad \boxed{V_C = 27.5kN};\quad \boxed{M_C = 135kN\cdot m}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$ **:** $\left.\mathrm{Q}(s)\right|_A^B = V_A - q\cdot s = 7.5 - 1.5\cdot s$ $\quad \begin{cases} \left.\mathrm{Q}_A\right|_A^B = \left.\mathrm{Q}(s=0)\right|_A^B = 7.5kN \\ \left.\mathrm{Q}_B\right|_A^B = \left.\mathrm{Q}(s=10)\right|_A^B = -7.5kN \end{cases}$

El cero del esfuerzo de corte, en este tramo, se obtiene como

$$\mathrm{Q}(s_0)=0=7.5-1.5\cdot s_0 \rightarrow s_0=5m$$

Tramo $\overline{BC}$: $\mathrm{Q}(s)\big|_B^C=\mathrm{Q}_B\big|_A^B-P=-7.5-20=-27.5kN$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$:

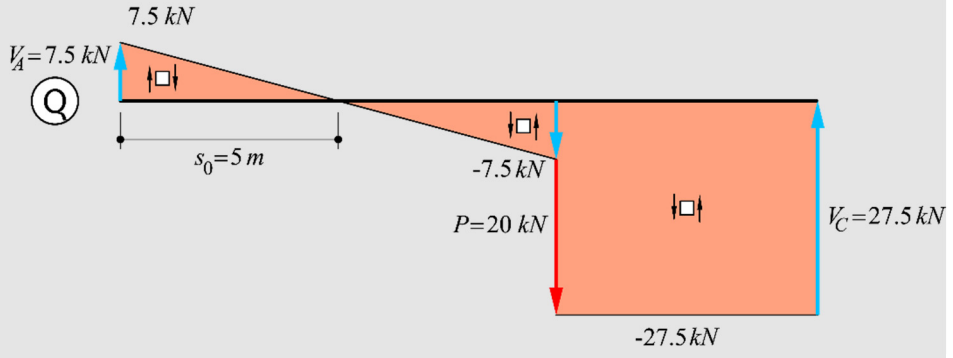
$$\mathrm{M}(s)\big|_A^B=V_A\cdot s-q\cdot\frac{s^2}{2}=7.5\cdot s-0.75\cdot s^2 \qquad \begin{cases}\mathrm{M}_A\big|_A^B=\mathrm{M}(s=0)\big|_A^B=0\\ \mathrm{M}^{\max}\big|_A^B=\mathrm{M}(s_0=5)\big|_A^B=18.75kN\cdot m\\ \mathrm{M}_B\big|_A^B=\mathrm{M}(s=10)\big|_A^B=0\end{cases}$$

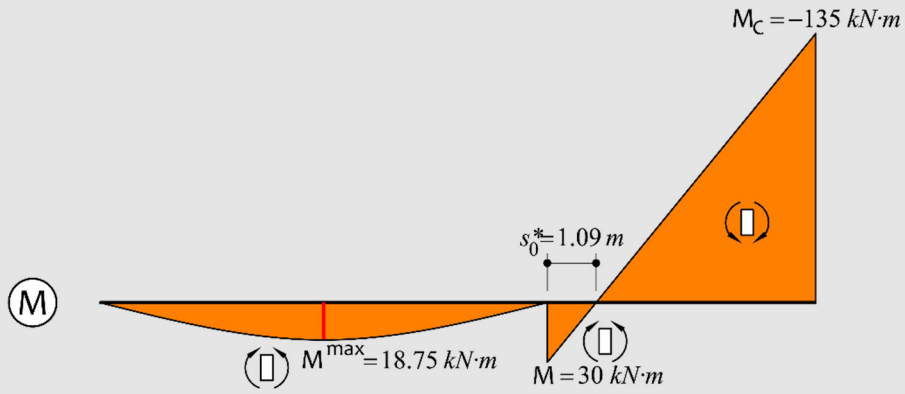
Tramo $\overline{BC}$:

$$\mathrm{M}(s')\big|_B^C=\cancel{\mathrm{M}_B\big|_A^{B=0}}+M+\mathrm{Q}_B\big|_B^C\cdot s'=30-27.5\cdot s' \qquad \begin{cases}\mathrm{M}_B\big|_B^C=\mathrm{M}(s'=0)\big|_B^C=30kN\cdot m\\ \mathrm{M}_C\big|_B^C=\mathrm{M}(s'=6)\big|_B^C=-135kN\cdot m\end{cases}$$

El momento flector, en este tramo, se anula para:

$$\mathrm{M}(s'_*)\big|_B^C=30-27.5\cdot s'_*=0 \quad\rightarrow\quad s'_*=1.09m$$



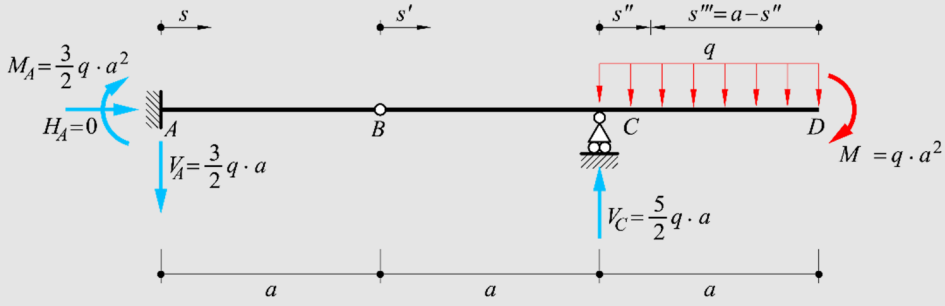


Ejemplo 3-39: Dada la estructura representada en la figura, hallar y dibujar:

a) Reacciones en los apoyos.

b) Ley de esfuerzo cortante con sus máximos, mínimos y ceros.

c) Ley de momentos flectores con sus máximos, mínimos y ceros.



a) Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 = -V_A + V_C - q\cdot a \\ \sum M_A = 0 = M_A - V_C\cdot 2a + (q\cdot a)\cdot\left(2a + \dfrac{a}{2}\right) + M = M_A - V_C\cdot 2a + q\cdot\dfrac{5a^2}{2} + q\cdot a^2 \\ \sum M_B^{Der} = 0 = -V_C\cdot a + (q\cdot a)\cdot\left(a + \dfrac{a}{2}\right) + M = V_C\cdot a + q\cdot\dfrac{3a^2}{2} + q\cdot a^2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_A = \frac{3}{2} q \cdot a}; \quad \boxed{V_C = \frac{5}{2} q \cdot a}; \quad \boxed{M_A = \frac{3}{2} q \cdot a^2}$$

b) Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$: $\mathrm{Q}(s)\big|_A^B = -V_A = -\frac{3}{2} q \cdot a$

Tramo $\overline{BC}$: $\mathrm{Q}(s')\big|_A^B = -V_A = -\frac{3}{2} q \cdot a$

Tramo $\overline{CD}$:

$$\mathrm{Q}(s'')\big|_C^D = \mathrm{Q}_C\big|_B^C + V_C - q \cdot s'' = -\frac{3}{2} q \cdot a + \frac{5}{2} q \cdot a - q \cdot s''$$

$$= q \cdot a - q \cdot s'' \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_C\big|_C^D = \mathrm{Q}(s''=0)\big|_C^D = q \cdot a \\ \mathrm{Q}_D\big|_C^D = \mathrm{Q}(s''=a)\big|_C^D = 0 \end{cases}$$

c) Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$:

$$\mathrm{M}(s)\big|_A^B = M_A - V_A \cdot s = \frac{3}{2} q \cdot a^2 - \frac{3}{2} q \cdot a \cdot s \quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\big|_A^B = \mathrm{M}(s=0)\big|_A^B = \frac{3}{2} q \cdot a^2 \\ \mathrm{M}_B\big|_A^B = \mathrm{M}(s=a)\big|_A^B = 0 \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$:

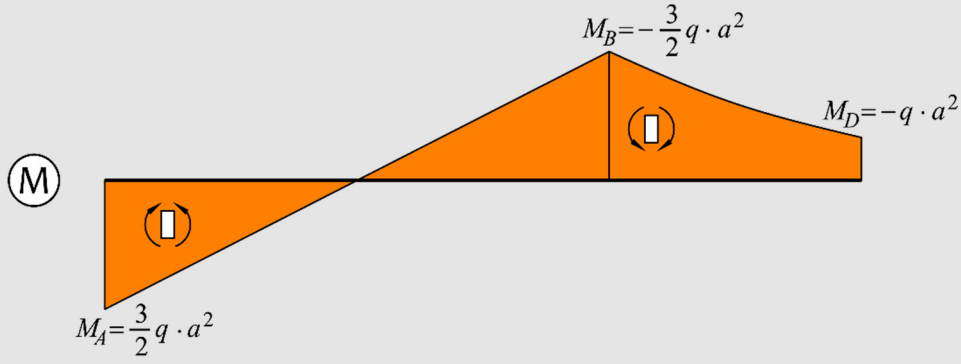
$$\mathrm{M}(s')\big|_B^C = \cancel{\mathrm{M}_B\big|_A^B}^{\,=0} - \mathrm{Q}_B\big|_B^C \cdot s' = -\frac{3}{2} q \cdot a \cdot s' \quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\big|_B^C = \mathrm{M}(s'=0)\big|_B^C = 0 \\ \mathrm{M}_C\big|_B^C = \mathrm{M}(s'=a)\big|_B^C = -\frac{3}{2} q \cdot a^2 \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$:

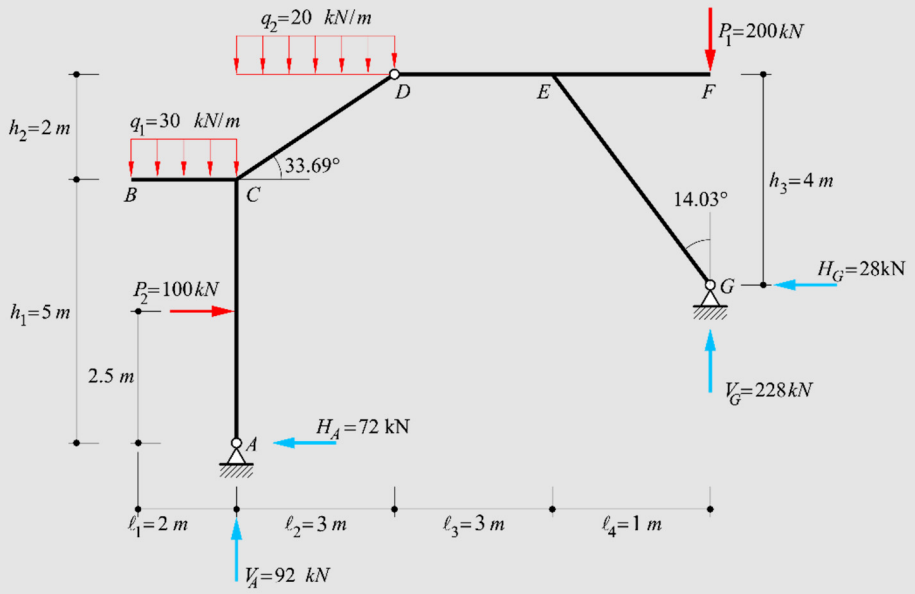
$$\mathrm{M}(s'')\Big|_C^D = \mathrm{M}_C\Big|_B^C + Q_C\Big|_C^D \cdot s'' - q \cdot \frac{(s'')^2}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} q \cdot a^2 + q \cdot a \cdot s'' - \frac{1}{2}(s'')^2 \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_C\Big|_C^D = \mathrm{M}(s''=0)\Big|_C^D = -\frac{3}{2} q \cdot a^2 \\ \mathrm{M}_D\Big|_C^D = \mathrm{M}(s''=a)\Big|_C^D = -q \cdot a^2 \end{cases}$$





Ejemplo 3-40: Para el pórtico de la figura obtener los momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos normales. Trazar los diagramas correspondientes.



Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases}
\sum F_z = 0 = -H_A - H_G + P_2 = -H_A - H_G + 100 \\
\sum F_y = 0 = V_A + V_G - q_1 \cdot \ell_1 - q_2 \cdot \ell_2 - P_1 = V_A + V_G - 30 \cdot 2 - 20 \cdot 3 - 200 \\
\sum M_G = 0 = V_A \overbrace{\left(\ell_2 + \ell_3 + \ell_4\right)}^{7} + H_A \overbrace{\left(h_1 + h_2 - h_3\right)}^{3} - P_2 \overbrace{\left(h_1 + h_2 - h_3 - 2.5\right)}^{0.5} \\
\qquad - q_1 \ell_1 \overbrace{\left(\frac{\ell_1}{2} + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4\right)}^{8} - q_2 \ell_2 \overbrace{\left(\frac{\ell_2}{2} + \ell_3 + \ell_4\right)}^{5.5} \\
\qquad = V_A \cdot 7 + H_A \cdot 3 - 50 - 480 - 330 \\
\sum M_D^{Izq} = 0 = V_A \ell_2 + H_A \overbrace{\left(h_1 + h_2\right)}^{7} - P_2 \overbrace{\left(h_1 + h_2 - 2.5\right)}^{4.5} - q_1 \ell_1 \overbrace{\left(\frac{\ell_1}{2} + \ell_2\right)}^{4} - q_2 \ell_2 \left(\frac{\ell_2}{2}\right) \\
\qquad = V_A \cdot 3 + H_A \cdot 7 - 450 - 240 - 90
\end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{H_A = 72kN}; \quad \boxed{V_A = 92kN}; \quad \boxed{H_G = 28kN}; \quad \boxed{V_G = 228kN}$$

Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AC}$**:**
$$\begin{cases} 0 \le s^{AC} \le 2.5 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Q}\left(s^{AC}\right)\Big|_A^C = H_A = 72kN \\ 2.5 \le s^{AC} \le 5 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Q}\left(s^{AC}\right)\Big|_A^C = H_A - P_2 = 72 - 100 = -28kN \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$**:** $\mathrm{Q}\left(s^{BC}\right)\Big|_B^C = -q_1 \cdot s^{BC} = -30 \cdot s^{BC}$
$$\begin{cases} \mathrm{Q}_B\big|_B^C = \mathrm{Q}\left(s^{BC}=0\right)\Big|_B^C = 0 \\ \mathrm{Q}_C\big|_B^C = \mathrm{Q}\left(s^{BC}=2\right)\Big|_B^C = -60kN \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$**:**

$$\mathrm{Q}\left(s^{CD}\right)\Big|_C^D = \left(V_A - q_1 \cdot 2\right)\cdot\cos\left(33.69^{\mathrm{o}}\right) + \left(H_A - P_2\right)\cdot\mathrm{sen}\left(33.69^{\mathrm{o}}\right) - q_2 \cdot \cos^2\left(33.69^{\mathrm{o}}\right)\cdot s^{CD}$$
$$= 11.09 - 13.85 \cdot s^{CD} \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_C\big|_C^D = \mathrm{Q}\left(s^{CD}=0\right)\Big|_C^D = 11.09kN \\ \mathrm{Q}_D\big|_C^D = \mathrm{Q}\left(s^{CD}=\frac{3}{\cos(33.69^{\mathrm{o}})}\right)\Big|_C^D = -38.83kN \end{cases}$$

En este tramo el corte se anula para

$$\mathrm{Q}\left(s_0^{CD}\right)\Big|_C^D = 11.09 - 13.85 \cdot s_0^{CD} = 0 \quad \rightarrow \quad s_0^{CD} = 0.80m$$

Tramo $\overline{GE}$**:**

$$\mathrm{Q}\left(s^{GE}\right)\Big|_G^E = V_G \cdot \mathrm{sen}\left(14.03^{\mathrm{o}}\right) - H_G \cdot \cos\left(14.03^{\mathrm{o}}\right)$$
$$= 228 \cdot \mathrm{sen}\left(14.03^{\mathrm{o}}\right) - 28 \cdot \cos\left(14.03^{\mathrm{o}}\right) = 28.1kN$$

Tramo $\overline{FE}$**:** $\mathrm{Q}\left(s^{FE}\right)\Big|_F^E = P_1 = 200kN$

Tramo $\overline{ED}$**:** $\mathrm{Q}\left(s^{ED}\right)\Big|_E^D = P_1 - V_G = 200 - 228 = -28kN$

Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AC}$

$0 \le s^{AC} \le 2.5 \quad \rightarrow$

$$\mathrm{M}\left(s^{AC}\right)\Big|_A^C = H_A \cdot s^{AC} = 72 \cdot s^{AC} \quad \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^C = \mathrm{M}\left(s^{AC}=0\right)\Big|_A^C = 0 \\ \mathrm{M}_{P_2}\Big|_A^C = \mathrm{M}\left(s^{AC}=2.5\right)\Big|_A^C = 180kN\cdot m \end{cases}$$

$2.5 \le s^{AC} \le 5 \quad \rightarrow$

$$\mathrm{M}\left(s^{AC}\right)\Big|_A^C = H_A \cdot s^{AC} - P_2 \cdot \left(s^{AC} - 2.5\right) = 72 \cdot s^{AC} - 100 \cdot \left(s^{AC} - 2.5\right)$$

$$= -28 \cdot s + 250 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_{P_2}\Big|_A^C = \mathrm{M}\left(s^{AC}=2.5\right)\Big|_{P_2}^C = 180kN\cdot m \\ \mathrm{M}_C\Big|_A^C = \mathrm{M}\left(s^{AC}=5\right)\Big|_D^C = 110kN\cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$:

$$\mathrm{M}\left(s^{BC}\right)\Big|_B^C = -q_1 \cdot \frac{\left(s^{BC}\right)^2}{2} = -15 \cdot \left(s^{BC}\right)^2 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\Big|_B^C = \mathrm{M}\left(s^{BC}=0\right)\Big|_B^C = 0 \\ \mathrm{M}_C\Big|_B^C = \mathrm{M}\left(s^{BC}=2\right)\Big|_B^C = -60kN\cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$:

$$\mathrm{M}\left(s\right)\Big|_C^D = \mathrm{M}_C\Big|_B^C + \mathrm{M}_C\Big|_A^C = -60 + 110 + \mathrm{Q}_C\Big|_C^D \cdot s^{CD} - q_2 \cdot \cos^2\left(33.69^\circ\right) \cdot \frac{\left(s^{CD}\right)^2}{2}$$

$$= 50 + 11.09 \cdot s^{CD} - 6.92 \cdot \left(s^{CD}\right)^2 \quad \begin{cases} \mathrm{M}_C\Big|_C^D = \mathrm{M}\left(s^{CD}=0\right)\Big|_C^D = 50kN\cdot m \\ \mathrm{M}^{\max}\Big|_C^D = \mathrm{M}\left(s_0^{CD}=0.80\right)\Big|_C^D = 54.4kN\cdot m \\ \mathrm{M}_D\Big|_C^D = \mathrm{M}\left(s^{CD}=\frac{3}{\cos(33.69^\circ)}\right)\Big|_C^D = 0 \end{cases}$$

Tramo $\overline{GE}$:

$$\mathrm{M}\left(s^{GE}\right)\Big|_G^E = \mathrm{Q}_G\Big|_G^E \cdot s^{GE} = 28.1 \cdot s^{GE} \quad \begin{cases} \mathrm{M}_G\Big|_G^E = \mathrm{M}\left(s^{GE}=0\right)\Big|_G^E = 0 \\ \mathrm{M}_E\Big|_G^E = \mathrm{M}\left(s^{GE}=\frac{4}{\cos(14.03^\circ)}\right)\Big|_G^E = 116kN\cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{FE}$:

$$\mathsf{M}\left(s^{FE}\right)\Big|_F^E = -P_1 \cdot s^{FE} = -200 \cdot s^{FE} \quad \begin{cases} \mathsf{M}_E\Big|_F^E = \mathsf{M}\left(s^{FE}=0\right)\Big|_F^E = 0 \\ \mathsf{M}_F\Big|_F^E = \mathsf{M}\left(s^{FE}=1\right)\Big|_F^E = -200kN\cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{ED}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{M}\left(s^{ED}\right)\Big|_E^D &= \mathsf{M}_E\Big|_F^E + \mathsf{Q}_E\Big|_F^E \cdot s^{ED} + V_G \cdot \left(s^{ED} + \ell_4\right) - H_G \cdot h_3 \\ &= -200 - 200 \cdot s^{ED} + 228 \cdot \left(s^{ED} + 1\right) - 28 \cdot 4 \\ &= 28 \cdot s^{ED} - 84 \quad \begin{cases} \mathsf{M}_E\Big|_E^D = \mathsf{M}\left(s=0\right)\Big|_E^D = -84kN\cdot m \\ \mathsf{M}_F\Big|_E^D = \mathsf{M}\left(s=3\right)\Big|_E^D = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ley de Esfuerzo Normal

Tramo $\overline{AC}$: $\mathsf{N}\left(s^{AC}\right)\Big|_A^C = V_A = 92kN$

Tramo $\overline{BC}$: $\mathsf{N}\left(s^{BC}\right)\Big|_B^C = 0$

Tramo $\overline{CD}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{N}\left(s^{CD}\right)\Big|_C^D &= \left(V_A - q_1 \cdot 2\right) \cdot \operatorname{sen}\left(33.69^{\circ}\right) + \left(-H_A + P_2\right) \cdot \cos\left(33.69^{\circ}\right) \\ &\quad -q_2 \cdot \cos\left(33.69^{\circ}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(33.69^{\circ}\right) \cdot s^{CD} = \\ &= 41.05 - 9.23 \cdot s^{CD} \quad \begin{cases} \mathsf{N}_C\Big|_C^D = \mathsf{Q}\left(s^{CD}=0\right)\Big|_C^D = 41.04kN \\ \mathsf{N}_D\Big|_C^D = \mathsf{Q}\left(s^{CD}=\frac{3}{\cos(33.69^{\circ})}\right)\Big|_C^D = 7.77kN \end{cases} \end{aligned}$$

Tramo $\overline{GE}$:

$$\mathrm{N}\left(s^{GE}\right)\Big|_G^E = V_G \cdot \cos\left(14.03^\circ\right) - H_G \cdot \operatorname{sen}\left(14.03^\circ\right)$$
$$= 228 \cdot \cos\left(14.03^\circ\right) - 28 \cdot \operatorname{sen}\left(14.03^\circ\right) = 227.99 kN$$

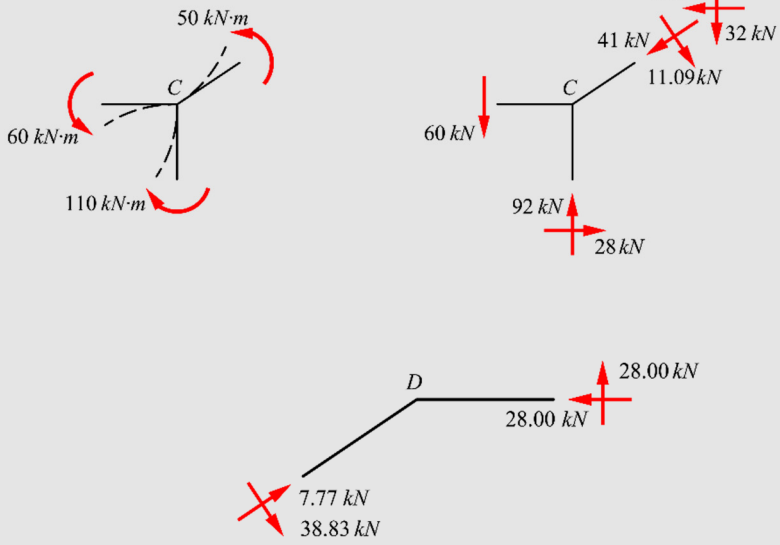
Tramo $\overline{FE}$:

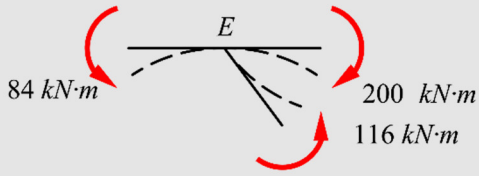
$$\mathrm{Q}\left(s^{FE}\right)\Big|_F^E = 0$$

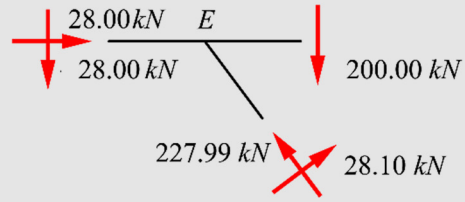
Tramo $\overline{ED}$:

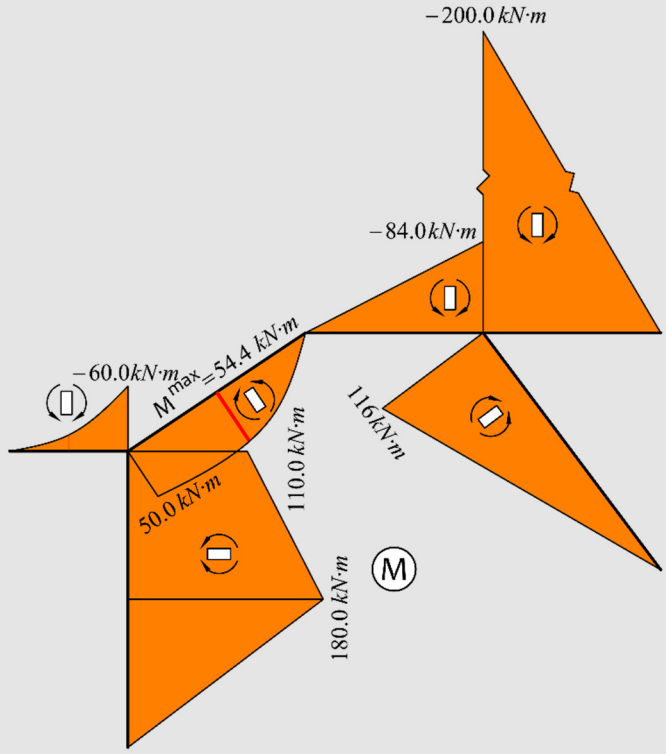
$$\mathrm{Q}\left(s\right)\Big|_E^D = -H_G = -28 kN$$

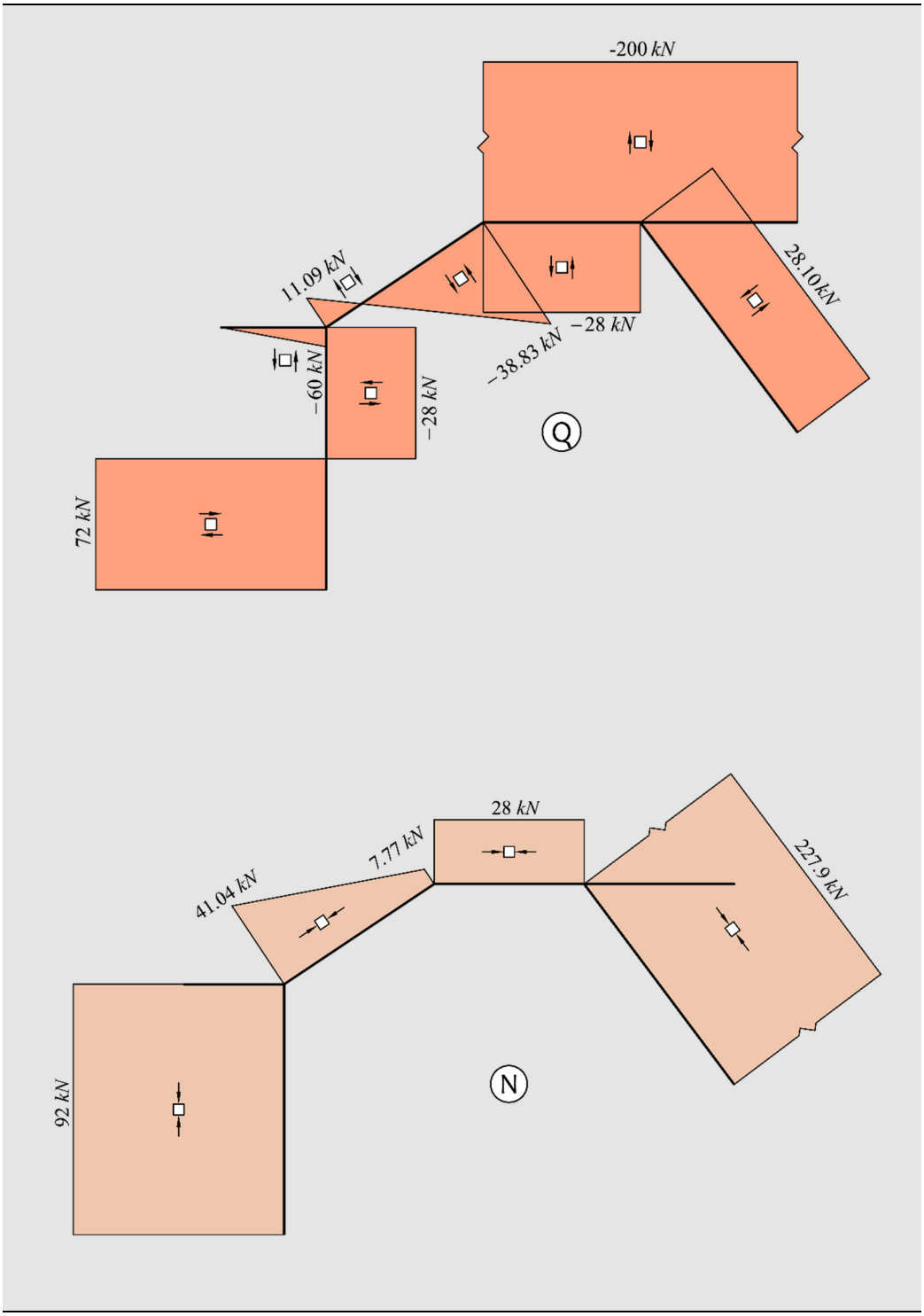
Esfuerzos en los nudos



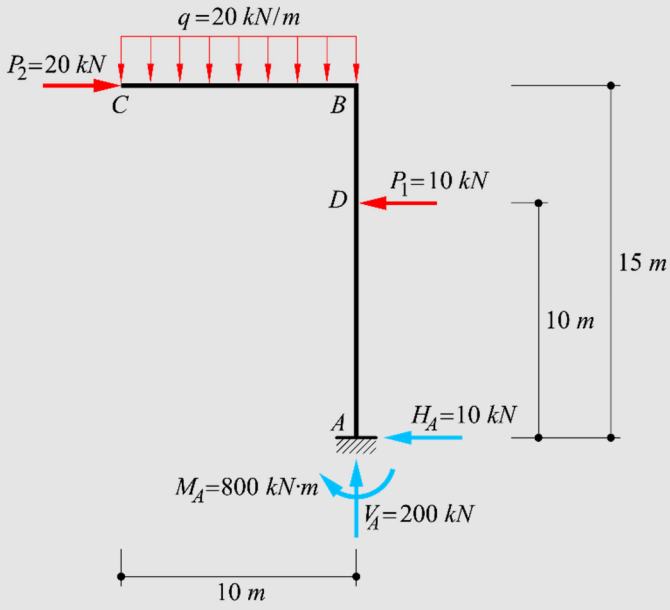

E
84 kN·m
200 kN·m
116 kN·m


28.00kN E
28.00 kN
200.00 kN
227.99 kN
28.10 kN


−200.0 kN·m
−84.0kN·m
−60.0kN·m
M max =54.4 kN·m
110.0 kN·m
116kN·m
50.0 kN·m
180.0 kN·m
M


-200 kN
11.09 kN
−28 kN
−38.83 kN
28.10 kN
−60 kN
−28 kN
72 kN
Q
28 kN
7.77 kN
41.04 kN
227.9 kN
92 kN
N

Ejemplo 3-41: Para el pórtico de la figura obtener y graficar los momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos normales.



Cálculo de Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_V = 0 = V_A - q\cdot 10 = V_A - 20\cdot 10 \\ \sum F_H = 0 = P_2 - P_1 - H_A = 20 - 10 - H_A \\ \sum M_A = 0 = M_A - P_1\cdot 10 + P_2\cdot 15 - (q\cdot 10)\cdot 5 = M_A - 10\cdot 10 + 20\cdot 15 - (20\cdot 10)\cdot 5 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{H_A = 10kN};\quad \boxed{V_A = 200kN};\quad \boxed{M_A = 800kN\cdot m}$$

Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AD}$: $\mathrm{Q}(s')\big|_A^D = H_A = 10kN$

Tramo $\overline{DB}$: $\mathrm{Q}(s')\big|_D^B = \mathrm{Q}(s')\big|_A^B + P_1 = 10 + 10 = 20kN$

Tramo $\overline{CB}$: $\mathrm{Q}(s)\big|_C^B = -q\cdot s = -20\cdot s$ $\quad \begin{cases} \mathrm{Q}_C\big|_C^B = \mathrm{Q}(s=0)\big|_C^B = 0 \\ \mathrm{Q}_B\big|_C^B = \mathrm{Q}(s=10)\big|_C^B = -200kN \end{cases}$

Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AD}$ $(0 \le s' \le 10)$:

$$\mathrm{M}(s')\Big|_A^D = M_A + H_A \cdot s' = 800 + 10 \cdot s' \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_A\Big|_A^{P_1} = \mathrm{M}(s'=0)\Big|_A^{P_1} = 0 \\ \mathrm{M}_{P_1}\Big|_A^{P_1} = \mathrm{M}(s'=10)\Big|_A^{P_1} = 900kN \cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{P_1 B}$ $(10 \le s' \le 15)$:

$$\mathrm{M}(s')\Big|_D^B = 800 + H_A \cdot s' + P_1 \cdot (s'-10) = 800 + 10 \cdot s' + 10 \cdot (s'-10)$$

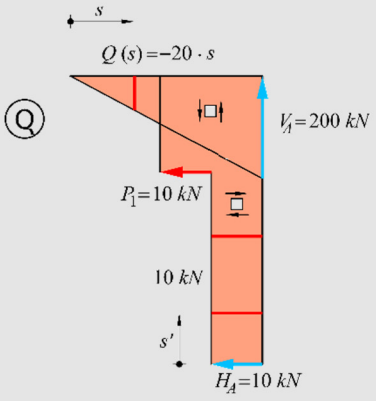
$$= 700 + 20 \cdot s' \qquad \begin{cases} \mathrm{M}_D\Big|_D^B = \mathrm{M}(s'=10)\Big|_D^B = 900kN \cdot m \\ \mathrm{M}_B\Big|_D^B = \mathrm{M}(s'=15)\Big|_D^B = 1000kN \cdot m \end{cases}$$

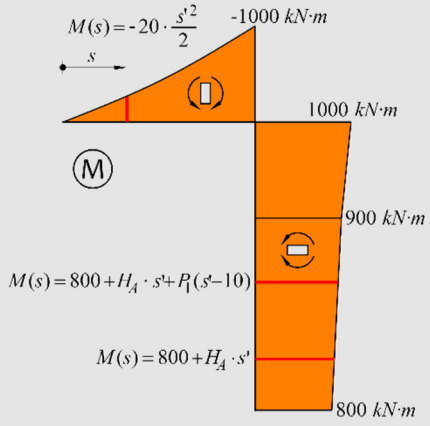
Tramo $\overline{CB}$: $\mathrm{M}(s)\Big|_C^B = -q \cdot \dfrac{s^2}{2} = -20 \cdot \dfrac{s^2}{2}$ $\qquad \begin{cases} \mathrm{M}_C\Big|_C^B = \mathrm{M}(s=0)\Big|_C^B = 0 \\ \mathrm{M}_B\Big|_C^B = \mathrm{M}(s=10)\Big|_C^B = -1000kN \cdot m \end{cases}$

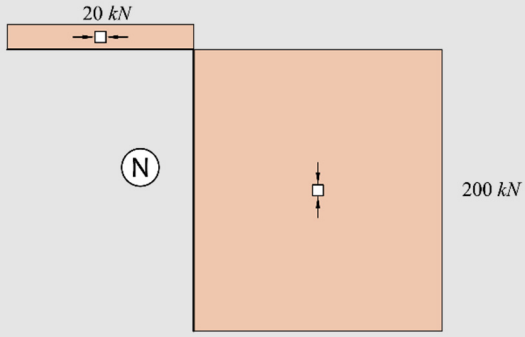
Ley de Esfuerzo Axil

Tramo $\overline{AB}$: $\mathrm{N}(s')\Big|_A^B = V_A = 200kN$

Tramo $\overline{CB}$: $\mathrm{N}(s)\Big|_C^B = P_2 = 20kN$







Ejemplo 3-42: Para la estructura de la figura obtener y graficar los momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos normales.

Cálculo de Reacciones

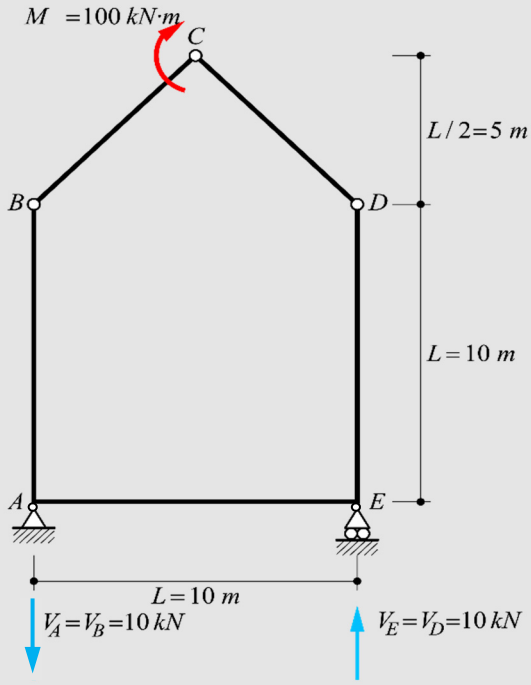
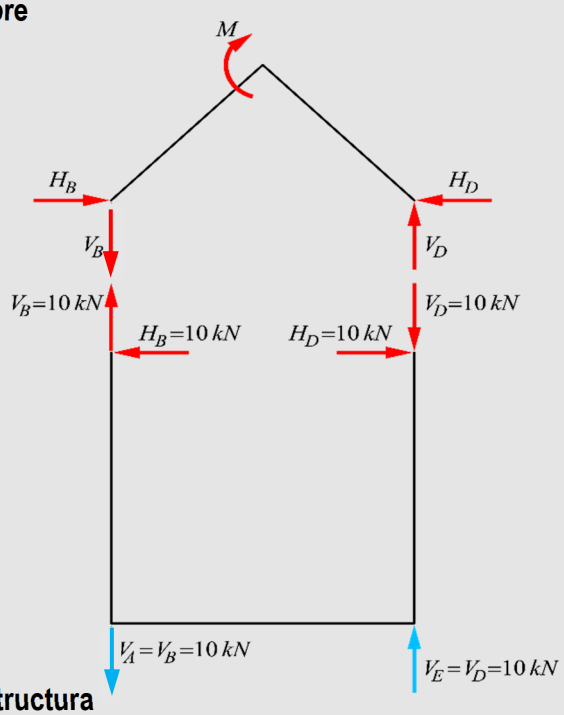


Diagrama de cuerpo libre



Parte superior de la estructura

$$\begin{cases} \sum F_V = 0 = V_D - V_B \\ \sum F_H = 0 = H_B - H_D \\ \sum M_B = 0 = -V_D \cdot 10 + M = -V_D \cdot 10 + 100 \\ \sum M_C^{Izq} = 0 = -V_B \cdot \dfrac{10}{2} - H_B \cdot \dfrac{10}{2} + M = -V_B \cdot 5 - H_B \cdot 5 + 100 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\boxed{V_B = 10kN}; \quad \boxed{H_B = 10kN}; \quad \boxed{V_D = 10kN}; \quad \boxed{H_D = 10kN}$$

Parte inferior de la estructura

$$\boxed{V_A = 10kN}; \quad \boxed{V_E = 10kN}$$

Ley de Esfuerzo de Corte

Tramo $\overline{AB}$**:** $\mathrm{Q}\big|_A^B = H_B = -10kN$

Tramo $\overline{BC}$**:** $\mathrm{Q}\big|_B^C = -H_B \cdot \mathrm{sen}(45^\circ) - V_B \cdot \cos(45^\circ) = -2\left(10\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -10\sqrt{2}kN$

Tramo $\overline{CD}$**:** $\mathrm{Q}\big|_C^D = -H_D\frac{\sqrt{2}}{2} + V_D\frac{\sqrt{2}}{2} = -10\frac{\sqrt{2}}{2} + 10\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Tramo $\overline{ED}$**:** $\mathrm{Q}\big|_E^D = H_D = 10kN$

Tramo $\overline{AE}$**:** $\mathrm{Q}\big|_A^E = V_A - V_D = 0$

Ley de Momento Flector

Tramo $\overline{AB}$**:**

$$\mathrm{M}\left(s^{BA}\right)\Big|_B^A = -\mathrm{Q}_B\big|_A^B \cdot s^{BA} = 10 \cdot s^{BA} \quad \begin{cases} \mathrm{M}_B\big|_B^A = \mathrm{M}\left(s^{BA}=0\right)\Big|_B^A = 0 \\ \mathrm{M}_A\big|_B^A = \mathrm{M}\left(s^{BA}=10\right)\Big|_B^A = 100kN\cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$**:**

$$\mathrm{M}\left(s^{CB}\right)\Big|_C^B = \mathrm{Q}_C\big|_B^C \cdot s^{CB} \quad \begin{cases} \mathrm{M}_C\big|_C^B = \mathrm{M}\left(s^{CB}=0\right)\Big|_B^A = 0 \\ \mathrm{M}_B\big|_C^B = \mathrm{M}\left(s^{CB}=5/(\sqrt{2}/2)\right)\Big|_B^A = 100kN\cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$**:** $\mathrm{M}\big|_C^D = 0$

Tramo $\overline{ED}$**:**

$$\mathrm{M}\left(s^{DE}\right)\Big|_D^E = \mathrm{Q}_D\big|_E^D \cdot s^{DE} = 10 \cdot s^{DE} \quad \begin{cases} \mathrm{M}_E\big|_D^E = \mathrm{M}\left(s^{DE}=0\right)\Big|_D^E = 0 \\ \mathrm{M}_D\big|_D^E = \mathrm{M}\left(s^{DE}=10\right)\Big|_D^E = 100kN\cdot m \end{cases}$$

Tramo $\overline{AE}$**:** $\mathrm{M}(s)\big|_A^E = \mathrm{M}_E\big|_D^E = 100kN\cdot m$

Ley de Esfuerzo Normal

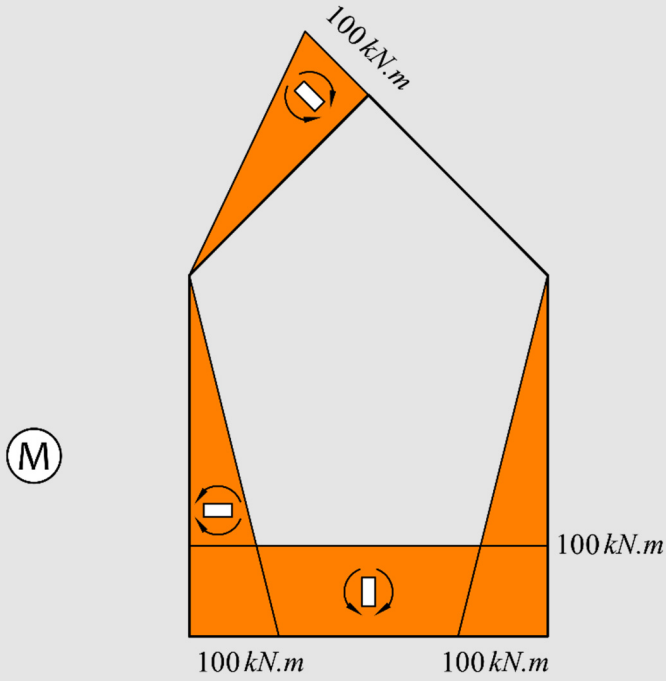
Tramo $\overline{AB}$: $N\big|_A^B = -V_B = -10kN$

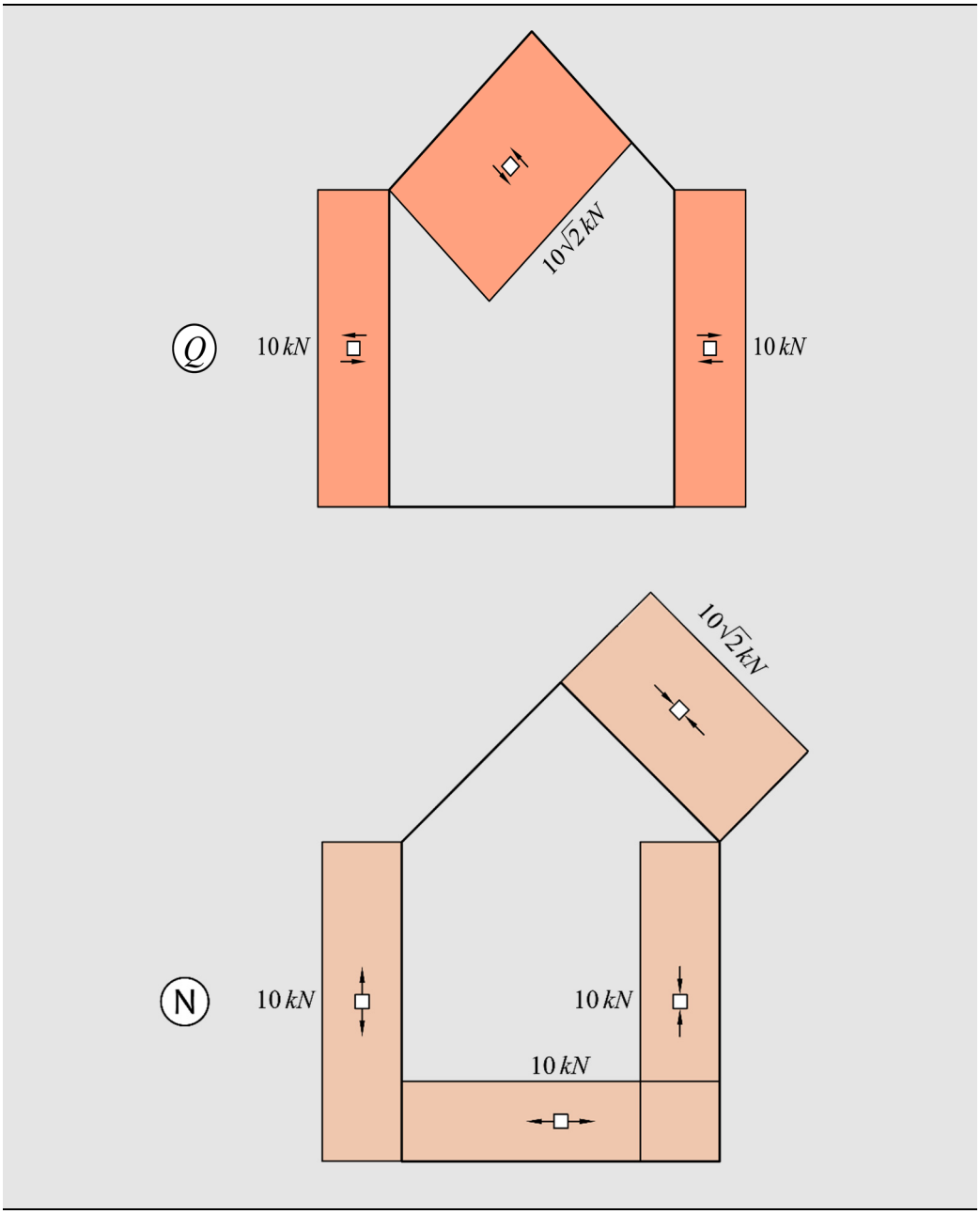
Tramo $\overline{BC}$: $N\big|_B^C = H_B \cdot \cos(45^o) - V_B \operatorname{sen}(45^o) = 10\frac{\sqrt{2}}{2} - 10\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Tramo $\overline{CD}$: $N\big|_C^D = -H_D\frac{\sqrt{2}}{2} - V_D\frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2}$

Tramo $\overline{ED}$: $N\big|_E^D = V_D = 10kN$

Tramo $\overline{AE}$: $N\big|_A^E = -10kN$




Q
10 kN
10√2 kN
10 kN
N
10 kN
10√2 kN
10 kN
10 kN

3.6 Resumen de la formulación básica obtenida en el capítulo

Formulación		Ecuación
Ecuaciones diferenciales del equilibrio de una barra estructural, sistema $y-z$.	$\boxed{q=\frac{d\mathrm{Q}}{ds}}$ $\boxed{p=\frac{d\mathrm{N}}{ds}}$ $\boxed{\mathrm{Q}=\frac{d\mathrm{M}}{ds}-p\,y_{CM}}$	Ec. (3.2)
Ecuaciones diferenciales del equilibrio de una barra estructural, sistema $s-y$.	$\boxed{q=-\frac{d\mathrm{Q}}{ds}}$ $\boxed{p=-\frac{d\mathrm{N}}{ds}}$ $\boxed{\mathrm{Q}=-\frac{d\mathrm{M}}{ds}+p\,y_{CM}}$	Ec. (3.3)
Esfuerzo de Corte y Momento flector por integración.	$\mathrm{Q}(s)=\int q(s)\,ds=\int -q\,ds=-q\cdot s+C_{\mathrm{Q}}$ $\mathrm{M}(s)=\int \mathrm{Q}(s)\,ds=\int(-q\cdot s+C_{\mathrm{Q}})\,ds=$ $=-\frac{q\cdot s^2}{2}+C_{\mathrm{Q}}\,s+C_{\mathrm{M}}$	Ec. (3.10)

Capítulo 4
Esfuerzo Axil
Piezas de Eje Recto

4.1 Piezas rectas de sección transversal conformada por un material simple

En este apartado se estudia el comportamiento de barras de eje recto sometidas a esfuerzos axiles puros (Figura 4.1). Se analizará una sección transversal A de esta barra, constituida por un único material simple, sometida a un esfuerzo axil puro $\mathsf{N}(x_3)$, cuando la resultante de las fuerzas interiores (esfuerzo axil) es colineal con el eje que contiene al centro geométrico (CG) de la sección transversal –ortogonal– de área A,

$$\mathsf{N}(x_3) = \int_A \sigma_3(x_1, x_2, x_3)\, dA \tag{4.1}$$

Se considera que el esfuerzo axil (normal) aplicado en una sección transversal hace que ésta se traslade paralela a sí misma y se mantenga plana después de la deformación (ver Figura 4.2). Esta suposición se conoce como "hipótesis de Bernoulli" y establece más precisamente que *las secciones transversales permanecen planas y ortogonales al eje mecánico de una barra rectilínea después de la deformación.* El cumplimiento cinemático de esta hipótesis implica que las deformaciones son constantes en cada sección de la barra y, por la ley de Hooke, la distribución de tensiones dentro de la barra resulta constante $\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = cte$ en cualquier punto de cada sección transversal de la barra.

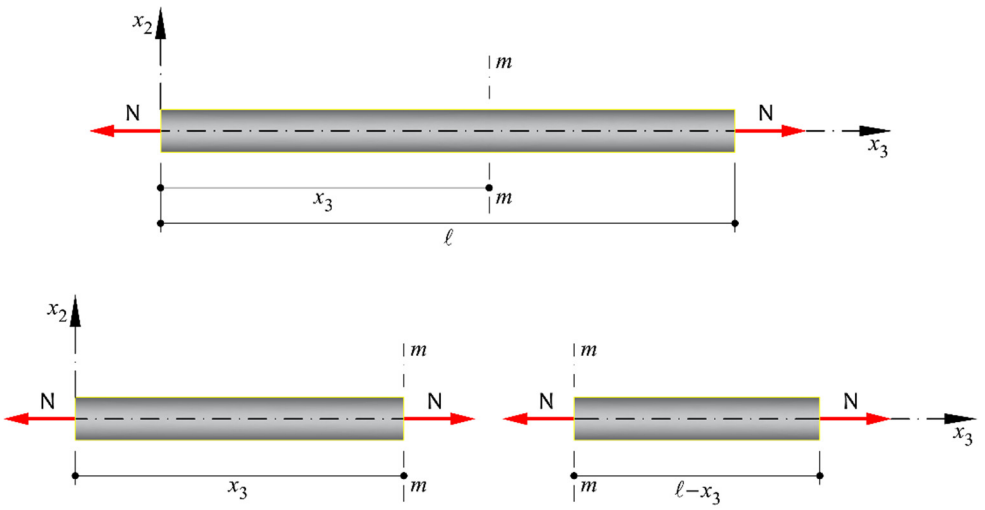


Figura 4.1 – Barra de eje recto sometida a un esfuerzo axil N.

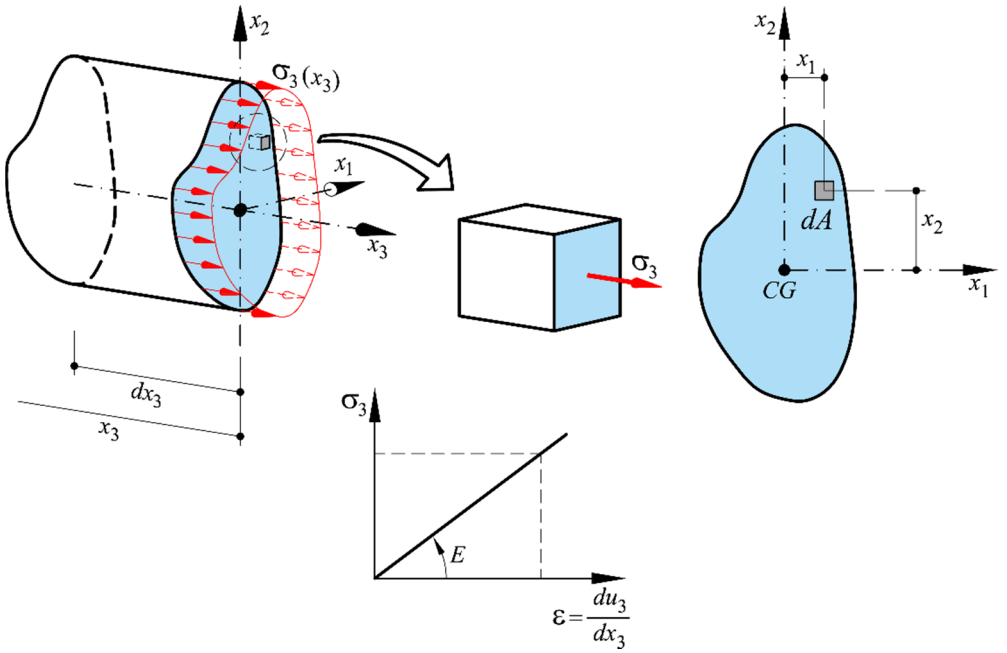


Figura 4.2 – Tensiones y deformaciones en una barra de eje recto sometida a un esfuerzo axil N.

4.1.1 Ecuaciones que gobiernan el comportamiento a esfuerzo axil en barras rectilíneas

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de barras de eje rectilíneo sometidas a esfuerzo axil resultan de las siguientes condiciones de equilibrio, compatibilidad y ecuación de comportamiento del material.

1.a. Relación geométrica – Alargamiento de las fibras

Al observar la Figura 4.3, puede verse que todas las fibras longitudinales que conforman la barra, incluidas las fibras $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, sufren el mismo estiramiento de magnitud du_3, haciendo que la sección transversal permanezca plana después de la deformación (hipótesis de Bernoulli), como consecuencia de la traslación de la sección transversal paralela a sí misma. Es decir,

$$du_3 \equiv \overline{DD'} \equiv \overline{BB'} \tag{4.2}$$

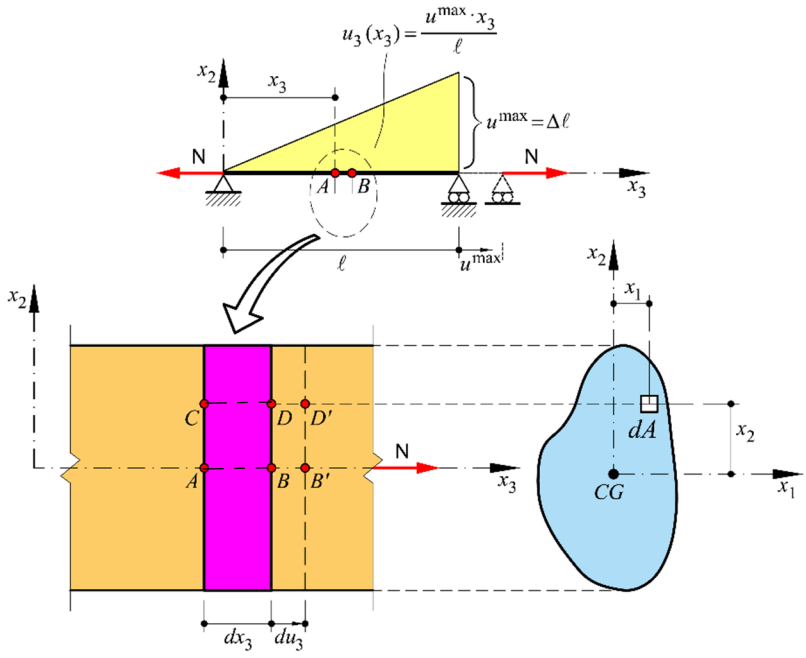


Figura 4.3 – Estado de deformación hipotético de Bernoulli al aplicar un esfuerzo axil N en el eje de una barra.

1.b. Relación de compatibilidad – Estado de deformación

Esta relación garantiza un campo de deformaciones $\varepsilon_3(x_1, x_2, x_3)$ compatible con el campo de desplazamientos $u_3(x_3)$. A partir de la condición de compatibilidad presentada en el Capítulo 2, resulta el campo de deformaciones para este caso particular de barras de eje recto,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u} \quad \xrightarrow{1-D} \quad \varepsilon_{33}(x_1, x_2, x_3) = \frac{du_3(x_3)}{dx_3} \tag{4.3}$$

Sustituyendo en la ecuación (4.3) el campo de desplazamientos lineal $u_3(x_3) = \frac{u^{\max}}{\ell} \cdot x_3$, que se representa en la Figura 4.3, resulta la siguiente expresión simplificada para la deformación de una barra de sección constante y eje recto sometida a un esfuerzo axil constante,

$$\varepsilon_{33}(x_1, x_2, x_3) = \text{cte} = \varepsilon_3 = \frac{u^{\max}}{\ell} = \frac{\Delta\ell}{\ell} \tag{4.4}$$

1.c. Ley constitutiva del comportamiento del material– Ley de Hooke

La ley constitutiva es una formulación matemática basada en leyes de la mecánica y representa una aproximación del comportamiento del material real, luego de introducir algunas hipótesis simplificativas. En este texto se estudian materiales elásticos lineales que pueden representarse adecuadamente, y dentro de ciertos límites de comportamiento, mediante la ley de Hooke (Capítulo 2). Para piezas unidimensionales (barras de eje rectilíneo), esta formulación adquiere la siguiente forma en función del módulo de Young o módulo de elasticidad longitudinal E,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \xrightarrow{1-D} \quad \sigma_3(x_1, x_2, x_3) = E\, \varepsilon_3(x_1, x_2, x_3) \tag{4.5}$$

donde por simplicidad en la nomenclatura se toma $\sigma_3 = \sigma_{33}$.

Para el caso particular supuesto en la ecuación (4.4), resulta el siguiente estado tensional constante a lo largo de la barra,

$$\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = \text{cte} = \sigma_3 = E\ \varepsilon_3 = \frac{E\, u^{\max}}{\ell} \tag{4.6}$$

1.d. Condición de equilibrio externo-interno

A continuación se formula la expresión que establece el equilibrio entre las fuerzas externas y el esfuerzo axial que se desarrolla en el interior de la barra de eje rectilíneo (ver Figura 4.2 y Figura 4.3). Para ello, es necesario escribir las ecuaciones de equilibrio traslacional y rotacional entre las fuerzas internas provenientes del estado tensional $\sigma_3 = \text{cte}$ y la única fuerza axial N que actúa en la sección transversal,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{N} \overset{\text{def}}{=} \int_A \sigma_3\, dA = \int_A \overbrace{E\,\varepsilon_3}^{\text{cte}}\, dA = E\,\varepsilon_3 \int_A dA = \sigma_3\, A \ \Rightarrow\ \sigma_3 = \frac{\mathsf{N}}{A} \\
&\mathsf{M}_1 \overset{\text{def}}{=} \int_A \sigma_3\, x_2\, dA = \int_A E\,\varepsilon_3\ x_2\, dA = \overbrace{E\,\varepsilon_3}^{\neq 0} \underbrace{\int_A x_2\, dA}_{S_1 = 0} = 0 \\
&\mathsf{M}_2 \overset{\text{def}}{=} -\int_A \sigma_3\, x_1\, dA = -\int_A E\,\varepsilon_3\ x_1\, dA = -\overbrace{E\,\varepsilon_3}^{\neq 0} \underbrace{\int_A x_1\, dA}_{S_2 = 0} = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Es importante observar que los momentos estáticos $S_1 = \int_A x_2\, dA = 0$ y $S_2 = \int_A x_1\, dA = 0$ son nulos, porque están calculados respecto de los ejes (x_1, x_2) que pasan por el centro geométrico (CG)[1] de la sección transversal A (ver Figura 4.3), de manera que se satisfacen las ecuaciones de equilibrio.

Sustituyendo la ecuación (4.6) en la primera de las ecuaciones (4.7), se obtiene la relación entre el esfuerzo normal N y el alargamiento total de la barra de longitud ℓ,

[1] NOTA: Recordar que la posición del centro geométrico resulta de anular los momentos estáticos $S_1(x_2) = 0$ y $S_2(x_1) = 0$.

$$\mathsf{N} = \frac{EA}{\ell} u^{\max} = \frac{EA}{\ell} \Delta\ell = EA\,\varepsilon_3 \;\rightarrow\; \boxed{u^{\max} = \Delta\ell = \frac{\mathsf{N}}{EA}\ell}$$
$$u^{\max} = \Delta\ell = \frac{\mathsf{N}}{\underbrace{EA/\ell}_{K_{\mathsf{N}}}} = \frac{\mathsf{N}}{K_{\mathsf{N}}} \tag{4.8}$$

Siendo $K_{\mathsf{N}} = EA/\ell$ la rigidez de una barra frente a esfuerzos axiles.

El alargamiento de una barra sometida a un esfuerzo axial que varía a lo largo del eje de la barra, $\mathsf{N}(x_3) \neq \text{cte}$, y cuya sección transversal, $A(x_3)$, varía también a lo largo del eje de la pieza, se obtiene a partir de la ecuación (4.3),

$$du_3(x_3) = \varepsilon_3(x_3) \cdot dx_3 = \frac{\mathsf{N}(x_3)}{EA(x_3)} \cdot dx_3 \;\rightarrow\; u_3(x_3) = \int_{\ell} \frac{\mathsf{N}(x_3)}{EA(x_3)} \cdot dx_3 \tag{4.9}$$

En este caso, la deformación es homogénea para cada x_3 y en cada una de las secciones transversales (cumplimiento de la hipótesis de Bernoulli), pero no a lo largo de la longitud de la pieza (x_3). Como puede verificarse, en el caso que sea $\mathsf{N}(x_3) = \text{cte}$ y $A(x_3) = \text{cte}$, se recupera la expresión (4.8).

4.1.2 Influencia de la temperatura en las ecuaciones que gobiernan el comportamiento a esfuerzo axil en barras rectilíneas

A continuación, se introduce un cambio de temperatura en la barra como una acción externa. Para ello, es necesario suponer que la deformación total ε_3 resultará de la suma de la deformación mecánica $\varepsilon_3^{\text{mec}}$ más la deformación térmica $\varepsilon_3^{\text{ter}}$, esto es:

$$\varepsilon_3(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon_3^{\text{mec}}(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon_3^{\text{ter}}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sigma_3(x_1, x_2, x_3)}{E} + \alpha_t \cdot \Delta t \tag{4.10}$$

Siendo α_t el coeficiente de dilatación térmica, expresado en $\left[1/^0C\right]$ y $\Delta t = t - t^{\text{ref}}$ el cambio entre la temperatura actual (t) y la de referencia (t^{ref}). Así, la tensión en una barra solicitada en sus extremos con un esfuerzo axil N y, además, calentada (o enfriada) uniformemente con un salto térmico Δt, resulta,

$$\sigma_3(x_1,x_2,x_3) = E\cdot\left(\varepsilon_3(x_1,x_2,x_3) - \alpha_t\cdot\Delta t\right) \;\Rightarrow\; \frac{\mathsf{N}}{A} = E\cdot\frac{du_3(x_3)}{dx_3} - E\cdot\alpha_t\cdot\Delta t \tag{4.11}$$

De donde se obtiene el desplazamiento que ha sufrido la barra,

$$\begin{aligned} du_3(x_3) &= \left(\frac{\mathsf{N}}{A\,E} + \alpha_t\cdot\Delta t\right)dx_3 \;=\; \varepsilon_3(x_1,x_2,x_3)\cdot dx_3 \\ u_3^{\max} &= \int_0^{\ell} du_3(x_3) = \int_0^{\ell}\left(\frac{\mathsf{N}}{A\,E} + \alpha_t\cdot\Delta t\right)dx_3 = \underbrace{\frac{\mathsf{N}}{A\,E}\,\ell}_{u_3^{\text{mec}}} + \underbrace{\alpha_t\cdot\Delta t\cdot\ell}_{u_3^{\text{ter}}} \end{aligned} \tag{4.12}$$

El resultado obtenido en la última ecuación (4.12) resulta de suponer constante, a lo largo de la barra, el esfuerzo axil $\mathsf{N}(x_3) = \text{cte}$, la sección transversal $A(x_3) = \text{cte}$, el módulo de elasticidad $E(x_3) = \text{cte}$ y el coeficiente de dilatación térmica $\alpha_t(x_3) = \text{cte}$. Además, en la mencionada ecuación pueden darse tres casos extremos siguientes:

a. **Problema mecánico puro:** $\left(\mathsf{N}\neq 0\;;\;\Delta t = 0\right) \;\Rightarrow\; u_3^{\max} = \dfrac{\mathsf{N}}{A\,E}\,\ell$

b. **Problema térmico puro sin restricción:** $\left(\mathsf{N} = 0\;;\;\Delta t\neq 0\right) \;\Rightarrow$

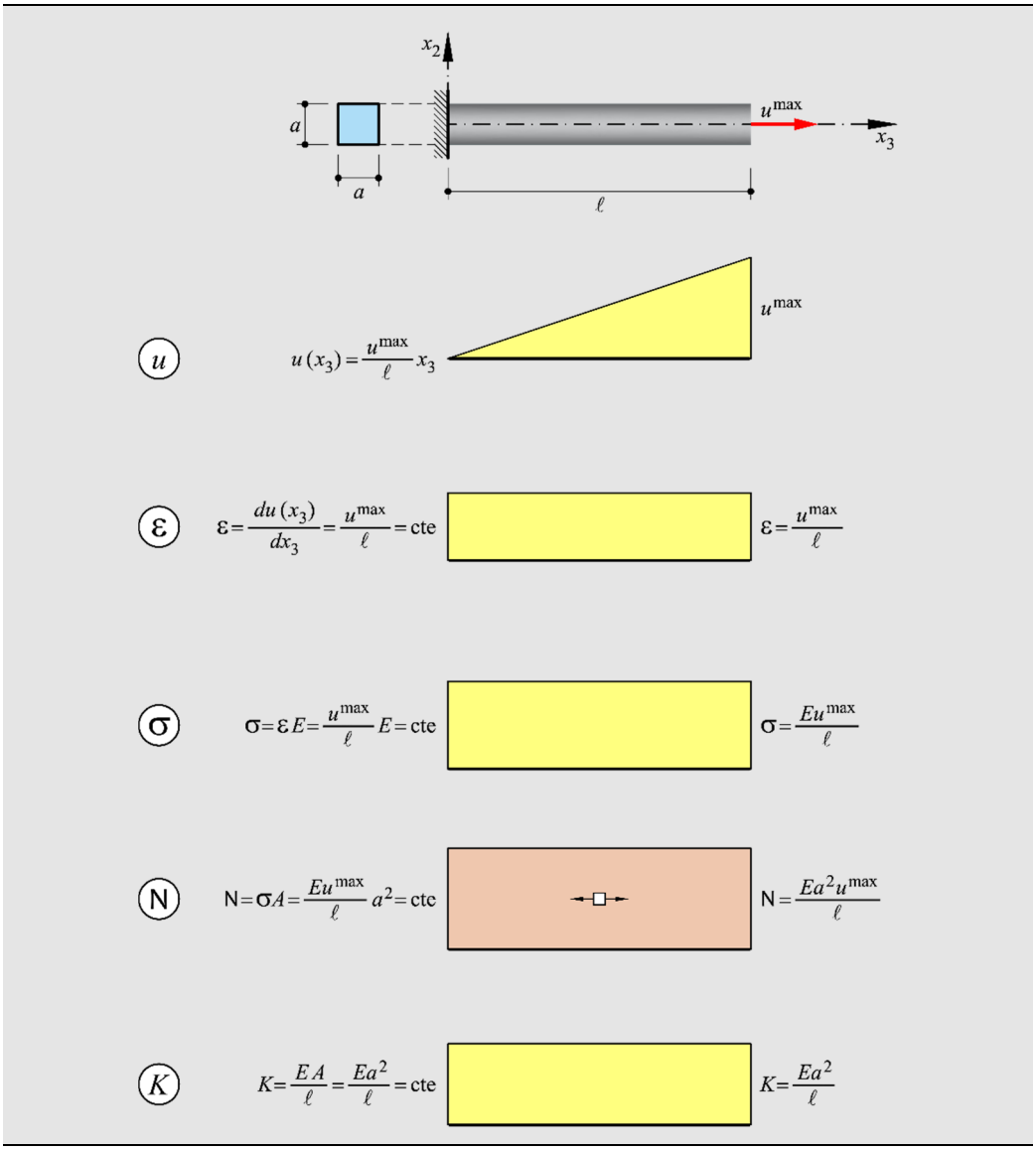
$u_3^{\max} = \alpha_t\cdot\Delta t\cdot\ell$

c. **Problema térmico puro con restricción:** $\left(u_3^{\max} = 0\;;\;\Delta t\neq 0\right) \;\Rightarrow$

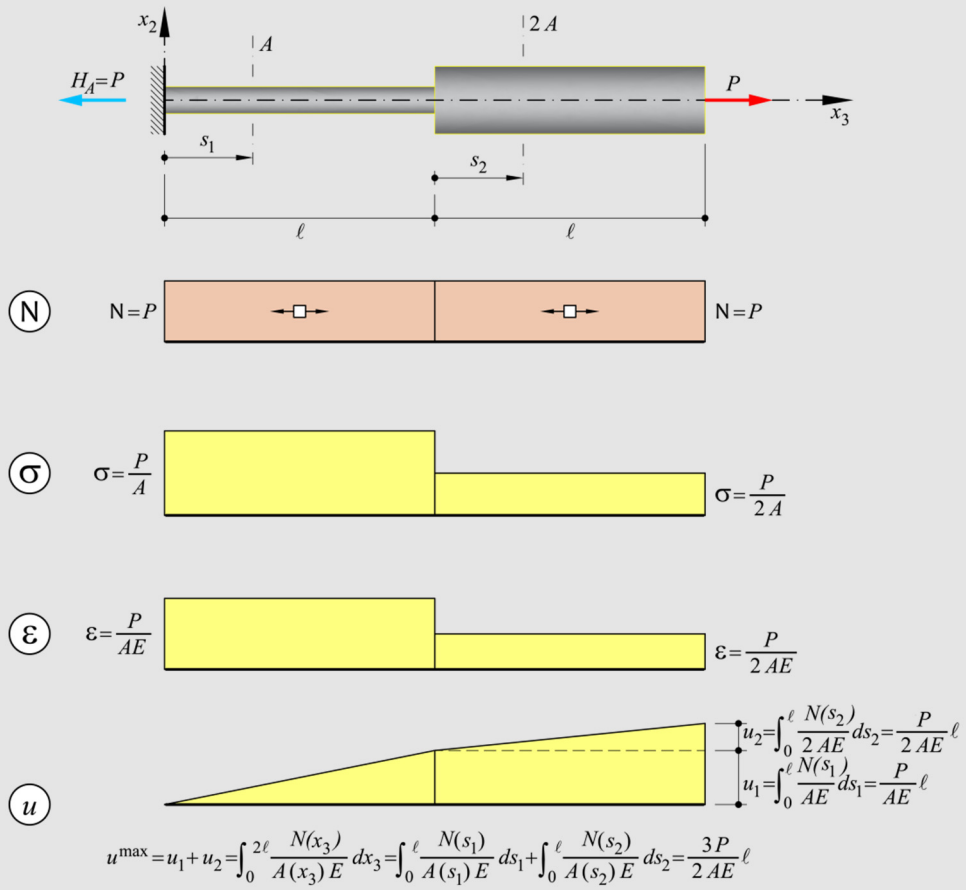
$\mathsf{N} = -A\,E\,\alpha_t\cdot\Delta t$

Este último caso puede interpretarse como una superposición de los dos anteriores (caso a + caso b). Es decir, se deja dilatar libremente la barra por el salto de temperatura Δt (caso b) y luego se aplica un esfuerzo axil N para llevar la barra a su longitud inicial (caso a).

Ejemplo 4-1: Obtener las funciones de desplazamiento, deformación, tensión, carga y rigidez axial de la barra de longitud ℓ, sección transversal cuadrada de lado a y sometida al desplazamiento impuesto $u^{\max}$ en su extremo libre, mostrada en la figura. El material de la barra es elástico-lineal, con módulo E.



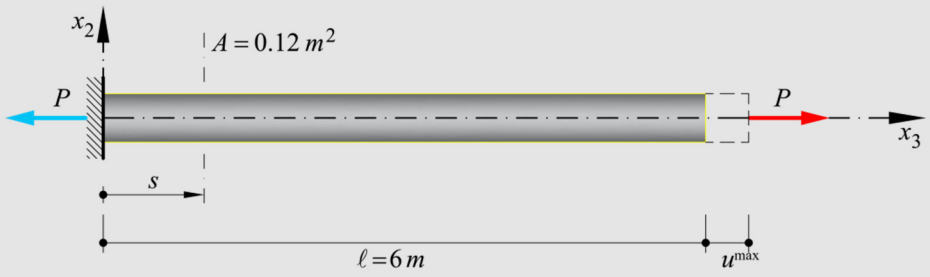
Ejemplo 4-2: Obtener la ley de distribución de esfuerzos axiles, tensiones, desplazamientos y deformaciones en la siguiente barra.



Ejemplo 4-3: Una barra de longitud $\ell = 6\,m$, sección transversal $A = 0.12\,m^2$ y módulo de elasticidad $E = 30000\,MPa$, está cargada con una fuerza axial de tracción de magnitud P. Determinar:

a) El valor máximo de la fuerza P, para que las tensiones no superen $\sigma = 12.7\,MPa$.

b) El desplazamiento en el extremo de la barra.



a) Máximo valor de la fuerza

$$\sigma = \frac{P}{A} \le 12.7\ MPa \quad \Rightarrow \quad P = 0.12\ m^2 \cdot 12.7\ MN/m^2 = 1.524\ MN$$

b) Desplazamiento en el extremo

$$\sigma = \frac{P}{A} = E \cdot \varepsilon \ \Rightarrow \ \varepsilon = \frac{P}{AE} \Rightarrow u^{\max} = \frac{P}{AE}\ell = \frac{1.524\ MN}{0.12\ m^2 \cdot 30000\ MN/m^2}\ 6\ m = 2.54 \cdot 10^{-3}\ m$$

Ejemplo 4-4: La barra de la figura está sometida a su propio peso. Si la barra tiene longitud ℓ, sección transversal constante A, el material posee módulo elástico E y densidad ρ, determinar la distribución a lo largo de la barra de:

a) el esfuerzo axil $N(x_3)$

b) la tensión $\sigma(x_3)$

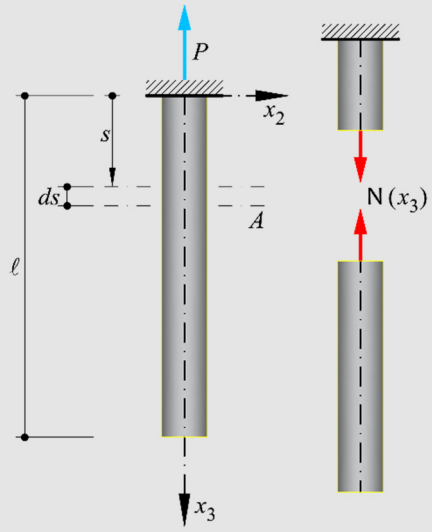
c) la deformación $\varepsilon(x_3)$

d) el desplazamiento $u(x_3)$

a) Cálculo del esfuerzo axil en la barra

Considerando el peso de la barra que pende por debajo de una sección s y teniendo en cuenta el peso específico del material (densidad por gravedad), resulta la siguiente expresión para el esfuerzo axil:

$$N(s) = \underbrace{(\rho \cdot g)}_{\gamma} \cdot \underbrace{A \cdot (\ell - s)}_{\Delta Vol}$$



b) Estado de tensiones en la barra

A partir de la ecuación de equilibrio (4.7), resulta la tensión:

$$\sigma(s) = \frac{\mathrm{N}(s)}{A} = \gamma \cdot (\ell - s)$$

c) Estado de deformaciones en la barra

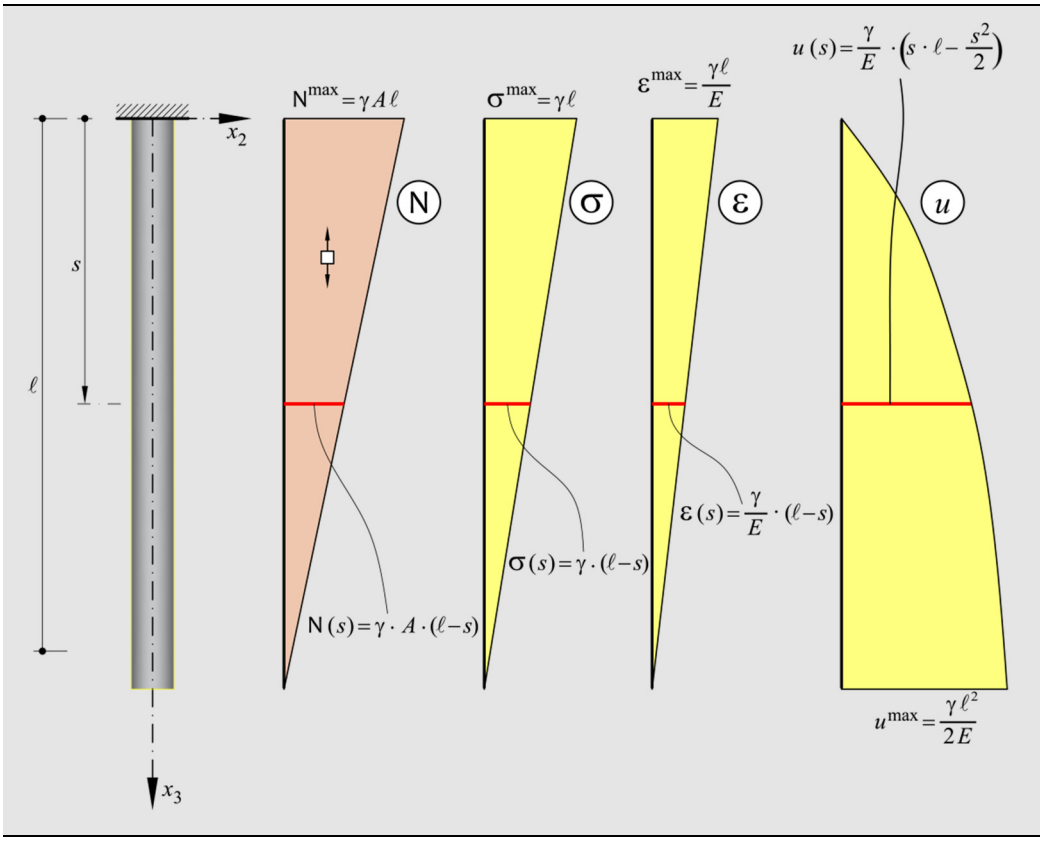
A partir de la ecuación de compatibilidad (4.5), resulta la deformación:

$$\varepsilon(s) = \frac{\sigma(s)}{E} = \frac{\mathrm{N}(s)}{A\,E} = \frac{\gamma}{E} \cdot (\ell - s)$$

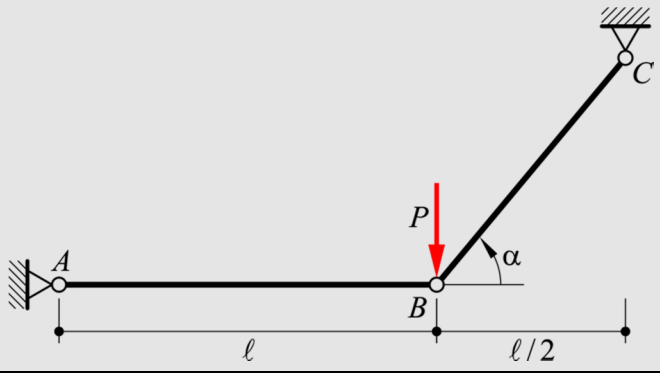
d) Desplazamiento de la barra

A partir de la ecuación (4.9), resulta el campo de desplazamientos:

$$u(s) = \int_0^s \varepsilon(x_3) \cdot dx_3 = \int_0^s \frac{\mathrm{N}(x_3)}{EA} \cdot dx_3 \;\Rightarrow\; u(s) = \int_0^s \frac{\gamma}{E} \cdot (\ell - x_3) \cdot dx_3 \quad = \frac{\gamma}{E} \cdot \left(s \cdot \ell - \frac{s^2}{2} \right)$$



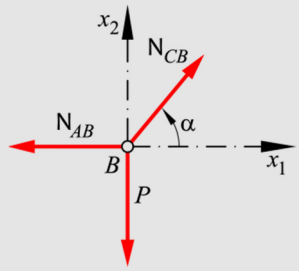
Ejemplo 4-5: Dimensionar las barras de la estructura que se muestra en la figura (obtener la sección transversal de cada barra). Una vez conocida las dimensiones de cada barra, se pide encontrar la inclinación de las mismas para conseguir el mínimo peso de la estructura. Suponer que el material puede admitir como máximo la tensión σ^{adm}.



Equilibrio nudo B

$$\begin{cases} \sum_n \left(F_{x_1}\right)_i = 0 = -\mathrm{N}_{AB} + \mathrm{N}_{CB}\cos\alpha \\ \sum_n \left(F_{x_2}\right)_i = 0 = -P + \mathrm{N}_{CB}\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

$$\mathrm{N}_{CB} = P/\mathrm{sen}\,\alpha \quad ; \quad \mathrm{N}_{AB} = P\,\mathrm{cotg}\,\alpha$$



a) Cálculo del estado tensional y áreas de las barras de la estructura,

$$\sigma^{\mathrm{adm}} = \frac{\mathrm{N}_{AB}}{A_{AB}} \quad \Rightarrow \quad A_{AB} = \frac{\mathrm{N}_{AB}}{\sigma^{\mathrm{adm}}} = \frac{P}{\sigma^{\mathrm{adm}}}\,\mathrm{cotg}\,\alpha$$

$$\sigma^{\mathrm{adm}} = \frac{\mathrm{N}_{CB}}{A_{CB}} \quad \Rightarrow \quad A_{CB} = \frac{\mathrm{N}_{CB}}{\sigma^{\mathrm{adm}}} = \frac{P}{\sigma^{\mathrm{adm}}}\,\frac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha}$$

b) Cálculo de la configuración estructural óptima en cuanto a su peso,

En este caso se debe optimizar la posición de las barras de la estructura para minimizar su peso. Teniendo en cuenta las secciones transversales previamente calculadas, se determina el ángulo entre las dos barras que hace mínimo el peso estructural. Es decir,

$$\gamma V = \gamma\left[\left(\ell_{AB}\,A_{AB}\right) + \left(\ell_{CB}\,A_{CB}\right)\right] \quad ; \quad \ell_{AB} = \ell \,, \quad \ell_{CB} = \frac{\ell}{2\cos\alpha}$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0 = \frac{d}{d\alpha}\left[\left(\ell \cdot \frac{P}{\sigma^{\mathrm{adm}}}\,\mathrm{cotg}\,\alpha\right) + \left(\frac{\ell}{2\cos\alpha} \cdot \frac{P}{\sigma^{\mathrm{adm}}}\,\frac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha}\right)\right] =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{P\,\ell}{\sigma^{\mathrm{adm}}}\left(\mathrm{cotg}\,\alpha + \frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}\right)\right] =$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0 = \frac{P\,\ell}{\sigma^{\mathrm{adm}}}\left(-1 - \mathrm{cotg}^2\,\alpha + \frac{1}{2\cos^2\alpha} - \frac{1}{2\,\mathrm{sen}^2\alpha}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \begin{cases} +\dfrac{\pi}{3} = +60^0 \\ -\dfrac{\pi}{3} = -60^0 \end{cases}$$

Ejemplo 4-6: El eje de sección variable de la figura está sometido a la acción de una carga axial P en su extremo libre. El módulo elástico del material de la barra es E y las secciones transversales cumplen la siguiente relación $A_3 = 2A_1 = 5A_2 = A$, mientras que el área A_4 varía linealmente. Calcular y representar gráficamente:

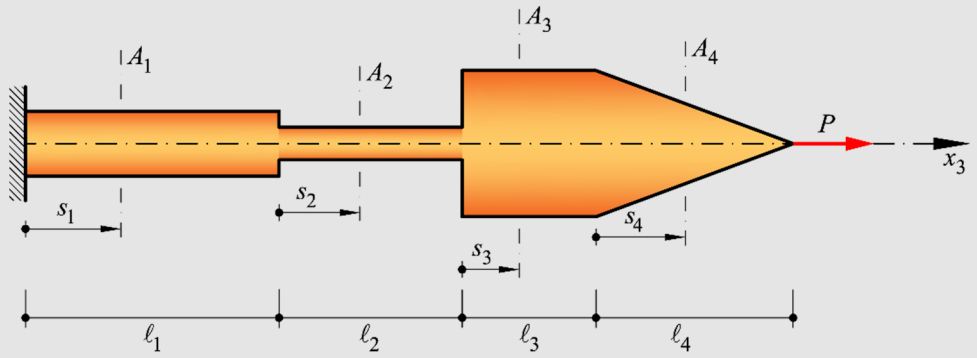
a) La función de carga

b) La función de tensión

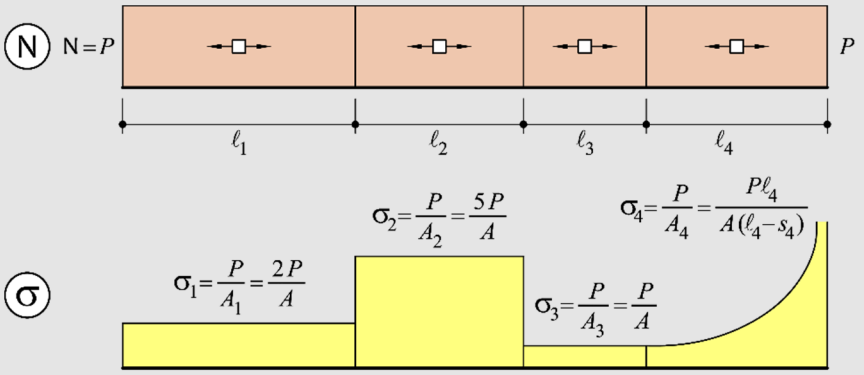
c) La función de deformación

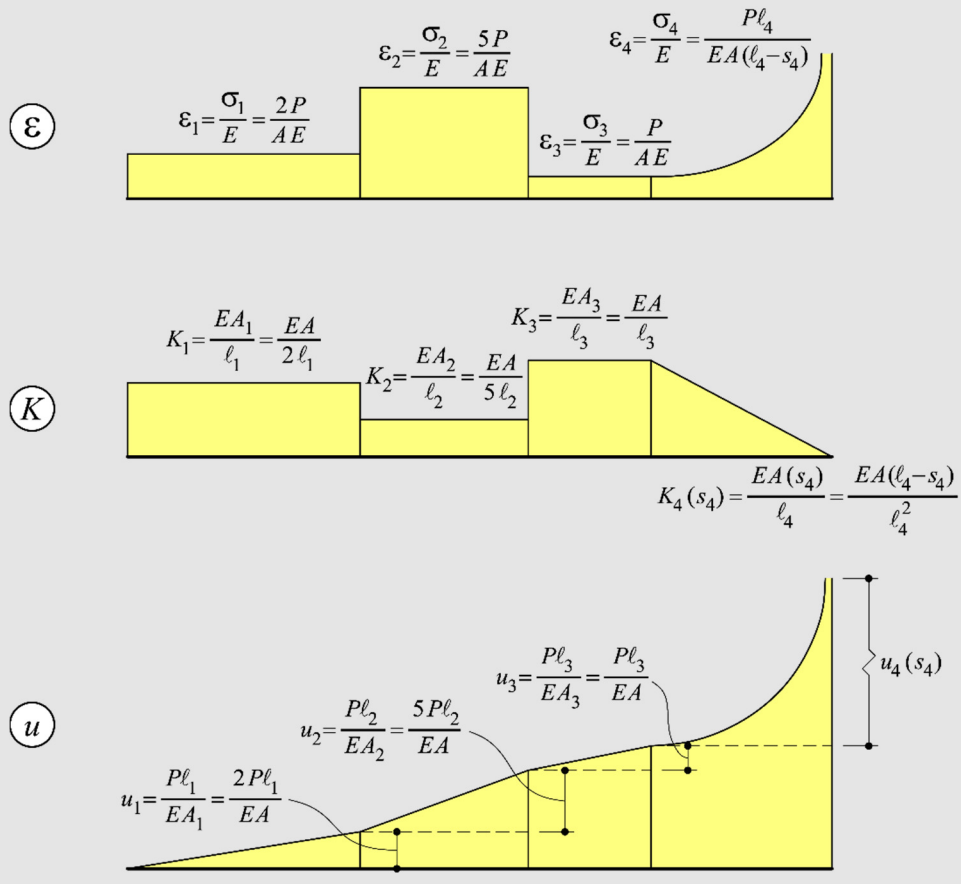
d) La función de rigidez

e) La función de desplazamiento



Definición del área $A_4(s_4) \overset{\text{def}}{=} A\left(1-\frac{s_4}{\ell_4}\right)$





Las funciones de desplazamiento $u_i\,(i=1,...,4)$ correspondientes a los tramos de longitudes $\ell_i\,(i=1,...,4)$, en los ejes locales $s_i\,(i=1,...,4)$ están dadas por

$$u_1=\int_0^{\ell_1}\frac{P}{EA_1}ds_1=\frac{2P\ell_1}{EA};\; u_2=\int_0^{\ell_2}\frac{P}{EA_2}ds_2=\frac{5P\ell_2}{EA};\; u_3=\int_0^{\ell_3}\frac{P}{EA_3}ds_3=\frac{P\ell_3}{EA}\quad \text{y}$$

$$u_4(s_4)=\int_0^{s_4}\frac{P}{EA_4}ds_4=\int_0^{s_4}\frac{P}{EA(1-s_4/\ell_4)}ds_4=-\frac{P\ell_4\ln(1-s_4/\ell_4)}{EA}$$

Mientras que en el eje global x_3 se pueden escribir como sigue

$$0\le x_3\le\ell_1\quad\rightarrow\quad u(x_3)=\frac{2Px_3}{EA}$$

$$\ell_1\le x_3\le(\ell_1+\ell_2)\quad\rightarrow\quad u(x_3)=\frac{2P\ell_1}{EA}+\frac{5P(x_3-\ell_1)}{EA}$$

$$(\ell_1+\ell_2)\le x_3\le(\ell_1+\ell_2+\ell_3)\quad\rightarrow\quad u(x_3)=\frac{P}{EA}(2\ell_1+5\ell_2)+\frac{P(x_3-\ell_1-\ell_2)}{EA}$$

$$(\ell_1+\ell_2+\ell_3)\le x_3\le(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)$$

$$\rightarrow\quad u(x_3)=\frac{P}{EA}(2\ell_1+5\ell_2+\ell_3)-\frac{P\ell_4}{EA}\ln\left(1-\frac{x_3}{\ell_4}+\frac{\ell_1+\ell_2+\ell_3}{\ell_4}\right)$$

Ejemplo 4-7: La barra de acero de la figura ($E=200GPa$, $A=250mm^2$) está sometida a la acción de las cargas P_1, $P_2=15kN$ y $P_3=9kN$. Determinar:

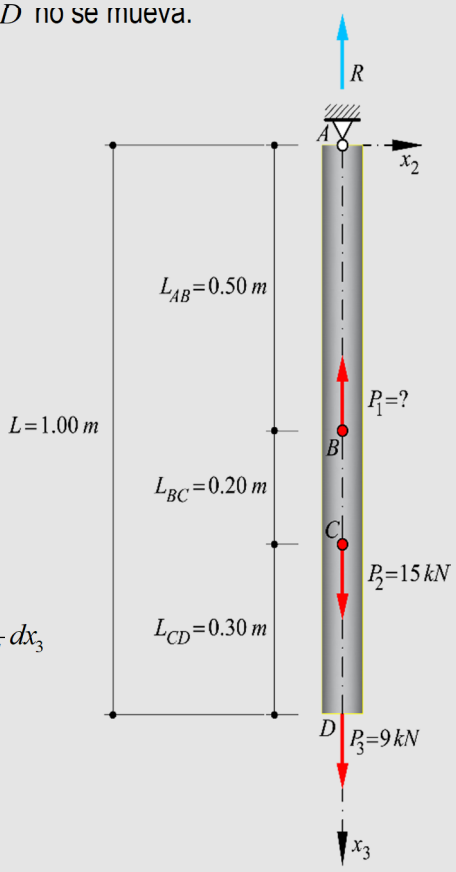
a) La fuerza P_1 necesaria para que el extremo D no se mueva.

b) La ley de esfuerzos axiles.

c) La ley de tensiones.

d) La ley de deformaciones.

e) La ley de desplazamientos.



a) Determinación de la fuerza P_1

- Ecuación de equilibrio

$$\sum F_V=0\Rightarrow R+P_1-P_2-P_3=0$$

- Ecuación de compatibilidad

$$u_D=0=\int_0^L\varepsilon(x_3)\,dx_3=\int_0^L\varepsilon(x_3)\,dx_3=\int_0^L\frac{N(x_3)}{AE}\,dx_3$$

$$=\int_0^{L_{AB}}\frac{N_{AB}}{AE}\,dx_3+\int_{L_{AB}}^{L_{AB}+L_{BC}}\frac{N_{BC}}{AE}\,dx_3+\int_{L_{AB}+L_{BC}}^{L}\frac{N_{CD}}{AE}\,dx_3$$

$$=\frac{N_{AB}L_{AB}}{AE}+\frac{N_{BC}L_{BC}}{AE}+\frac{N_{CD}L_{CD}}{AE}$$

$$=u_B^{AB}+u_C^{BC}+u_D^{CD}$$

Siendo

$$u_B^{AB}=\frac{N_{AB}L_{AB}}{EA}=\frac{\overbrace{(P_2+P_3-P_1)}^{R}L_{AB}}{EA}=\frac{R\cdot0.5}{5\cdot10^4}=R\cdot10^{-5}\,\frac{m}{kN}$$

$$u_C^{BC} = \frac{N_{BC} L_{BC}}{EA} = \frac{(P_3 + P_2) \cdot L_{BC}}{EA} = \frac{24 \cdot 0.2}{5 \cdot 10^4} = 9.6 \cdot 10^{-5} m$$

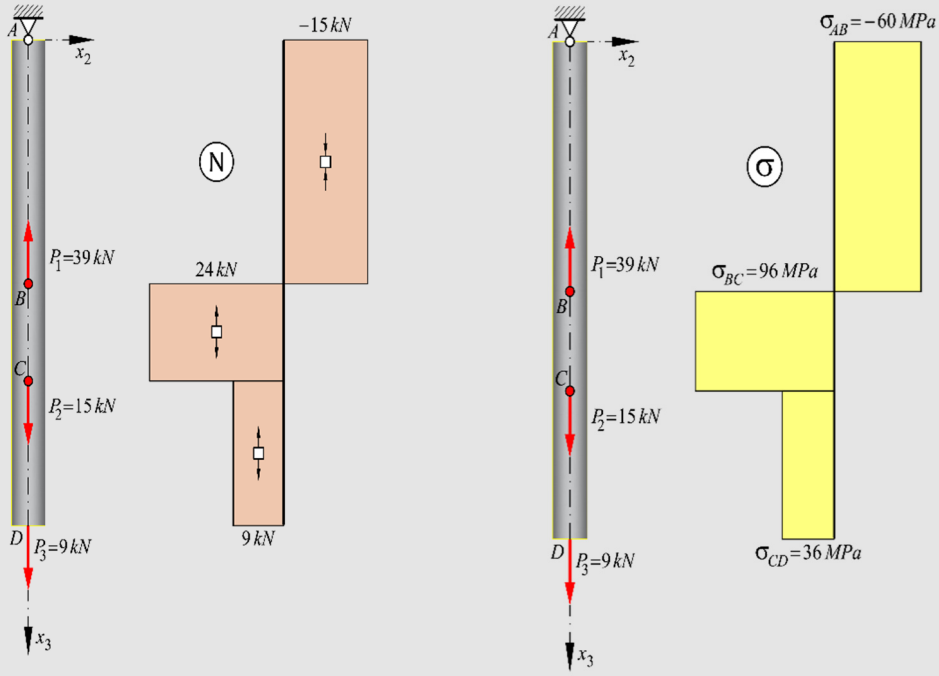
$$u_D^{CD} = \frac{N_{CD} L_{CD}}{EA} = \frac{P_3 L_{CD}}{EA} = \frac{9 \cdot 0.3}{5 \cdot 10^4} = 5.4 \cdot 10^{-5} m$$

Resultando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} R + P_1 - 15 - 9 = 0 \\ R \cdot 10^{-5} + 9.6 \cdot 10^{-5} + 5.4 \cdot 10^{-5} = 0 \end{cases} \rightarrow \quad R = -15kN \text{ (sentido opuesto)}$$

$$\text{y} \quad \boxed{P_1 = 39kN}$$

b) Representación de la ley de esfuerzos axiles y c) Representación de las tensiones a lo largo de la barra



Las tensiones en cada tramo de la barra se obtienen dividiendo el esfuerzo normal correspondiente en el área de la barra. Es decir,

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A} = -\frac{15kN}{2.5\cdot 10^{-4} m^2} = -60MPa$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{24kN}{2.5\cdot 10^{-4} m^2} = 96MPa$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A} = \frac{9kN}{2.5\cdot 10^{-4} m^2} = 36MPa$$

d) Representación de las deformaciones a lo largo de la barra

Las deformaciones en cada tramo de la barra se obtienen dividiendo la tensión normal correspondiente en el módulo de elasticidad longitudinal. Es decir:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E} = -\frac{0.06GPa}{200\,GPa} = -3\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\sigma_{BC}}{E} = \frac{0.096GPa}{200\,GPa} = 4.8\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{CD} = \frac{\sigma_{CD}}{E} = \frac{0.036GPa}{200GPa} = 1.8\cdot 10^{-4}$$

e) Representación de la ley de desplazamientos

La rigidez axil de la barra, en este caso, es constante en toda la longitud, y está dada por:

$$EA = 5\cdot 10^4 kN$$

Por otra parte, en cada tramo, el esfuerzo normal es también constante en cada tramo, por lo que se verifica,

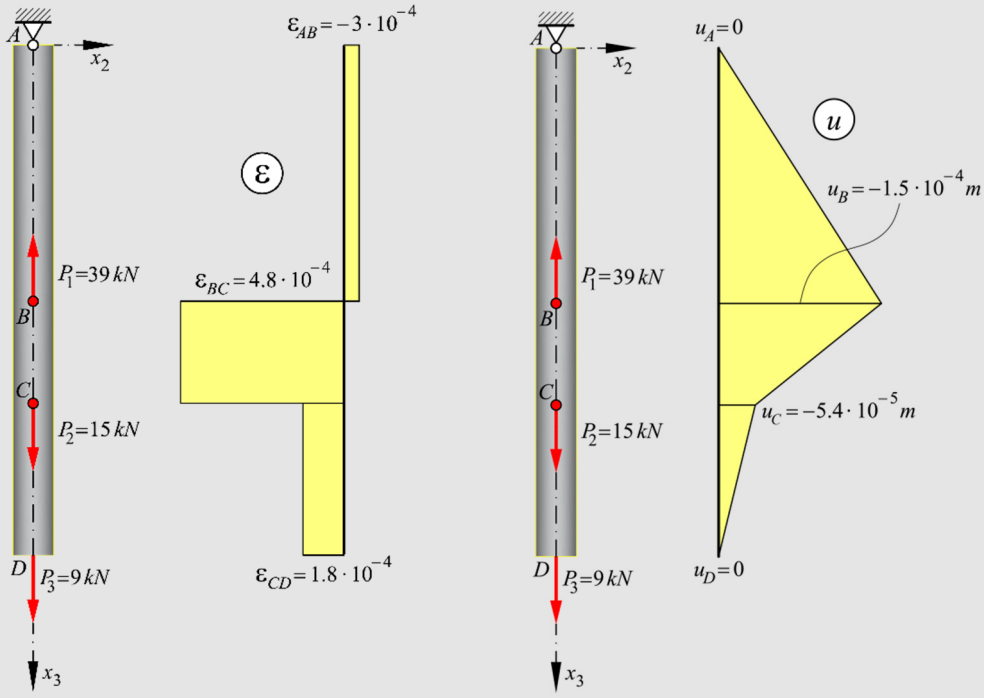
$$u = \int_0^s \frac{N}{EA} dx_3 = \frac{N}{EA}\int_0^s dx_3 = \frac{N}{EA} s$$

$$0 \le s \le L_{AB} \rightarrow u_{AB} = \frac{-15}{5 \cdot 10^4} s = -3 \cdot 10^{-4} s$$

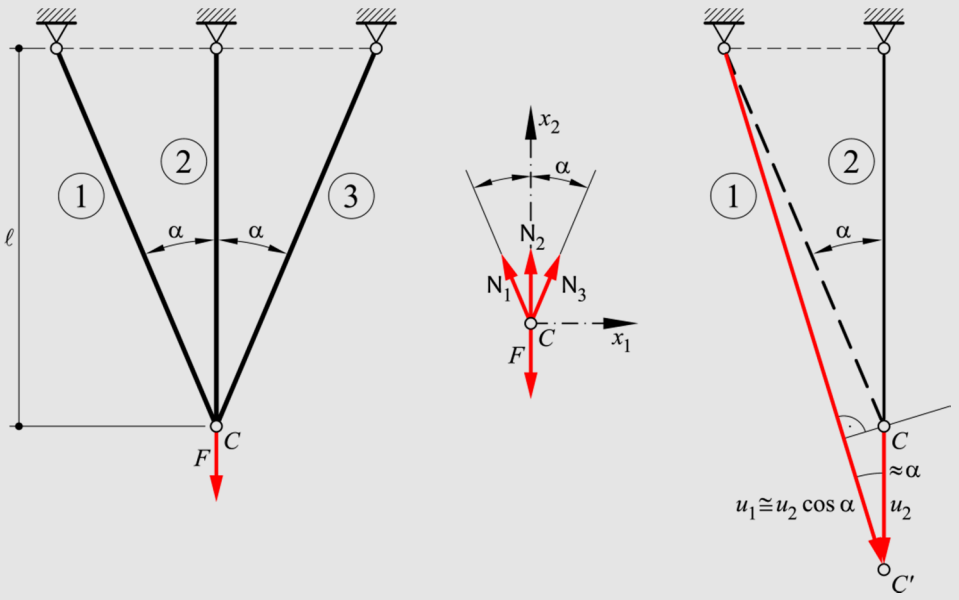
$$\rightarrow \begin{cases} s = 0, u_A = 0 \\ s = L_{AB}, u_B = -1.5 \cdot 10^{-4} m \end{cases}$$

$$L_{AB} \le s \le L_{AB} + L_{BC} \rightarrow u_{BC} = u_B + \frac{24}{5 \cdot 10^4}\left(s - L_{AB}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} s = L_{AB}, u_B = -1.5 \cdot 10^{-4} m \\ s = L_{AB} + L_{BC}, u_C = \left(-1.5 \cdot 10^{-4} + 9.6 \cdot 10^{-5}\right) m \\ \qquad\qquad u_C = -5.4 \cdot 10^{-5} m \end{cases}$$



Ejemplo 4-8: Obtener el esfuerzo axil en cada una de las barras de la estructura articulada de la figura. Considerar que los materiales y las secciones transversales de las barras son iguales entre sí. Resolver primeramente siguiendo el ***método de compatibilidad*** y luego mediante el ***método de equilibrio.***



Equilibrio de fuerzas en el Nudo C

$$\begin{cases} \sum F_{x_1} = 0 = -N_1 \operatorname{sen}\alpha + N_3 \operatorname{sen}\alpha & \Rightarrow \quad N_1 = N_3 \\ \sum F_{x_2} = 0 = -F + 2N_1 \cos\alpha + N_2 & \Rightarrow \quad N_2 = F - 2\,N_1 \cos\alpha \end{cases}$$

Como puede observarse, el sistema anterior no tiene solución única porque hay tres incógnitas (N_1, N_2, N_3) y sólo dos ecuaciones. Se trata entonces de una estructura con un grado de indeterminación estática (uno de los esfuerzos axiles N_i). Por lo tanto, es necesario resolver el problema mediante un método que permita formular una ecuación adicional para completar el sistema de ecuaciones anterior.

a) Método de compatibilidad de desplazamientos

En este procedimiento de cálculo es necesario formular una ecuación adicional a las anteriores ecuaciones de equilibrio. Esta ecuación se basa en la elasticidad de las barras, de manera de garantizar la compatibilidad de los movimientos del punto C (ver figura del problema). Como consecuencia, resulta una ecuación cuyas incógnitas son los esfuerzos axiles N_i.

Ecuación de compatibilidad adicional : $u_1 = u_2 \cos\alpha$

$$\underbrace{\frac{N_1}{E\,A}\left(\frac{\ell}{\cos\alpha}\right)}_{u_1} = \underbrace{\left[\frac{N_2}{E\,A}\ell\right]}_{u_2}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_2\cos^2\alpha$$

Tal que sustituida en el sistema de ecuaciones anterior permite obtener los esfuerzos axiles buscados,

$$\begin{cases} N_2 = \dfrac{F}{2\cos^3\alpha + 1} \\ N_1 = N_3 = \dfrac{F\cos^2\alpha}{2\cos^3\alpha + 1} \end{cases}$$

b) Método de equilibrio de fuerzas

Como alternativa al método de compatibilidad, se utiliza el método del equilibrio, que permite formular una ecuación adicional basada en la elasticidad de las barras que completa el equilibrio de fuerzas en C. Como consecuencia resulta una ecuación cuyas incógnitas son los movimientos u_i de la barra en el nudo C.

En esta metodología no tiene importancia el número de incógnitas estáticas sino, por el contrario, importa el número de incógnitas cinemáticas. Particularmente, esta estructura tiene como incógnita cinemática el movimiento del punto C, por lo tanto se plantea una ecuación de equilibrio en función del movimiento de dicho punto.

$$\sum F_{x_2} = 0 = -F + 2N_1\cos\alpha + N_2$$

$$0 = -F + 2\left(AE\frac{u_1}{\ell_1}\right)\cos\alpha + \left(AE\frac{u_2}{\ell_2}\right)$$

Sabiendo que $u_1 = u_2\cos\alpha$ y que $\ell_1 \cdot \cos\alpha = \ell_2 = \ell$ puede escribirse, a partir de la ecuación anterior, el desplazamiento vertical del punto C como

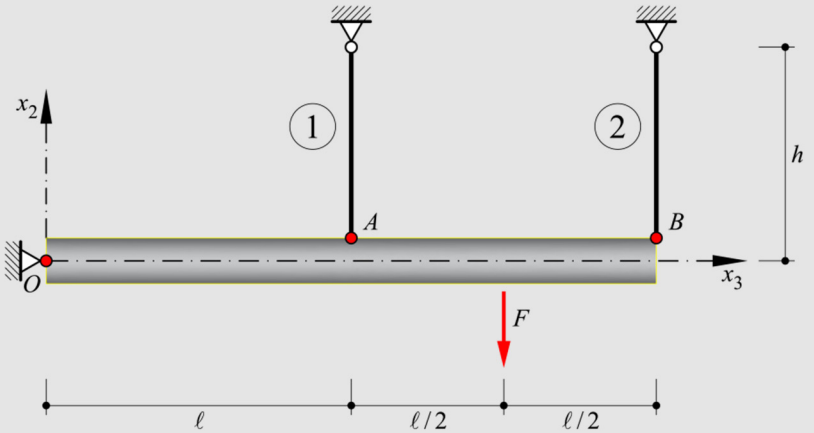
$$u_2 = \frac{F\,\ell_2}{AE(2\cos^3\alpha + 1)}$$

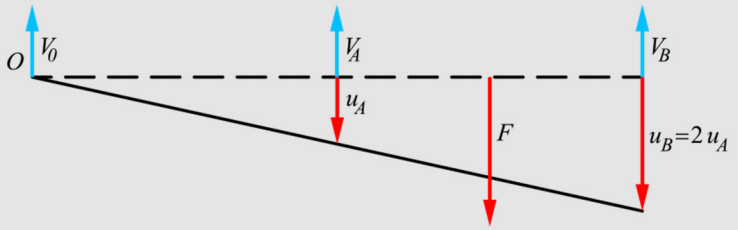
Y de esta última expresión más la condición de equilibrio de los esfuerzos axiles en cada una de las barras, surgen los esfuerzos axiles buscados,

$$\begin{cases} N_2 = \sigma_2 A = E \overbrace{\frac{u_2}{\ell_2}}^{\varepsilon_2} A = \dfrac{F}{2\cos^3\alpha + 1} \\ N_1 = N_3 = \sigma_1 A = E \underbrace{\frac{u_1}{\ell_1}}_{\varepsilon_1} A = \dfrac{F\cos^2\alpha}{2\cos^3\alpha + 1} \end{cases}$$

Ejemplo 4-9: Obtener el esfuerzo axil en cada uno de los tirantes que sostiene la barra OB de la figura. Considerar que los materiales y las secciones transversales de los tirantes son iguales entre sí y que la barra OB es indeformable (rígida).

Equilibrio de la barra rígida





$$\begin{cases} \sum F_{x_2} = 0 = -F + V_O + V_A + V_B \\ \sum M_O = 0 = -V_A\,\ell + \dfrac{3}{2}F\ell - V_B\,2\ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{3}{2}F - 2V_B \quad ; \quad V_O = -\frac{F}{2} + V_B$$

Como se puede observar, el sistema de ecuaciones anterior no tiene solución única porque hay tres incógnitas y sólo dos ecuaciones. Es decir, se trata de una estructura con un grado de indeterminación estática. Por lo tanto, es necesario formular la siguiente ecuación de compatibilidad adicional que se puede deducir a partir de la figura anterior,

$$\frac{u_A}{\ell} = \frac{u_B}{2\ell} \quad \Rightarrow \overbrace{u_A}^{\delta_1} = \overbrace{\frac{u_B}{2}}^{\delta_2}$$

$$\frac{V_A h}{AE} = \frac{1}{2}\frac{V_B h}{AE} \quad \Rightarrow \quad V_B = 2V_A$$

Sustituyendo ésta en la solución de las ecuaciones de equilibrio, se obtienen las siguientes reacciones de vínculo,

$$V_A = \frac{3}{10}F \quad ; \quad V_B = \frac{3}{5}F \quad ; \quad V_O = \frac{1}{10}F$$

Por lo tanto, los esfuerzos axiles en los tirantes son los siguientes,

$$\mathrm{N}_1 = V_A = \frac{3}{10}F \quad ; \quad \mathrm{N}_2 = V_B = \frac{3}{5}F$$

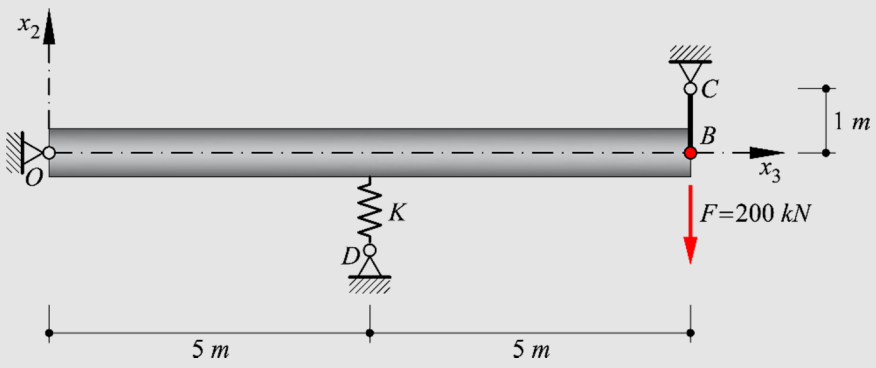
Ejemplo 4-10: La barra OB de la figura es infinitamente rígida y soporta una carga vertical $F = 200kN$ en el punto B. La barra BC es de un material cuyo módulo elástico es $E = 200GPa$ y su sección transversal es $A = 2 \cdot 10^{-4} m^2$. Obtener:

a) La magnitud de la rigidez K del resorte o muelle para que la reacción vertical en D sea de igual magnitud que el esfuerzo axil de la barra BC.

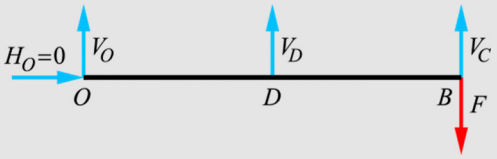
b) El esfuerzo axil de la barra BC y su estado tensional.

c) La reacción en O y la fuerza que hace el resorte en D.

d) La magnitud del desplazamiento vertical en el punto B.



● **Ecuaciones de equilibrio**



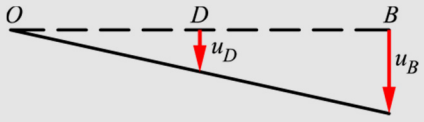
$$\begin{cases} \sum F_V = V_O + V_D + V_C - 200 = 0 \\ \sum M_O = -V_D \cdot 5 - V_C \cdot 10 + 200 \cdot 10 = 0 \end{cases}$$

de donde resulta,

$$V_D = -2 \cdot V_C + 400; \quad V_O = V_C - 200$$

● **Ecuación de compatibilidad**

Por lo requerido en a) es $V_D = V_C$



$$\begin{cases} \frac{u_D}{5} = \frac{u_B}{10} \end{cases} \rightarrow \quad u_D = \frac{u_B}{2}$$

$$u_B = \delta_{BC} = \frac{N_{BC} \ell_{BC}}{EA} \rightarrow u_D = \frac{V_C \ell_{BC}}{2EA}$$

a) Rigidez K

El desplazamiento del punto D de la barra coincide con el acortamiento del resorte, por lo que es

$$u_D = \frac{V_D}{K}$$

Igualando esta expresión con la ecuación de compatibilidad obtenida se tiene,

$$\frac{V_D}{K} = \frac{V_C \ell_{BC}}{2EA} \quad \rightarrow \quad V_D = \frac{K V_C \ell_{BC}}{2EA}$$ y considerando que es $V_D = V_C$, resulta

$$K = \frac{2EA}{\ell_{BC}} \quad \rightarrow \quad K = \frac{2 \cdot 200GPa \cdot 2 \cdot 10^{-4} m^2}{1m} = 8 \cdot 10^{-2} GN \cdot m^{-1}$$

b) Esfuerzo axil de la barra BC y estado tensional. c) Reacciones y fuerza en el resorte

A partir de las ecuaciones de equilibrio y sabiendo que $V_D = V_C$ se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \sum F_V = V_O + 2V_D - 200 = 0 \\ \sum M_O = -V_D \cdot 5 - V_D \cdot 10 + 200 \cdot 10 = 0 \end{cases}$$

De la segunda de estas ecuaciones resulta

$$V_D = V_C = 133.33\,kN$$

Reemplazando esto en la primera ecuación de equilibrio, se tiene

$$V_O = -2V_C + 200 = -66.667\,kN \text{ (sentido contrario al supuesto)}$$

El esfuerzo axil en la barra BC y la tensión en cada punto de su sección transversal están dados respectivamente por

$$\mathrm{N}_{BC} = V_C = 133.33\,kN; \qquad \sigma_{BC} = \frac{\mathrm{N}_{BC}}{A} = \frac{133.33\,kN}{2 \cdot 10^{-4} m^2} = 666.65 \frac{kN}{m^2} = 0.667\,MPa$$

d) Desplazamiento vertical en el punto B.

El desplazamiento del punto B es igual al estiramiento de la barra BC,

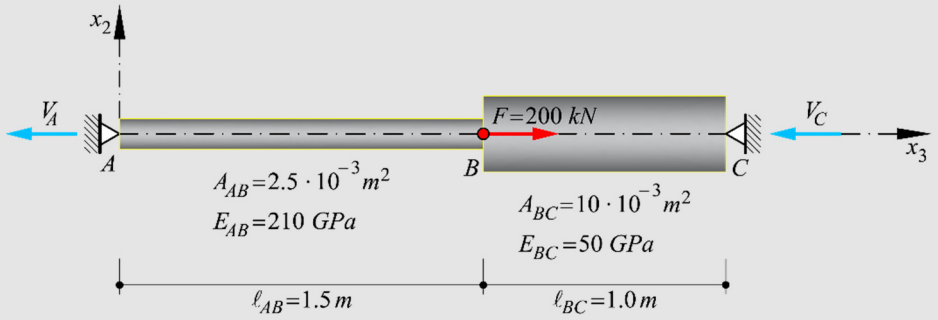
$$u_B = \delta_{BC} = \frac{\mathrm{N}_{BC} \ell_{BC}}{EA} = \frac{133.33kN \cdot 1m}{200 \cdot 10^6 kPa \cdot 2 \cdot 10^{-4} m^2} = 0.00333\,m = 3.33\,mm$$

Ejemplo 4-11: En la barra prismática de la figura, se aplica una carga horizontal $F = 200kN$ en el punto B. Obtener:

a) El estado tensional a lo largo de la barra.

b) La ley de esfuerzos axiles a lo largo de la barra.

c) La función desplazamiento a lo largo de la barra.



Para calcular las reacciones en los extremos de la barra es necesario imponer las siguientes condiciones

- Equilibrio:

$$\sum F_{x_3} = -V_A - V_C + F = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = F - V_C \qquad \text{(a)}$$

- Compatibilidad:

$$u_B\big|_A^B = u_B\big|_B^C \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{AB}\,\ell_{AB} = \varepsilon_{BC}\,\ell_{BC}$$

$$\frac{\mathrm{N}_{AB}\,\ell_{AB}}{A_{AB}E_{AB}} = -\frac{\mathrm{N}_{BC}\,\ell_{BC}}{A_{BC}E_{BC}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{N}_{BC} = -\mathrm{N}_{AB}\left(\frac{A_{BC}E_{BC}}{A_{AB}E_{AB}}\right)\frac{\ell_{AB}}{\ell_{BC}}$$

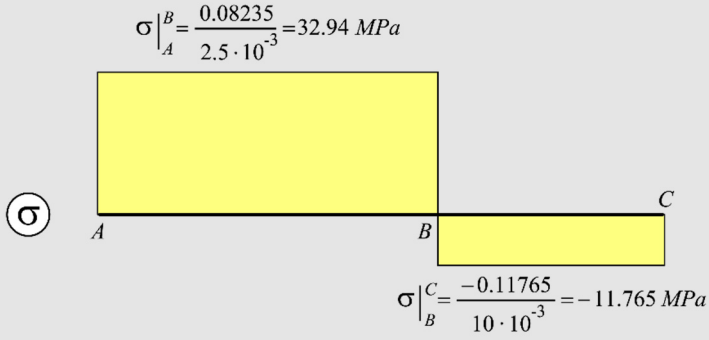
Sustituyendo en ésta última $\mathrm{N}_{BC} = -V_C$ y $\mathrm{N}_{AB} = V_A$

$$V_C = V_A\left(\frac{0.01\cdot 50}{2.5\cdot10^{-3}\cdot 210}\right)\frac{1.5}{1.0} \quad \Rightarrow \quad V_C = 1.4285\cdot V_A \qquad \text{(b)}$$

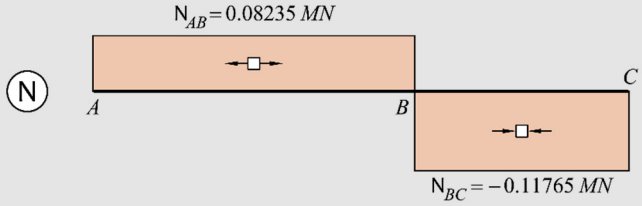
Sustituyendo (b) en la ecuación de equilibrio (a), resulta,

$$V_A = \mathrm{N}_{AB} = 0.08235\,MN \quad ; \quad V_C = -\mathrm{N}_{BC} = 0.11765\,MN$$

a) Estado tensional a lo largo de la barra



b) Ley de esfuerzos axiles a lo largo de toda la barra

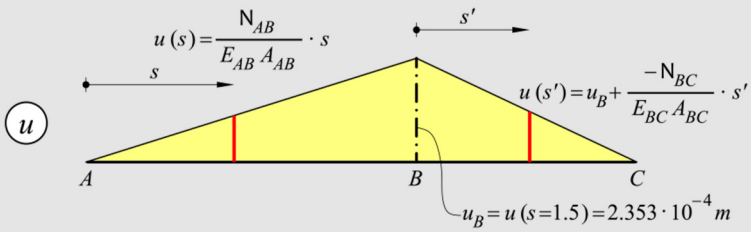


c) Función desplazamiento a lo largo de toda la barra

$$u(s)\big|_A^B = \frac{N_{AB}}{E_{AB}A_{AB}}s = \frac{0.08235}{210000\cdot 2.5\cdot 10^{-3}}s \qquad \begin{cases} u_A\big|_A^B = u(s=0)\big|_A^B = 0 \\ u_B\big|_A^B = u(s=1.5)\big|_A^B = 2.353\cdot 10^{-4}\,m = u_B \end{cases}$$

$$u(s')\big|_B^C = u_B\big|_A^B + \frac{N_{BC}}{E_{BC}A_{BC}}s' = 2.353\cdot 10^{-4} + \frac{(-0.11765)}{50000\cdot 10\cdot 10^{-3}}s'$$

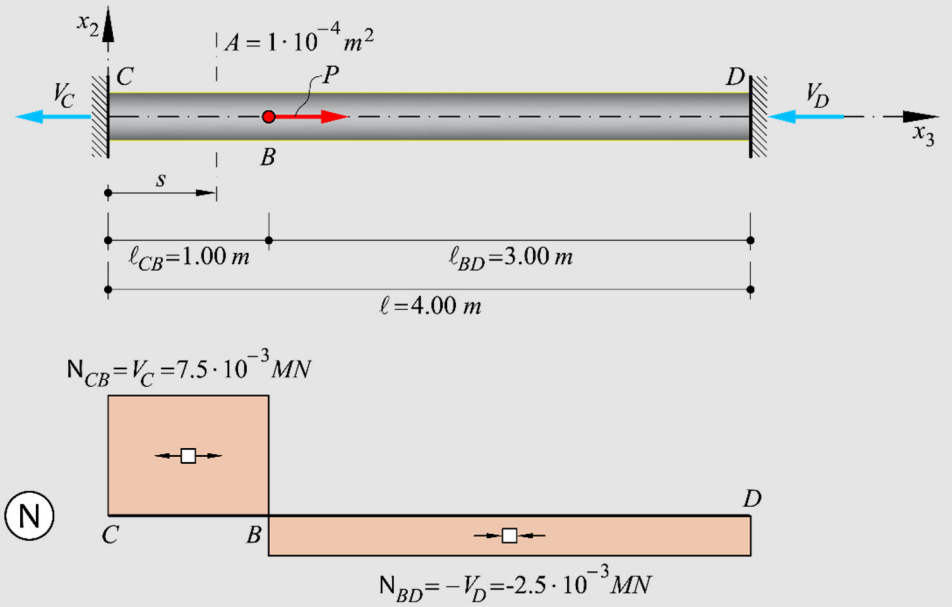
$$= 2.353\cdot 10^{-4} - 2.353\cdot 10^{-4}s' \qquad \begin{cases} u_B\big|_B^C = u(s'=0)\big|_A^B = 2.353\cdot 10^{-4}\,m \\ u_C\big|_B^C = u(s'=1)\big|_A^B = 0 \end{cases}$$



Ejemplo 4-12: Una barra de acero de longitud $\ell = 4\,m$, sección transversal $A = 1\cdot 10^{-4}\,m^2$ y módulo de elasticidad $E_{CB} = E_{BD} = 2.1\cdot 10^{5}\,MPa$, tiene sus extremos fijos y soporta una fuerza axial $P = 0.01 MN$ en el punto *B*, tal como muestra la figura. Determinar:

a) Las reacciones de apoyo y el esfuerzo axil a lo largo de la barra.

b) El movimiento del punto *B*.



a) Reacciones de apoyo y esfuerzo axil en la barra

Ecuación de equilibrio de fuerzas en x_3,

$$\sum F_{x_3} = 0 = P - V_C - V_D \qquad \text{(a)}$$

Puesto que hay una sola ecuación con dos incógnitas, es necesario formular una ecuación de compatibilidad de movimientos en el punto *B*. Esta es,

$$u_B\big|_C^B = u_B\big|_B^D \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{CB}\,\ell_{CB} = \varepsilon_{BD}\,\ell_{BD} \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{N_{CB}\,\ell_{CB}}{A_{CB}E_{CB}} = \frac{-N_{BD}\,\ell_{BD}}{A_{BD}E_{BD}} \quad \Rightarrow \quad N_{CB} = -N_{BD}\left(\frac{A_{CB}E_{CB}}{A_{BD}E_{BD}}\right)\frac{\ell_{BD}}{\ell_{CB}}$$

Teniendo en cuenta que $\mathrm{N}_{CB} = V_C$ y $\mathrm{N}_{BD} = -V_D$

$V_C = V_D \left(\frac{A_{CB} E_{CB}}{A_{BD} E_{BD}} \right) \frac{\ell_{BD}}{\ell_{CB}}$, sustituyendo en (a), $V_D = P \cdot \left[1 + \left(\frac{A_{CB} E_{CB}}{A_{BD} E_{BD}} \right) \frac{\ell_{BD}}{\ell_{CB}} \right]^{-1}$

Sustituyendo las magnitudes en la expresión anterior resulta,

$$\left. \begin{array}{l} V_D = 2.5 \cdot 10^{-3} MN \\ V_C = 7.5 \cdot 10^{-3} MN \end{array} \right\} \Rightarrow V_C = 3 \cdot V_D$$

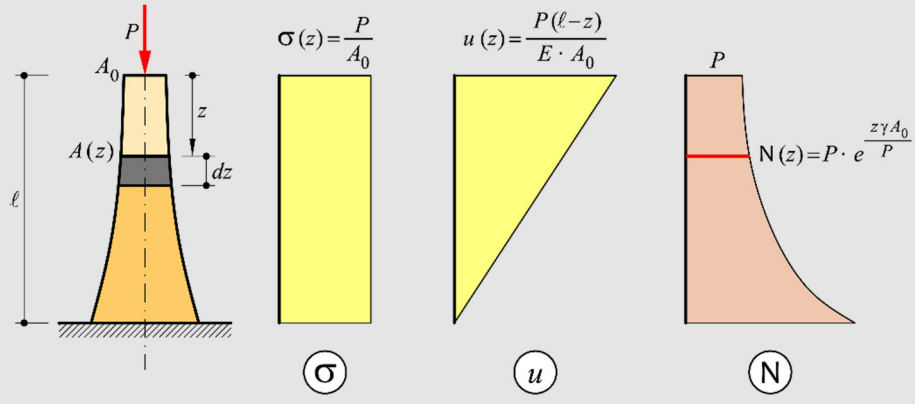
Luego, los esfuerzos normales en las barras son

$\mathrm{N}_{CB} = V_C = 7.5 \cdot 10^{-3} MN$ (Tracción) y $\mathrm{N}_{BD} = -V_D = -2.5 \cdot 10^{-3} MN$ (Compresión)

b) Movimiento del punto *B*

$$u_B\big|_B^C = \frac{\mathrm{N}_{CB} \ell_{CB}}{A_{CB} E_{CB}} = \frac{\overbrace{7.5 \cdot 10^{-3}}^{\mathrm{N}_{CB} = V_C} \cdot 1.0}{1.0 \cdot 10^{-4} \cdot 2.1 \cdot 10^{5}} = 3.57 \cdot 10^{-4} m$$

Ejemplo 4-13: La columna de la figura soporta su propio peso, más una fuerza P en su extremo superior. Determinar la ley de variación de la sección transversal $A(z)$, para que la tensión sea constante a lo largo del eje vertical de la barra. Considerar que el peso por unidad de volumen (peso específico) es $\gamma = \rho \cdot g$, donde ρ es la densidad y g la aceleración de la gravedad.



a) Equilibrio de fuerzas

$$\mathrm{N}(z) = P + \int_0^z \gamma \cdot A(s) \cdot ds$$

b) Condición de tensión constante

$$\sigma(z) = \frac{\mathrm{N}(z)}{A(z)} = \frac{P}{A(z)} + \frac{1}{A(z)} \int_0^z \gamma \cdot A(s) \cdot ds = \frac{P}{A_0} = cte$$

$$\text{resultando :} \quad P + \int_0^z \gamma \cdot A(s) \cdot ds = \frac{P \cdot A(z)}{A_0}$$

Para resolver esta ecuación y obtener la función $A(z)$, se deriva ambos miembros respecto de z y luego se resuelve la ecuación diferencial,

$$\gamma \cdot A(z) = \frac{P}{A_0} \frac{dA(z)}{dz} \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{P}{\gamma \cdot A_0} \frac{dA(z)}{A(z)}$$

$$z = \int dz = \int \frac{P}{\gamma \cdot A_0} \frac{dA(z)}{A(z)} = \frac{P}{\gamma \cdot A_0} \left(\ln A(z) + \ln C \right) \Rightarrow e^{\frac{z \gamma A_0}{P}} = \frac{A(z)}{C} \qquad \text{(a)}$$

$$\boxed{A(z) = C \cdot e^{\frac{z \gamma A_0}{P}}}$$

La constante de integración resulta de imponer la siguiente condición de contorno,

$$A(z) \equiv A_0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad C = A_0 \qquad \text{(b)}$$

Sustituyendo (b) en (a), resulta la ecuación que establece la variación de la sección transversal de la barra,

$$\boxed{A(z) = A_0 \cdot e^{\frac{z \gamma A_0}{P}}}$$

Conocida la función $A(z)$, se obtiene a continuación:

c) Esfuerzo axial a lo largo del eje de la barra

$$\mathrm{N}(z) = P + \int_0^z \gamma \cdot A(s) \cdot ds = P + P \left(e^{\frac{z \gamma A_0}{P}} - 1 \right) = P \cdot e^{\frac{z \gamma A_0}{P}}$$

d) Tensión a lo largo del eje de la barra. Verificación del estado de tensión constante que se ha impuesto.

$$\sigma(z) = \frac{P}{A(z)} + \frac{1}{A(z)} \int_0^z \gamma \cdot A(s) \cdot ds = \frac{P}{A(z)} + \frac{P}{A(z)} \left(e^{\frac{z \gamma A_0}{P}} - 1 \right) = \frac{P}{A_0} = \sigma_0$$

e) Desplazamiento a lo largo del eje de la barra

$$u(z) = \int_z^\ell \frac{\mathrm{N}(s)}{E \cdot A(s)} \cdot ds = \int_z^\ell \frac{P + \int_0^s \gamma \cdot A(x) \cdot dx}{E \cdot A(s)} \cdot ds = \frac{P \cdot (\ell - z)}{E \cdot A_0}$$

4.2 Esfuerzo axil en cilindros de paredes delgadas sometidos a presión interior

A continuación se presenta el comportamiento mecánico de un cilindro de paredes delgadas (Figura 4.4) sometido a una presión p uniforme en su interior. Si el espesor e de la pared del cilindro es pequeño en relación a su radio de curvatura (relación menor que 1 a 10), la mencionada pared no tendrá resistencia a flexión comportándose como una *membrana*, en la que los esfuerzos no tienen componente radial y resultan distribuidos de manera uniforme en el espesor. Bajo las mencionadas condiciones, debido a la acción de la presión interna, se produce una dilatación del perímetro medio de la circunferencia directriz y en las paredes del cilindro se producen tensiones normales perpendiculares al radio, que se denominan tensiones circunferenciales y que se designarán como σ_c. La integración de las tensiones σ_c en el espesor conduce a obtener el esfuerzo axial N actuante, tal como se muestra en la Figura 4.4.

Entre los distintos caminos para obtener la tensión axial de trabajo en función de la presión y el incremento del radio medio, se utiliza aquí la condición de equilibrio que garantiza la estabilidad entre los dos casquetes del cilindro. Esto es:

$$0 = -2\mathrm{N} + 2\int_0^{\pi/2} p\,(\operatorname{sen}\alpha)\,ds = -2\mathrm{N} + 2\int_0^{\pi/2} p\cdot r\,(\operatorname{sen}\alpha)\,d\alpha =$$
$$0 = -2\mathrm{N} + 2\,p\cdot r\cdot(-\cos\alpha)\Big|_0^{\pi/2} = -2\mathrm{N} + 2\,p\cdot r \quad \Rightarrow \quad \mathrm{N} = p\cdot r \tag{4.13}$$

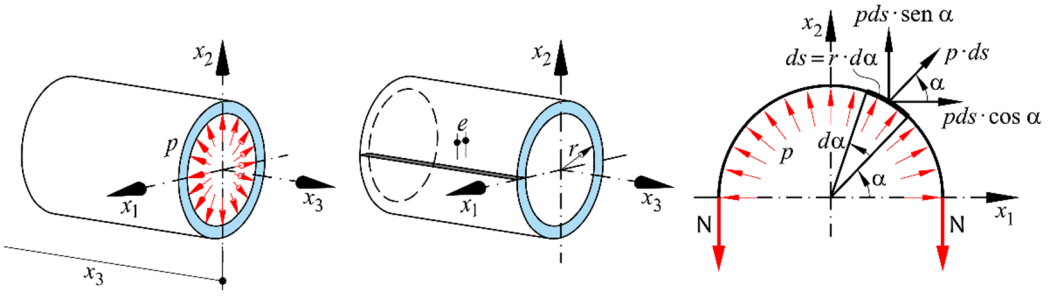


Figura 4.4 – Cilindro de paredes delgadas sometido a una presión interior y representación esquemática del estado de equilibrio.

A partir de esta última expresión se obtiene el estado de tensión, deformación y desplazamiento anular, a lo largo del perímetro, que sufre el tubo. Para determinar la tensión circunferencial σ_c se toma como referencia una longitud unitaria del tubo. Así, resulta

$$\sigma_c = \frac{\mathrm{N}}{A} = \frac{p\cdot r}{e\cdot 1} = \frac{p\cdot r}{e} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma_c}{E} = \frac{p\cdot r}{E\cdot e} \tag{4.14}$$

Mientras que el perímetro incrementará su longitud en

$$u_c = \int_0^{\ell_C} \varepsilon\cdot ds = \int_0^{2\pi} \frac{p\cdot r}{E\cdot e}\cdot \overbrace{r\cdot d\alpha}^{ds} = 2\pi\frac{p\cdot r^2}{E\cdot e} \tag{4.15}$$

Con esta última ecuación es posible obtener el nuevo perímetro del tubo ℓ_c, que resulta de añadir al perímetro original ℓ_0 el incremento dado por la ecuación. (4.15), esto es,

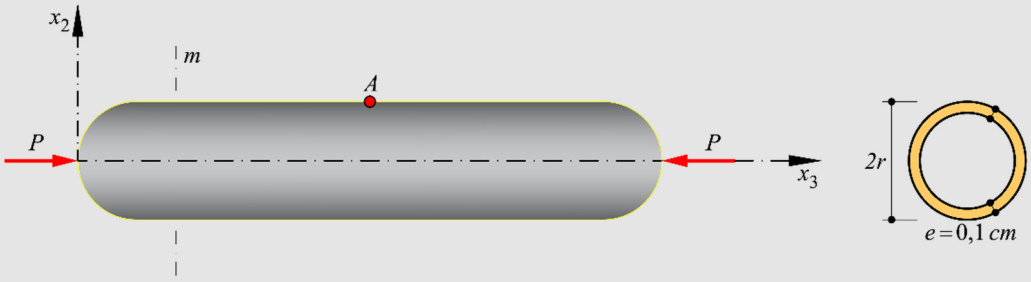
$$\ell_c = \ell_0 + u_c = \overbrace{2\pi r}^{\ell_0} + \overbrace{2\pi \frac{p \cdot r^2}{E \cdot e}}^{u_c} \Rightarrow \quad \ell_c = 2\pi\left(r + \frac{p \cdot r^2}{E \cdot e} \right) = 2\pi\left(r + \Delta r \right) \tag{4.16}$$

$$\Delta r = \frac{p \cdot r^2}{E \cdot e}$$

Ejemplo 4-14: El tubo de pared delgada de la figura tiene un radio $d = 2 \cdot r = 5cm$, se encuentra cerrado en sus extremos y está sometido a una presión interna $p = 0.5MPa$. Determinar:

a) El tensor de tensiones en el punto A.

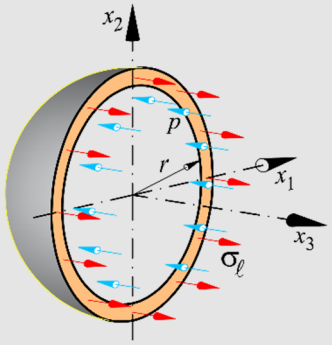
b) La magnitud de la carga axial P para que el punto A esté sometido a un estado tensional de corte puro.



Cálculo de la tensión longitudinal

Debido a que el recipiente se encuentra cerrado en los extremos se producirá, además de la tensión circunferencial σ_c dada por la ecuación (4.14), una tensión normal a lo largo del eje del tubo. La presión sobre las tapas, que se encuentran rígidamente vinculadas al tubo, provoca una dilatación del tubo en su dirección longitudinal, por lo que la tensión asociada se denomina tensión longitudinal σ_ℓ. Para determinar su magnitud se considera el equilibrio a través de una sección perpendicular al eje del tubo (sección m),

Sección m



La resultante de la presión interna p sobre la sección m, de área $\pi \cdot r^2$, es un fuerza dada por

$$F_p = \left(\pi \cdot r^2\right) p$$

Por otra parte, en las paredes del tubo la fuerza resultante debida a σ_ℓ está dada por

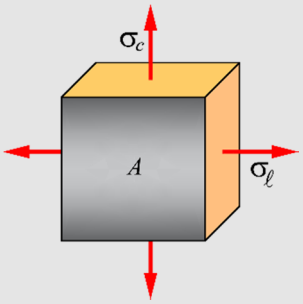
$$F_\ell = \overbrace{\left(2\pi \cdot r \cdot e\right)}^{\substack{\text{área de la} \\ \text{sección del tubo}}} \sigma_\ell$$

Planteando el equilibrio en la sección m resulta

$$F_p = F_\ell \quad \rightarrow \quad \left(\pi \cdot r^2\right) p = \left(2\pi \cdot r \cdot e\right)\sigma_\ell \quad \rightarrow \quad \sigma_\ell = \frac{p \cdot r}{2 \cdot e}$$

a) Tensor de tensiones en el punto A

El punto A, debido a la acción de las tensiones σ_c y σ_ℓ, se encuentra sometido a un estado plano de tensión, como se observa a continuación



$$\sigma_c = \frac{p \cdot r}{e} = \frac{0.5 \cdot 5}{2 \cdot 0.1} = 12.5 MPa$$

$$\sigma_\ell = \frac{p \cdot r}{2 \cdot e} = \frac{\sigma_c}{2} = 6.25 MPa$$

Entonces, el tensor de tensiones considerando estado plano, estás dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{p \cdot r}{e}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 & 0 \\ 0 & 6.25 \end{bmatrix} MPa$$

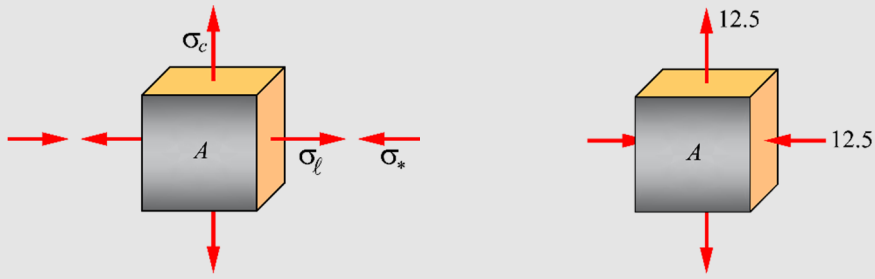
b) Valor de P **para que haya cortante puro**. Ahora la acción de P produce una tensión de compresión sobre la sección transversal del tubo, que se denominará σ_*

$$\sigma_* = \frac{P}{2\pi \cdot r \cdot e} = \frac{P}{\pi \cdot 0.05 \cdot 0.001} = 2 \cdot 3183.1 \cdot P$$

Para que el punto A esté en un estado de cortante puro las tensiones principales deben ser de igual magnitud y sentido contrario. O sea,

$$\sigma_c = -\left(\sigma_\ell - \sigma_*\right) \rightarrow 12.5 = -\left(6.25 - 2 \cdot 3183.1 \cdot P\right)$$

$$\rightarrow \quad P = 0.003MN$$



● Verificación

Se puede verificar que la carga obtenida, $P = 0.003MN$, produce un estado de corte o cizallamiento puro en el punto A,

$$\sigma_* = 2 \cdot 3183.1 \cdot P = 18.75MPa \text{ de compresión}$$

$$\rightarrow \quad \sigma_\ell - \sigma_* = 6.25 - 18.75 = -12.5\text{MPa} = -\sigma_c$$

4.3 Energía interna de deformación por axil

En esta sección se particulariza la expresión de la energía total de deformación acumulada en una pieza prismática (ver Capítulo 2) al caso de una pieza sometida a un esfuerzo axial puro. Para ello, se define primeramente la densidad de energía interna en cada punto de una barra sometida a esfuerzo axial puro,

$$\overline{\omega} = \int_0^{\varepsilon_3} \sigma_3 \cdot d\varepsilon_3 = \int_0^{\varepsilon_3} \underbrace{E \cdot \varepsilon_3}_{\substack{\text{Ley de Hooke} \\ \text{caso uniaxial}}} \cdot d\varepsilon_3 = \frac{1}{2} E \cdot \varepsilon_3^2 = \frac{1}{2} \sigma_3 \cdot \varepsilon_3 = \frac{(\sigma_3)^2}{2E} \tag{4.17}$$

Sustituyendo en esta última ecuación la tensión y la deformación por sus respectivas expresiones (4.10) y (4.12) en función de los esfuerzos, se tiene la **densidad de energía interna complementaria**, compuesta por la contribución mecánica en función del esfuerzo axil y la térmica en función de la temperatura,

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2} E \cdot \varepsilon_3^2 = \frac{1}{2} E \cdot \left(\frac{\mathsf{N}}{E\,A} + \alpha_t \cdot \Delta t \right)^2 = \frac{\mathsf{N}^2}{2\,EA^2} + \frac{1}{2} E \cdot \left(\alpha_t \cdot \Delta t \right)^2 + \frac{\mathsf{N}}{A} \alpha_t \cdot \Delta t \qquad (4.18)$$

Integrando la densidad de energía por axil en todo el volumen, se obtiene la energía total acumulada en la pieza por efecto del esfuerzo axil,

$$\begin{aligned} W &= \int_V \overline{\omega}\, dV = \int_\ell \frac{1}{2} E \cdot \left(\frac{\mathsf{N}}{EA} + \alpha_t \cdot \Delta t \right)^2 A \; dx_3 \\ &= \int_\ell \frac{\mathsf{N}^2}{2\,EA} dx_3 + \int_\ell \frac{1}{2} E\,A \cdot \left(\alpha_t \cdot \Delta t \right)^2 dx_3 + \int_\ell \mathsf{N} \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \, dx_3 \end{aligned} \qquad (4.19)$$

Pudiéndose también escribir esta última en el siguiente formato, en función de esfuerzos y alargamientos,

$$W = \int_\ell \frac{1}{2} \mathsf{N}\, du^{\text{mec}} + \int_\ell \frac{1}{2} \mathsf{N}^{\text{ter}}\, du^{\text{ter}} + \int_\ell \mathsf{N}\, du^{\text{ter}} \qquad (4.20)$$

Siendo $du^{\text{mec}} = \dfrac{\mathsf{N}}{EA} dx_3$ el diferencial de desplazamiento mecánico producido por el esfuerzo axil mecánico N; luego $du^{\text{ter}} = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot dx_3$ es el diferencial de desplazamiento térmico (producido por la acción térmica) y, por último, se define como $\mathsf{N}^{\text{ter}} = E\,A \cdot \alpha_t \cdot \Delta t$ a un esfuerzo axil equivalente producido por la acción térmica.

Así, se puede entender que la energía interna, debida al axil y a la temperatura uniforme, se acumula en la barra en forma de las siguientes componentes de energía potencial,

Energía potencial mecánica :

$$W_{\mathsf{N}} = \int_\ell \frac{1}{2} \mathsf{N} \cdot \left[\frac{\mathsf{N}}{EA} dx_3 \right] = \int_\ell \frac{1}{2} \mathsf{N}\, du^{\text{mec}}$$

Energía potencial térmica :

$$W_t = \int_\ell \frac{1}{2} E\, A \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot \left[\alpha_t \cdot \Delta t\, dx_3\right] = \int_\ell \frac{1}{2} \mathrm{N}^{\mathrm{ter}}\, du^{\mathrm{ter}}$$

Energía mutua o indirecta termo - mecánica :

$$W_{\mathrm{N}-t} = \int_\ell \mathrm{N} \cdot \left[\alpha_t \cdot \Delta t\, dx_3\right] = \int_\ell \mathrm{N}\, du^{\mathrm{ter}} \tag{4.21}$$

Se entiende por energía mutua o indirecta a aquella que se desarrolla por un estado de tensión sobre un estado de deformación, que no es consecuencia de esta tensión, sino de otro estado independiente de éste.

En forma análoga a la demostración anterior, se puede expresar la **densidad de energía interna primal**, en función de las deformaciones axiales y de aquí la energía total acumulada en la pieza en función de los movimientos axiales que sufre un punto de la barra,

$$W = \int_V \overline{\omega}\, dV = \int_\ell \left(\int_A \overline{\omega}\, dA \right) dx_3$$

$$W = \int_\ell \left(\int_A \frac{1}{2} E \varepsilon_3^2 dA \right) dx_3 = \int_\ell \left(\frac{1}{2} E \int_A \left(\frac{du_3(x_3)}{dx_3} \right)^2 dA \right) dx_3$$

Siendo el gradiente de los desplazamientos (deformación axil total en este caso) $\varepsilon_3 = \varepsilon_3^{\mathrm{mec}} + \varepsilon_3^{\mathrm{ter}} = \dfrac{du_3}{dx_3} = \dfrac{du_3^{\mathrm{mec}}}{dx_3} + \dfrac{du_3^{\mathrm{ter}}}{dx_3}$, que sustituido en la anterior, resulta la expresión de la energía total en función de los desplazamientos axiales de la barra,

$$\begin{aligned} W &= \int_\ell \left(\frac{1}{2} E \int_A \left(\frac{du_3^{\mathrm{mec}}}{dx_3} + \frac{du_3^{\mathrm{ter}}}{dx_3} \right)^2 dA \right) dx_3 = \\ &= \int_\ell \left(\frac{1}{2} E \left(\int_A \left(\frac{du_3^{\mathrm{mec}}}{dx_3} \right)^2 dA + \int_A \left(\frac{du_3^{\mathrm{ter}}}{dx_3} \right)^2 dA + 2 \int_A \left(\frac{du_3^{\mathrm{mec}}}{dx_3} \cdot \frac{du_3^{\mathrm{ter}}}{dx_3} \right) dA \right) \right) dx_3 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Se puede presentar esta última en la forma de la ecuación (4.19) si en ella se sustituye $du_3^{\mathrm{mec}} = \dfrac{\mathrm{N}}{EA} dx_3$ y $du_3^{\mathrm{ter}} = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot dx_3$.

4.4 Piezas rectas de sección trasversal conformada por material compuesto

4.4.1 Teoría general

En la práctica de la construcción aparecen, con cierta frecuencia, piezas estructurales compuestas por diversos materiales, cada uno de ellos con sus propias características mecánicas, como por ejemplo las estructuras mixtas de hormigón y acero, hormigón armado, hormigón pretensado, etc.

Para analizar los efectos producidos por el esfuerzo axil en este tipo de secciones, se supondrá que, en el caso más general, el módulo de elasticidad en la sección es función de la posición del punto en el plano de la sección, es decir

$$E = E\left(x_1, x_2\right) \tag{4.23}$$

De acuerdo con la hipótesis de Bernoulli, la ley de deformaciones será la misma que la dada por la ec. (4.2), mientras que las tensiones vendrán dadas por

$$\sigma_3 = \varepsilon_3 E\left(x_1, x_2\right) \tag{4.24}$$

y las condiciones de equilibrio (4.7) resultarán ahora

$$\begin{aligned} \mathsf{N} &\overset{\text{def}}{=} \int_A \sigma_3 \, dA = \int_A E\left(x_1, x_2\right) \varepsilon_3 \, dA \\ \mathsf{M}_1 &\overset{\text{def}}{=} \int_A \sigma_3 \, x_2 \, dA = \int_A E\left(x_1, x_2\right) \varepsilon_3 \; x_2 \, dA = 0 \\ \mathsf{M}_2 &\overset{\text{def}}{=} -\int_A \sigma_3 \, x_1 \, dA = -\int_A E\left(x_1, x_2\right) \varepsilon_3 \; x_1 \, dA = 0 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Obsérvese que la diferencia entre las expresiones (4.7) y (4.25) radica en el hecho que los valores del módulo de elasticidad (E) no pueden sacarse fuera de la integral por no ser constantes en toda la sección transversal.

Debido a que se considera válida la hipótesis de Bernoulli y por analogía con el caso de secciones con materiales simples, las deformaciones en la sección deben ser constantes. Entonces, para que se satisfagan las dos últimas ecuaciones de equilibrio (4.25), se debe verificar

$$\int_A E\left(x_1, x_2\right) x_2 \, dA = \int_A E\left(x_1, x_2\right) x_1 \, dA = 0 \tag{4.26}$$

La expresión (4.26) indica que se deben anular las integrales por ser momentos estáticos respecto de ejes que contienen al centro mecánico[2].

Ello implica que el origen de los ejes de referencia $x_1 - x_2$ y el punto de acción del esfuerzo axil debe ser el *centro mecánico* (CM) de la sección. Además, se tiene también que los ejes mecánicos deberán ser principales de inercia y, por lo tanto, los productos de inercia respecto de estos ejes son nulos. Es decir,

$$\int_A E\left(x_1, x_2\right) x_1 \, x_2 \, dA = \int_A E\left(x_1, x_2\right) \, x_2 \, x_1 \, dA = 0 \tag{4.27}$$

Resulta así, de las ecuaciones (4.25), (4.26) y (4.27), que la única condición que garantiza el equilibrio de la sección transversal es

$$\mathsf{N} \overset{\text{def}}{=} \int_A \sigma_3 \, dA = \varepsilon_3 \underbrace{\int_A E\left(x_1, x_2\right) dA}_{\text{Área mecánica}} \tag{4.28}$$

de donde se deduce que la deformación sobre el eje mecánico vale

$$\varepsilon_3 = \frac{\mathsf{N}}{\int_A E\left(x_1, x_2\right) dA} \tag{4.29}$$

y la tensión vale

$$\sigma_3\left(x_1, x_2\right) = E\left(x_1, x_2\right) \varepsilon_3 = \frac{\mathsf{N} E\left(x_1, x_2\right)}{\int_A E\left(x_1, x_2\right) dA} \tag{4.30}$$

En las expresiones anteriores también se puede incluir el efecto de la temperatura si se sustituye adecuadamente la relación tensión - deformación termo-elástica[3],

---

[2] Ver definición de centro mecánico en el Anexo A.

[3] La relación (4.28) se expresa en termo-elasticidad como:

$$\mathsf{N} = \int_A \sigma_3\left(x_1, x_2\right) dA = \varepsilon_3^{\text{total}} \int_A E\left(x_1, x_2\right) dA - \int_A E\left(x_1, x_2\right) \alpha_t\left(x_1, x_2\right) \Delta t \, dA$$

de esta expresión se deduce la deformación total:

$$\sigma_3\left(x_1,x_2\right)=E\left(x_1,x_2\right)\left(\varepsilon_3^{\text{total}}-\alpha_t\left(x_1,x_2\right)\Delta t\right)$$

Nótese que se ha incluido un campo de temperaturas uniforme, no obstante el mencionado campo podría ser variable. También es necesario destacar que si el término de deformación térmica no respeta la planaridad en la sección, el análisis no cumple con las hipótesis básicas de Bernoulli.

Las expresiones (4.29) y (4.30) proporcionan la respuesta en deformaciones, tensiones y movimientos al problema planteado. Dichas expresiones suelen, sin embargo, escribirse en muchos casos en forma ligeramente diferente. Para ello supóngase que se fija un módulo de elasticidad de referencia $\overline{E}$ (en general coincide con el módulo de elasticidad menor de entre todos los materiales que forman la sección), y sea por definición

$$\int_A E\left(x_1,x_2\right)dA=\int_A n\left(x_1,x_2\right)\overline{E}\,dA=\overline{E}\underbrace{\int_A n\left(x_1,x_2\right)dA}_{A^*}=\overline{E}\,A^* \tag{4.31}$$

donde A^* es el área *homogeneizada* de la sección.

Con estas nuevas definiciones, las expresiones (4.29) y (4.30) resultan

$$\varepsilon_3=\frac{\mathsf{N}}{\overline{E}\,A^*} \tag{4.32}$$

$$\sigma_3\left(x_1,x_2\right)=n\left(x_1,x_2\right)\frac{\mathsf{N}}{A^*} \tag{4.33}$$

$$du_3=\frac{\mathsf{N}\,dx_3}{\overline{E}\,A^*} \tag{4.34}$$

y el alargamiento total de la barra de longitud ℓ está dado por

$$\varepsilon_3^{\text{total}}=\underbrace{\frac{\mathsf{N}}{\int_A E\left(x_1,x_2\right)dA}}_{\varepsilon^{\text{mec}}}+\underbrace{\frac{\int_A E\left(x_1,x_2\right)\alpha_t\left(x_1,x_2\right)\Delta t\,dA}{\int_A E\left(x_1,x_2\right)dA}}_{\varepsilon^{\text{ter}}}$$

$$u_3 = \int_\ell \frac{\mathrm{N}\, dx_3}{\bar{E}\, A^*} \tag{4.35}$$

4.4.2 Caso particular de hormigón armado

El hormigón armado es un material compuesto por acero y hormigón. El objetivo de esta combinación es conseguir que ambos materiales compartan el esfuerzo resistente y, en el caso extremo, en que el hormigón fracase en dicha misión como consecuencia de su fisuración, trabaje el acero solo.

Se considera en este subapartado el comportamiento del hormigón armado a compresión y tracción, para estados de solicitaciones por debajo del límite de fisuración del hormigón, debiendo ambos materiales cumplir la condición básica de compatibilidad de deformaciones en cada sección transversal. Suponiendo la acción de un esfuerzo axil en el centro mecánico de la sección se tiene, a partir de la expresión (4.24), que la tensión en el hormigón σ_h y en el acero σ_a, valen,

$$\sigma_h = \frac{\mathrm{N} E_h}{E_a A_a + E_h A_h}, \quad \sigma_a = \frac{\mathrm{N} E_a}{E_a A_a + E_h A_h} \tag{4.36}$$

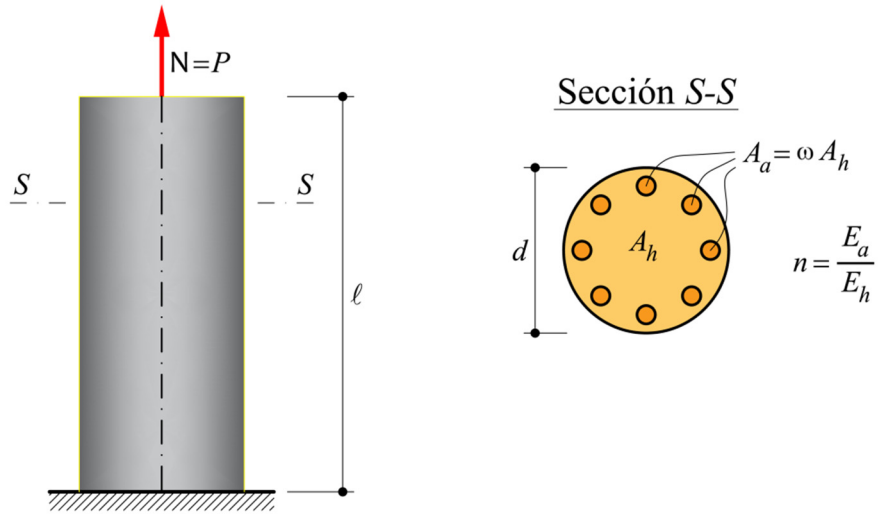


Figura 4.5 – Columna de hormigón armado.

Denominando relación de módulos elásticos a $n = E_a / E_h$, cuantía geométrica a $\omega = A_a / A_h$ y cuantía mecánica al producto $\mu = n\,\omega$, se reescribe la ec. (4.36) en la forma clásica que se utiliza en hormigón armado:

$$\sigma_a = \frac{N}{A_h}\left(\frac{n}{n\omega+1}\right) \cong \frac{N}{A_T}\left(\frac{n}{n\omega+1}\right)$$
$$\sigma_h = \frac{N}{A_h}\left(\frac{1}{n\omega+1}\right) \cong \frac{N}{A_T}\left(\frac{1}{n\omega+1}\right) \qquad (4.37)$$

donde $A_T = A_h + A_a$ representa la sección transversal total. De las ecs. (4.37) se puede observar que para el mismo nivel de deformaciones, se cumple la siguiente relación de tensiones entre ambos materiales (ver Figura 4.5)

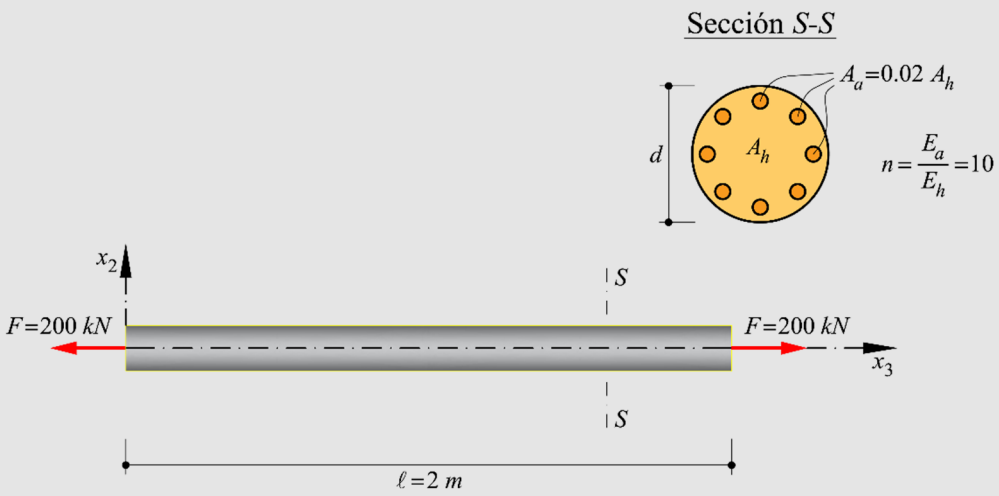
$$\sigma_a = n\,\sigma_h \quad \forall\, \varepsilon_3 = \varepsilon_h = \varepsilon_a \qquad (4.38)$$

Un proceso de diseño en hormigón armado parte de dar por conocida la tensión máxima que puede soportar el hormigón en su límite elástico $\sigma_h^{\max}$, la relación de módulos elásticos $n = E_a / E_h$ y el esfuerzo axil en la barra. Con estos datos se desea encontrar las secciones transversales de acero A_a y de hormigón A_h. Para ello, es necesario suponer la relación de áreas entre acero y hormigón (cuantía geométrica $\omega = A_a / A_h$). Esta relación debe estar comprendida entre un mínimo y un máximo que garantice que no se comporte como hormigón simple ni como acero simple respectivamente. Estos límites vienen dados por reglamentos.

Ejemplo 4-15: El tensor de la figura, construido en hormigón armado de sección circular, está sometido a una carga axial $F = 200kN$. La relación de módulos elásticos es $n = 10$ y se supone una cuantía geométrica $\omega = A_a / A_h = 0.02$. Se pide:

a) Obtener las dimensiones transversales (diámetro) del tensor para que la tensión máxima en el hormigón no supere su límite elástico $\sigma_h^{\max} = 2.4MPa$.

b) Verificar las tensiones en el hormigón y en el acero.



a) Dimensionado del tensor

La tensión máxima en el hormigón viene dada por:

$$\sigma_h^{\max} = \frac{F \cdot E_h}{E_a \cdot A_a + E_h \cdot A_h} = \frac{F}{10 \cdot 0.02 A_h + A_h} = \frac{F}{1.2 \cdot A_h}$$

Despejando de esta expresión el término del área del hormigón, se obtiene:

$$A_h = \frac{F}{1.2 \cdot \sigma_h^{\max}} = \frac{0.2MN}{1.2 \cdot 2.4MPa} = 0.06944m^2$$

Por otro lado, se sabe que el área total viene dada por:

$$A_T = 1.02 A_h = 1.02 \cdot 0.06944m^2 = 0.070833m^2$$

Como la sección transversal es circular, su área vendrá dada por la expresión:

$$A_T = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Como el área ya es conocida, despejando el diámetro, se obtiene:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot A_T}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0.070833m^2}{\pi}} = 0.30m$$

Luego, el cálculo de la sección transversal de las barras de acero se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$A_a = 0.02 \cdot A_h = 0.02 \cdot 0.06944 m^2 = 1.3888 \cdot 10^{-3} m^2$$

b) Verificación de la tensión en el hormigón y en el acero:

La tensión en el hormigón viene dada por:

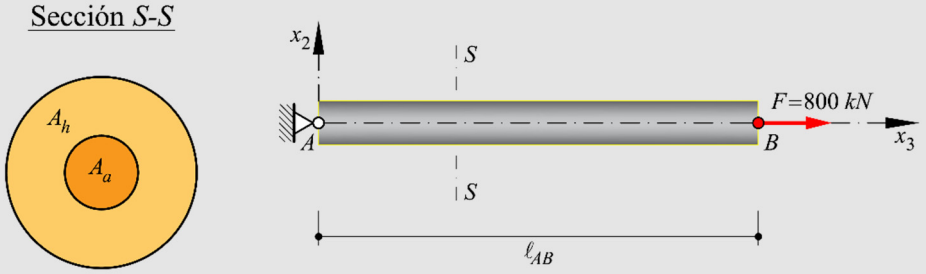
$$\sigma_h = \frac{F}{1.2 \cdot A_h} = \frac{0.2 MN}{1.2 \cdot 0.06944 m^2} = 2.4 MPa$$

Como se puede observar la tensión en el hormigón es igual a la máxima admisible.

La tensión en el acero, viene dada por:

$$\sigma_a = E_a \cdot \varepsilon = 10 \cdot E_h \cdot \varepsilon = 10 \cdot \sigma_h = 24 MPa$$

Ejemplo 4-16: En la barra de la Figura se aplica una carga horizontal $F = 800 kN$ en el punto "B". Adoptando $n = E_a / E_h = 10$, $\sigma_a^{\lim} = 500\, MPa$ y $\sigma_h^{\lim} = 20\, MPa$, calcular el área de acero A_a y de hormigón A_h para que ambos materiales tengan el mismo esfuerzo normal y ninguno de sus materiales supere su resistencia elástica.



Ecuaciones de equilibrio

$$\left.\begin{array}{l} F - \mathrm{N}_a - \mathrm{N}_h = 0 \\ \mathrm{N}_a = \mathrm{N}_h = \mathrm{N} \end{array}\right\} F - 2\mathrm{N} = 0 \rightarrow \mathrm{N} = \frac{F}{2}$$

Ecuación de compatibilidad

$$\left.\begin{array}{l} u = u_a = u_h \\ \dfrac{\mathrm{N}_a \cdot \ell_{AB}}{E_a \cdot A_a} = \dfrac{\mathrm{N}_h \cdot \ell_{AB}}{E_h \cdot A_h} \end{array}\right\} \rightarrow E_a \cdot A_a = E_h \cdot A_h$$

Despejando, se obtiene el área de hormigón:

$$A_h = \frac{E_a}{E_h} A_a = n \cdot A_a = 10 \cdot A_a$$

Verificación de la tensión máxima

Para el acero

$$\sigma_a^{\lim} = 500000 \frac{kN}{m^2} \geq \frac{800kN/2}{A_a} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A_a \geq 0.8 \cdot 10^{-3} m^2 \\ A_h \geq 0.8 \cdot 10^{-2} m^2 \end{cases}$$

Para el hormigón

$$\sigma_h^{\lim} = 20000 \frac{kN}{m^2} \geq \frac{800kN/2}{A_h} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A_a \geq 2 \cdot 10^{-3} m^2 \\ A_h \geq 2 \cdot 10^{-2} m^2 \end{cases}$$

Se escogen las áreas mayores, es decir $A_a = 2 \cdot 10^{-3} m^2$, $A_h = 2 \cdot 10^{-2} m^2$, para garantizar que ningún material supere el límite de tensión establecido en los datos del problema.

4.4.3 Caso particular de hormigón pretensado

El hormigón pretensado es un material diseñado con la finalidad de someter al hormigón a compresión, antes de introducir las cargas de servicio, en aquellas zonas donde se producen las tracciones. De esta forma, hasta que las compresiones sobre el hormigón no son anuladas, no aparecen las tensiones de tracción, evitando así la rotura del hormigón.

Durante el tiempo en que se ha utilizado este material, se han desarrollado diferentes variedades de hormigón pretensado. Sin embargo, aquí sólo se establecerá una clasificación básica:

• Según el momento en que se realiza el tesado de los cables

- *Hormigón pretensado con armaduras pretesas*. Se trata de un tesado de cables previo al endurecimiento del hormigón. Este tipo de material normalmente se obtiene en talleres sobre bancos de tesado.

- *Hormigón pretensado con armaduras postesas*. Se trata de un tesado de cables posterior al endurecimiento del hormigón. Este tipo de material normalmente se obtiene

en taller y/u obra, utilizando dispositivos (gatos) que tensan las armaduras entubadas, apoyados sobre el hormigón endurecido. Una vez tensado los cables, son anclados en sus extremos en el hormigón, por donde se transmite la fuerza de pretensado.

• Según la adherencia entre armaduras y hormigón

- *Hormigón pretensado con adherencia.* En este caso las armaduras están fuertemente adheridas al hormigón circundante. Aquí se considera compatibilidad de deformaciones y equilibrio en cada sección transversal entre armadura y hormigón. Si se utilizan armaduras pretesas, la unión acero - hormigón se da por "adherencia directa". Si las armaduras son postesadas, se consigue adherencia inyectando los tubos con mortero, que al endurecer constituye el elemento de "enlace indirecto".

- *Hormigón pretensado sin adherencia.* En este caso no se establece ningún enlace que admita tensiones tangenciales entre armadura y hormigón. En cada sección transversal no hay compatibilidad entre acero y hormigón y, por lo tanto, solamente se debe cumplir la condición de equilibrio entre ambos materiales. En el hormigón pretensado con adherencia indirecta no existe unión entre ambos materiales en la primera fase, pero luego de inyectar el mortero en los tubos se debe considerar un pretensado con adherencia.

Hay otros tipos de clasificación según la clase de anclaje, el grado de pretensado, etc.

Respecto del cálculo, no existe ningún método especial para su análisis, debiéndose aplicar las bases conocidas de la mecánica, respetando las condiciones de equilibrio seccional y de compatibilidad cuando corresponda.

<u>Hormigón pretensado sin adherencia con armaduras postesas</u>

Este material de sección transversal compuesta, sin adherencia, *no cumple la hipótesis de compatibilidad* de deformaciones entre acero y hormigón (ver Figura 4.6).

Por tratarse de un pretensado centrado sin cargas externas de servicio, se debe cumplir la siguiente condición de auto-equilibrio en cada sección transversal (ver ec. (4.28)).

$$\mathrm{N} = 0 = \int_A \sigma_3\left(x_1, x_2\right) dA = \underbrace{\int_{A_a} \sigma_a dA}_{\mathrm{N}_a} + \underbrace{\int_{A_h} \sigma_h dA}_{\mathrm{N}_h} \quad \rightarrow \quad \mathrm{N}_a = -\mathrm{N}_h \tag{4.39}$$

Por otro lado, se sabe que

$$\mathrm{N}_a = E_a A_a \underbrace{\frac{u_a}{\ell_0}}_{\varepsilon_a} \quad \text{y} \quad \mathrm{N}_h = E_h A_h \underbrace{\frac{u_h}{\ell_0}}_{\varepsilon_h} \tag{4.40}$$

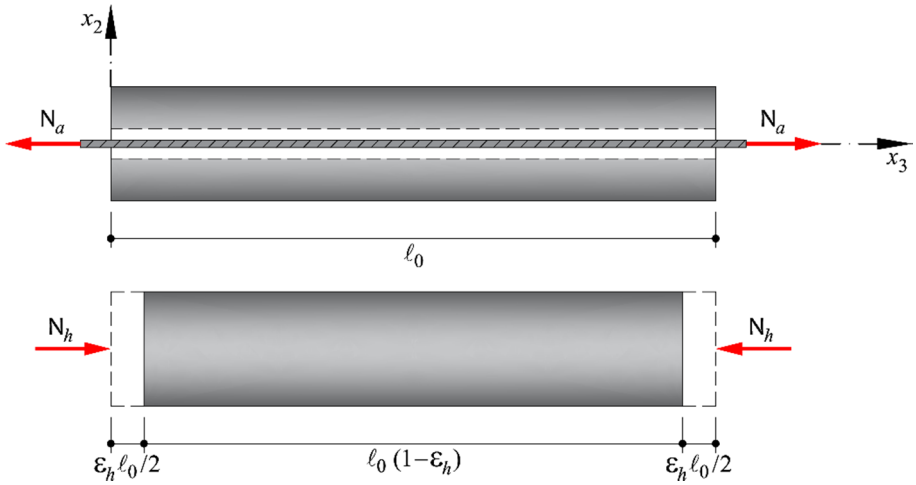


Figura 4.6 – Prisma de hormigón pretensado sin adherencia con armaduras postesas.

Debe considerarse que en todo instante se cumple la condición de equilibrio entre los dos materiales, debido al sistema constructivo que se basa en tensar el cable apoyando el dispositivo de tensado en el hormigón. Esto significa que a medida que se estira el cable, se acorta el hormigón.

De la ecs. (4.39) y (4.40) resulta la deformación del hormigón ε_h en función de la deformación que se impone al acero ε_a.

$$\varepsilon_h = -\frac{E_a A_a}{E_h A_h}\varepsilon_a = -n\,\omega\,\varepsilon_a \tag{4.41}$$

En el caso termo-elástico[4], se debe respetar coherentemente la correspondiente ley tensión - deformación.

[4] *Nota*: La ecuación de equilibrio (4.39) queda expresada en comportamiento termo-elásticos como:

$$\mathrm{N} = 0 = \mathrm{N}_a + \mathrm{N}_h = \underbrace{\int_{A_a} \sigma_a\, dA}_{\mathrm{N}_a} + \underbrace{\int_{A_h} \sigma_h\, dA}_{\mathrm{N}_h} = E_a A_a \left(\varepsilon_a^{\text{total}} - \alpha_a^t \Delta t_a\right) + E_h A_h \left(\varepsilon_h^{\text{total}} - \alpha_h^t \Delta t_h\right)$$

Resultando de aquí la deformación total en el hormigón como

Conocidos los estados de deformación, se obtienen las tensiones como:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= E_a \varepsilon_a \\ \sigma_h &= E_h \varepsilon_h = -\cancel{E_h} \frac{E_a A_a}{\cancel{E_h} A_h} \varepsilon_a = -\omega \sigma_a \end{aligned} \tag{4.42}$$

Como se puede observar, a diferencia del hormigón armado donde la relación de resistencia venía dada por la relación de módulos elásticos $n = E_a / E_h$ aquí, en el hormigón pretensado sin adherencia, la relación de resistencia depende de la relación de secciones transversales $\omega = A_a / A_h$.

Hormigón pretensado en tiempos diferentes

Sobre un hormigón pretensado sin adherencia con armaduras postesas, se vuelve a pretensar el hormigón con nuevos cables distintos a los utilizados en la etapa anterior. En este caso es necesario distinguir el estado previo, que corresponde al analizado en el subapartado anterior, de esta nueva fase de tensado. En esta nueva etapa, el material base "acero-hormigón" se comporta como un compuesto con compatibilidad de deformaciones. Esta situación ocurre siempre, tanto si se inyecta mortero en los tubos, como si el cable permanece sin adherencia indirecta. Esto último necesita una explicación, pues no hay una verdadera compatibilidad entre el acero y hormigón de la primera fase, pero ambos materiales se acortan la misma longitud debido a la imposición de desplazamientos de extremos del material base, exigido por el nuevo conjunto de cables.

Estado mecánico previo: resulta de lo deducido en el apartado anterior.

$$N_a^0 = -N_h^0 = \begin{cases} \varepsilon_h^0 = -\dfrac{E_a A_a}{E_h A_h} \varepsilon_a^0 \\ \sigma_a^0 = E_a \varepsilon_a^0 \\ \sigma_h^0 = -E_a \dfrac{A_a}{A_h} \varepsilon_a^0 \end{cases} \tag{4.43}$$

Estado mecánico producido por el nuevo pretensado: sobre el material mixto de base, se pretensa un nuevo grupo de cables cuya denominación llevará un signo "+", para

$$\varepsilon_h^{\text{total}} = -\left[\frac{E_a A_a}{E_h A_h} \left(\varepsilon_a^{\text{total}} - \alpha_a' \Delta t_a \right) - \alpha_h' \Delta t_h \right]$$

distinguirlo de los cables puestos en la etapa anterior. Así, la condición de equilibrio para esta etapa de pretensado se expresa como

$$\mathrm{N}=0=\int_{A}\sigma_3\left(x_1,x_2\right)dA=\underbrace{\int_{A_a^+}\sigma_a^+ dA}_{\left(\mathrm{N}_a^+\right)^0}+\underbrace{\int_{A_M}\Delta\sigma_M dA}_{\Delta\mathrm{N}_M}=E_a^+A_a^+\varepsilon_a^+ +\left(E_hA_h+E_aA_a\right)\Delta\varepsilon_M \tag{4.44}$$

En esta última expresión se puede observar la condición de compatibilidad que se aplica al material base, a través de mantener único el incremento de deformación $\Delta\varepsilon_M$ para el acero y hormigón de la primera fase. De aquí resulta el incremento de deformación que sufre el material mixto (M) de base cuando es sometido a un nuevo pretensado,

$$\Delta\varepsilon_M=-\frac{E_a^+A_a^+\varepsilon_a^+}{E_hA_h+E_aA_a}=-\frac{nA_a^+\varepsilon_a^+}{A_h+nA_a}=-\frac{nA_a^+\varepsilon_a^+}{A^*} \tag{4.45}$$

donde $A^*=\left(n-1\right)A_a+A_T$ es la denominada área homogeneizada, en tanto $\overline{A}=E_hA_h+E_aA_a$ se conoce como área mecánica.

Conocido el cambio de deformación del material base, se puede obtener el estado final de tensiones y deformaciones en todos los materiales componentes

$$\begin{cases}\sigma_a^+=E_a^+\varepsilon_a^+\\ \sigma_a=\sigma_a^0+\Delta\sigma_a=E_a\left(\varepsilon_a^0+\Delta\varepsilon_M\right)\\ \sigma_h=\sigma_h^0+\Delta\sigma_h=E_h\left(\varepsilon_h^0+\Delta\varepsilon_M\right)=E_a\left(-\omega\,\varepsilon_a^0+\dfrac{\Delta\varepsilon_M}{n}\right)\end{cases} \tag{4.46}$$

y

$$\begin{cases}\varepsilon_a=\varepsilon_a^0+\Delta\varepsilon_M\\ \varepsilon_h=\varepsilon_h^0+\Delta\varepsilon_M=-n\,\omega\,\varepsilon_a^0+\Delta\varepsilon_M\end{cases} \tag{4.47}$$

Hormigón pretensado con adherencia y con armaduras pretesas

Este material, de sección transversal compuesta, sí cumple la hipótesis de compatibilidad de deformaciones entre acero y hormigón.

Estado mecánico previo: corresponde solamente al tensado del cable valiéndose del banco de tesado. En esta primera fase el hormigón se encuentra todavía en estado fluido.

$$\left(\varepsilon_a^+\right)^0 = \frac{\left(\mathsf{N}_a^+\right)^0}{E_a^+ A_a^+}$$
$$\left(\sigma_a^+\right)^0 = E_a^+ \left(\varepsilon_a^+\right)^0 \tag{4.48}$$

Estado mecánico posterior al endurecimiento del hormigón: sobre el material mixto de base, formado por el propio cable de tensado y el hormigón endurecido, se deja actuar la fuerza inicial con que se ha tesado el cable $\left(\mathsf{N}_a^+\right)^0$. Esta irá perdiendo valor a medida que se acorta la pieza de hormigón, hasta alcanzar el estado autoequilibrado final.

La situación que aquí se describe es análoga a la segunda etapa de pretensado del caso anterior, con la sola diferencia que en este caso el cable aplica la acción y forma parte de la sección resistente. Por lo tanto, la nueva condición de equilibrio axial se expresa como

$$\mathsf{N} = 0 = \int_A \sigma_3\left(x_1, x_2\right) dA = \left(\mathsf{N}_a^+\right)^0 + \underbrace{\int_{A_M} \Delta\sigma_M dA}_{\Delta\mathsf{N}_M} = E_a^+ A_a^+ \left(\varepsilon_a^+\right)^0 + \left(E_h A_h + E_a^+ A_a^+\right)\Delta\varepsilon_M \tag{4.49}$$

En esta última expresión se puede observar que el mismo cable aplica la acción y también resiste parte de la fuerza aplicada, gracias a la compatibilidad que existe entre el cable y el hormigón. De aquí resulta el incremento de deformación que sufre el material mixto de base, $\Delta\sigma_M$, cuando se libera la fuerza actuante en el cable de tesado,

$$\Delta\varepsilon_M = -\frac{E_a^+ A_a^+ \left(\varepsilon_a^+\right)^0}{E_h A_h + E_a^+ A_a^+} = -\frac{nA_a^+ \left(\varepsilon_a^+\right)^0}{A_h + nA_a^+} = -\frac{nA_a^+ \left(\varepsilon_a^+\right)^0}{A^*} \tag{4.50}$$

donde $A^* = (n-1)A_a + A_T$ es el área homogeneizada.

En el caso termo-elástico, al igual que en apartados anteriores[5], se debe respetar coherentemente la correspondiente ley tensión - deformación.

Conocido el cambio de deformación del material base $\Delta\varepsilon_M$, se puede obtener el estado final de tensiones y deformaciones en los dos materiales componentes:

$$\begin{cases} \sigma_a^+ = \left(\sigma_a^+\right)^0 + \Delta\sigma_a^+ = E_a^+\left(\left(\varepsilon_a^+\right)^0 + \Delta\varepsilon_M\right) \\ \sigma_h = \cancel{\left(\sigma_h\right)^0}^{=0} + \Delta\sigma_h = E_h\Delta\varepsilon_M \end{cases} \tag{4.51}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_a^+ = \left(\varepsilon_a^+\right)^0 + \Delta\varepsilon_M \\ \varepsilon_h = \cancel{\left(\varepsilon_h\right)^0}^{=0} + \Delta\varepsilon_M \end{cases} \tag{4.52}$$

Ejemplo 4-17: Una viga de hormigón pretensado de $30\times30\,cm^2$ (sección cuadrada) se fabrica de la siguiente forma: se tensan cuatro cables de acero de $0.8\,cm^2$ cada uno, dispuestos en las esquinas de un cuadrado de $25\,cm$ de lado. La tensión de cada cable es de $1400\,MPa$. Posteriormente, se hormigona la sección y una vez endurecida se cortan los cables, con lo cual el hormigón queda comprimido. Se desea conocer:

a) Las tensiones de compresión finales en el hormigón

b) Las tensiones finales en el acero

c) El acortamiento de la pieza al cortar los cables

[5] Nota: La ecuación de equilibrio (4.49) queda expresada para comportamientos termo-elásticos como:

$$\mathrm{N} = 0 = \mathrm{N}_a^+ + \Delta\mathrm{N}_M = \mathrm{N}_a^+ + \int_{A_M}\Delta\sigma_M\,dA = \mathrm{N}_a^+ + \left[E_a^+A_a^+\left(\Delta\varepsilon_a^{\text{total}} - \alpha_a^t\Delta t_a\right) + E_hA_h\left(\Delta\varepsilon_h^{\text{total}} - \alpha_h^t\Delta t_h\right)\right]$$

Resultando de aquí el incremento de deformación total en el material mixto, como:

$$\Delta\varepsilon_M^{\text{total}} = \Delta\varepsilon_a^{\text{total}} = \Delta\varepsilon_h^{\text{total}} = \frac{-\mathrm{N}_a^+ + \left(E_a^+A_a^+\alpha_a^t\Delta t_a + E_hA_h\alpha_h^t\Delta t_h\right)}{E_a^+A_a^+ + E_hA_h}$$

Una vez fabricada la pieza, se la somete a un esfuerzo axil de tracción de valor $F = 720\,kN$. Calcular:

d) Las tensiones finales en el acero y en el hormigón

e) El alargamiento de la pieza como consecuencia de la aplicación de la carga $F = 720\,kN$

- Módulo de Elasticidad del acero $E_a^+ = 210GPa$

- Módulo de Elasticidad del hormigón $E_h = 30GPa$

- Longitud de la pieza $\ell = 4\,m$

a) Tensiones de compresión finales en el hormigón

La sección así formada está compuesta por dos materiales: hormigón y acero. Sea $\overline{E} = E_h$ y $E_a^+ = n\,E_h = n\,\overline{E}$, donde

$$n = \frac{E_a^+}{E_h} = \frac{210GPa}{30GPa} = 7$$

Por otro lado, el área de hormigón (descontando la sección de acero) será

$$A_h = \left(\overbrace{0.30 \cdot 0.30}^{A_T} - 4 \cdot 0.00008 \right) m^2 = 0.08968\,m^2$$

Se resolverá la primera parte del problema (apartados a), b) y c)) utilizando dos procedimientos conceptuales diferentes y, luego, se resolverán los apartados d) y e). Concluida esta resolución, se abordará nuevamente el problema utilizando la formulación deducida en el apartado correspondiente.

<u>Procedimiento 1</u>

Los esfuerzos en cada uno de los cables valen

$$\left(\mathrm{N}_a^+\right)_i^0 = 1400MPa \cdot 0.00008m^2 = 112kN$$

Con lo que la fuerza total será

$$\left(\mathrm{N}_a^+\right)^0 = \sum_{i=1}^{4} \left(\mathrm{N}_a^+\right)_i^0 = 4 \cdot 112kN = 448kN$$

Cuando se cortan los cables, parte de este esfuerzo será transmitido al hormigón, con lo que éste se acortará una cantidad u_h. El hormigón quedará, por tanto, comprimido y sometido a un esfuerzo axil de magnitud $\mathrm{N}_h = \mathrm{N}$. Obviamente, por consideraciones de equilibrio, al no existir ninguna fuerza externa la fuerza final total que actuará sobre el acero será también $\mathrm{N}_a^+ = -\mathrm{N}_h = -\mathrm{N}$. Además, por compatibilidad, el acortamiento del hormigón debe ser el mismo que el del acero. Es decir:

- Acortamiento del hormigón

$$u_h = \frac{\mathrm{N}\ell}{E_h A_h} = \frac{\mathrm{N}\cdot 4m}{30\cdot 10^6 kN\cdot m^{-2}\cdot 0.08968\, m^2} = 0.1487\cdot 10^{-5}\mathrm{N}\left[\frac{m}{kN}\right]$$

- Acortamiento del acero

$$u_a = \frac{\left(\left(\mathrm{N}_a^+\right)^0 - \mathrm{N}\right)\ell}{E_a^+ A_a^+} = \frac{\left(448kN - \mathrm{N}\right)\cdot 4m}{210\cdot 10^6 kN\cdot m^{-2}\cdot 4\cdot 0.00008\, m^2} = 0.026667m - 0.59524\cdot 10^{-4}\mathrm{N}\left[\frac{m}{kN}\right]$$

Obsérvese que el acortamiento del acero viene dado por una pérdida de tensión, es decir por la diferencia entre el esfuerzo axil inicial $\left(\mathrm{N}_a^+\right)^0$ y el esfuerzo final N.

Como ambos alargamientos deben ser iguales, resulta

$$0.1487\cdot 10^{-5}\mathrm{N} = 0.026667 - 0.59524\cdot 10^{-4}\mathrm{N}$$

de donde se obtiene $\mathrm{N} = 437.08kN$.

Las tensiones finales de compresión en el hormigón valdrán entonces

$$\sigma_h = \frac{\mathrm{N}}{A_h} = \frac{437.08\, kN}{0.08968\, m^2} = 4873.803\, kPa = 4.874 MPa \quad \text{(Compresión)}$$

b) Tensiones finales en el acero

$$\sigma_a^+ = \frac{\mathrm{N}}{A_a^+} = \frac{437.08\, kN}{4\cdot 0.00008\, m^2} = 1.36588\cdot 10^6\, kPa = 1365.88 MPa \quad \text{(Tracción)}$$

Como puede observarse, se da el siguiente auto-equilibrio

$$\mathrm{N} = \sigma_h A_h = \sigma_a^+ A_a = 437.082\, kN$$

c) Acortamiento de la pieza. Puede determinarse, a partir del hormigón o del acero, indistintamente.

A partir del hormigón

$$u_h = \frac{\mathrm{N}\ell}{E_h A_h} = \frac{0.000437083 GN \cdot 4m}{210 GPa \cdot 0.08968 m^2} = 0.00065\, m$$

A partir del acero

$$u_a = \frac{\left(\left(\mathrm{N}_a^+\right)^0 - \mathrm{N}\right)\ell}{E_a^+ A_a^+} = 0.026667 - 0.59524 \cdot 10^{-4}\mathrm{N} = 0.00065\, m$$

donde puede observarse la coincidencia de ambas cantidades.

Procedimiento 2

El hecho de cortar los cables puede mirarse bajo el punto de vista de mantener las fuerzas de pretensado sobre los mismos y aplicar sobre el centro mecánico de la sección mixta de hormigón y acero una fuerza $\left(\mathrm{N}_a^+\right)^0$ igual a la suma de las fuerzas de pretensado cambiada de signo.
El centro geométrico y mecánico de la sección coinciden en este caso.
La resultante de las fuerzas iniciales aplicadas sobre el acero vale

$$\left(\mathrm{N}_a^+\right)^0 = 4 \cdot 112 kN = 448 kN$$

A partir de las ecuaciones determinadas previamente se obtienen las tensiones sobre el hormigón y sobre el acero, producido por el hecho de cortar los cables.

$$A^* = A_h + n \cdot A_a^+ = \left(0.08968 + 7 \cdot 4 \cdot 0.00008\right) m^2 = 0.09192\, m^2$$

Por lo que

$$\sigma_h = \frac{\mathrm{N}}{A^*} = \frac{448\, kN}{0.09192\, m^2} = 4873.8\, kPa = 4.874 MPa \quad \text{(Compresión)}$$

$$\Delta\sigma_a^+ = n\frac{\mathrm{N}}{A^*} = 7 \cdot \frac{448\, kN}{0.09192\, m^2} = 34116.62\, kPa = 34.117 MPa \quad \text{(Compresión)}$$

El valor anterior $\Delta\sigma_a^+$ representa la pérdida de tensión en los cables como consecuencia del pretensado.

Por lo que las tensiones finales en el acero valdrán

$$\sigma_a^+ = 1400 MPa - \Delta\sigma_a^+ = (1400 - 34.117) MPa = 1365.88 MPa$$

En lo que respecta al acortamiento de la pieza al cortar los cables, se tiene

$$u = \int_0^\ell \frac{\mathrm{N} ds}{\overline{E} A^*} = \int_0^4 \frac{448\, kN}{30 \cdot 10^6\, kPa \cdot 0.09192\, m^2} ds = \frac{448\, kN \cdot 4\, m}{30 \cdot 10^6\, kPa \cdot 0.09192\, m^2} = 0.00065 m$$

valor que coincide con el determinado anteriormente.

Concluido los dos procedimientos, a continuación se resuelven los **apartados d) y e)**. Para ello se aplican directamente las ecuaciones obtenidas en el procedimiento 2.

Las tensiones debidas al esfuerzo $F = 720\, kN$ valdrán

En el hormigón

$$\Delta\sigma_h = \frac{F}{A^*} = \frac{720\, kN}{0.09192\, m^2} = 7833\, kPa = 7.833 MPa \quad \text{(Tracción)}$$

En el acero

$$\Delta\sigma_a^+ = n \frac{F}{A^*} = 7 \cdot \frac{720\, kN}{0.09192\, m^2} = 54830\, kPa = 54.83 MPa \quad \text{(Tracción)}$$

Por lo tanto, las tensiones finales que resultan de la superposición de estado de pretensado más la carga exterior, resultan

En el hormigón

$$\left(\sigma_h\right)^f = -4.874 + 7.833 = 2.959 MPa \quad \text{(Tracción)}$$

En el acero

$$\left(\sigma_a^+\right)^f = 1365.895 + 54.83 = 1420.725 MPa \quad \text{(Tracción)}$$

Por último, para obtener el alargamiento de la pieza debido a la carga de $F = 720\, kN$, se utiliza la expresión

$$\left(u_h\right)^{\mathsf{N}} = \int_0^{\ell} \frac{\mathsf{N} ds}{\overline{E}\overline{A}^*} = \int_0^4 \frac{720\,kN}{30\cdot 10^6\,kPa\cdot 0.09192\,m^2} ds = \frac{720\,kN\cdot 4\,m}{30\cdot 10^6\,kPa\cdot 0.09192\,m^2} = 0.00104m$$

Procedimiento 3

El procedimiento que a continuación se describe, resulta de la aplicación directa de las expresiones deducidas previamente. Continuando con la base teórica ya presentada, se utiliza el signo negativo para expresar compresión o acortamiento, en tanto el signo positivo expresa tracción o alargamiento.

Determinación de datos previos

$$\left(\mathsf{N}_a^+\right)^0 = A_a^+ \left(\sigma_a^+\right)^0 = 4\cdot 0.00008\,m^2\cdot 1400MPa = 0.448MN = 448kN$$

$$n = \frac{E_a^+}{E_h} = \frac{210GPa}{30GPa} = 7$$

$$\Delta\varepsilon_M = -\frac{\left(N_a^+\right)^0}{E_h\left[\left(n-1\right)A_a^+ + A_T\right]} = -\frac{448kN}{30\cdot 10^6 kN\cdot m^{-2}\left[\left(7-1\right)\cdot 4\cdot 0.8\cdot 10^{-4} + 0.3\cdot 0.3\right]m^2}$$
$$= -1.6246\cdot 10^{-4}$$

Respuesta al apartado a). Tensión final en el hormigón

$$\sigma_h = E_h\Delta\varepsilon_M = 3\cdot 10^4 MPa\cdot\left(-1.6246\cdot 10^{-4}\right) = -4.8738MPa \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \mathsf{N}_h = -\left[\left(0.3\cdot 0.3\right) - \left(4\cdot 0.8\cdot 10^{-4}\right)\right]\cdot 4.8738 = 0.437083MN = 437083N$$

Respuesta al apartado b). Tensión final en el acero

$$\sigma_a^+ = E_a^+\left(\left(\varepsilon_a^+\right)^0 + \Delta\varepsilon_M\right) = \left(\sigma_a^+\right)^0 + E_a^+\Delta\varepsilon_M = 1400MPa - 2.1\cdot 10^5 MPa\cdot 1.6246\cdot 10^{-4}$$
$$= 1365.883MPa \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \mathsf{N}_a^+ = \left(4\cdot 0.8\cdot 10^{-4}\right)\cdot 1365.883 = 0.437083MN = 437083N$$

Respuesta al apartado c). Acortamiento de la pieza

$$u_h = \ell_0\Delta\varepsilon_M = -4m\cdot 1.6246\cdot 10^{-4} = -0.00065m$$

Respuesta al apartado d). Tensiones finales en el hormigón y en el acero, resultantes del estado de pretensado más la carga externa.

Cálculo del cambio de deformación del material mixto por la sola acción del esfuerzo axil externo:

$$\left(\Delta\varepsilon_M\right)^F = \frac{F}{E_h\left[\left(n-1\right)A_a^+ + A_h\right]} = \frac{0.72MN}{3\cdot10^4\,MPa\cdot\left[\left(7-1\right)\cdot4\cdot0.8\cdot10^{-4}+0.3\cdot0.3\right]m^2}$$
$$= 2.610966\cdot10^{-4}$$

Conocido el cambio de deformación se pueden responder las preguntas del apartado d).

$$\left(\Delta\sigma_h\right)^F = E_h\left(\Delta\varepsilon_M\right)^F = 3\cdot10^4\,MPa\cdot2.610966\cdot10^{-4} = 7.8329MPa$$
$$\left(\sigma_h\right)^F = \sigma_h + \left(\Delta\sigma_h\right)^F = -4.874 + 7.833 = 2.959MPa$$

$$\left(\Delta\sigma_a^+\right)^F = E_a\left(\Delta\varepsilon_M\right)^F = 2.1\cdot10^5\,MPa\cdot2.610966\cdot10^{-4} = 54.830MPa$$
$$\left(\sigma_a\right)^F = \sigma_a^+ + \left(\Delta\sigma_a^+\right)^F = 1365.883 + 54.830 = 1420.713MPa$$

Respuesta al apartado e). Alargamiento de la pieza.

El desplazamiento producido sólo por el esfuerzo axil se calcula como,

$$\left(u_h\right)^{\mathrm{N}} = \ell_0\left(\Delta\varepsilon_M\right)^{\mathrm{N}} = 4m\cdot2.6109\cdot10^{-4} = 0.00104m$$

Y el desplazamiento final después de la superposición de esfuerzos es

$$\left(u_h\right)^f = \ell_0\left(\Delta\varepsilon_M + \left(\Delta\varepsilon_M\right)^F\right) = 4m\cdot\left(-1.6246\cdot10^{-4} + 2.6109\cdot10^{-4}\right) = 0.000394m$$

Como se puede comprobar, las respuestas obtenidas mediante los tres procedimientos son coincidentes.

Ejemplo 4-18: Sea una barra de hormigón pretensado con adherencia y armaduras pretesas, de sección circular de $0.3m$ de diámetro. Se quiere saber la fuerza inicial que se debe dar al cable para que la tensión final en el hormigón sea $\sigma_h = -30MPa$ (de compresión). En ningún caso el cable debe superar su máxima resistencia a tracción $\left(\sigma_a^+\right)^{\max} = \left(\sigma_a^+\right)^0 = 1500MPa$. La relación de módulos elásticos vale $n = 10$.

Cálculo del área total de la sección transversal del tensor

$$A_T = \frac{\pi \cdot 0.3^2}{4} = 0.070686\, m^2$$

Cálculo del área total de la sección transversal del cable

La tensión en el hormigón está dada por

$$\sigma_h = -30 = E_h \Delta\varepsilon_M = -E_h \frac{\left(\mathrm{N}_a^+\right)^0}{E_h\left[(n-1)A_a^+ + A_T\right]} = \frac{\left(\mathrm{N}_a^+\right)^0}{\left[(n-1)A_a^+ + A_T\right]}$$

despejando de aquí el área del cable, se obtiene

$$A_a^+ = \frac{30 A_T}{-30(n-1) + \left(\sigma_a^+\right)^0} = \frac{30 \cdot 0.070686}{-30 \cdot 9 + 1500} = 0.001724 m^2$$

La fuerza inicial necesaria, será entonces:

$$\left(\mathrm{N}_a^+\right)^0 = \left(\sigma_a^+\right)^0 A_a^+ = 1500 \cdot 0.001724 = 2.58607 MN$$

El cambio de deformación del material mixto será

$$\Delta\varepsilon_M = -\frac{2.58607 MN}{E_h\left[(10-1)0.001724 + 0.070686\right] m^2} = -\frac{30.0001}{E_h}$$

La tensión final en el acero será

$$\sigma_a^+ = \left(\sigma_a^+\right)^0 + E_a^+ \Delta\varepsilon_M = 1500 - n \cdot 30.0001 = 1199.999 MPa$$

La fuerza final en el hormigón y en el cable será:

$$\mathrm{N}_h = \sigma_h A_h = -30 \cdot (0.070686 - 0.001724) = -2.068860 MN$$

$$\mathrm{N}_a^+ = \sigma_a^+ A_a^+ = 1199.999 \cdot 0.001724 = 2.068798 MN$$

4.5 Esfuerzo axil en barras elastoplásticas

Hasta ahora se ha supuesto que el comportamiento del material es elástico lineal. Esto introduce una severa limitación en el comportamiento de las estructuras, pues después de superar un cierto umbral de tensión σ^y, tensión de fluencia, normalmente se inicia un comportamiento no-lineal no conservativo que difiere mucho de la clásica ley de Hooke.

Se han formulado diversas leyes que representan el comportamiento tensión - deformación de los materiales, algunas muy complicadas, y que requieren un estu-

dio especial para su comprensión y utilización correcta. Sin embargo, se pueden utilizar otras formulaciones que establecen ciertas simplificaciones que hacen que difieran de la realidad, pero mejoran sustancialmente el comportamiento simplista de la ley de Hooke.

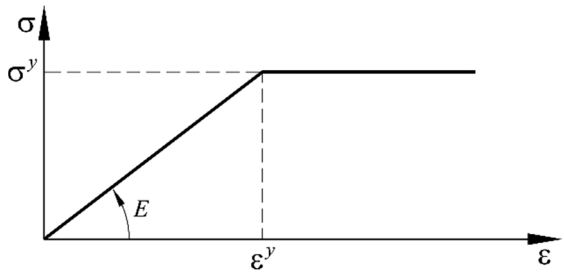


Figura 4.7 – Ley constitutiva elastoplástica.

En este apartado se presentará la conocida ley tensión deformación elastoplástica perfecta (Figura 4.7). En ella se puede observar un comportamiento lineal para $\sigma < \sigma^y$, análogo a la ley de Hooke, pero luego de alcanzar el umbral σ^y la tensión se mantiene constante, en tanto la deformación crece sin límite. En este caso, el comportamiento del material se representa mediante la siguiente ley

$$\text{A nivel tensional:} \qquad \sigma = \begin{cases} E\varepsilon \quad \forall \quad \varepsilon < \varepsilon^y = \dfrac{\sigma^y}{E} \\ \sigma^y \quad \forall \quad \varepsilon \geq \varepsilon^y = \dfrac{\sigma^y}{E} \end{cases}$$

$$\text{A nivel deformacional:} \qquad \varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^e \quad \forall \quad \varepsilon < \varepsilon^y = \dfrac{\sigma^y}{E} \\ \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad \forall \quad \varepsilon \geq \varepsilon^y = \dfrac{\sigma^y}{E} \end{cases} \tag{4.53}$$

donde ε^e es la deformación elástica (recuperable o reversible) y ε^p es la deformación permanente (irreversible).

De ley de comportamiento del material dada por (4.53) se desprende la siguiente función para representar la condición de equilibrio axial de una barra,

$$N = \int_A \sigma \, dA = \begin{cases} \left(\dfrac{EA}{\ell}\right) u & \forall \quad \varepsilon < \varepsilon^y = \dfrac{\sigma^y}{E} \\ \sigma^y A & \forall \quad \varepsilon \geq \varepsilon^y = \dfrac{\sigma^y}{E} \end{cases} \tag{4.54}$$

Ejemplo 4-19: Obtener el esfuerzo axil en cada una de las barras de la estructura articulada del Ejemplo 4-8, modificando el comportamiento de la barra 2. Ésta inicia un comportamiento elastoplástico al alcanzar la tensión umbral de fluencia σ^y (ver Figura 4.7), las otras barras mantienen su comportamiento elástico durante el resto del proceso de carga. Dibujar la respuesta elastoplástica $F - u_C$, donde u_C es el desplazamiento del nodo C.

Considerar que las propiedades elásticas de los materiales y las secciones transversales de las barras son iguales entre sí.

El problema se descompone en dos partes:

a) Comportamiento elástico de todo el sistema, mientras se cumpla la condición $\sigma_2 < \sigma^y$ (donde σ_2 es la tensión en la barra 2)

En este caso valen todos los resultados obtenidos en el problema propuesto, Ejemplo 4-8,

$$\left.\begin{aligned} N_1 = N_3 &= \frac{F \cos^2 \alpha}{2\cos^3 \alpha + 1} \\ N_2 &= \frac{F}{2\cos^3 \alpha + 1} \end{aligned}\right\} \quad \forall \ \sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{F/A}{2\cos^3 \alpha + 1} < \sigma^y$$

y el desplazamiento del punto C, durante el *proceso elástico* vale

$$u_C^e = \frac{N_2}{EA} \ell_2 = \frac{F \ell_2}{EA(2\cos^3 \alpha + 1)}$$

De esta última expresión surge que el módulo de rigidez del sistema estructural elástico ante un desplazamiento del punto C vale

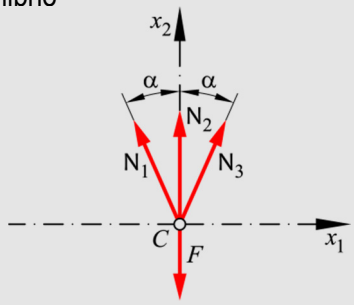
$$K^e = \frac{(2\cos^3 \alpha + 1)EA}{\ell_2} \quad \text{con} \quad \ell_2 = \ell$$

b) Comportamiento elasto-plástico del sistema, mientras se cumpla la condición $\sigma_2 = \sigma^y$.

Durante este comportamiento se resuelve un problema isostático, donde se tiene como incógnita el esfuerzo axil en las barras 1 y 3, en tanto el esfuerzo axil en la barra 2 está perfectamente determinado y vale $N_2^y = \sigma^y A = cte.$, siempre que se cumpla que $\sigma_2 = \sigma^y$ o que

$$u_C \geq \frac{N_2^y \ell_2}{EA} = \frac{\sigma^y \ell_2}{E} = \varepsilon^y \ell_2$$

En esta etapa de comportamiento elasto-plástico, se cumple la siguiente condición de equilibrio



$$\begin{cases} N_1 = N_3 \\ 2N_1 \cos\alpha + N_2^y - F = 0 \end{cases} \quad \text{con } N_2^y = \sigma^y A = cte.$$

de estas ecuaciones surgen los esfuerzos axiles buscados,

$$N_1 = N_3 = \frac{F - N_2^y}{2\cos\alpha} \quad \forall \quad F \geq F^y = N_2^y\left(2\cos^3\alpha + 1\right)$$

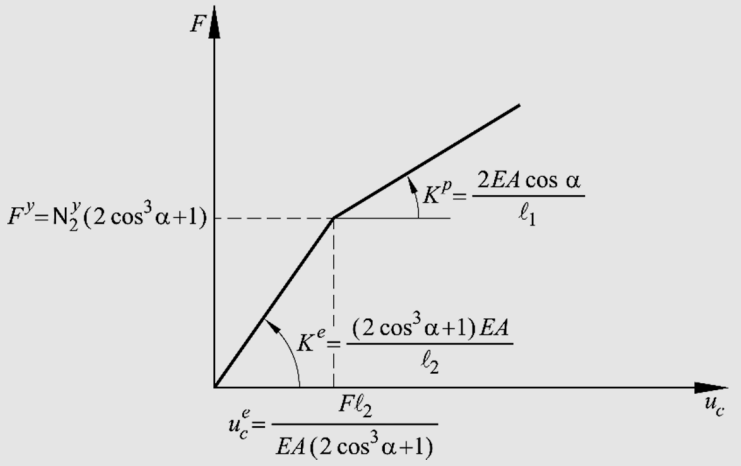
y también el desplazamiento del punto C durante el período elastoplástico

$$u_C = \overbrace{\varepsilon^y \ell_2}^{u^e} + \overbrace{\frac{\Delta u_1}{\cos\alpha}}^{u^p} = \frac{N_2^y}{EA}\ell_2 + \frac{1}{\cos\alpha}\frac{F - N_2^y}{2EA\cos\alpha}\ell_1$$
$$= \frac{N_2^y}{EA}\frac{\ell_1}{2\cos^2\alpha}\left(2\cos^3\alpha + \frac{F}{N_2^y} - 1\right)$$

Además del incremento de desplazamiento durante el período plástico Δu_1, se obtiene también la rigidez plástica del sistema como

$$K^p = \frac{2EA\cos\alpha}{\ell_1}$$

Estos resultados permiten trazar la respuesta carga-desplazamiento del nodo C, en formato $F - u_C$.



4.6 Resumen de la formulación básica obtenida en el capítulo

Formulación	Material simple			
	Sin temperatura	Ec.	Con temperatura	Ec.
Ecuación de compatibilidad	$\varepsilon_3 = \dfrac{du_3(x_3)}{dx_3}$	(4.3)	$\varepsilon_3 = \dfrac{du_3(x_3)}{dx_3} = \varepsilon_3^{mec} + \varepsilon_3^{ter}$	(4.10)
Ley constitutiva	$\sigma_3 = E\ \varepsilon_3$ $\varepsilon_3 = E^{-1}\sigma_3$	(4.6)	$\varepsilon_3 = \dfrac{\sigma_3}{E} + \alpha_t \cdot \Delta t$ $\sigma_3 = E\left(\varepsilon_3 - \alpha_t \cdot \Delta t\right)$	(4.10) (4.11)
Ecuación de equilibrio	$N = E\,\varepsilon_3\,A = \sigma_3\,A$ $\varepsilon_3 = \dfrac{N}{EA};\quad \sigma_3 = \dfrac{N}{A}$	(4.7)	$N = \sigma_3 = EA \cdot \overbrace{\left(\varepsilon_3 - \alpha_t \cdot \Delta t\right)}^{\varepsilon_3^{mec}}$ $\varepsilon_3 = \dfrac{N}{EA} + \alpha_t \cdot \Delta t$ $\sigma_3 = \dfrac{N}{A}$	(4.11)
Energía potencial específica por deformación axil	$\overline{\omega} = \dfrac{1}{2} E \cdot \varepsilon_3^2 = \dfrac{1}{2} \sigma_3 \cdot \varepsilon_3$	(4.17)	$\overline{\omega} = \dfrac{1}{2} E \cdot \varepsilon_3^2$ $= \dfrac{N^2}{2EA^2} + \dfrac{1}{2} E \cdot \left(\alpha_t \cdot \Delta t\right)^2 + \dfrac{N}{A} \alpha_t \cdot \Delta t$	(4.18)

Formulación	Material compuesto			
	Sin temperatura	Ec.	Con temperatura	Ec.
Ecuación de compatibilidad	$\varepsilon_3 = \dfrac{du_3(x_3)}{dx_3}$	(4.3)	$\varepsilon_3 = \dfrac{du_3(x_3)}{dx_3} = \varepsilon_3^{mec} + \varepsilon_3^{ter}$	(4.10)
Ley constitutiva	$\varepsilon_3 = E^{-1}(x_1,x_2)\sigma_3(x_1,x_2)$ $\sigma_3(x_1,x_2) = \varepsilon_3 E(x_1,x_2)$	(4.24)	$\varepsilon_3^{total} = \dfrac{\sigma_3(x_1,x_2)}{E(x_1,x_2)} + \alpha_t(x_1,x_2)\Delta t$ $\sigma_3(x_1,x_2) = E(x_1,x_2)\left(\varepsilon_3^{total} - \alpha_t(x_1,x_2)\Delta t\right)$	
Ecuación de equilibrio	$N = \int_A \sigma_3\, dA = \varepsilon_3 \underbrace{\int_A E(x_1,x_2)\, dA}_{\text{Área mecánica}}$ $N = \sum_{i=1}^{N} \sigma^i A^i = \varepsilon_3 \sum_{i=1}^{N} E^i A^i$ $\sigma_3(x_1,x_2) = \dfrac{N E(x_1,x_2)}{\int_A E(x_1,x_2)\, dA}$	(4.28) (4.30)	$N = \varepsilon_3^{total} \int_A E(x_1,x_2)\, dA - \int_A E(x_1,x_2)\alpha_t(x_1,x_2)\Delta t\, dA$ $\varepsilon_3^{total} = \underbrace{\dfrac{N}{\int_A E(x_1,x_2)\, dA}}_{\varepsilon^{mec}} + \underbrace{\dfrac{\int_A E(x_1,x_2)\alpha_t(x_1,x_2)\Delta t\, dA}{\int_A E(x_1,x_2)\, dA}}_{\varepsilon^{ter}}$	(4.27) Nota Pie de Página

Capítulo 5

Momento Flector

5.1 Introducción

Se entiende por *flexión* el caso de solicitación que se produce cuando en las secciones transversales de la barra aparecen momentos cuyos vectores representativos están contenidos en el mismo plano de la sección (ver Figura 5.1).

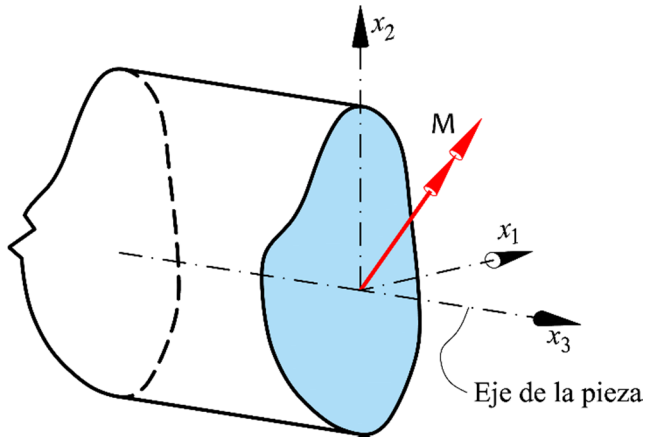


Figura 5.1 – Barra sometida a flexión.

Si en la sección transversal sólo existe flexión, es decir que el esfuerzo axil, el de corte y el momento torsor son nulos, la flexión se denomina *flexión pura*. Por ejemplo, la porción central de la viga simplemente apoyada de la Figura 5.2 está sometida a flexión pura, mientras que en la Figura 5.3 todas las secciones transversales de la viga están sometidas a flexión pura.

Sin embargo, el caso de *flexión pura* no es el más común, pues junto con los momentos flectores es usual encontrar también en las secciones transversales esfuerzos cortantes.

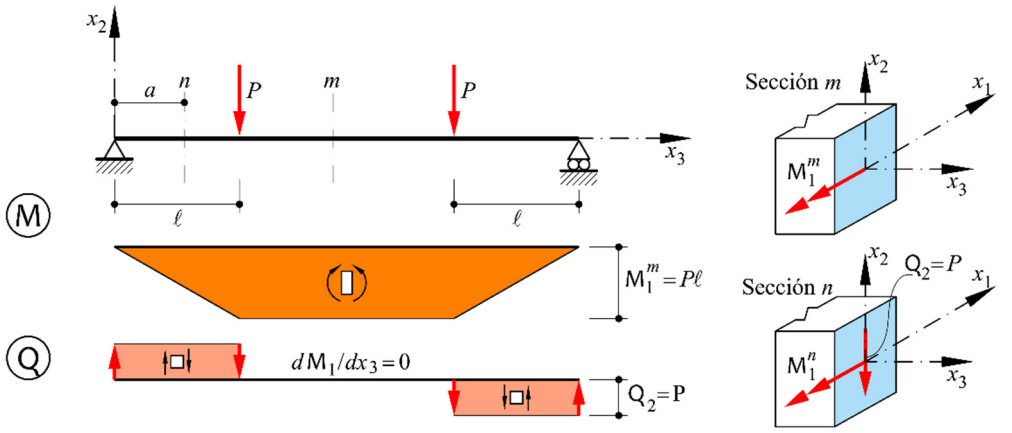


Figura 5.2 – Barra simplemente apoyada sometida a dos cargas concentradas equidistantes de los apoyos.

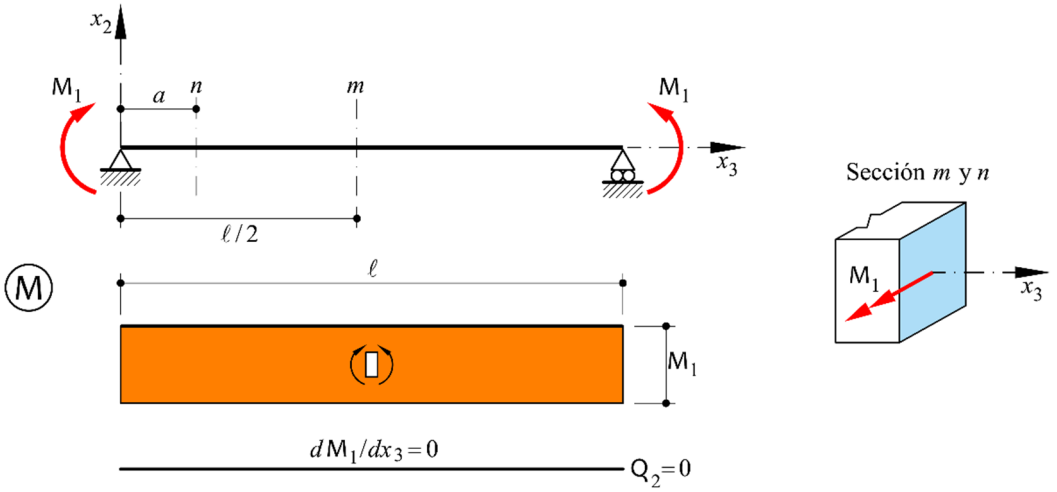


Figura 5.3 – Barra simplemente apoyada sometida a momentos en los apoyos.

Si además de la flexión y el corte aparecen fuerzas axiles en la sección, se tiene el caso de *flexión compuesta*. Según sea el sentido de estos esfuerzos axiles, se tiene un problema de *flexo-compresión* o *flexo-tracción* (teniendo en cuenta que la flexión puede o no ser pura). En la Figura 5.4 se muestra un ejemplo de una viga sometida a flexión compuesta (flexo-tracción).

Finalmente, si junto al momento flector actúan momentos torsores se dice que la sección está sometida a *flexo-torsión*. En forma sintética es posible expresar las diferentes combinaciones de esfuerzos que pueden presentarse en la flexión como

se muestra en la Figura 5.5. En la Figura 5.6 se representan barras sometidas a distintos tipos de flexión.

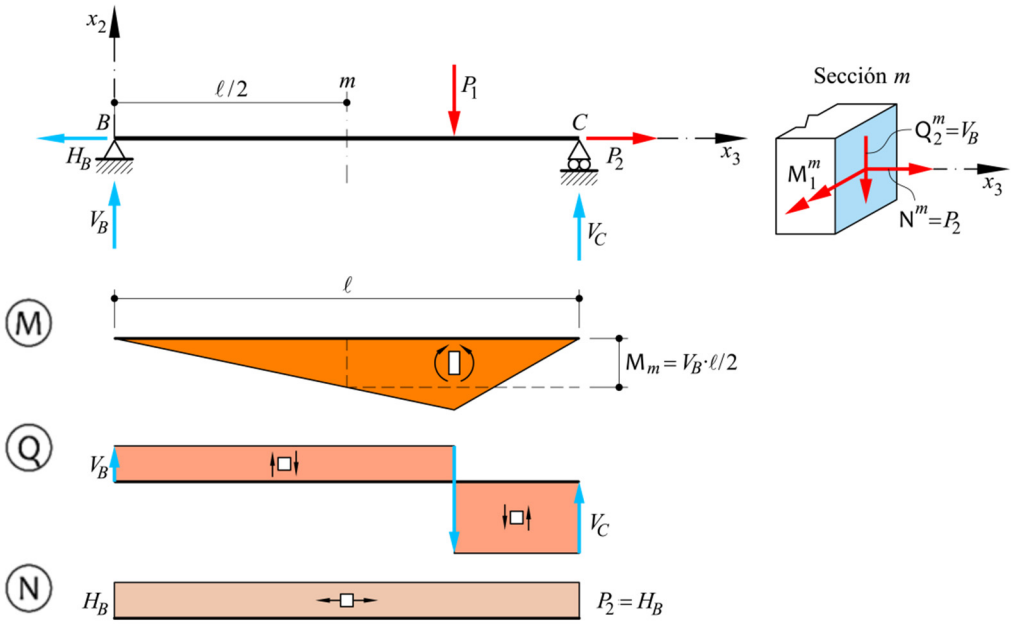


Figura 5.4 – Barra simplemente apoyada sometida a flexo-tracción.

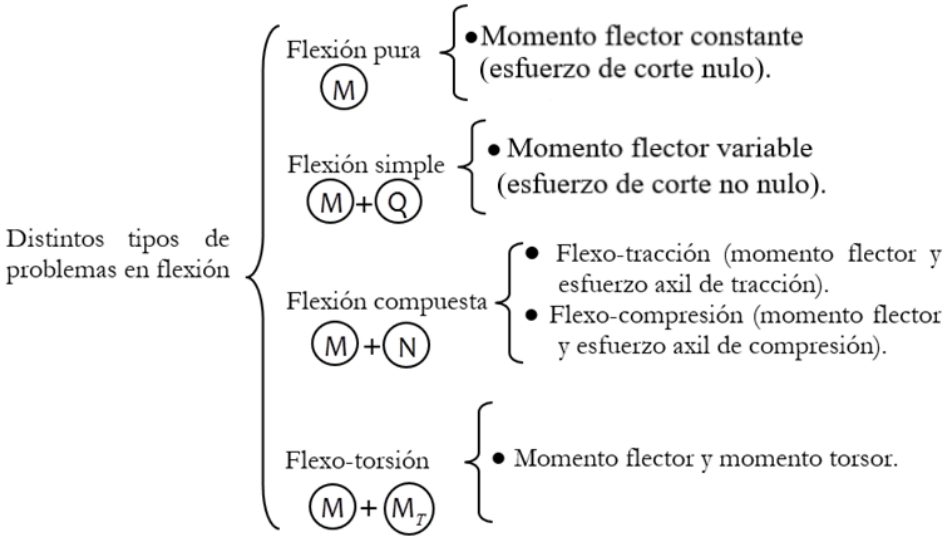


Figura 5.5 – Tipos de flexión según los esfuerzos que actúan en la sección.

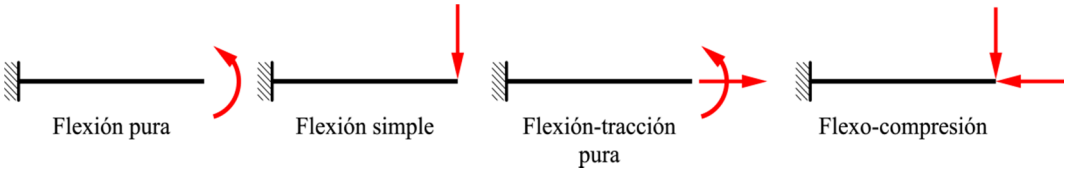
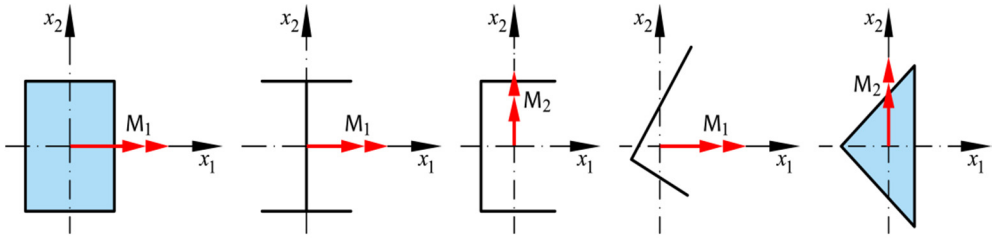


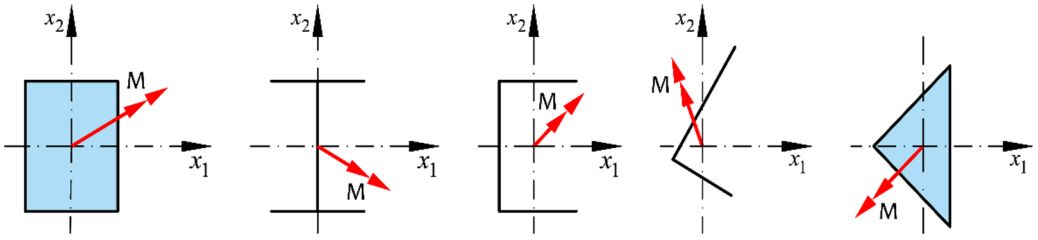
Figura 5.6 – Barras sometidas a diferentes solicitaciones por flexión.

Por otra parte, se debe agregar que el momento flector puede ser *recto (o plano)* y *esviado (desviado u oblicuo)*. Si el vector momento está sobre un eje principal de inercia de la sección (o un eje perpendicular a éste) se dice que la flexión es *recta o plana* (ver Figura 5.7). Caso contrario se dice que la flexión es *esviada*, *desviada u oblicua* (ver Figura 5.8). Se debe recordar que los ejes de simetría (y los ejes perpendiculares a éstos) son siempre ejes principales de inercia de la sección, por lo lo tanto si el vector del momento flector está sobre un eje de simetría de la sección la flexión será *recta o plana*.



x_1 y x_2 son los ejes principales de inercia de la sección

Figura 5.7 – Secciones sometidas a flexión recta.



x_1 y x_2 son los ejes principales de inercia de la sección

Figura 5.8 – Secciones sometidas a flexión esviada.

5.2 Flexión pura recta

Se considera, en primer lugar, una barra cuya sección transversal es simétrica respecto de un eje. Se aplica un vector momento, normal a dicho eje de simetría, no existiendo otros esfuerzos en la sección. Como ejemplo de este caso se toma la viga empotrada mostrada en la Figura 5.9 sometida al par flector M_1 en su extremo libre.

Se considera válida la *hipótesis de Bernoulli*, la cual establece que en una pieza recta sometida a flexión pura *las secciones se mantienen planas y normales al eje de la pieza después de la deformación*, la que se puede verificar experimentalmente. A esta hipótesis, relacionada con la cinemática de la deformación, se agregan las hipótesis fundamentales de la resistencia de materiales. Esto es, el material de la viga es *homogéneo, isótropo y linealmente elástico* (cumple con la ley de Hooke).

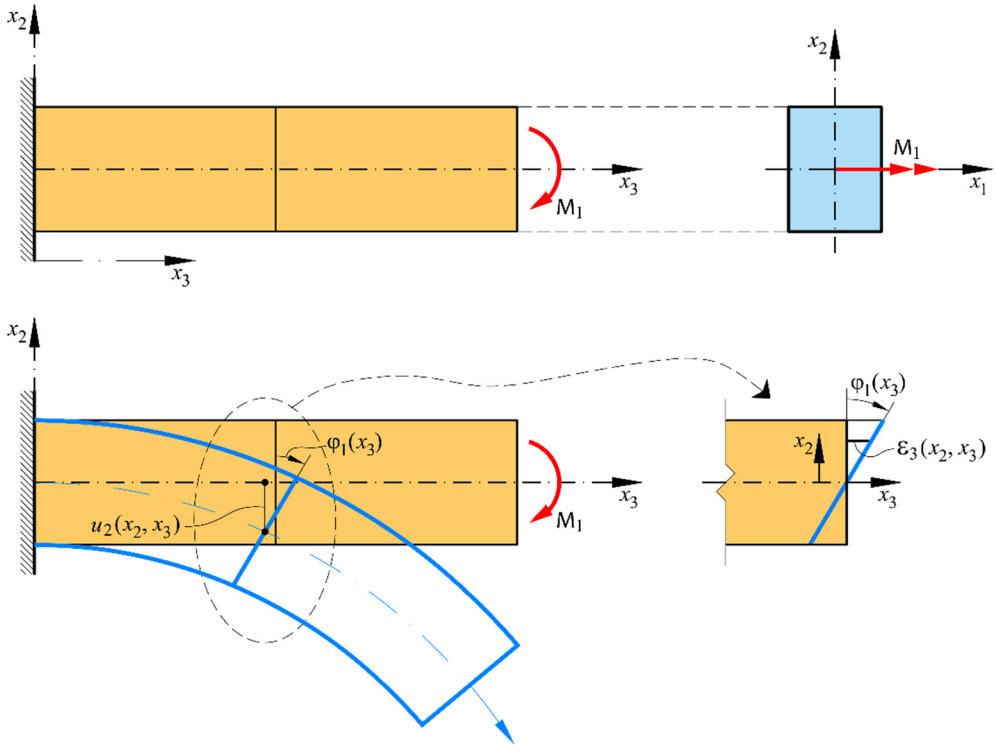


Figura 5.9 – Viga en voladizo sometida a flexión pura recta.

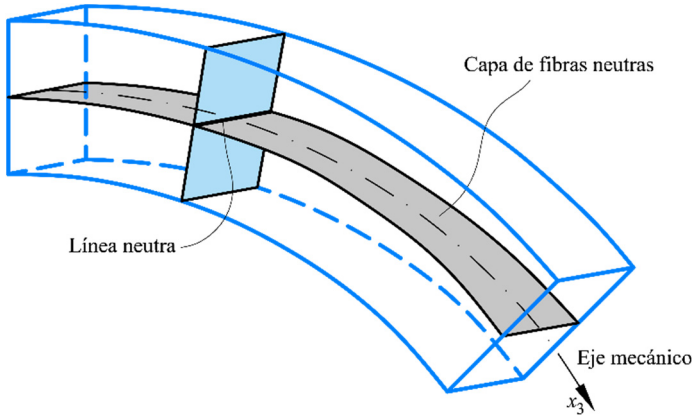


Figura 5.10 – Capa de fibras neutras y línea neutra.

En virtud de la hipótesis planteada y considerando que se trata de flexión pura, las fibras longitudinales de la pieza se acortan o se alargan. Por continuidad de las deformaciones habrá una capa de fibras que poseen deformación nula, denominada *capa de fibras neutras*. La intersección de la capa de fibras neutra con cada sección transversal es una recta llamada *línea neutra* (o eje neutro) (ver Figura 5.10), sobre la cual las deformaciones son nulas así como las tensiones (por la ley de Hooke).

Por lo expuesto, la pieza se deforma según una curva cuyo *radio de curvatura* dependerá sólo del momento aplicado, como éste es constante a lo largo de la luz de la barra, se concluye que el radio de curvatura también lo será. En este caso se tiene que el eje de la pieza describe un arco de circunferencia.

El significado de la hipótesis de Bernoulli puede analizarse en el plano $(x_2 - x_3)$ (Figura 5.9). Debido a que en la sección sólo existe momento flector, es decir que el esfuerzo axil es nulo ($\mathsf{N} = 0$), se debe cumplir la siguiente condición de equilibrio,

$$\mathsf{N} = \int_A \sigma_3 dA = 0 \tag{5.1}$$

donde, para simplificar la notación se adopta $\sigma_3 = \sigma_{33}$.

De acuerdo con la hipótesis de Bernoulli, las deformaciones deben ser lineales en la sección y función de x_2. Es decir que, para cada sección transversal, se cumple $\varepsilon_{33}(x_2) = \varepsilon_3(x_2)$ y puede escribirse como la ecuación de una recta,

$$\varepsilon_3(x_2) = \alpha x_2 + \beta \tag{5.2}$$

donde α es la pendiente y β es la distancia al origen.

Teniendo en cuenta la ecuación constitutiva (ley de Hooke) resulta que las tensiones también deben ser lineales,

$$\sigma_3(x_2) = E\varepsilon_3(x_2) = \alpha E x_2 + E\beta \tag{5.3}$$

Sustituyendo la ecuación (5.3) en la ecuación de equilibrio (5.1), resulta:

$$\overbrace{\alpha E}^{\neq 0}\int_A x_2 dA + \beta \overbrace{E\int_A dA}^{\neq 0} = 0 \tag{5.4}$$

Debido a que en la ecuación (5.4) $\alpha E \neq 0$ y $E\int_A dA \neq 0$, el cumplimiento de la condición de equilibrio exige que sea

$$\beta = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_A x_2 dA = 0 \tag{5.5}$$

La segunda de las ecuaciones (5.5) implica que el eje neutro contiene al centro mecánico de la sección.

Por otra parte, considerando las ecuaciones (5.5), la ecuación (5.2) resulta

$$\varepsilon_3(x_2) = \alpha x_2 \tag{5.6}$$

Que es la ecuación de una recta que pasa por el centro mecánico. En el apartado siguiente se deducirá el valor de α.

5.2.1 Deducción de la fórmula de la flexión de Navier-Bernoulli

Se vuelve a utilizar la viga representada en la Figura 5.9 y se consideran dos secciones paralelas, distanciadas una de otra una magnitud dx_3, cuyo detalle se representa en la Figura 5.11. Se estudian ahora las relaciones geométricas – mecánicas con el fin de deducir la *expresión que vincula la tensión con el momento actuante* (expresión de *Navier*). La deducción se basa en la hipótesis de Bernoulli, antes mencionada.

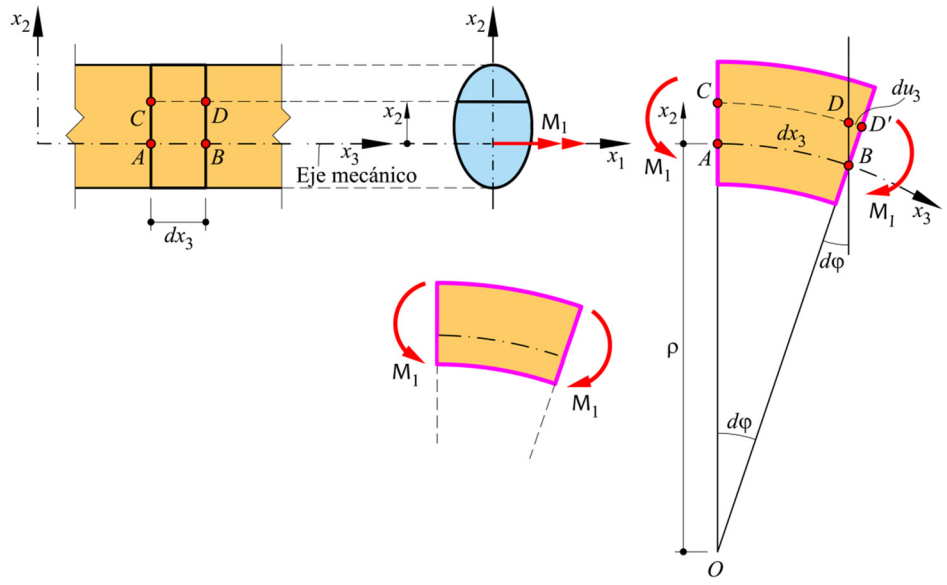


Figura 5.11 – Deformación de una barra en flexión pura recta (hipótesis de Bernoulli).

a) Relaciones geométricas. Las secciones separadas dx_3 se mantienen planas pero giran respecto al eje neutro un ángulo $d\varphi = d\varphi_1$ como se muestra en la Figura 5.11. Para pequeñas rotaciones, se verifica que el arco de longitud dx_3 definidos por los puntos $\widehat{AB}$ de la mencionada figura se puede obtener como

$$dx_3 = \rho\, d\varphi \;\text{ y }\; \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx_3} = \kappa \tag{5.7}$$

donde ρ es el *radio de curvatura* y κ es la *curvatura* del eje deformado de la viga[1].

Se analiza ahora el alargamiento de las fibras CD ubicadas a una distancia x_2 de la línea neutra (eje x_1). La longitud de las fibras CD, luego de la aplicación del momento flector está dada por

$$\widehat{CD} = (\rho + x_2)\, d\varphi \tag{5.8}$$

[1] En el caso de flexión recta (debida a un momento flector M_1), a efectos de simplificar la notación, se desiganarán al giro de la sección φ_1, al radio de curvatura ρ_2 y a la curvatura κ_2 como: φ, ρ y κ, respetcivamente (sin subíndices). No obstante, éstos sí se emplearán luego, al estudiar flexión esviada.

El alargamiento de las fibras será la diferencia entre la longitud final (ecuación (5.8)) y la longitud original (ecuación (5.7)), esto es

$$du_3(x_2) = (\rho + x_2)\, d\varphi - \rho\, d\varphi = x_2\, d\varphi \tag{5.9}$$

b) Relaciones de compatibilidad. La deformación específica longitudinal en la dirección normal x_3 es el gradiente del desplazamiento. Teniendo en cuenta la ecuación (5.9),

$$\varepsilon_3(x_2) = \frac{du_3(x_2)}{dx_3} = x_2 \frac{d\varphi}{dx_3} \tag{5.10}$$

Considerando las relaciones geométricas (5.7), la deformación dada por la ecuación (5.10) puede también escribirse como

$$\varepsilon_3(x_2) = \frac{x_2}{\rho} = x_2 \kappa \tag{5.11}$$

Igualando las expresiones (5.6) y (5.11) se obtiene

$$\alpha = \kappa \tag{5.12}$$

Notar que se verifica la hipótesis de planaridad de las secciones, siendo α la pendiente del plano de la sección transversal luego de aplicado el momento flector, el cual coincide con la curvatura.

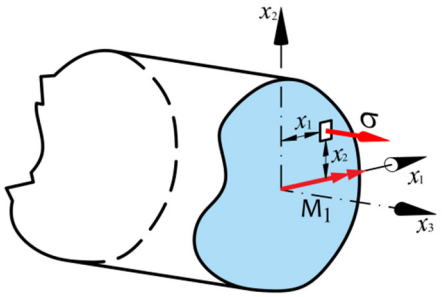
La ecuación (5.11) muestra que las deformaciones son nulas a la altura de la línea neutra donde $x_2 = 0$, negativas (acortamientos) debajo de esta línea y positivas (estiramientos) por encima, incrementando su magnitud linealmente con x_2.

c) Ley constitutiva. Las tensiones se obtienen directamente de la ley de Hooke, teniendo en cuenta la ecuación (5.11),

$$\sigma_3 = E\varepsilon_3 = \frac{E x_2}{\rho} = E\kappa x_2 \tag{5.13}$$

La aplicación de la ecuación (5.13) está restringida al caso de materiales linealmente elásticos, mientras que las ecuaciones cinemáticas (5.7) a (5.11) se basan en consideraciones geométricas y de compatibilidad por lo que son aplicables independientemente de la relación constitutiva del material. Se retomará este concepto al estudiar el comportamiento de vigas en régimen elasto-plástico.

d) Condiciones de equilibrio. Las siguientes condiciones de equilibrio se deben satisfacer en este caso



$$\mathsf{N} = 0 = \int_A \sigma_3 \, dA \tag{5.14}$$

$$\mathsf{M}_2 = 0 = \int_A \sigma_3 x_1 \, dA \tag{5.15}$$

$$\mathsf{M}_1 = \int_A \sigma_3 x_2 \, dA \tag{5.16}$$

De la condición (5.14), se obtiene

$$\mathsf{N} = 0 = \int_A \sigma_3 \, dA = \int_A E\varepsilon_3 \, dA$$

$$0 = \int_A \underbrace{\frac{E}{\rho}}_{=cte} x_2 \, dA = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_A x_2 \, dA}_{S_1=0} \tag{5.17}$$

De la ecuación (5.17) se concluye que, para satisfacer la ecuación de equilibrio, el momento estático de la sección respecto al eje x_1 debe ser nulo ($S_1 = 0$) lo cual implica que la línea neutra x_1 contiene al centro mecánico (geométrico) de la sección. Este resultado es una reflexión obvia, ya que las tensiones aumentan con la misma pendiente (derivada) en tracción por encima del eje, que en compresión por debajo del eje. Solamente si el eje está exactamente en la posición centroidal habrá equilibrio axial de fuerzas.

Reemplazando ahora la ley constitutiva (5.13) en la condición de equilibrio (5.15) se obtiene

$$0 = \mathsf{M}_2 = \int_A \frac{E}{\rho} x_2 x_1 \, dA = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_A x_2 x_1 \, dA}_{I_{12}=0} \tag{5.18}$$

Esta expresión indica que la línea neutra coincide con el eje principal x_1 de la sección, ya que el producto de inercia con respecto a los ejes x_1 y x_2 es nulo, o sea $I_{12} = 0$.

Reemplazando en la condición de equilibro (5.16) la ley constitutiva (5.13), se obtiene

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 = \int_A \frac{E}{\rho} x_2^2 \, dA = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_A x_2^2 \, dA}_{I_1} \tag{5.19}$$

De la ecuación (5.19) se obtiene la siguiente relación

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx_3} = \frac{\mathsf{M}_1}{E I_1} \tag{5.20}$$

En esta expresión I_1 representa el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje neutro (momento principal de inercia). Es importante notar que, en este caso de flexión simple recta, el eje o línea neutra coincide con el eje principal de inercia de la sección x_1 y el momento de inercia respecto a ese eje es el momento principal de inercia I_1 . Se denotará también a este momento principal de Inercia como I_{11} , porque es la componente del tensor diagonal de inercia. De igual manera se denotará, indistintamente, como I_2 o I_{22} al momento de inercia respecto del eje principal x_2 .

El producto $E I_1 = \mathsf{M}_1 / \kappa$ se denomina rigidez flexional ya que relaciona la deformación por flexión (curvatura κ) con el esfuerzo que la provoca (momento flector).

e) Ecuación de Navier. Considerando la ley de Hooke (ecuación (5.13)) y la ecuación (5.20), se tiene:

$$\sigma = \sigma_3 = E \kappa x_2 \quad \rightarrow \quad \sigma = \cancel{E} \frac{\mathsf{M}_1}{\cancel{E} I_1} x_2 \tag{5.21}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\mathsf{M}_1}{I_1} x_2} \tag{5.22}$$

La ecuación (5.22) se conoce como *ecuación de Navier*. Es obvio, a partir de esta ecuación (lo mismo que de la (5.13)), que las tensiones normales varían linealmente a lo largo de la sección transversal, siendo nulas sobre la línea neutra y alcanzando valores máximos en las fibras más alejadas a esta línea (Figura 5.12). Si se denota a esta distancia como $x_2^{\max}$ se tiene que el valor absoluto de la tensión normal longitudinal máxima en la sección será,

$$|\sigma|^{\max} = \frac{M_1}{\left(\frac{I_1}{x_2^{\max}}\right)} = \frac{M_1}{W_1} \tag{5.23}$$

$$W_1 = \frac{I_1}{x_2^{\max}} \tag{5.24}$$

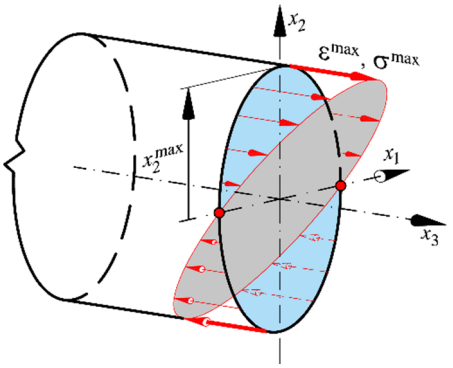


Figura 5.12 – Distribución de tensiones normales en la sección

La cantidad W_1 se denomina *módulo resistente de la sección*. Depende sólo de la geometría de la sección transversal, por lo que es una característica geométrica de ésta y permite el diseño directo de la sección transversal para un dado momento flector y un dado valor nominal de la resistencia del material empleado. Si la tensión admisible del material es σ_{adm}, entonces el diseño elástico de la sección requiere que se cumpla la siguiente condición,

$$|\sigma|^{\max} \leq \sigma_{adm} \quad \rightarrow \quad \frac{M_1}{W_1} \leq \sigma_{adm} \tag{5.25}$$

de donde resulta

$$W_1 \geq \frac{M_1}{\sigma_{adm}} \tag{5.26}$$

5.2.2 Máximo módulo resistente y rendimiento de una sección transversal

Las ecuaciones (5.25) y (5.26) muestran que las secciones más eficientes para resistir a flexión son aquellas que tienen mayor módulo resistente de sección (W_1). La parte de la sección ubicada cerca de la línea neutra tiene una escasa influencia en la resistencia a flexión de la sección, debido a que, por un lado, la variación lineal de las tensiones hace que éstas tengan una magnitud pequeña en las cercanías de la línea neutra y, por otro lado, la resultante de estas tensiones produce un momento muy bajo por ser su brazo de palanca (distancia al eje neutro) muy bajo también. Por estas razones, y desde el punto de vista de la economía de material, las secciones más eficientes son aquella en las que el material se encuentra alejado del eje neutro. Esto se logra incrementando la altura de la sección transversal (en la dirección perpendicular a la línea neutra) y dándole una forma apropiada, como por ejemplo los perfiles **I**. En el primer caso la altura máxima de la sección puede quedar restringida a un valor admisible definido por la posibilidad de inestabilidad estructural (pandeo lateral) o razones constructivas. En el caso de perfiles, el espesor mínimo del alma (elemento vertical del perfil **I**) también dependerá de la estabilidad de la zona comprimida y de las tensiones tangenciales causadas por el cortante, como se estudiará más adelante (Capítulo 6). Para analizar el rendimiento de secciones con distintas formas geométricas se toma una sección de referencia cuyo rendimiento es máximo, tal como se muestra en la Figura 5.13. Allí la sección de área total A está dividida en dos partes de áreas $A/2$, concentradas y separadas una distancia h, de tal forma que el espesor de cada una es mucho menor que h ($e << h$). El módulo de esta sección ideal será máximo y se obtiene como sigue,

$$I_1^{\text{ideal}} = 2\underbrace{I_1^0}_{\approx 0} + 2\left[\frac{A}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] \approx \frac{Ah^2}{4} \tag{5.27}$$

donde I_1^0 es el momento de inercia de cada sección de área $A/2$ respecto al eje x_0 (eje centroidal de cada sección de área $A/2$), e I_1^{ideal} es el momento de inercia de la sección de referencia respecto a la línea neutra (x_1), obtenida luego de aplicar el teorema de Steiner.

Sustituyendo el momento de inercia obtenido por medio de la ecuación (5.27) en la ecuación (5.24) se obtiene el *módulo resistente de la sección ideal*,

$$W_1^{\text{ideal}} = \frac{I_1^{\text{ideal}}}{h/2} = \frac{Ah^2}{4(h/2)} = \frac{Ah}{2} \tag{5.28}$$

El módulo obtenido se utiliza como valor de referencia para definir el *rendimiento geométrico* η de una sección como el cociente dado por

$$\eta = \frac{W_1}{W_1^{\text{ideal}}} = \frac{2}{Ah} W_1 \tag{5.29}$$

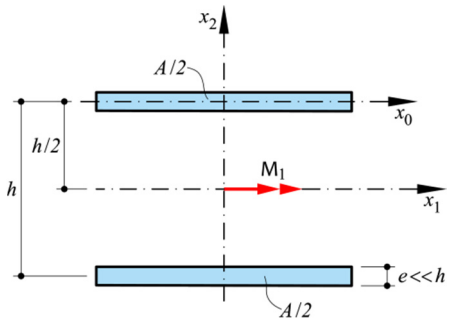
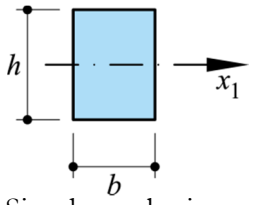


Figura 5.13 – Concepto de máximo módulo de sección.

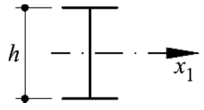
El rendimiento definido por la ecuación (5.29) varía entre cero y uno, $0 < \eta \leq 1$, siendo las secciones más eficientes para resistir flexión recta aquellas cuyo rendimiento se acerque a la unidad ($\eta \to 1$).

Sea, por ejemplo, una sección rectangular de base b y altura h, su módulo de sección y su rendimiento están dados respectivamente por



$$W_1^{\square} = \frac{I_1^{\square}}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6}$$
$$\to \eta^{\square} = \frac{2}{\cancel{Ah}} \frac{\cancel{Ah}}{6} = \frac{1}{3} \tag{5.30}$$

Si se hace el mismo cálculo para una sección **I** de altura h y área A, se obtiene



$$W_1^{\mathbf{I}} \approx \frac{1}{3} Ah \to \eta^{\mathbf{I}} = \frac{2}{\cancel{Ah}} \frac{\cancel{Ah}}{3} = \frac{2}{3} \tag{5.31}$$

De las ecuaciones (5.30) y (5.31) es posible concluir que para la misma área, la resistencia flexional de la viga de sección **I** es aproximadamente dos veces la resistencia de la viga de sección rectangular ($\eta^{\mathbf{I}} = 2\eta^{\square}$). En la Tabla 5.1 se muestran los rendimientos de algunas secciones típicas.

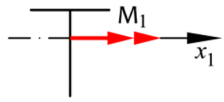
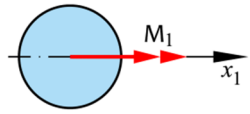
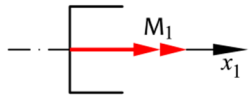
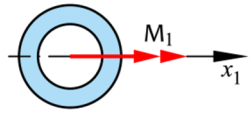
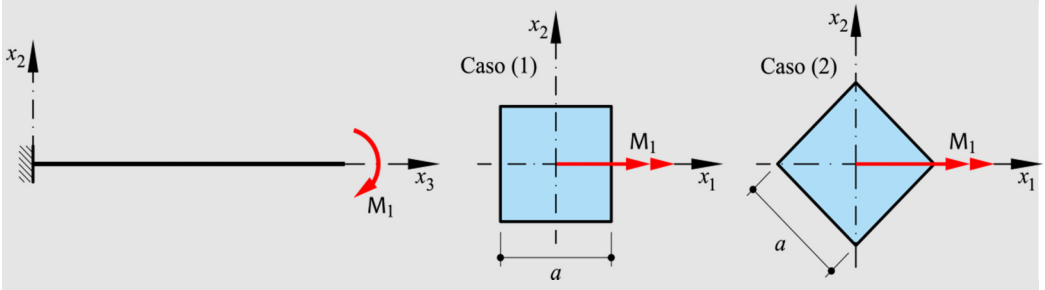
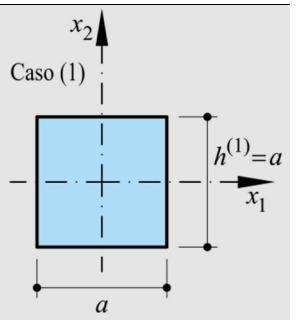
Sección	Rendimiento η
	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{4}$
	$\frac{3}{5}$
	$\frac{1}{2}$

Tabla 5.1 – Rendimiento de distintas secciones transversales.

Ejemplo 5-1: Un momento flector de magnitud M_1 se aplica a una viga en voladizo, de sección transversal cuadrada de lado a. Determinar cuál de las orientaciones mostradas en la figura es la más eficiente para resistir el momento flector.



Rendimiento Caso (1)



En este caso es $h^{(1)} = a$ y el momento de inercia $I_1^{(1)} = \dfrac{a^4}{12}$

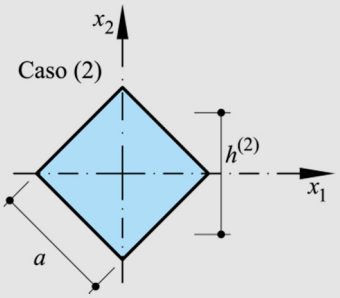
El módulo resistente de la sección para el caso (1) es

$$W_1^{(1)} = \frac{I_1^{(1)}}{h^{(1)}/2} = \frac{a^4}{12}\cdot\frac{2}{a} = \frac{a^3}{6} = A\frac{a}{6}$$

El rendimiento de la sección se obtiene aplicando la ecuación (5.29), es decir

$$\eta^{(1)} = \frac{2}{Ah^{(1)}}W_1^{(1)} = \frac{2}{\cancel{Aa}}\cdot\frac{\cancel{Aa}}{6} = \frac{1}{3}$$ (Coincidente con ecuación (5.30))

Rendimiento Caso (2)



En este caso es $h^{(2)} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

El momento de inercia es $I_1^{(2)} = I_1^{(1)} = \dfrac{a^4}{12}$

El módulo resistente de la sección para el caso (2),

$$W_1^{(2)} = \frac{I_1^{(2)}}{h^{(2)}/2} = \frac{a^4}{12}\cdot\frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}} = A\frac{a}{6\sqrt{2}}$$

El rendimiento de la sección, aplicando la ecuación (5.29), es

$$\eta^{(2)} = \frac{2}{Ah^{(2)}}W_1^{(2)} = \frac{2}{\cancel{Aa}\sqrt{2}}\cdot\frac{\cancel{Aa}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{6}$$

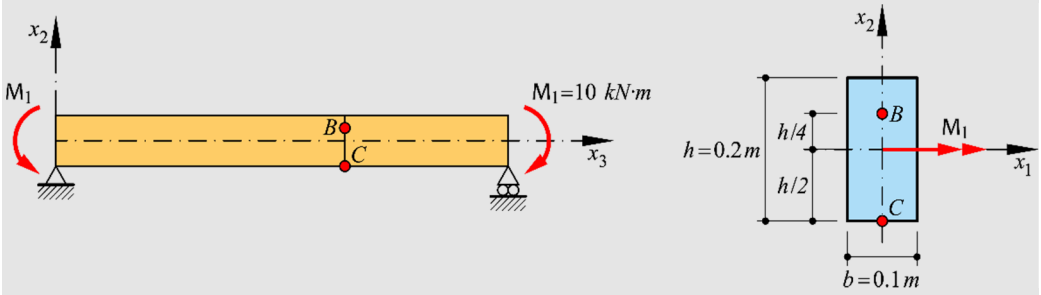
La sección orientada como en el caso (1) es más eficiente que el caso (2), siendo $\eta^{(1)} = 2\eta^{(2)}$.

Ejemplo 5-2: La viga simplemente apoyada de la figura está sometida a flexión pura, mediante la acción de momentos flectores $M_1 = 10\,kN\cdot m$ aplicados en sus extremos. Considerando que el material de la viga tiene un módulo elástico $E = 20\,GPa$ y que la sección transversal de la pieza es rectangular, determinar:

a) El radio de curvatura

b) Las deformaciones longitudinales en los puntos B y C

c) La tensión máxima



a) Radio de curvatura

El momento de inercia de la sección rectangular respecto al eje x_1 es

$$I_1 = \frac{0.1 \cdot 0.2^3}{12} = 6.667 \cdot 10^{-5}\, m^4$$

Sustituyendo en la ecuación (5.20) se obtiene la curvatura

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_1}{E I_1} = \frac{0.01\, MN \cdot m}{20000\, MPa \cdot 6.667 \cdot 10^{-5}\, m^4} = 0.0075\, m^{-1}$$

b) Deformaciones longitudinales

Las deformaciones en los puntos B y C se obtienen reemplazando las ordenadas x_2 de cada punto en la ecuación (5.11),

Punto B $\rightarrow$ $\varepsilon_3^B\left(x_2^B\right) = x_2^B \kappa = \dfrac{0.20\, m}{4} \cdot 0.0075\, m^{-1} = 3.75 \cdot 10^{-4}$

Punto C $\rightarrow$ $\varepsilon_3^C\left(x_2^C\right) = x_2^C \kappa = -\dfrac{0.20\, m}{2} \cdot 0.0075\, m^{-1} = -7.5 \cdot 10^{-4}$

c) Tensión máxima

Las tensiones máximas de tracción y compresión tienen el mismo valor absoluto. Se pueden obtener aplicando la ecuación (5.13) o bien aplicando la ecuación (5.23),

$$\left|\sigma\right|^{\max} = E\left|\varepsilon_3^{\max}\right| = 20000\,MPa \cdot 7.5 \cdot 10^{-4} = 15 MPa$$

$$\left|\sigma\right|^{\max} = \frac{M_1}{W_1} = \frac{0.01 MN \cdot m}{\left(0.1 \cdot 0.2^2\right)/6\, m^3} = \frac{0.01 MN \cdot m}{6.667 \cdot 10^{-4}\, m^3} = 15\, MPa$$

Las deducciones realizadas en esta sección corresponden al caso de flexión pura, donde se observa que sólo se producen tensiones normales en la sección. En el caso de flexión simple (momento variable a lo largo de la pieza) aparece en la sección transversal un esfuerzo cortante, además del momento flector. Por tanto, habrá en la sección transversal, no sólo tensiones normales sino también tensiones tangenciales acompañadas de distorsiones, que se distribuyen de manera no uniforme provocando el *alabeo* de la sección transversal. Es decir que, en la flexión simple, a diferencia de la flexión pura, las secciones transversales de la barra no permanecen planas. Sin embargo, este alabeo no influye de manera sensible en el cálculo de las tensiones normales empleando las ecuaciones (5.22) y (5.23). En particular, cuando el corte es constante en la pieza, el alabeo de las distintas secciones será el mismo por lo que el alargamiento (o acortamiento) de las fibras longitudinales será también el mismo independientemente de que la sección permanezca o no plana. Se retomarán estos conceptos al estudiar las tensiones por corte en el Capítulo 6 de este libro.

Ejemplo 5-3: Dada la viga de la figura, obtener las dimensiones de su sección transversal para que pueda soportar la flexión en la zona más desfavorable, sin que la tensión máxima supere la resistencia límite del material $\sigma^y = 4 \cdot 10^5\, kN \cdot m^{-2}$.

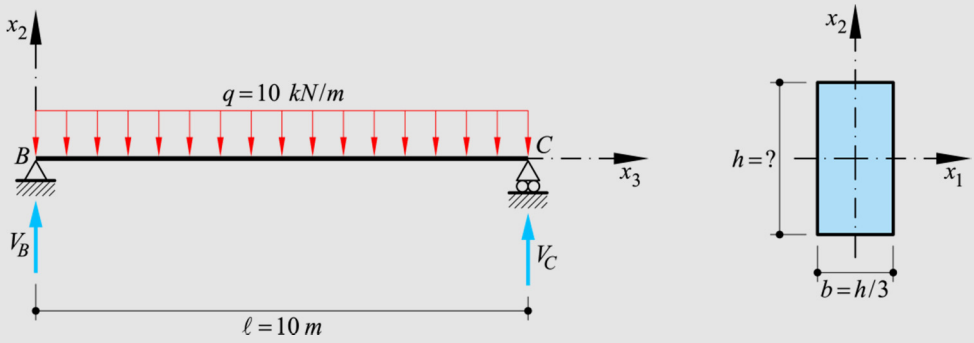
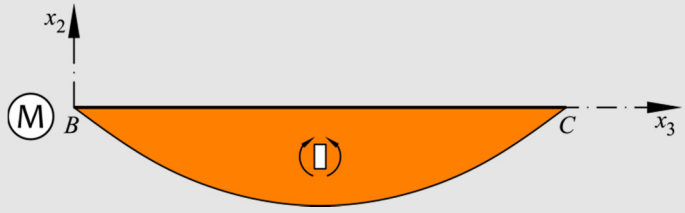


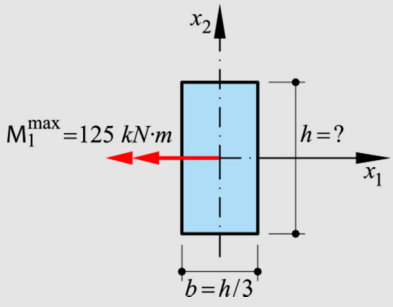
Diagrama de momentos

Por simetría

$$V_B = V_C = \frac{q\,\ell}{2} = \frac{10\cdot 10}{2} = 50\,kN \quad ; \quad M_1^{max} = \frac{q\ell^2}{8} = \frac{10\cdot(10)^2}{8} = 125 kN\cdot m$$



Dimensionado



El momento de inercia de la sección es

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}\left(\frac{h}{3}\right)h^3 = \frac{h^4}{36}$$

Y el módulo resistente de la sección será

$$W_1 = \frac{I_1}{h/2} = \frac{h^4}{36}\frac{2}{h} = \frac{h^3}{18}$$

Aplicando la ecuación (5.26) se dimensiona la sección empleando el módulo obtenido,

$$W_1 \geq \left| \frac{\mathsf{M}_1^{\max}}{\sigma^y} \right| \rightarrow \frac{h^3}{18} \geq \frac{125}{4 \cdot 10^5} \qquad \rightarrow \qquad h \geq \sqrt[3]{5.625 \cdot 10^{-3}} \rightarrow h \geq 0.18\, m$$

Las dimensiones mínimas requeridas para la sección transversal serán

$$h = 0.18\, m; \qquad b = h/3 = 0.06\, m$$

Verificación

El momento de inercia de la sección es

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.06 \cdot (0.18)^3}{12} = 2.916 \cdot 10^{-5}$$

$$\sigma^{\text{trabajo}} = \frac{\mathsf{M}_1^{\max}}{I_1} \frac{h}{2} = \frac{125}{2.916 \cdot 10^{-5}} \frac{0.18}{2} = 3.86 \cdot 10^5 \, \frac{kN}{m^2}$$

Valor ligeramente inferior a la resistencia límite σ^y.

5.2.3 Ecuación de la elástica de Bernoulli

Cuando se estudió el efecto del momento flector en la sección previa (Sec. 5.2.1) se obtuvo la ecuación (5.20) que relaciona el momento con la curvatura del eje de la viga $\kappa = 1/\rho = \mathsf{M}_1 / EI_1$. En esta sección se desarrollará un método basado en la cinemática y la integración directa de la ecuación diferencial de la curvatura para calcular los desplazamientos y las rotaciones de las secciones transversales, que también puede obtenerse mediante consideraciones energéticas.

Para esto, se analiza nuevamente la viga en voladizo de la Figura 5.11 y se considera que el eje de la pieza, luego de la deformación, tiene la forma que se representa con mayor detalle en la Figura 5.14.

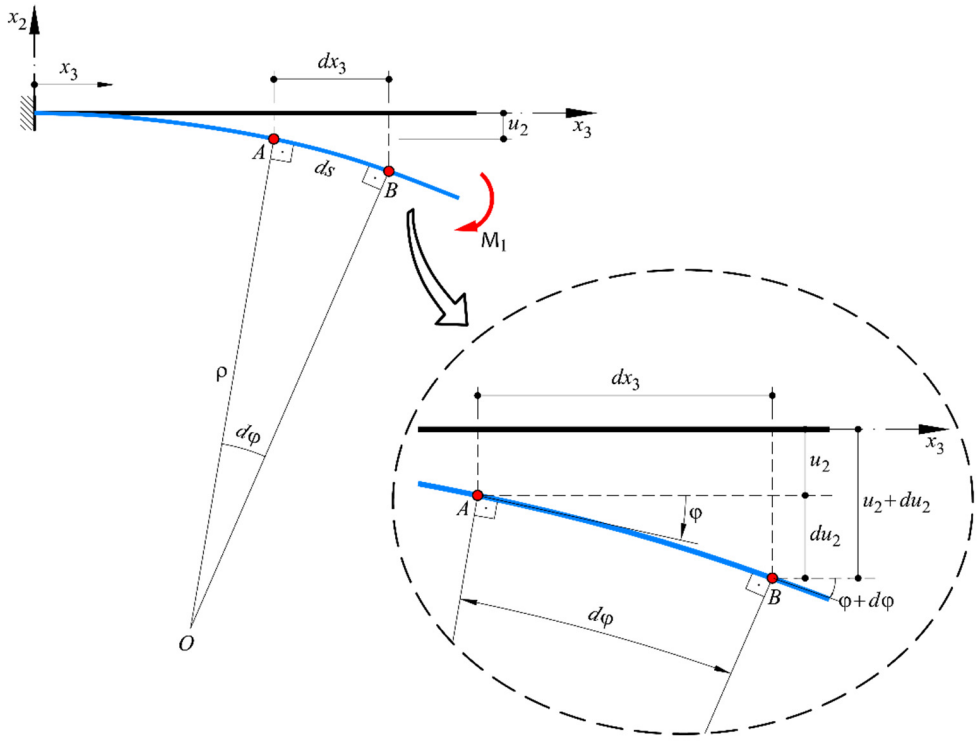


Figura 5.14 – Deflexión del eje de la viga en voladizo por un momento flector positivo.

En la Figura 5.14 se observa claramente que $\rho\, d\varphi = ds$. La ecuación (5.20) puede escribirse como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M_1}{E I_1} \tag{5.32}$$

En la ecuación (5.32) la curvatura puede escribirse como

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx_3}\frac{dx_3}{ds} \tag{5.33}$$

El ángulo φ está relacionado con la curva de deflexión a través de su tangente (ver Figura 5.14)

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{du_2}{dx_3} \quad \rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{du_2}{dx_3}\right) \tag{5.34}$$

Sustituyendo la ecuación (5.34) en la (5.33) se obtiene,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d}{dx_3}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{du_2}{dx_3}\right)\right)\cdot\frac{dx_3}{ds} \tag{5.35}$$

Además, se tiene que

$$ds = \sqrt{du_2^2 + dx_3^2} \quad \rightarrow \quad \frac{ds}{dx_3} = \sqrt{\left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2 + 1} \tag{5.36}$$

De (5.35) y (5.36) se obtiene

$$\frac{d}{dx_3}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{du_2}{dx_3}\right)\right) = \frac{-\dfrac{d^2u_2}{dx_3^2}}{\left(\dfrac{du_2}{dx_3}\right)^2 + 1} \tag{5.37}$$

De (5.35), (5.36) y (5.37), se obtiene la curvatura de Euler Bernoulli para el caso de flexión recta,

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{-\dfrac{d^2u_2}{dx_3^2}}{\left[\left(\dfrac{du_2}{dx_3}\right)^2 + 1\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{5.38}$$

En el caso de material elástico lineal, la segunda igualdad de la ecuación (5.32) es válida. En este caso, la relación entre el momento y la curva de deflexión queda definida por la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{M_1}{EI_1} = -\frac{\dfrac{d^2u_2}{dx_3^2}}{\left[\left(\dfrac{du_2}{dx_3}\right)^2 + 1\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{5.39}$$

La resolución de esta ecuación diferencial es bastante compleja. Sin embargo, en aplicaciones comunes, en el dominio de las pequeñas deformaciones, las rota-

ciones son muy pequeñas. La tangente del ángulo de rotación du_2 / dx_3 (pendiente de la curva de deflexión) es también muy pequeña, por lo que en las ecuaciones (5.38) y (5.39) es

$$\left(\frac{du_2}{dx_3} \right)^2 \simeq 0 \tag{5.40}$$

Luego, para pequeñas deformaciones y rotaciones, las ecuaciones (5.38) y (5.39) están dadas respectivamente por

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 u_2}{dx_3^2} \quad \rightarrow \text{ material con cualquier ley constitutiva} \tag{5.41}$$

$$\frac{\mathsf{M}_1}{E I_1} = -\frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = \frac{d\varphi}{dx_3} \quad \rightarrow \text{ sólo para material elástico lineal} \tag{5.42}$$

La ecuación (5.42) se denomina *ecuación de la elástica de Bernoulli.*

5.2.3.1 Método de integración de la ecuación de la elástica

Este método consiste en la integración de la ecuación (5.42) para obtener los giros (du_2 / dx_3) y los desplazamientos de las secciones (u_2) de una pieza sometida a flexión recta. Se tiene[2],

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{du_2}{dx_3} = \int \frac{1}{\rho} dx_3 + C_1 \\ \varphi &= -\frac{du_2}{dx_3} = -\int \frac{\mathsf{M}_1}{E I_1} dx_3 + C_1 \end{aligned} \tag{5.43}$$

Integrando nuevamente se obtiene la ordenada de la curva de deflexión, es decir el desplazamiento de la barra en la dirección perpendicular a su eje mecánico. Integrando (5.43) se obtiene

[2] Debido a que las deformaciones y rotaciones son pequeñas, φ es infinitesimal, por lo que $\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$

$$u_2 = \int \frac{du_2}{dx_3} dx_3 = -\int \left(\int \frac{1}{\rho} dx_3 \right) dx_3 + C_1 x_3 + C_2$$
$$u_2 = \int \frac{du_2}{dx_3} dx_3 = -\int \left(\int \frac{M_1}{E I_1} dx_3 \right) dx_3 + C_1 x_3 + C_2 \qquad (5.44)$$

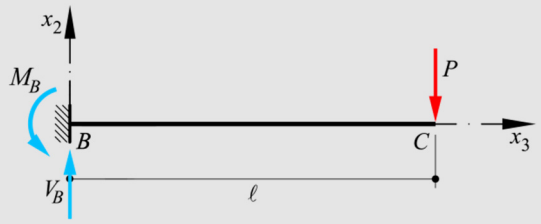
Las constantes de integración C_1 y C_2 se obtienen de las condiciones de apoyo y de continuidad de la barra.

Ejemplo 5-4: La viga en voladizo de la figura es de sección transversal constante, tiene rigidez flexional EI_1 y se encuentra sometida a la acción de una carga vertical P en su extremo libre.

Determinar:

a) La ecuación de la curva elástica.

b) La deflexión y la pendiente en el extremo libre.



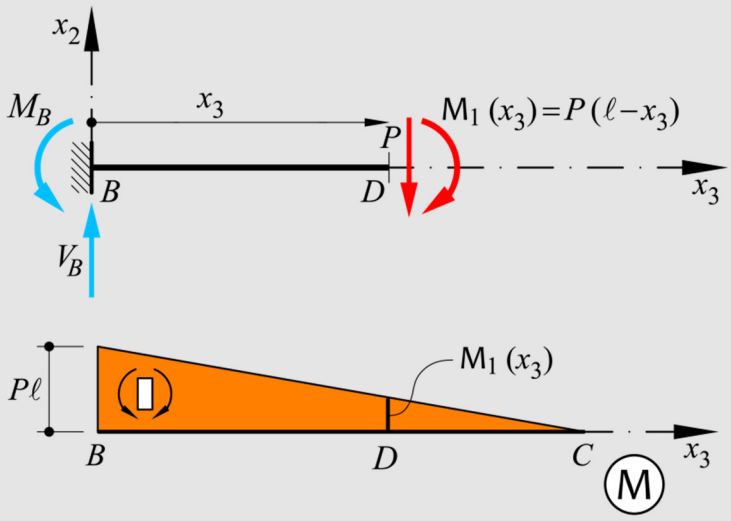
Ley de momentos flectores

A través de las ecuaciones de equilibrio se obtienen las reacciones en el empotramiento:

$$\left.\begin{aligned} \sum F_{x_2} &= 0 = V_B - P = 0 \\ \sum M_B &= 0 = -M_B + P \cdot \ell = 0 \end{aligned}\right\} \qquad M_B = P\,\ell \qquad \text{y} \qquad V_B = P$$

Usando el concepto de diagrama de cuerpo libre BD, donde D está a una distancia x_3 del empotramiento, se obtiene

$$M_1(x_3) = P(\ell - x_3)$$



Ecuación diferencial de la elástica

Sustituyendo el momento obtenido en la ecuación (5.42) se obtiene

$$\frac{d^2u_2}{dx_3^2} = -\frac{\mathrm{M}_1}{EI_1} = -\frac{P(\ell - x_3)}{EI_1} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2u_2}{dx_3^2} = \frac{P(x_3 - \ell)}{EI_1}$$

Siendo M_1 en esta expresión, el momento en la cara izquierda de la rebanada diferencial de la barra.

a) Ecuación de la elástica

$$\frac{d^2u_2}{dx_3^2} = -\frac{\mathrm{M}_1}{EI_1} = -\frac{P(\ell - x_3)}{EI_1} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2u_2}{dx_3^2} = \frac{P(x_3 - \ell)}{EI_1}$$

Primera integración

$$\frac{du_2}{dx_3} = -\varphi = \int \frac{d^2u_2}{dx_3^2}dx_3 = \int \frac{P(x_3 - \ell)}{EI_1}dx_3 = \frac{P}{EI_1}\left(\frac{x_3^2}{2} - \ell x_3\right) + C_1 \qquad \text{(ej.1)}$$

Segunda integración

$$u_2 = \int \frac{du_2}{dx_3}dx_3 = \int \left[\frac{P}{EI_1}\left(\frac{x_3^2}{2} - \ell\, x_3\right) + C_1\right]dx_3 = \frac{P}{EI_1}\left(\frac{x_3^3}{6} - \ell\frac{x_3^2}{2}\right) + C_1x_3 + C_2 \qquad \text{(ej.2)}$$

En este caso, las condiciones de contorno se encuentran establecidas en el empotramiento, siendo

$$x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = -\left.\frac{du_2}{dx_3}\right|_{x_3=0} = 0 \quad \overset{\text{en (ej.1)}}{\rightarrow} \quad C_1 = 0$$

$$x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad u_2\big|_{x_3=0} = 0 \quad \overset{\text{en (ej.2)}}{\rightarrow} \quad C_2 = 0$$

Reemplazando estos resultados en (ej.1) y en (ej.2) se obtiene, respectivamente, la ecuación de la pendiente y de la curva elástica de la pieza

$$\varphi = -\frac{du_2}{dx_3} = -\frac{P}{EI_1}\left(\frac{x_3^2}{2} - \ell\, x_3\right); \qquad u_2 = \frac{P}{EI_1}\left(\frac{x_3^3}{6} - \ell\frac{x_3^2}{2}\right)$$

b) Pendiente y deflexión en el extremo libre

$$\text{En } x_3 = \ell \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \varphi\big|_{x_3=\ell} = \dfrac{P\ell^2}{2EI_1} \\ u_2\big|_{x_3=\ell} = -\dfrac{\ell^3 P}{3EI_1} \end{cases}$$

5.2.4 Energía interna de deformación por flexión recta

Como en el caso de esfuerzo axil, los problemas de flexión pueden con frecuencia resolverse de manera más simple mediante métodos energéticos. Conociendo las tensiones a través de la ecuación (5.22), tanto la energía de deformación como la energía complementaria, pueden obtenerse integrando la energía específica o energía por unidad de volumen.

La energía específica de deformación está dada por

$$\overline{\omega} = \int_{\varepsilon} \sigma\, d\varepsilon = \int_{\varepsilon} E\,\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{2} E\,\varepsilon^2 \tag{5.45}$$

donde, para simplificar la notación, se ha tomado $\sigma_3 = \sigma$ y $\varepsilon_3 = \varepsilon$.

La energía específica complementaria está dada por

$$\overline{\omega}^c = \int_\sigma \varepsilon \, d\sigma = \int_\sigma \frac{\sigma}{E} d\sigma = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} \tag{5.46}$$

Si se tiene una barra de sección transversal A y longitud ℓ, la integración de las ecuaciones (5.45) y (5.46) en el volumen de la pieza permite obtener, respectivamente, la *energía primal o de deformación* y la *energía dual o complementaria.*

La **energía de deformación o primal** se obtiene integrando la ecuación (5.45) en el volumen de la pieza, como sigue

$$\begin{aligned} W &= \int_V \overline{\omega} dV = \int_\ell \left(\int_A \overline{\omega} \, dA \right) dx_3 \\ W &= \int_\ell \left(\int_A \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dA \right) dx_3 = \int_\ell \left(\frac{1}{2} E \int_A \left(\frac{d\varphi}{dx_3} \right)^2 x_2^2 \, dA \right) dx_3 \\ W &= \int_\ell \left(\frac{1}{2} E \left(\frac{d\varphi}{dx_3} \right)^2 \underbrace{\int_A x_2^2 \, dA}_{I_1} \right) dx_3 \end{aligned} \tag{5.47}$$

$$W = \int_\ell \frac{1}{2} E I_1 \left(\frac{d\varphi}{dx_3} \right)^2 dx_3 \tag{5.48}$$

De manera análoga, la **energía complementaria o dual** se obtiene integrando en el volumen la ecuación (5.46),

$$\begin{aligned} W^c &= \int_V \overline{\omega}^c \, dV = \int_\ell \left(\int_A \overline{\omega}^c \, dA \right) dx_3 \\ W^c &= \int_\ell \left(\int_A \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dA \right) dx_3 = \int_\ell \left(\frac{1}{2E} \int_A \left(\frac{\mathsf{M}_1}{I_1} \right)^2 x_2^2 \, dA \right) dx_3 \\ W^c &= \int_\ell \left(\frac{1}{2E} \left(\frac{\mathsf{M}_1}{I_1} \right)^2 \underbrace{\int_A x_2^2 \, dA}_{I_1} \right) dx_3 \end{aligned} \tag{5.49}$$

$$W^c = \int_\ell \frac{M_1^2}{2EI_1} dx_3 = \int_\ell \frac{M_1}{2} d\varphi \tag{5.50}$$

La energía de deformación (primal), dada por la ecuación (5.48), se evalúa cuando la variable del problema es $\varphi(x_3)$. Mientras que la energía complementaria (dual), dada por la ecuación (5.49), se evalúa cuando la variable del problema es $M_1(x_3)$.

Ejemplo 5-5: La viga simplemente apoyada mostrada en la figura, está sometida a la acción de una carga $P = 20kN$ en la mitad de la luz. Se pide:

a) Determinar la sección transversal mínima, utilizando

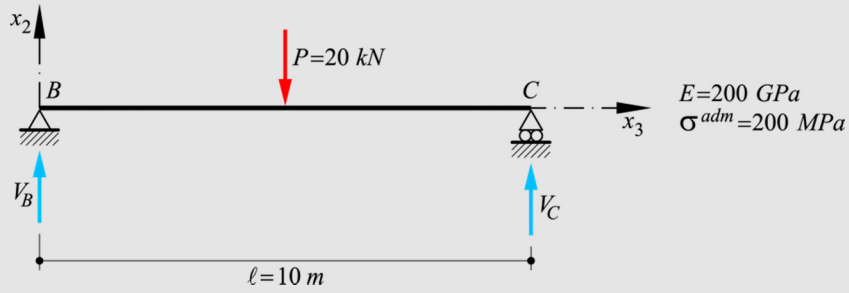
a1) una sección transversal rectangular, adoptando $b = h/3$.

a2) dos perfiles laminados].

b) Obtener las ecuaciones de giro y desplazamiento, así como los valores máximos.

c) Determinar la energía acumulada en función de los desplazamientos (energía primal) y en función de las fuerzas (energía dual).

d) Representar gráficamente la función carga – desplazamiento en el punto de aplicación de la carga.



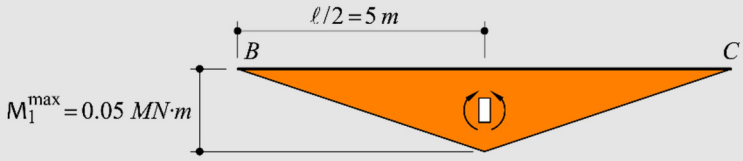
Momento flector máximo

Las reacciones de vínculo se obtienen de manera simple dada la simetría geométrica y mecánica de la pieza,

$$V_B = V_C = \frac{P}{2}$$

El diagrama de momentos es bilineal, alcanzando el valor máximo en $x_3 = \ell/2$,

$$M_1^{max} = \frac{P\,\ell}{4} = \frac{0.02MN \cdot 10\,m}{4} = 0.05\,MN \cdot m$$



a) Sección transversal mínima

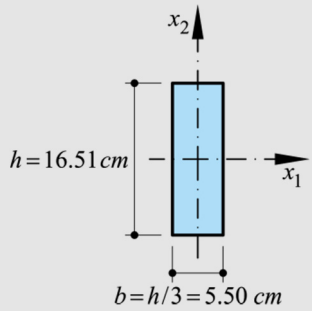
Aplicando la ecuación (5.26) se obtiene el módulo de sección necesario

$$W_1^{nec} \geq \frac{0.05MN \cdot m}{\underbrace{200MPa}_{\sigma^{adm}}} \quad \rightarrow \quad W_1^{nec} \geq 250\,cm^3$$

a1) Sección rectangular

$$W_1^{\square} = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{18} \geq 250\,cm^3$$

$$\rightarrow \quad h \geq \sqrt[3]{250 \cdot 18}\,cm \rightarrow \begin{cases} h = 16.51cm \\ b = h/3 = 5.50cm \end{cases}$$



Resultando el siguiente momento de inercia para la sección rectangular

$$I_1^{\square} = \frac{bh^3}{12} = \frac{5.50 \cdot 16.51^3}{12} = 2062.63\,cm^4$$

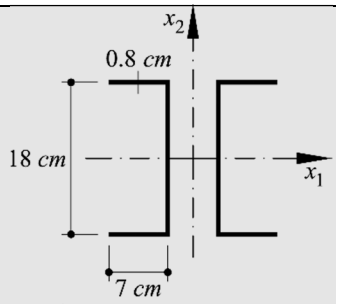
a2) Perfiles laminados]

$$W_1^{\,]} = \frac{W_1^{nec}}{2} = \frac{250}{2}\,cm^3 = 125\,cm^3$$

De tablas de perfiles laminados se pueden obtener las características geométricas del perfil laminado UPN 180, cuyo módulo de sección y momento de inercia son, respectivamente,

$$W_1 = 150\,cm^3; \quad I_1 = 1350\,cm^4$$

Para la sección compuesta por dos perfiles resulta,



$$I_1^{\mathbb{I}} = 2 \cdot 1350 = 2700\, cm^4 ; \quad W_1^{\mathbb{I}} = 300\, cm^3$$

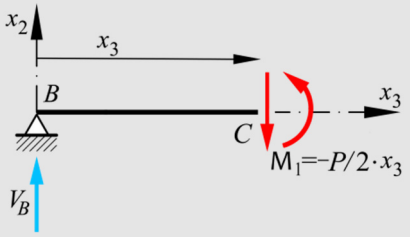
b) Ecuaciones de giro y desplazamiento

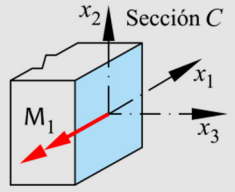
$$\mathrm{M}_1(x_3) = \begin{cases} \dfrac{P}{2} x_3 & \forall \quad x_3 \le \dfrac{\ell}{2} \\ \dfrac{P}{2} x_3 - P\left(x_3 - \dfrac{\ell}{2}\right) = \dfrac{P}{2}(\ell - x_3) & \forall \quad x_3 \ge \dfrac{\ell}{2} \end{cases}$$

Debido a la simetría del problema sólo se analiza el tramo $x_3 \le \dfrac{\ell}{2}$

$$\frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = -\frac{\mathrm{M}_1}{EI_1} = \frac{Px_3}{2EI_1}$$

$$\varphi = -\frac{du_2}{dx_3}$$





Luego de la primera integración se obtiene

$$\frac{du_2}{dx_3} = \int \frac{Px_3}{2EI_1} dx_3 = \frac{Px_3^2}{4EI_1} + C_1 \qquad \rightarrow \varphi = -\frac{Px_3^2}{4EI_1} - C_1$$

La segunda integración lleva a

$$u_2 = \int \left(\frac{Px_3^2}{4EI_1} + C_1 \right) dx_3 = \frac{Px_3^3}{12EI_1} + C_1 x_3 + C_2$$

Condiciones de borde y continuidad

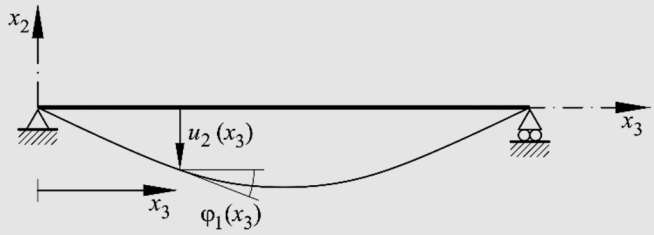
En $x_3 = \dfrac{\ell}{2}$ es $\varphi = 0$ (por simetría);

$$\rightarrow \quad \varphi = -\frac{P\ell^2}{16EI_1} - C_1 = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{P\ell^2}{16EI_1}$$

En $x_3 = 0$ es $u_2 = 0$; $\rightarrow \quad \dfrac{Px_3^3}{12EI_1} - \dfrac{P\ell^2}{16EI_1} x_3 + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$

Sustituyendo en las funciones de giro y desplazamiento resulta

$$\begin{cases} \varphi_1(x_3) = \varphi(x_3) = -\dfrac{Px_3^2}{4EI_1} + \dfrac{P\ell^2}{16EI_1} & \forall\, x_3 \le \dfrac{\ell}{2} \\ u_2(x_3) = \dfrac{Px_3^3}{12EI_1} - \dfrac{P\ell^2}{16EI_1} x_3 & \forall\, x_3 \le \dfrac{\ell}{2} \end{cases}$$



Valores máximos de giro y desplazamiento

El desplazamiento máximo se produce en el punto medio de la pieza ($x_3 = \ell/2$), mientras que el giro máximo se da en los apoyos ($x_3 = 0$ y $x_3 = \ell$),

$$\begin{cases} u_2^{\max} = u(x_3 = \ell/2) = \dfrac{P\ell^3}{96EI_1} - \dfrac{P\ell^3}{32EI_1} = -\dfrac{P\ell^3}{48EI_1} \\ \varphi^{\max} = \varphi(x_3 = 0) = \dfrac{P\ell^2}{16EI_1} \end{cases}$$

Sección rectangular:

$$EI_1^{\square} = 2\cdot 10^5\, MPa \cdot 2.062\cdot 10^{-5}\, m^4 = 4.125 MN\cdot m^2$$

$$\begin{cases} u_2^{\max} = -\dfrac{0.02 MN\cdot 10^3\, m^3}{48\cdot 4.125 MN\cdot m^2} = -0.101 m = -10.1 cm \\ \varphi^{\max} = \dfrac{0.02 MN\cdot 10^2\, m^2}{16\cdot 4.125 MN\cdot m^2} = 0.0303 rad \end{cases}$$

Sección de perfiles:

$$EI_1^{\mathbb{I}} = 2\cdot 10^5\, MPa \cdot 2.7\cdot 10^{-5}\, m^4 = 5.4 MN\cdot m^2$$

$$\begin{cases} u_2^{\max} = -\dfrac{0.02MN\cdot 10^3 m^3}{48\cdot 5.4MN\cdot m^2} = -0.0771m = -7.71cm \\ \varphi^{\max} = \dfrac{0.02MN\cdot 10^2 m^2}{16\cdot 5.4MN\cdot m^2} = 0.023148\,rad \end{cases}$$

c) Energía acumulada de deformación (primal) y energía complementaria (dual)

● **Energía de deformación** – función del desplazamiento

Se utiliza la ecuación (5.48), es decir $W = \int_\ell \dfrac{EI_1}{2}\left(\dfrac{d\varphi}{dx_3}\right)^2 dx_3$

En el inciso anterior se obtuvo,

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x_3) = -\dfrac{Px_3^2}{4EI_1} + \dfrac{P\ell^2}{16EI_1} \quad \forall\, x_3 \le \dfrac{\ell}{2} \\ u_2^{\max} = -\dfrac{P\ell^3}{48EI_1} \quad \rightarrow \quad P = -\dfrac{48EI_1}{\ell^3}u_2^{\max} \end{array}\right\} \varphi(x_3) = \frac{48}{\ell^3}u_2^{\max}\left(\frac{x_3^2}{4} - \frac{\ell^2}{16}\right) \quad \forall\, x_3 \le \frac{\ell}{2}$$

Derivando esta última expresión se obtiene

$$\frac{d\varphi}{dx_3} = \frac{24}{\ell^3}u_2^{\max}x_3\,; \quad \left(\frac{d\varphi}{dx_3}\right)^2 = \frac{576}{\ell^6}\left(u_2^{\max}\right)^2 x_3^2 \quad \forall\, x_3 \le \frac{\ell}{2}$$

Reemplazando en la expresión de la función de energía primal, y multiplicando por 2 para encontrar la energía almacenada en toda la pieza, resulta

$$W = 2\int_0^{\ell/2}\frac{1}{2}EI_1\left(\frac{d\varphi}{dx_3}\right)^2 dx_3 = \int_0^{\ell/2} EI_1\frac{576}{\ell^6}\left(u_2^{\max}\right)^2 x_3^2\,dx_3 = \frac{576EI_1}{\ell^6}\left(u_2^{\max}\right)^2\frac{\ell^3}{24}$$

$$W = \frac{24EI_1}{\ell^3}\left(u_2^{\max}\right)^2$$

Sustituyendo las rigideces flexionales y las deflexiones máximas para la sección rectangular y para los perfiles laminados se obtienes, respectivamente, las siguientes energías acumuladas[3],

[3] Tener presente que $1\,J = 1\,N\cdot m = 0.239006\,cal$

Sección rectangular $W = \dfrac{24 \cdot 4.125 MN \cdot m^2}{10^3 m^3} (0.101)^2 m^2 = 1010 J$

Sección perfiles laminados $W = \dfrac{24 \cdot 5.4 MN \cdot m^2}{10^3 m^3} (0.0771)^2 m^2 = 770 J$

- **Energía complementaria** – función de la fuerza/esfuerzo

Empleando la ecuación (5.50), es decir $W^c = \int_\ell \dfrac{\mathrm{M}_1^2}{2EI_1} dx_3$ y considerando la simetría del problema, la energía complementaria puede escribirse como:

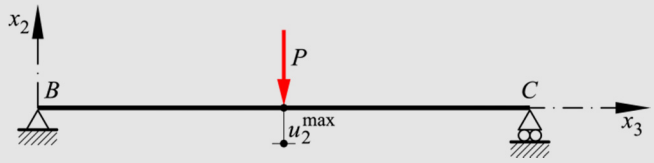
$$W^c = 2\int_0^{\ell/2} \frac{\mathrm{M}_1^2}{2EI_1} dx_3 = \int_0^{\ell/2} \frac{\left(\frac{P}{2} x_3\right)^2}{EI_1} dx_3 = \int_0^{\ell/2} \frac{P^2}{4EI_1} x_3^2 dx_3 = \frac{P^2 \ell^3}{96 EI_1}$$

Sección rectangular $W^c = \dfrac{0.02^2 MN^2 \cdot 10^3 m^3}{96 \cdot 4.125 MN \cdot m^2} = 1010 J$

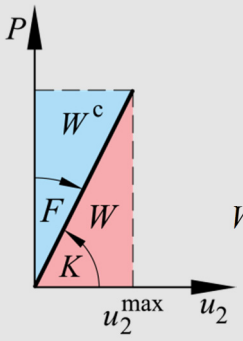
Sección perfiles laminados $W^c = \dfrac{0.02^2 MN^2 \cdot 10^3 m^3}{96 \cdot 5.4 MN \cdot m^2} = 770 J$

Como es lógico, para ambos tipos de secciones, la energía de deformación y la energía complementaria son idénticas, porque se trata de un problema elástico lineal.

d) Función carga – desplazamiento del punto de aplicación de la carga.



$$P = -\underbrace{\frac{48 EI_1}{\ell^3}}_{K} u_2^{\max}; \quad K \rightarrow \text{Rigidez} \qquad u_2^{\max} = -\underbrace{\frac{\ell^3}{48 EI_1}}_{F} P; \quad F \rightarrow \text{Flexibilidad}$$



$$W = W^c = \frac{\left|P u_2^{\max}\right|}{2} \begin{cases} W = \dfrac{\left(\dfrac{48EI_1}{\ell^3} u_2^{\max}\right) u_2^{\max}}{2} = \dfrac{24EI_1}{\ell^3}\left(u_2^{\max}\right)^2 \\ W^c = \dfrac{P}{2}\left(\dfrac{P\ell^3}{48EI_1}\right) = \dfrac{P^2\ell^3}{96EI_1} \end{cases}$$

5.3 Flexión pura esviada - Determinación del estado tensional y eje neutro

Hasta ahora se ha tratado el problema de flexión recta, es decir en barras cuyo plano de cargas coincide con un eje principal de inercia de la sección (esto implica que el correspondiente momento flector está en el eje principal ortogonal)[4]. Por ejemplo, la Figura 5.15 muestra una barra cargada en el eje de simetría (eje principal x_2), sometida por lo tanto a flexión recta, en la que el vector momento resultará contenido en el eje principal de inercia x_1.

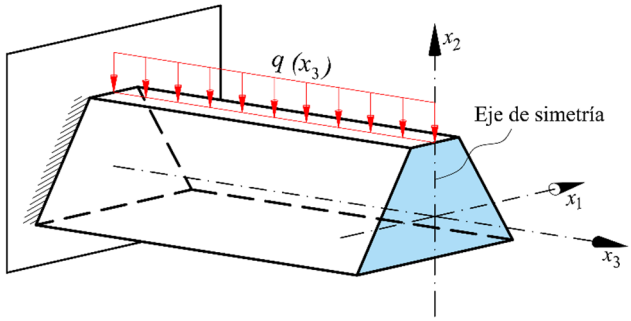
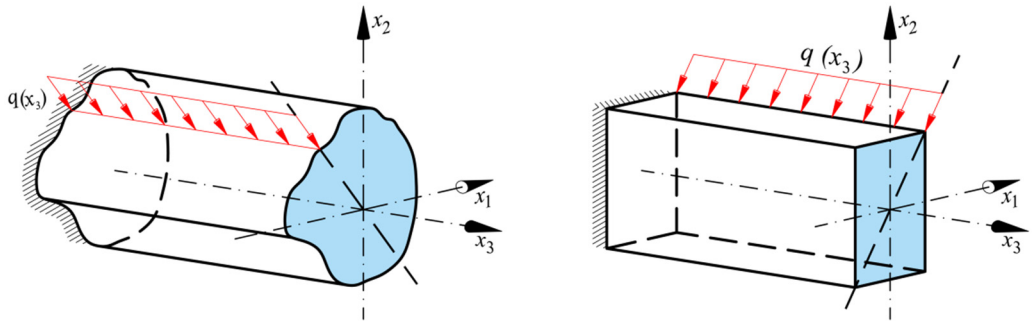


Figura 5.15 – Barra sometida a flexión recta.

En el caso de secciones asimétricas, o secciones simétricas cargadas fuera de su plano de simetría, se tendrá flexión esviada (no-recta). Es decir, se tiene un problema de *flexión*

[4] Notar que en las secciones transversales simétricas, al menos uno de los ejes principales de inercia coincide con un eje de simetría de la sección.

esviada (Figura 5.16) cuando el eje del vector momento, siempre normal al plano de carga, no coincide con ningún eje principal.



a) Secciones asimétricas cargadas fuera de los planos que contienen a los ejes principales de inercia

b) Secciones simétricas cargadas fuera del plano de simetría

Figura 5.16 – Barras sometida a flexión esviada.

La flexión pura esviada es un caso general de la flexión pura recta y puede estudiarse como una superposición de dos flexiones puras rectas, cuyos vectores momentos M_1 y M_2 actuarán, a la vez, sobre los ejes principales de inercia de la sección transversal x_1 y x_2. En flexión esviada, el eje de carga $m-m$ (ver Figura 5.17a y b) no coincide con los ejes principales de inercia de la sección y, como se demostrará luego, el eje neutro no resulta necesariamente perpendicular al eje (plano) de carga.

Si x_1 y x_2 son ejes principales de inercia de la sección, se puede demostrar, como se hará más adelante, que la pieza adquiere una curvatura que resulta de la superposición simultánea de una flexión sobre el eje principal x_1 $(1/\rho_2)$ y otra sobre el eje principal x_2 $(1/\rho_1)$.

Para llevar a cabo este análisis, se descompone el momento M sobre cada eje principal de inercia (x_1, x_2), obteniendo las componentes M_1 y M_2, como se muestra en la Figura 5.17a. De esta manera se tienen dos problemas de flexión recta superpuestos.

La integración de las tensiones normales $\boldsymbol{\sigma} = \{0, 0, \sigma_3\}^T$ en la sección transversal produce el momento resultante $\mathbf{M} = \{\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, 0\}$, esto es

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{d} \times \boldsymbol{\sigma}\, dA \quad \text{siendo:} \quad \boldsymbol{\sigma}\, dA = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} dA; \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ d \cdot \cos\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d \cdot \operatorname{sen}\alpha' \\ d \cdot \cos\alpha' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

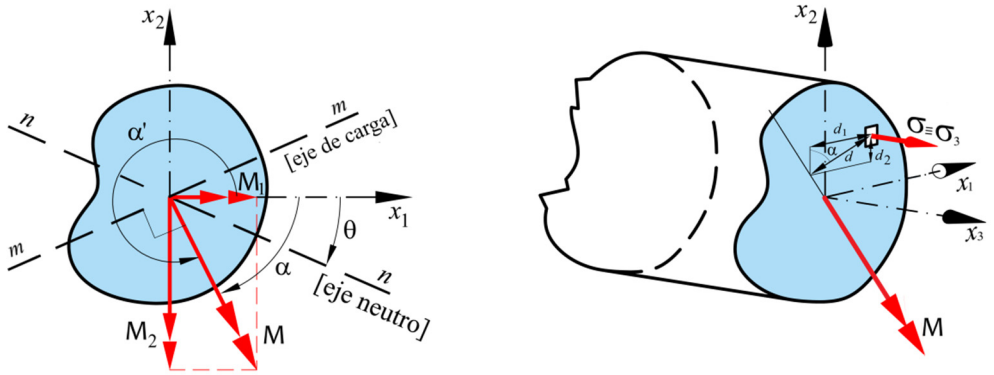


Figura 5.17a– Sección sometida a flexión esviada.

$$\mathbf{M} = \int_A \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_3) \end{bmatrix} dA = \int_A \left[d_2 \cdot (\sigma_3\, dA) \right] \vec{i} - \int_A \left[d_1 \cdot (\sigma_3\, dA) \right] \vec{j} =$$

$$= \int_A \left[d \cdot \cos\alpha' \cdot (\sigma_3\, dA) \right] \vec{i} - \int_A \left[d \cdot \operatorname{sen}\alpha' \cdot (\sigma_3\, dA) \right] \vec{j} =$$

$$= [\underbrace{\int_A \left[d \cdot (\sigma_3\, dA) \right]}_{|M|} \cdot \cos\alpha'] \vec{i} - [\underbrace{\int_A \left[d \cdot (\sigma_3\, dA) \right]}_{|M|} \cdot \operatorname{sen}\alpha'] \vec{j}$$

$$\mathbf{M} = \underbrace{\left[|M| \cos\alpha' \right]}_{M_1} \vec{i} - \underbrace{\left[|M| \operatorname{sen}\alpha' \right]}_{M_2} \vec{j} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M_1 = |M| \cos\alpha' \\ M_2 = -|M| \operatorname{sen}\alpha' \end{cases} \tag{5.51}$$

Siendo α' el ángulo medido en sentido trigonométrico (anti-horario) desde el eje de inercia principal mayor hasta el vector momento, mientras que α es simplemente el menor de los ángulos, entre x_1 y $\mathbf{M}$, sin respetar el sentido trigonométrico.

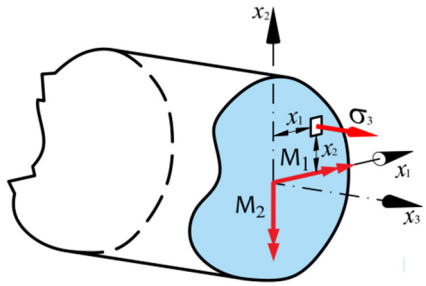
A partir del momento $\mathbf{M}$ se obtienen nuevamente las tensiones reemplazando los momentos dados por las ecuaciones anteriores en la ecuación (5.22), resultando para cada caso,

$$\sigma_3^{M_1}(x_2) = \frac{M_1}{I_1} x_2 = \frac{|M|\cos\alpha'}{I_1} x_2 \tag{5.52}$$

$$\sigma_3^{M_2}(x_1) = \frac{M_2}{I_2} x_1 = \frac{-|M|\,\text{sen}\,\alpha'}{I_2} x_1 \tag{5.53}$$

Se puede concluir que $|M| = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$

con $\begin{cases} M_1 = \int_A \sigma_3 x_2 dA \\ -M_2 = \int_A \sigma_3 x_1 dA \end{cases}$



Los signos se corresponden con la orientación del momento en la sección representado en la Figura 5.17b.

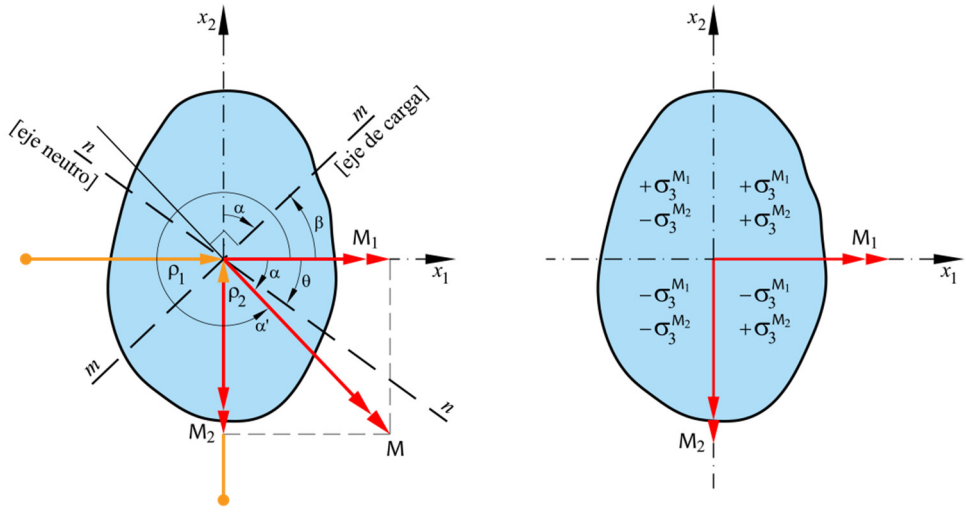


Figura 5.17 b– Ángulos y signos de las tensiones en una sección sometida a flexión esviada.

La tensión resultante se obtiene mediante la suma algebraica de las tensiones dadas por las ecuaciones (5.52) y (5.53). Así, la tensión normal σ_3 actuante en cualquier punto de la sección transversal resulta,

$$\sigma = \sigma_3 = \sigma_3^{M_1}\left(x_2\right) + \sigma_3^{M_2}\left(x_1\right) = \frac{|M|\cos\alpha'}{I_1}x_2 - \frac{|M|\,\text{sen}\,\alpha'}{I_2}x_1 \tag{5.54}$$

$$\sigma = |M|\left(\frac{x_2}{I_1}\cos\alpha' - \frac{x_1}{I_2}\,\text{sen}\,\alpha'\right) \tag{5.55}$$

La ecuación (5.55) puede escribirse en forma matricial de la siguiente forma,

$$\sigma = |M|\left[\cos\alpha' \quad -\text{sen}\,\alpha'\right]\begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{5.56}$$

donde $I_{11} = I_1$, $I_{22} = I_2$ son los momentos principales de inercia de la sección transversal.

La *ecuación del eje neutro* viene definida por el lugar geométrico de los puntos de la sección transversal cuyo estado tensional es nulo, esto es,

$$\sigma = 0 = M\left(\frac{x_2^n}{I_1}\cos\alpha' - \frac{x_1^n}{I_2}\,\text{sen}\,\alpha'\right) \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{x_2^n}{I_1}\cos\alpha' - \frac{x_1^n}{I_2}\,\text{sen}\,\alpha' \tag{5.57}$$

De la ecuación (5.57) se obtiene la *ecuación del eje o línea neutra*

$$x_2^n = x_1^n\left(\frac{I_1}{I_2}\right)\text{tg}\,\alpha' \tag{5.58}$$

Por otro lado, y considerando sólo aspectos geométricos, surge que la pendiente del eje (plano) de carga $m-m$ (ver Figura 5.17b) es

$$K_{m-m} = \text{tg}\,\beta = \text{tg}\left(90-\alpha\right) = -\text{cotg}\,\alpha' \tag{5.59}$$

Y la pendiente del eje (plano) neutro $n-n$ es

$$K_{n-n} = \frac{I_1}{I_2}\text{tg}\,\alpha' \tag{5.60}$$

A partir de las ecuaciones (5.59) y (5.60) se observa que no se cumple la condición de ortogonalidad entre los planos de carga y neutro ya que,

$$K_{m-m} \neq -\frac{1}{K_{n-n}} \tag{5.61}$$

En la Figura 5.18 se muestran ejemplos de vigas con sección transversal simétrica y no simétrica sometidas a flexión esviada. Intuitivamente se puede ver que las piezas no se flexionan en un plano normal al de la carga, sino que lo hacen según la dirección de menor rigidez.

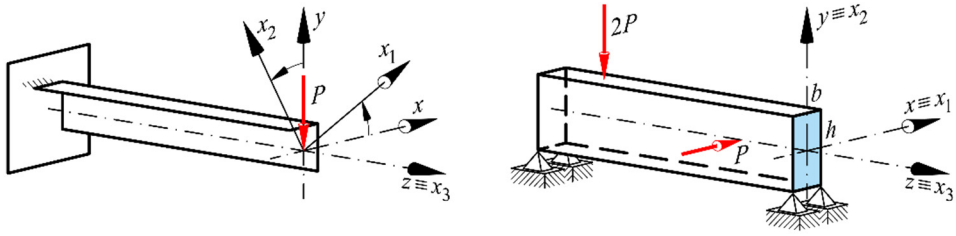


Figura 5.18 – Elementos estructurales sometidos a flexión esviada.

La condición de ortogonalidad sólo se puede cumplir en el caso que sea $I_1 = I_2$ (ecuaciones (5.58) a (5.60)). Esto se cumple, por ejemplo, en secciones con simetría múltiple como el círculo y otros polígonos regulares, en las que cualquier eje centroidal es eje principal de inercia de la sección y, por tanto, se verifica que $I_1 = I_2$.

5.3.1 Ángulos que se producen en la flexión esviada

En la sección transversal representada en la Figura 5.19 actúa un momento flector cuyo vector representativo no está contenido en un eje principal de inercia de la sección. Se admite la hipótesis que la pieza se flexiona según una dirección que puede descomponerse en sus dos direcciones principales $(x_1; x_2)$. De esta manera, las curvaturas según cada dirección principal, se obtienen aplicando para cada dirección la ecuación (5.20), es decir

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{\mathrm{M}_1}{EI_1} = \dfrac{d\varphi_1}{dx_3} = \dfrac{\mathrm{M}\cos\alpha'}{EI_1} \\ \dfrac{1}{\rho_1} = -\dfrac{\mathrm{M}_2}{EI_2} = \dfrac{d\varphi_2}{dx_3} = \dfrac{\mathrm{M}\,\mathrm{sen}\,\alpha'}{EI_2} \end{cases} \tag{5.62}$$

donde $\mathrm{M} = |\mathrm{M}|$ es la magnitud del momento, ya que su orientación viene dada por sus cosenos directores.

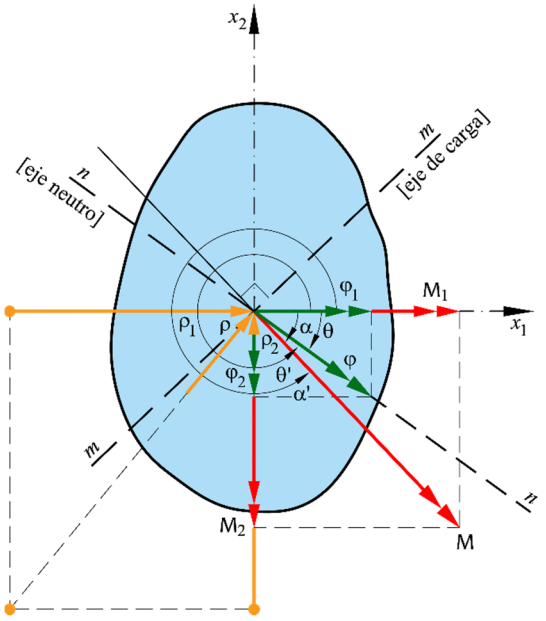


Figura 5.19 – Sección sometida a flexión esviada.

La curvatura total (ver Figura 5.19) se obtiene componiendo las curvaturas en dos planos ortogonales principales dados por las ecuaciones (5.62),

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{dx_3}\equiv\sqrt{\left(\frac{d\varphi_1}{dx_3}\right)^2+\left(\frac{d\varphi_2}{dx_3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{\rho_2}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^2} \tag{5.63}$$

$$\rightarrow\quad \frac{d\varphi}{dx_3}\equiv\frac{M}{E}\sqrt{\left(\frac{\cos\alpha'}{I_1}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{I_2}\right)^2} \tag{5.64}$$

Además,

$$\operatorname{tg}\theta'=\frac{\left(-\dfrac{d\varphi_2}{dx_3}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi_1}{dx_3}\right)}=\frac{\dfrac{M\operatorname{sen}\alpha'}{I_2}}{\dfrac{M\cos\alpha'}{I_1}}=\frac{I_1}{I_2}\operatorname{tg}\alpha' \tag{5.65}$$

La ec. (5.65) coincide con la ec. (5.60), la cual define la posición del eje neutro $n-n$. Asimismo, de la ecuación (5.65) surge que el ángulo de flexión de una sección transversal, está alojado o contenido en el plano neutro.

Por otro lado, la ecuación (5.64) se puede escribir como

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{dx_3}\equiv\frac{M}{EI_{nn}^{*}} \quad \text{con} \quad I_{nn}^{*}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos\alpha'}{I_1}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{I_2}\right)^2}} \tag{5.66}$$

Siendo I_{nn}^{*} el *momento de inercia equivalente* de la sección transversal respecto del *eje neutro.*

5.3.2 Estudio directo de la flexión esviada

En la sección previa se estudió la posibilidad de formular la flexión esviada respecto de ejes principales. Otra posibilidad para el análisis consiste en descomponer el momento sobre el eje neutro, que es el único eje de flexión (o rotación) resultante en el plano de la sección transversal (Figura 5.20). En este caso se retorna a la forma de *Navier* y se procede como si se tratara de un problema de *flexión pura recta sobre el eje neutro.*

a) Relaciones geométricas.

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{dx_3} \tag{5.67}$$

b) Relaciones de compatibilidad.

$$\varepsilon_3\left(x_2\right)=\xi\frac{d\varphi}{dx_3}=\frac{\xi}{\rho} \tag{5.68}$$

donde ξ es la distancia del elemento diferencial de área al eje neutro.

c) Ley constitutiva.

$$\sigma_3=E\varepsilon_3=\frac{E\xi}{\rho} \tag{5.69}$$

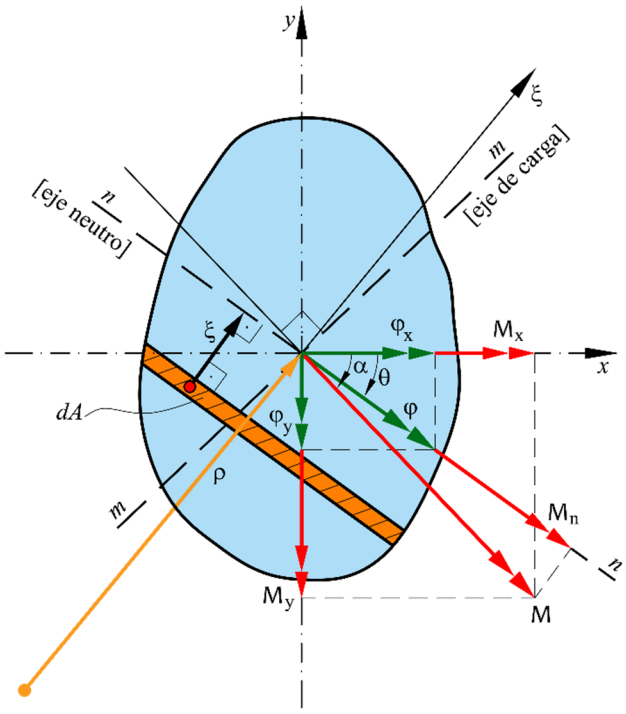


Figura 5.20 – Sección sometida a flexión esviada.

d) Condiciones de equilibrio

$$\mathsf{N}=0=\int_A \sigma_3 dA=\int_A \frac{E\xi}{\rho}dA=\frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A \xi dA}_{S_{nn}=0} \tag{5.70}$$

$S_{nn}=0$ significa que el eje $n-n$ pasa por el centro mecánico de la sección.

$$\mathsf{M}_{nn}=\mathsf{M}\cos(\alpha-\theta)=\int_A \sigma_3 \xi dA=\int_A \frac{E}{\rho}\xi^2 dA=\frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A \xi^2 dA}_{I_{nn}}=\frac{EI_{nn}}{\rho}$$
$$\rightarrow \frac{1}{\rho}=\frac{\mathsf{M}\cos(\alpha-\theta)}{EI_{nn}} \tag{5.71}$$

$$\mathrm{M}_{\xi\xi} = -\mathrm{M}\,\mathrm{sen}\left(\alpha-\theta\right) = \int_A \sigma_3\, n\, dA = \int_A \frac{E\xi n}{\rho}\, dA = 0$$
$$\rightarrow \frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A \xi\, n\, dA}_{I_{\xi n}=0} = 0 \tag{5.72}$$

donde $I_{\xi n}$ es el producto de inercia en ejes de flexión.

Sustituyendo la curvatura dada por la ecuación (5.71) en la ley constitutiva (5.69) se obtiene

$$\sigma_3 = \frac{\mathrm{M}}{\left(\dfrac{I_{nn}}{\cos\left(\alpha-\theta\right)}\right)}\xi = \frac{\mathrm{M}}{I^*_{nn}}\xi \quad \text{con} \quad I^*_{nn} = \frac{I_{nn}}{\cos\left(\alpha-\theta\right)} \tag{5.73}$$

La ecuación (5.73) es la ecuación de *Navier*.

De manera análoga, la curvatura se puede escribir como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx_3} = \frac{\mathrm{M}}{EI^*_{nn}} \quad \text{con} \quad I^*_{nn} = \frac{I_{nn}}{\cos\left(\alpha-\theta\right)} \tag{5.74}$$

Por comparación con la ecuación (5.66) se puede calcular el momento de inercia

$I^*_{nn} = \dfrac{I_{nn}}{\cos\left(\alpha-\theta\right)}$ como,

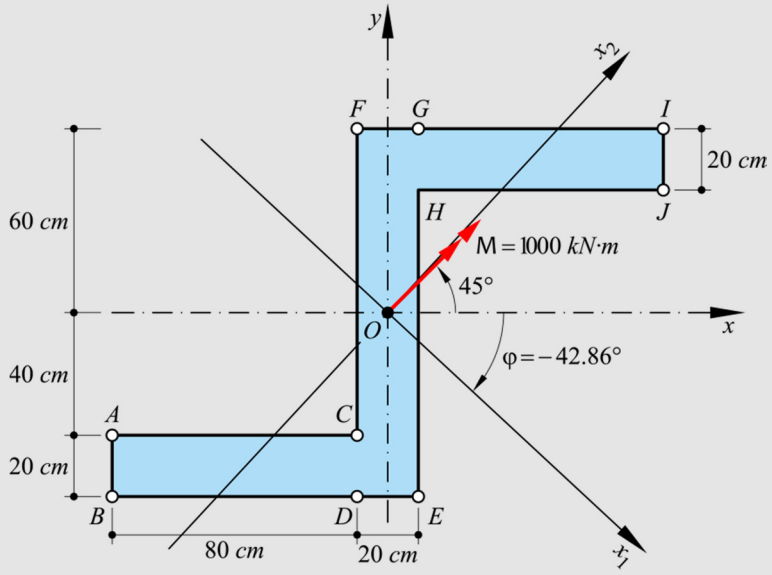
$$I^*_{nn} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\cos\alpha'}{I_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha'}{I_2}\right)^2}} \tag{5.75}$$

Ejemplo 5-6: La sección transversal de una viga, cuya forma y dimensiones se indican en la figura, está sometida a un momento $\mathrm{M} = 1000 kN\cdot m$, aplicado en el centro geométrico $CG =$ "O" de la sección, cuyo vector representativo forma un ángulo de 45º con el eje x. Determinar:

a) La magnitud y signo de la tensión en los puntos I, C.

b) La ecuación de la línea neutra.

c) Los puntos de máxima tensión normal.



Características geométricas de la sección

En primer lugar, se obtienen las características geométricas de la sección para determinar sus ejes y momentos principales de inercia,

$$I_{xx} = \left[\frac{80\cdot 20^3}{12} + (80\cdot 20)\cdot(60-10)^2\right] + \left[\frac{20\cdot 120^3}{12} + 0\right] + \left[\frac{80\cdot 20^3}{12} + (80\cdot 20)\cdot(-60+10)^2\right]$$

$$I_{xx} = 1.099\cdot 10^7\, cm^4$$

$$I_{yy} = \left[\frac{80^3\cdot 20}{12} + (80\cdot 20)\cdot\left(\frac{80}{2}+10\right)^2\right] + \left[\frac{20^3\cdot 120}{12} + 0\right] + \left[\frac{80^3\cdot 20}{12} + (80\cdot 20)\cdot\left(-\frac{80}{2}-10\right)^2\right]$$

$$I_{yy} = 9.787\cdot 10^6\, cm^4$$

$$I_{xy} = \left[0 + (80\cdot 20)\cdot(60-10)\cdot\left(\frac{80}{2}+10\right)\right] + [0] + \left[0 + (80\cdot 20)\cdot(-60+10)\cdot\left(-\frac{80}{2}-10\right)\right]$$

$$I_{xy} = 8\cdot 10^6\, cm^4$$

Con estos resultados se calculan los momentos principales de inercia,

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \begin{cases} I_1 = 1.841\cdot 10^7\, cm^4 \\ I_2 = 2.364\cdot 10^6\, cm^4 \end{cases}$$

Y la orientación de los ejes principales de inercia

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-2I_{xy}}{I_{xx}-I_{yy}}\right) = -42.86^{\mathrm{o}} \qquad \rightarrow \quad \alpha' = 42.86^{\mathrm{o}} + 45^{\mathrm{o}} = 87.86^{\mathrm{o}}$$

Las coordenadas en el sistema de ejes principales de inercia, es decir en la base (x_1, x_2), están dadas por

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \mathrm{sen}\,\varphi \\ -\mathrm{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \qquad \rightarrow \begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ x_2 = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

a) Tensión en el punto $I \rightarrow (x = 90; y = 60)$; $(x_1 = 25.17; x_2 = 105.20)$ cotas en $[cm]$

$$\sigma^{\mathrm{I}}\left(x_1^{\mathrm{I}}, x_2^{\mathrm{I}}\right) = \mathrm{M}\left(\frac{\cos\alpha'}{I_1}x_2^{\mathrm{I}} - \frac{\mathrm{sen}\,\alpha'}{I_2}x_1^{\mathrm{I}}\right)$$

$$\sigma^{I}\left(x_1^{\mathrm{I}}, x_2^{\mathrm{I}}\right) = 1\cdot 10^5\, kN\cdot cm\left(\frac{\cos 87.86^{\mathrm{o}}}{1.841\cdot 10^7\, cm^4}\cdot 105.20 cm - \frac{\mathrm{sen}\,87.86^{\mathrm{o}}}{2.364\cdot 10^6\, cm^4}\cdot 25.17 cm\right)$$

$$\sigma^{I} = -1.042\,\frac{kN}{cm^2} = -10.42 MPa$$

Tensión en el punto $C \rightarrow (x = -10; y = -40)$; $(x_1 = 19.87; x_2 = -36.12)$ (cotas en $[cm]$)

$$\sigma^{C}\left(x_1^{\mathrm{C}}, x_2^{\mathrm{C}}\right) = 1\cdot 10^5\, kN\cdot cm\left(\frac{\cos 87.86^{\mathrm{o}}}{1.841\cdot 10^7\, cm^4}\cdot(-36.12) cm - \frac{\mathrm{sen}\,87.86^{\mathrm{o}}}{2.364\cdot 10^6\, cm^4}\cdot 19.87 cm\right)$$

$$\sigma^{C} = -0.847\,\frac{kN}{cm^2} = -8.47 MPa$$

b) Ecuación de la fibra neutra

$$0 = 1\cdot 10^5\, kN\cdot cm\left(\frac{\cos 87.86^o}{1.841\cdot 10^7\, cm^4}\cdot x_2^n - \frac{\text{sen}\, 87.86^o}{2.364\cdot 10^6\, cm^4}\cdot x_1^n\right)$$

$$0 = \frac{\cos 87.86^o}{1.841\cdot 10^7}\cdot x_2^n - \frac{\text{sen}\, 87.86^o}{2.364\cdot 10^6}\cdot x_1^n$$

$$\rightarrow \quad 0 = 2.033\cdot 10^{-9}\, x_2^n - 4.227\cdot 10^{-7}\, x_1^n$$

$$x_2^n = 207.935\cdot x_1^n \quad \rightarrow \quad \theta = \text{tg}^{-1}\left(207.935\right) = 89.72^o$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-6

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [cm]	y [cm]	x_1 [cm]	x_2 [cm]	σ [kN/cm^2]
2	A	-90	-40	-38.763	-90.540	1.620
3	B	-90	-60	-25.159	-105.200	1.042
4	C	-10	-40	19.878	-36.123	-0.848
5	D	-10	-60	33.482	-50.783	-1.426
6	E	10	-60	48.143	-37.179	-2.043
7	F	-10	60	-48.143	37.179	2.043
8	G	10	60	-33.482	50.783	1.426
9	H	10	40	-19.878	36.123	0.848
10	I	90	60	25.159	105.200	-1.042
11	J	90	40	38.763	90.540	-1.620
12						
13			grados	radianes		
14	**ángulos**	φ	-42.86	-0.748048117		
15		α'	87.86	1.533446281		
16	**Momento Flector**	M	1.00E+05	kN.cm		
17	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	1.841E+07	cm^4		
18		I_2	2.364E+06	cm^4		

c) Punto de máxima tensión

En el punto E se produce la máxima tensión de compresión:

$$\sigma^E = -2.043 kN \cdot cm^{-2} = -20.43 MPa$$

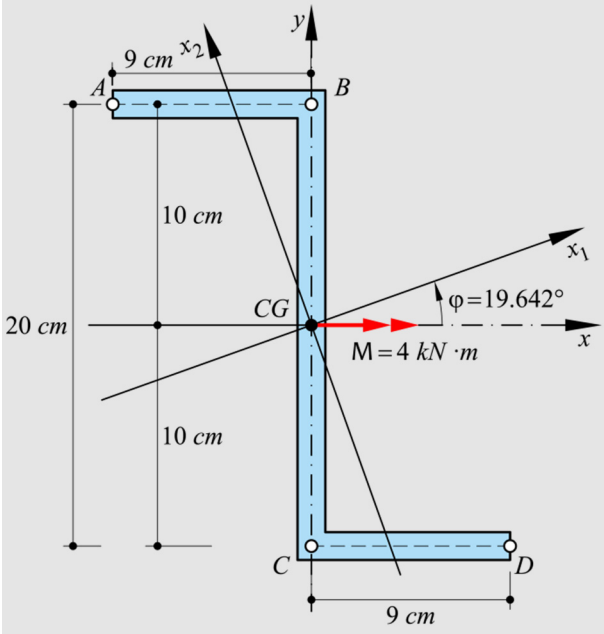
En el punto F la máxima tensión de tracción:

$$\sigma^F = 2.043 kN \cdot cm^{-2} = 20.43 MPa$$

Ejemplo 5-7: Dada la sección de la figura, obtener:

a) Las tensiones producidas por la flexión y su distribución en la sección transversal.

b) La ecuación del eje neutro y su trazado.



Datos:

Espesor $t = 0.15\,cm$

$A = 57\,cm^2$

$I_{xx} = 3705\,cm^4$

$I_{yy} = 734\,cm^4$

$I_{xy} = -1215\,cm^4$

$I_1 = 4139\,cm^4$

$I_2 = 301\,cm^4$

$\varphi = 19.642^o$

$$\rightarrow \quad \alpha' = 360^o - 19.642^o = 340.358^o$$

a) Cálculo de las tensiones

$$\sigma(x_1,x_2)=\left(\frac{M_1}{I_1}x_2-\frac{M_2}{I_2}x_1\right)=M\left(\frac{\cos\alpha'}{I_1}x_2-\frac{\text{sen}\,\alpha'}{I_2}x_1\right)$$

con

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \text{sen}\,\varphi\\ -\text{sen}\,\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\y\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1=x\cos\varphi+y\,\text{sen}\,\varphi\\x_2=-x\,\text{sen}\,\varphi+y\cos\varphi\end{cases}$$

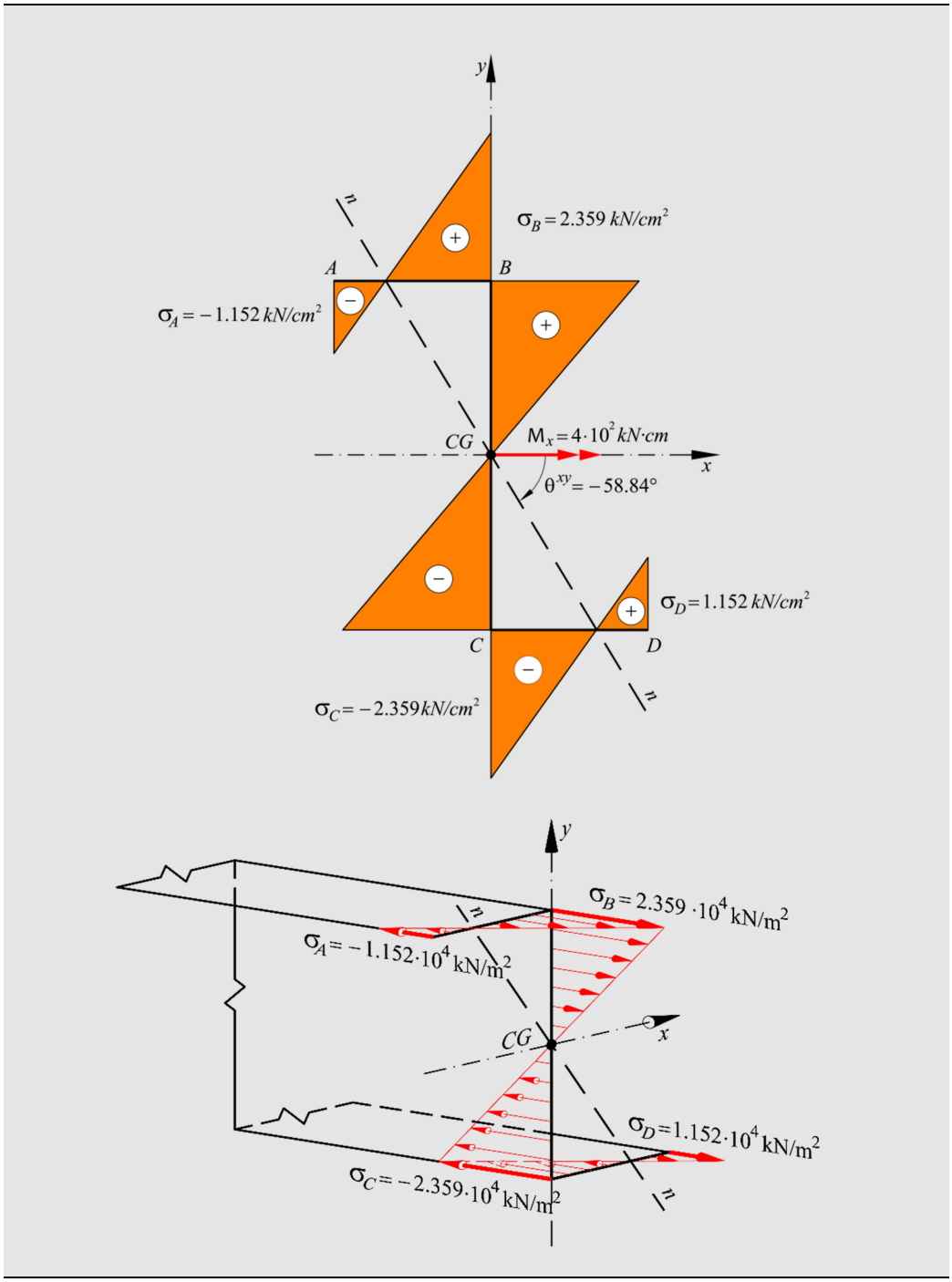
Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-7

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [cm]	y [cm]	x_1 [cm]	x_2 [cm]	σ [kN/cm^2]
2	A	-9	10	-5.115	12.443	-1.152
3	B	0	10	3.361	9.418	2.359
4	C	0	-10	-3.361	-9.418	-2.359
5	D	9	-10	5.115	-12.443	1.152
6						
7			grados	radianes		
8	**ángulos**	φ	19.642	0.342817572		
9		α'	340.358	5.940367736		
10	**Momento Flector**	M	4.00E+02	kN.cm		
11	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	4.139E+03	cm^4		
12		I_2	3.010E+02	cm^4		

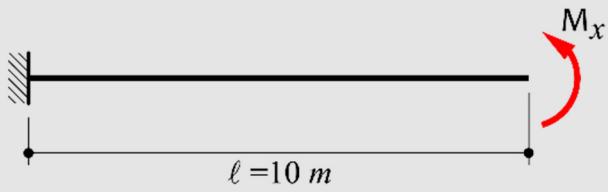
b) Ecuación del eje neutro

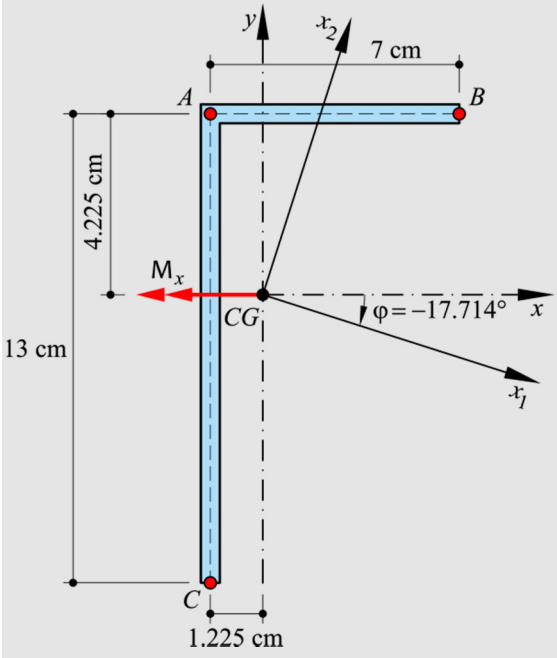
$$x_2^n=x_1^n\left(\frac{I_1}{I_2}\text{tg}\,\alpha'\right)\rightarrow\theta^{x_1x_2}=\text{tg}^{-1}\left(\frac{4139}{301}\text{tg}\,340.358^\circ\right)\rightarrow\theta^{x_1x_2}=-78.484^\circ$$

$$\rightarrow\theta^{xy}=\theta^{x_1x_2}+\varphi=-78.484^\circ+19.642^\circ=-58.8418^\circ$$


y
n
σB = 2.359 kN/cm2
A
B
σA = −1.152 kN/cm2
CG
Mx = 4·10^2 kN·cm
x
θxy = −58.84°
σD = 1.152 kN/cm2
C
D
σC = −2.359 kN/cm2
n
y
σB = 2.359 ·10^4 kN/m2
n
σA = −1.152·10^4 kN/m2
CG
x
σD = 1.152·10^4 kN/m2
σC = −2.359·10^4 kN/m2
n

Ejemplo 5-8: Dada la viga de la figura, obtener la magnitud del momento M para que la tensión máxima en cualquier sección transversal no supere la resistencia límite de $\sigma^f = 4 \cdot 10^5 kN/m^2$.





Datos:

Espesor $t = 0.015\,m$

$A = 0.003\,m^2$

$I_{xx} = 0.5629 \cdot 10^{-5}\,m^4$

$I_{yy} = 0.1264 \cdot 10^{-5}\,m^4$

$I_{xy} = 0.1552 \cdot 10^{-5}\,m^4$

$I_1 = 0.6125 \cdot 10^{-5}\,m^4$

$I_2 = 0.0768 \cdot 10^{-5}\,m^4$

$\varphi = -17.714^o$

$$\rightarrow \quad \alpha' = 180^o + 17.714^o = 197.714^o$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-8.

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [m]	y [m]	x_1 [m]	x_2 [m]	σ/M
2	A	-0.01225	0.04225	-0.02452	0.03652	-15395.756
3	B	0.0578	0.04225	0.04220	0.05783	7725.977
4	C	-0.01225	-0.08775	0.01503	-0.08732	19534.523
5						
6			grados	radianes		
7	**ángulos**	φ	-17.714	-0.309167624		
8		α'	197.714	3.450760277		
9	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	6.125E-06	m^4		
10		I_2	7.680E-07	m^4		

$$\frac{\sigma^f}{M^{\max}} = \frac{4\cdot 10^5}{M^{\max}} = 19534.523 \quad \rightarrow \quad M^{\max} = 20.477 kN\cdot m$$

Ejemplo 5-9: Dada la sección de la figura, obtener:

a) Las tensiones producidas por la flexión y su distribución en la sección transversal

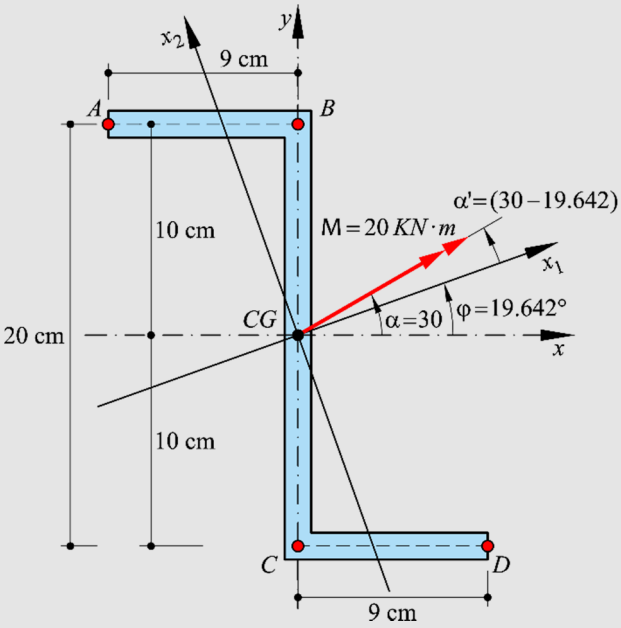
b) La ecuación del eje neutro y su trazado

a) Cálculo de las tensiones

$$\sigma(x_1, x_2) = \left(\frac{M_1}{I_1} x_2 - \frac{M_2}{I_2} x_1 \right) = M \left(\frac{\cos\alpha'}{I_1} x_2 - \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{I_2} x_1 \right)$$

con

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi \\ x_2 = -x\operatorname{sen}\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$



Datos:

Espesor paredes, $t = 0.15\,cm$

$A = 57\,cm^2$

$I_{xx} = 3705\,cm^4$, $I_{yy} = 734\,cm^4$,

$I_{xy} = -1215\,cm^4$

$I_1 = 4139\,cm^4$, $I_2 = 301\,cm^4$,

$\varphi = 19.642^o$

$$\rightarrow \quad \alpha' = 30^o - 19.642^o = 10.358^o$$

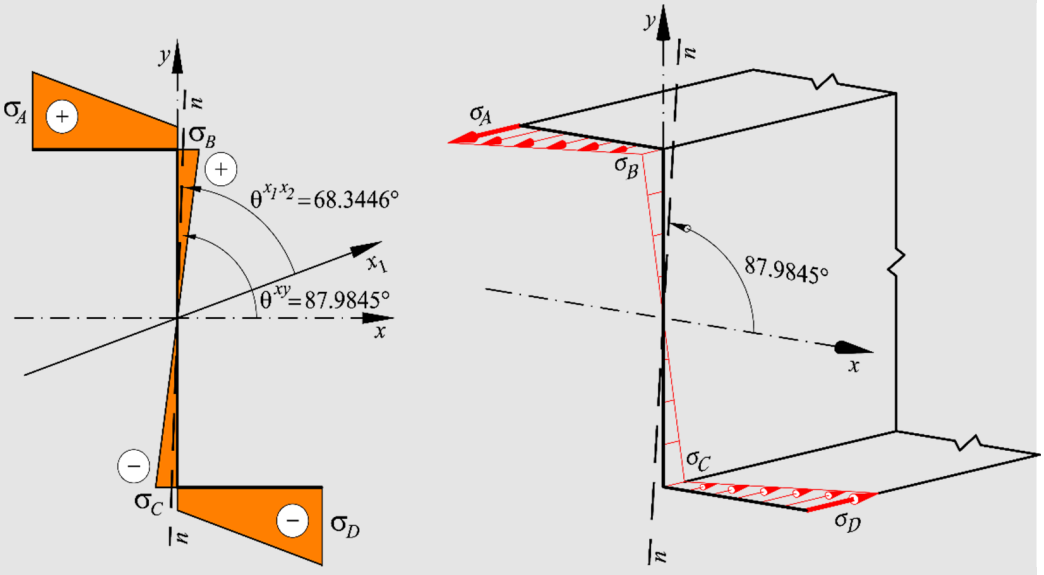
b) Ecuación del eje neutro

$$x_2^n = x_1^n \left(\frac{I_1}{I_2} \operatorname{tg} \alpha' \right) \quad \rightarrow \quad \theta^{x_1 x_2} = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{4139}{301} \operatorname{tg} 10.358^o \right) \quad \rightarrow \quad \theta^{x_1 x_2} = 68.3446^o$$

$$\rightarrow \quad \theta^{xy} = \theta^{x_1 x_2} + \varphi = 68.3446^o + 19.642^o = 87.9845^o$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-9.

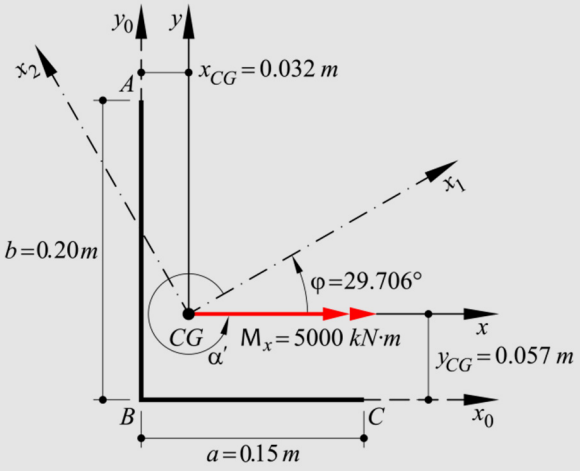
	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [cm]	y [cm]	x_1 [cm]	x_2 [cm]	σ [kN/cm^2]
2	A	-9	10	-5.115	12.443	12.0254
3	B	0	10	3.361	9.418	0.4610
4	C	0	-10	-3.361	-9.418	-0.4610
5	D	9	-10	5.115	-12.443	-12.0254
6						
7			grados	radianes		
8	**ángulos**	φ	19.642	0.342818		
9		α'	10.358	0.180781		
10	**Momento Flector**	M	2000	kN.cm		
11	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	4139	cm^4		
12		I_2	301	cm^4		



Ejemplo 5-10: Dada la sección de la figura, obtener:

a) Las tensiones producidas por la flexión y su distribución en la sección transversal.

b) La posición del eje neutro.



Características geométricas

Espesor paredes, $t=0.01m$

$$A=0.0035\,m^2$$

$$\begin{cases} x_{CG}=0.032\,m \\ y_{CG}=0.057\,m \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{xx}=1.525\cdot10^{-5}\,m^4 \\ I_{yy}=0.765\cdot10^{-5}\,m^4 \\ I_{xy}=-0.643\cdot10^{-5}\,m^4 \end{cases}$$

A partir de estos datos se obtienen el ángulo φ entre la base principal (x_1,x_2) y la base inicial (x,y), y las magnitudes de los momentos principales de inercia

$$\varphi=29.706^{\circ} \quad \text{y} \quad \begin{cases} I_1=1.892\cdot10^{-5}\,m^4 \\ I_2=0.398\cdot10^{-5}\,m^4 \end{cases}$$

Conociendo el ángulo φ se obtiene el ángulo del vector momento respecto de la base principal, con el cual se determian las tensiones normales.

$$\rightarrow \quad \alpha'=360^{\circ}-\varphi=330.294^{\circ}$$

a) Cálculo de las tensiones

$$\sigma(x_1,x_2)=M\left(\frac{\cos\alpha'}{I_1}x_2-\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{I_2}x_1\right)$$

$$\text{con} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \begin{cases} x_1=x\cos\varphi+y\operatorname{sen}\varphi \\ x_2=-x\operatorname{sen}\varphi+y\cos\varphi \end{cases}$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-10.

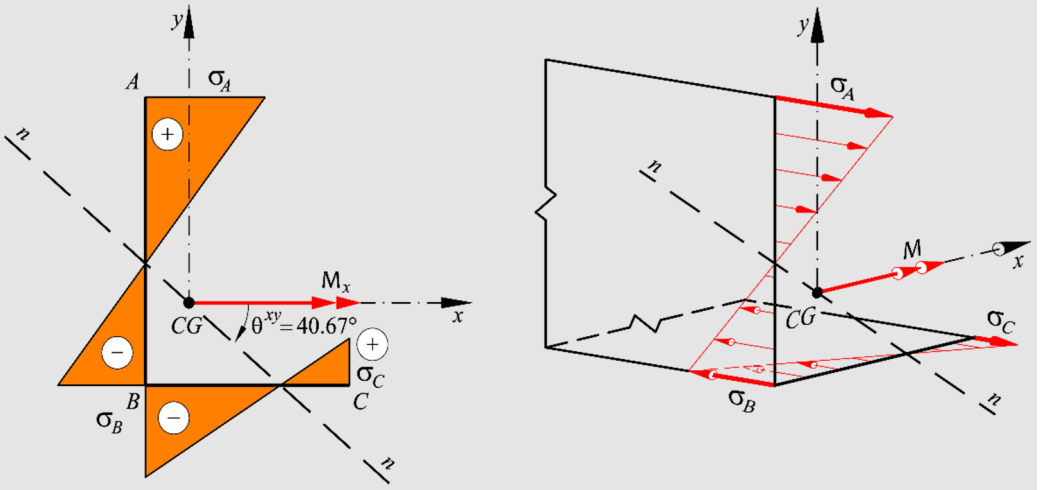
	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [m]	y [m]	x_1 [m]	x_2 [m]	σ [kN/m^2]
2	A	-0,032	0,143	0,043	0,140	5,896E+07
3	B	-0,032	-0,057	-0,056	-0,034	-4,261E+07
4	C	0,118	-0,057	0,074	-0,108	2,144E+07
5						
6	x_{CG}	0,032				
7	y_{CG}	0,057				
8			grados	radianes		
9	**ángulos**	φ	29,706	0,518467508		
10		α'	330,294	5,7647178		
11	**Momento Flector**	M	5,00E+03	kN.m		
12	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	1,892E-05	m^4		
13		I_2	3,980E-06	m^4		

b) Ecuación del eje neutro

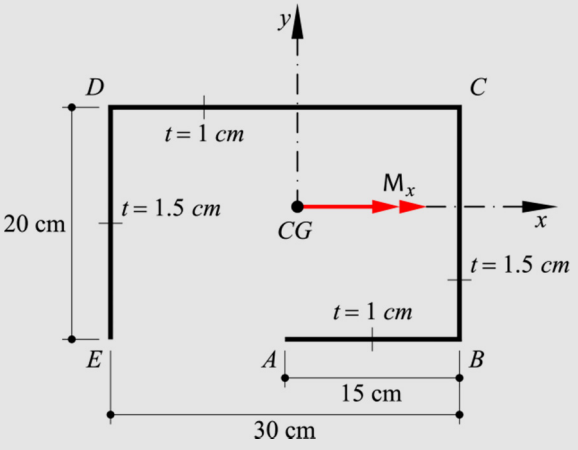
$$\theta^{x_1x_2} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{I_1}{I_2}\text{tg}\,\alpha'\right) \quad \rightarrow \quad \theta^{x_1x_2} = -69.74^{\text{o}}$$

$$\rightarrow \quad \theta^{xy} = \theta^{x_1x_2} + \varphi = -69.74^{\text{o}} + 29.07^{\text{o}} = -40.67^{\text{o}}$$

Distribución de las tensiones producidas por la flexión



Ejemplo 5-11: Dada la sección transversal que se muestra en la figura, determinar la distribución de las tensiones producidas por la flexión cuando se aplica un momento flector de $900\,KN\cdot m$ en su centro geométrico, tal como se indica en la figura.

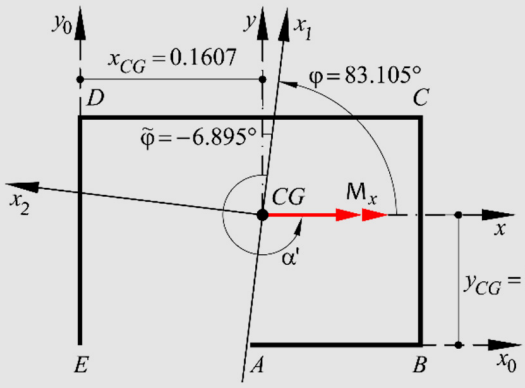


Características geométricas

$$A = 0.011 m^2$$

$$\begin{cases} x_{CG} = 0.1607\,m \\ y_{CG} = 0.11429\,m \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{xx} = 0.6289\cdot 10^{-4}\,m^4 \\ I_{yy} = 1.677\cdot 10^{-4}\,m^4 \\ I_{xy} = -0.1286\cdot 10^{-4}\,m^4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} I_1 = 1.692 \cdot 10^{-4}\, m^4 \\ I_2 = 0.6134 \cdot 10^{-4}\, m^4 \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi} = -6.895^{\circ}$$

$$\varphi = 90 + \tilde{\varphi} = 90^{\circ} - 6.895^{\circ} = 83.105^{\circ}$$

$$\rightarrow \quad \alpha' = 270^{\circ} - \tilde{\varphi} = 270^{\circ} + 6.895^{\circ} = 276.895^{\circ}$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-11.

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [m]	y [m]	x_1 [m]	x_2 [m]	σ [kN/m^2]
2	A	-0.0107	-0.11429	-0.115	-0.003	-1.673E+06
3	B	0.1393	-0.11429	-0.097	-0.152	-1.506E+06
4	C	0.1393	0.08571	0.102	-0.128	1.401E+06
5	D	-0.1607	0.08571	0.066	0.170	1.067E+06
6	E	-0.1607	-0.11429	-0.133	0.146	-1.841E+06
7						
8	x_{CG}	0.1607				
9	y_{CG}	0.11429				
10			grados	radianes		
11	**ángulos**	φ	83.105	1.450455875		
12		α'	276.895	4.832729432		
13	**Momento Flector**	M	9.00E+02	kN.m		
14	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	1.692E-04	m^4		
15		I_2	6.134E-05	m^4		

Cálculo de las tensiones

$$\sigma(x_1, x_2) = M\left(\frac{\cos\alpha'}{I_1}x_2 - \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{I_2}x_1\right)$$

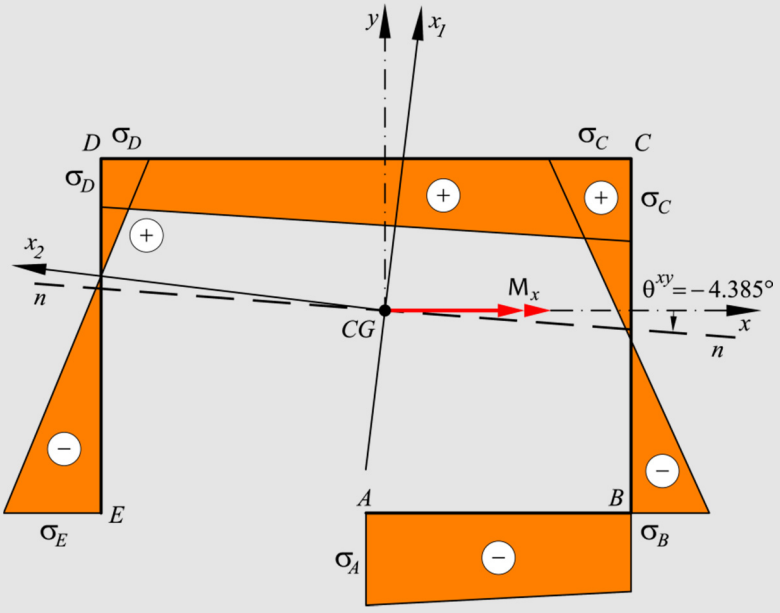
$$\text{con} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi \\ x_2 = -x\operatorname{sen}\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

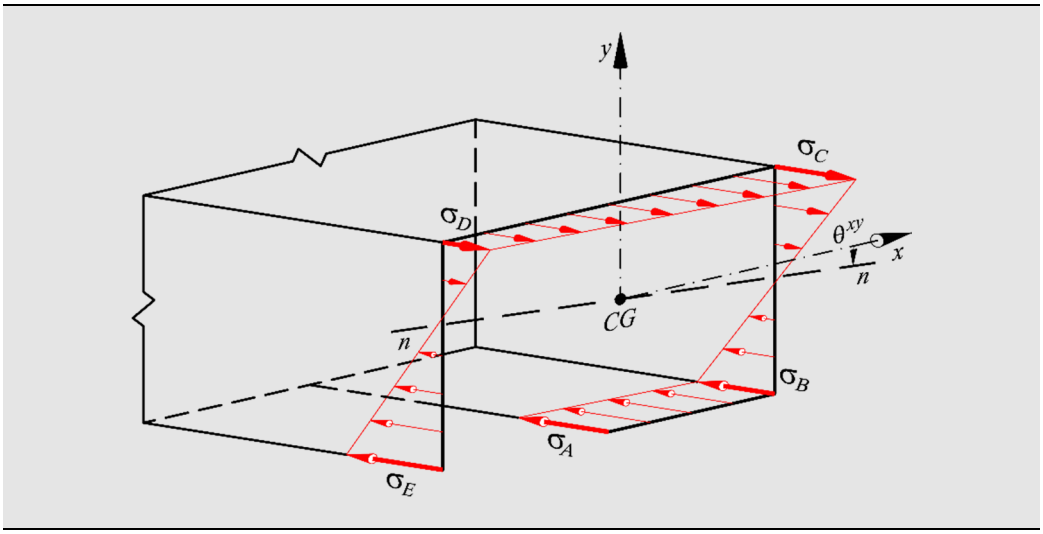
Ecuación del eje neutro

$$\theta^{x_1x_2} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{I_1}{I_2}\operatorname{tg}\alpha'\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1.692\cdot10^{-4}}{0.6134\cdot10^{-4}}\operatorname{tg}276.895^{\circ}\right) \rightarrow \theta^{x_1x_2} = -87.49^{\circ}$$

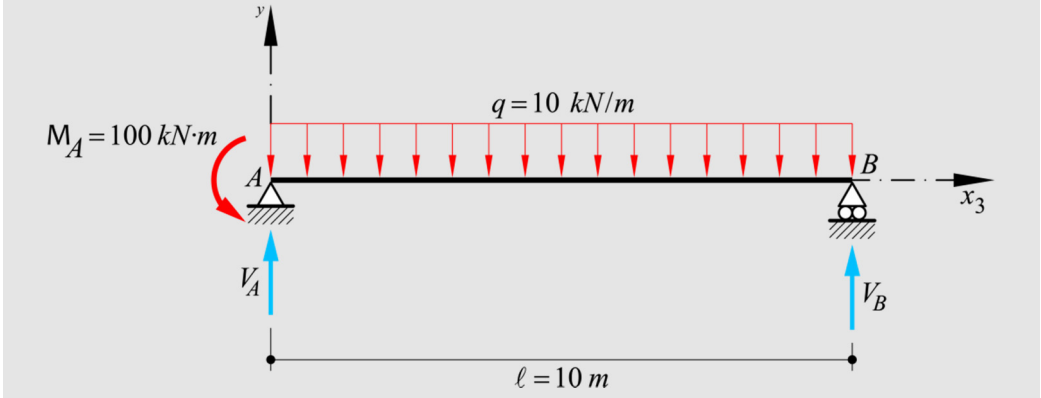
$$\theta^{xy} = \tilde{\varphi} + \theta^{x_1x_2} + 90^{\circ} \rightarrow \theta^{xy} = -6.895^{\circ} - 87.49^{\circ} + 90^{\circ} = -4.385^{\circ}$$

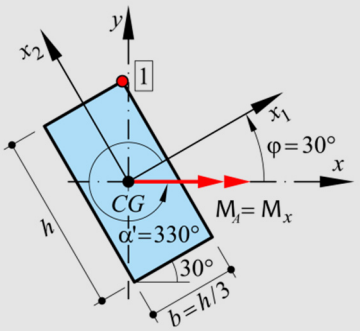
Distribución de las tensiones producidas por la flexión





Ejemplo 5-12: Dada la viga de la figura, obtener las dimensiones de la sección transversal (b , h) para que ésta pueda soportar el máximo momento flector (en valor absoluto), sin que la tensión normal en ningún punto supere la resistencia admisible del material $\sigma^{adm} = 200 MPa$.





Características geométricas

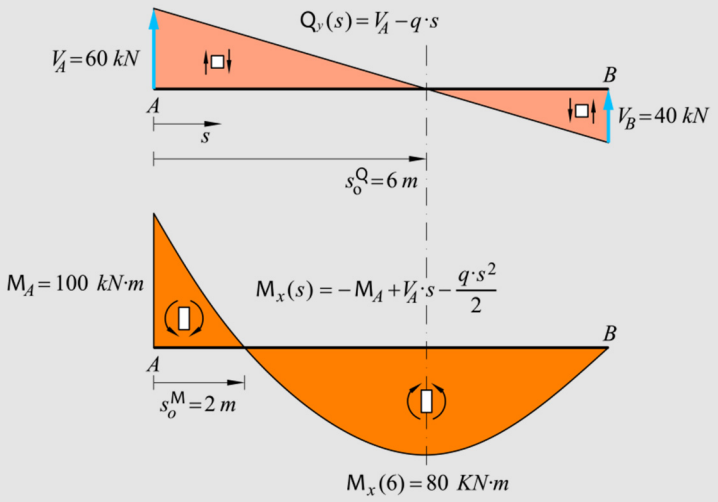
$$I_1 = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{h\,h^3}{3\cdot 12} = \frac{h^4}{36}\ ; \qquad I_2 = \frac{h\,b^3}{12} = \frac{h\,h^3}{3^3\cdot 12} = \frac{h^4}{324}$$

Obtención de las leyes de esfuerzo y del máximo momento

Reacciones de apoyo $V_A = \frac{M_A}{\ell} + \frac{q\ell}{2} = 60kN$ y $V_B = 40kN$

Ley de cortante $Q_y(s) = V_A - q\,s = 60 - 10\,s$

Ley de momento flector $M_x(s) = -M_A + V_A\,s - \frac{q\,s^2}{2} = -100 + 60\,s - 5\,s^2$



$$\left|M^{max}\right| = M(s=0) = M_A = 100KN\cdot m$$

Recordando la ecuación (5.55)

$$\sigma = \mathrm{M}\left(\frac{x_2}{I_1}\cos\alpha' - \frac{x_1}{I_2}\,\mathrm{sen}\,\alpha'\right)$$

La tensión máxima de trabajo se produce en el punto $\boxed{1}$ (fibra más alejada del centro geométrico), por lo que reemplazando en la ecuación de tensión anterior resulta,

$$\sigma^{adm} = \mathrm{M}_A\left(\frac{\cos\alpha'}{I_1}x_2^{\boxed{1}} - \frac{\mathrm{sen}\,\alpha'}{I_2}x_1^{\boxed{1}}\right)$$

En la base $(x_1; x_2)$ las coordenadas del punto $\boxed{1}$ valen $\left(x_1^{\boxed{1}} = h/6; x_2^{\boxed{1}} = h/2\right)$.

Sustituyendo, la tensión resulta,

$$\sigma^{adm} = 100\left[\left(\frac{\cos 330^{\mathrm{o}}}{h^4/36}\right)\frac{h}{2} - \left(\frac{\mathrm{sen}\,330^{\mathrm{o}}}{h^4/324}\right)\frac{h}{6}\right] = \frac{4258.846}{h^3}$$

$$\sigma^{adm} = 200000 = \frac{4258.846}{h^3} \quad \rightarrow \quad h = \sqrt[3]{\frac{4258.846}{200000}} = 0.28\,m$$

$$h = 0.28\,m = 28\,cm\,; \qquad b = \frac{28}{3}\,cm = 9.3\,cm$$

5.3.3 Teoría generalizada de flexión pura esviada

Hasta aquí se ha estudiado la flexión esviada siguiendo dos caminos. Por un lado se realizó el análisis en ejes principales porque son los dos *ejes ortogonales naturales* donde se produce la flexión, y por el otro se ha estudiado la flexión esviada respecto del eje neutro que, como se vio, surge de la composición de los giros que se dan según los dos ejes principales.

Todo lo visto permite resolver cualquier problema de flexión esviada, sin embargo hay casos en los cuales trabajar en ejes principales o con un sistema referido al eje neutro complica la resolución del problema. Además, la forma de trabajo que aquí se plantea derivará más adelante en un análisis del cortante por flexión (ver fórmula de Jouravsky), que puede complicar aún más el análisis. Para evitar esto, se presenta aquí la *teoría generalizada de la flexión*, que permite trabajar con *dos ejes cualesquiera ortogonales y no principales*. Sólo

se requiere que sean ejes centroidales y, en el caso de materiales compuestos, se requiere que estos ejes pasen por el centro mecánico de la sección transversal.

Como no se hace el análisis sobre ejes principales, sino sobre ejes ortogonales $x-y$, las componentes del momento actuante M sobre estos ejes, es decir M_x y M_y, producen flexión en ambos ejes (ver Figura 5.21).

Las tensiones normales se obtienen como

$$\sigma = \sigma_3 = \left(\frac{1}{\rho_y}E\right)y + \left(\frac{1}{\rho_x}E\right)x \quad \neq \quad \left(\frac{M_x}{I_{xx}}\right)y + \left(-\frac{M_y}{I_{yy}}\right)x \tag{5.76}$$

Para provocar una curvatura pura $\kappa_y = 1/\rho_y$ es necesario aplicar momento en dos direcciones ortogonales no principales $(\mathsf{M}_x;\mathsf{M}_y)$; lo mismo que para provocar una curvatura pura $\kappa_x = 1/\rho_x$.

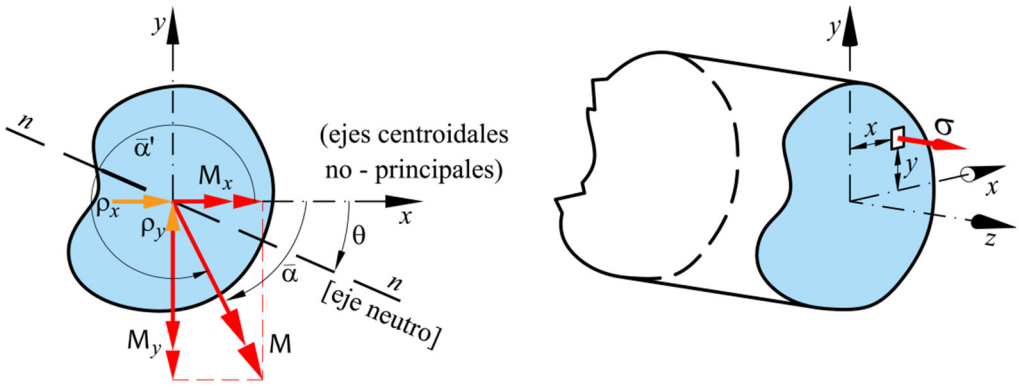


Figura 5.21 – Sección sometida a flexión esviada. Análisis en ejes ortogonales no principales.

Para resolver este problema conceptual es necesario plantear las ecuaciones de equilibrio. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathsf{N} = 0 = \int_A \sigma \, dA &= \int_A \left[\left(\frac{1}{\rho_y} E \right) y + \left(\frac{1}{\rho_x} E \right) x \right] dA \\ &= \left(\frac{1}{\rho_y} E \right) \underbrace{\int_A y \, dA}_{S_y = 0} + \left(\frac{1}{\rho_x} E \right) \underbrace{\int_A x \, dA}_{S_x = 0} \end{aligned} \tag{5.77}$$

En la ecuación (5.77) los momentos estáticos de la sección respecto de los ejes x e y son nulos por ser estos ejes centroidales.

Se plantean a continuación las ecuaciones de equilibrio para los momentos M_x y M_y, donde las incógintas son los radios de curvatura ρ_x y ρ_y,

$$\begin{cases} \mathsf{M}_x = \int_A \sigma \, y \, dA = \int_A \underbrace{\left[\left(\frac{1}{\rho_y} E \right) y + \left(\frac{1}{\rho_x} E \right) x \right]}_{\sigma} y \, dA = \\ \qquad = \frac{1}{\rho_y} E \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{I_{xx}} + \frac{1}{\rho_x} E \underbrace{\int_A y \, x \, dA}_{I_{xy}} = \frac{1}{\rho_y} E I_{xx} + \frac{1}{\rho_x} E I_{xy} \end{cases} \tag{5.78}$$

$$\begin{cases} -\mathsf{M}_y = \int_A \sigma \, x \, dA = \int_A \underbrace{\left[\left(\frac{1}{\rho_y} E \right) y + \left(\frac{1}{\rho_x} E \right) x \right]}_{\sigma} x \, dA \\ \qquad = \frac{1}{\rho_y} E \underbrace{\int_A x \, y \, dA}_{I_{xy}} + \frac{1}{\rho_x} E \underbrace{\int_A x^2 \, dA}_{I_{yy}} = \frac{1}{\rho_y} E I_{xy} + \frac{1}{\rho_x} E I_{yy} \end{cases} \tag{5.79}$$

Resolviendo el sistema dado por las ecuaciones (5.78) y (5.79) se obtienen las curvaturas

$$\kappa_y = \frac{1}{\rho_y} = \frac{I_{yy} \mathsf{M}_x + I_{xy} \mathsf{M}_y}{E \left(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2 \right)} \tag{5.80}$$

$$\kappa_x = \frac{1}{\rho_x} = -\frac{I_{xx} \mathsf{M}_y + I_{xy} \mathsf{M}_x}{E \left(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2 \right)} \tag{5.81}$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.80) y (5.81) en la ecuación de la tensión (5.76) se obtiene la siguiente expresión general,

$$\sigma = \frac{I_{yy}\mathsf{M}_x + I_{xy}\mathsf{M}_y}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\, y - \frac{I_{xx}\mathsf{M}_y + I_{xy}\mathsf{M}_x}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\, x \tag{5.82}$$

Teniendo en cuenta que $\mathsf{M}_x = |\mathsf{M}|\cos\bar{\alpha}'$ y $\mathsf{M}_y = |\mathsf{M}|\operatorname{sen}\bar{\alpha}'$, la ecuación (5.82) también puede escribirse en función del momento flector total M de la siguiente forma (ver Figura 5.21),

$$\sigma = |\mathsf{M}|\left[\left(\frac{I_{yy}\cos\bar{\alpha}' + I_{xy}\operatorname{sen}\bar{\alpha}'}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\right) y - \left(\frac{I_{xx}\operatorname{sen}\bar{\alpha}' + I_{xy}\cos\bar{\alpha}'}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\right) x\right] \tag{5.83}$$

El ángulo $\bar{\alpha}'$ es el ángulo entre el eje de momento de inercia mayor en la base (x, y) y el eje de momento (en sentido trigonométrico). La orientación del eje neutro resulta de la condición $\sigma = 0$ en la ecuación (5.83), es decir,

$$\sigma = 0 = |\mathsf{M}|\left[\left(\frac{I_{yy}\cos\bar{\alpha}' + I_{xy}\operatorname{sen}\bar{\alpha}'}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\right) y^n - \left(\frac{I_{xx}\operatorname{sen}\bar{\alpha}' + I_{xy}\cos\bar{\alpha}'}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\right) x^n\right]$$

$$0 = \left[\left(\frac{I_{yy}\cos\bar{\alpha}' + I_{xy}\operatorname{sen}\bar{\alpha}'}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\right) y^n - \left(\frac{I_{xx}\operatorname{sen}\bar{\alpha}' + I_{xy}\cos\bar{\alpha}'}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\right) x^n\right] \tag{5.84}$$

$$\rightarrow \quad y^n = \left(\frac{I_{xx}\operatorname{sen}\bar{\alpha}' + I_{xy}\cos\bar{\alpha}'}{I_{yy}\cos\bar{\alpha}' + I_{xy}\operatorname{sen}\bar{\alpha}'}\right) x^n$$

Se puede demostrar fácilmente que, a partir de la ecuación (5.83), se puede recuperar la formulación en ejes principales. Si los ejes $x - y$ coinciden con los ejes principales de inercia de la sección $x_1 - x_2$, es decir que $x_1 \equiv x$ y $x_2 \equiv y$, resulta

$$I_{xy} = I_{12} = 0; \quad I_{xx} = I_1; \quad I_{yy} = I_2; \quad \bar{\alpha}' = \alpha' \tag{5.85}$$

Sustituyendo (5.85) en (5.83) se obtiene,

$$\sigma = |\mathsf{M}| \left[\left(\frac{\cancel{I_2}\cos\alpha' + \cancel{I_{12}\operatorname{sen}\alpha'}^{=0}}{I_1 \cancel{I_2} - \cancel{I_{xy}^2}^{=0}} \right) y - \left(\frac{\cancel{I_1}\operatorname{sen}\alpha' + \cancel{I_{12}\cos\alpha'}^{=0}}{\cancel{I_1} I_2 - \cancel{I_{12}^2}^{=0}} \right) x \right]$$
$$= |\mathsf{M}| \left[\left(\frac{\cos\alpha'}{I_1} \right) x_2 - \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{I_2} \right) x_1 \right] \tag{5.86}$$

Otro camino para deducir la fórmula generalizada de la flexión en ejes cualesquiera centrales ortogonales es trabajando en forma matricial. Para ello, se considera nuevamente la ecuación (5.56), que permite obtener la tensión por flexión trabajando en ejes principales y que, para mayor claridad, se reescribe a continuación,

$$\sigma = \overbrace{|\mathsf{M}| \begin{bmatrix} \cos\alpha' & -\operatorname{sen}\alpha' \end{bmatrix}}^{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{5.87}$$

Los momentos principales de inercia (I_1, I_2) pueden escribirse respecto de cualquier sistema de ejes ortogonales (x, y) con el mismo origen de coordenadas (ver Apéndice). Es decir,

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} \tag{5.88}$$

Sustituyendo (5.88) en (5.87) y escribiendo el momento flector $\mathbf{M}$ en la base (x, y), se tiene

$$\sigma = \overbrace{|\mathsf{M}| \begin{bmatrix} \cos\bar{\alpha}' & -\operatorname{sen}\bar{\alpha}' \end{bmatrix}}^{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} \tag{5.89}$$

Operando,

$$\sigma = \frac{|\mathsf{M}|}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \begin{bmatrix} \cos\bar{\alpha}' & -\operatorname{sen}\bar{\alpha}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{yy} & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} \tag{5.90}$$

$$\sigma = \frac{|M|}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\left[I_{yy}\cos\bar{\alpha}' + I_{xy}\text{sen}\,\bar{\alpha}';\quad -I_{xy}\cos\bar{\alpha}' - I_{xx}\text{sen}\,\bar{\alpha}' \right]\begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{|M|}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\left[\left(I_{yy}\cos\bar{\alpha}' + I_{xy}\text{sen}\,\bar{\alpha}' \right) y - \left(I_{xy}\cos\bar{\alpha}' + I_{xx}\text{sen}\,\bar{\alpha}' \right) x \right] \tag{5.91}$$

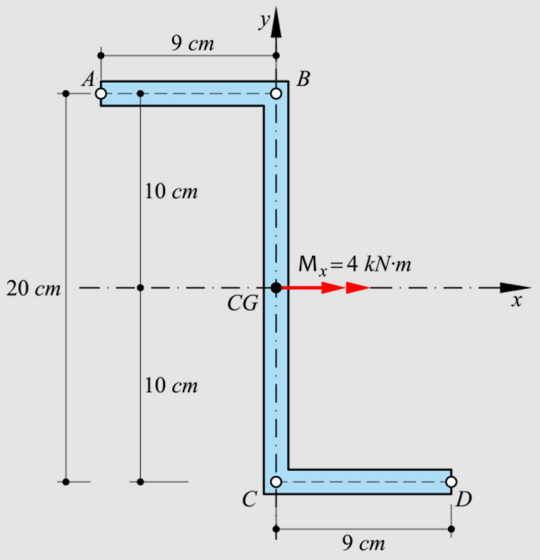
Finalmente, se obtiene la siguiente ecuación que permite determinar la tensión por flexión medida en ejes cualesquiera centrales ortogonales,

$$\sigma = \frac{1}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\left[\left(I_{yy}\underbrace{|M|\cos\bar{\alpha}'}_{M_x} + I_{xy}\underbrace{|M|\,\text{sen}\,\bar{\alpha}'}_{M_y} \right) y - \left(I_{xy}\underbrace{|M|\cos\bar{\alpha}'}_{M_x} + I_{xx}\underbrace{|M|\,\text{sen}\,\bar{\alpha}'}_{M_y} \right) x \right] \tag{5.92}$$

$$\sigma = \frac{M_x I_{yy} + M_y I_{xy}}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\, y - \frac{M_y I_{xx} + M_x I_{xy}}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\, x \tag{5.93}$$

Se observa que esta última ecuación coincide con la ecuación (5.82) antes deducida.

Ejemplo 5-13: Resolver el **Ejemplo 5-7** aplicando la fórmula de la flexión generalizada para ejes cualesquiera.



Datos:

Espesor paredes, $t = 0.15\,cm$

$A = 57\,cm^2$

$I_{xx} = 3705\,cm^4$

$I_{yy} = 734\,cm^4$

$I_{xy} = -1215\,cm^4$

a) Cálculo de las tensiones

$$\sigma = \frac{M_x I_{yy} + M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} y - \frac{M_y I_{xx} + M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} x$$

$$M_x = 4\,kN \cdot m; \qquad M_y = 0\,; \qquad \hat{I} = I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2$$

$$\rightarrow \quad \sigma = \frac{M_x I_{yy}}{\hat{I}} y - \frac{M_x I_{xy}}{\hat{I}} x = \frac{M_x}{\hat{I}} \left(I_{yy} y - I_{xy} x \right)$$

b) Ecuación del eje neutro

$$\sigma = 0 = \frac{M_x}{\hat{I}} \left(I_{yy} y^n - I_{xy} x^n \right) \quad \rightarrow \quad I_{yy} y^n - I_{xy} x^n = 0$$

$$y^n = \frac{I_{xy}}{I_{yy}} x^n = -\frac{1215}{734} x^n = -1.655\, x^n$$

$$\operatorname{tg} \theta^{xy} = \frac{y^n}{x^n} = -1.655 \quad \rightarrow \quad \theta^{xy} = \operatorname{tg}^{-1} \left(-1.655 \right) = -58.858^{\circ}$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-13.

	A	B	C	D
1	**Punto**	x [cm]	y [cm]	σ [kN/cm^2]
2	A	-9	10	-1.157
3	B	0	10	2.362
4	C	0	-10	-2.362
5	D	9	-10	1.157
6				
7				
8	**Momento Flector**	M_x	4.000E+02	kN.cm
9	**Momentos de inercia**	I_x	3.705E+03	cm^4
10		I_y	7.340E+02	cm^4
11		I_{xy}	-1.215E+03	cm^4
12		$\hat{I}$	1.243E+06	cm^4

5.4 Flexión compuesta

Se define la *flexión compuesta* como aquella solicitación que se produce cuando sobre la sección transversal actúa un momento flector y un esfuerzo axil o normal a dicha sección (ver Figura 5.22).

Las hipótesis de la Resistencia de Materiales, que se consideran válidas, permiten abordar el problema aplicando el principio de superposición, o sea que los efectos de la solicitación por flexión compuesta pueden obtenerse como la suma de un estado de flexión más uno de tracción o compresión según sea el signo del esfuerzo axil. Si se tiene el caso de flexión compuesta recta, la tensión normal resultante será la suma algebraica de la tensión por flexión recta más la tensión por la fuerza axil, es decir,

$$\sigma = \sigma^{N} + \sigma^{M} = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1} x_2 \tag{5.94}$$

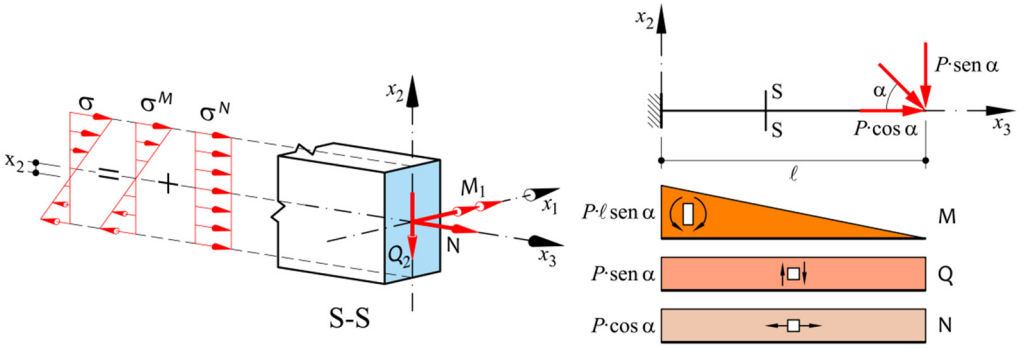


Figura 5.22 – Flexión compuesta recta.

Este problema se puede plantear también de otra manera si se admite que la flexión se produce por la excentricidad de la fuerza normal o axil (ver Figura 5.23). Esto es,

$$M_1 = N e_2 \tag{5.95}$$

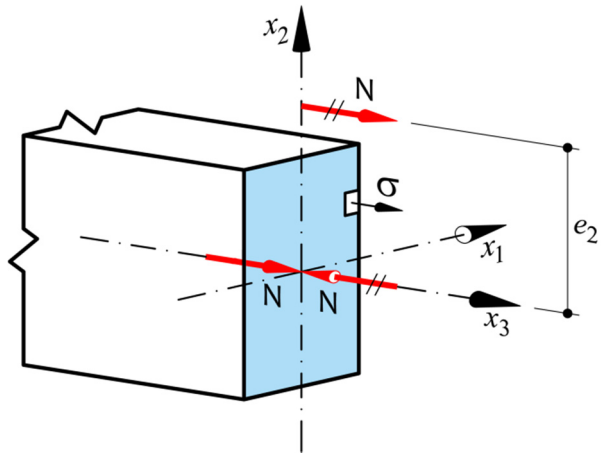


Figura 5.23 – Sección sometida a flexión compuesta - carga excéntrica.

Escribiendo ahora la ecuación (5.95) teniendo en cuenta la ecuación del momento en función de la excentricidad y del radio de giro de la sección transversal ($i_1^2 = I_1 / A$), resulta la siguiente expresión para la tensión en función de la excentricidad,

$$\sigma = \frac{\mathrm{N}}{A} + \frac{\overbrace{\mathrm{N}e_2}^{\mathrm{M_1}}}{I_1} x_2 = \frac{\mathrm{N}}{A}\left(1 + \frac{e_2}{\underbrace{I_1 / A}_{i_1^2}} x_2\right) = \frac{\mathrm{N}}{A}\left(1 + \frac{e_2}{i_1^2} x_2\right) \tag{5.96}$$

Obsérvese que la acción del esfuerzo normal hace que el eje neutro se aleje del centro mecánico, como se observa en la Figura 5.24.

En la Figura 5.24 se puede apreciar que al reducir la excentricidad e_2 el eje neutro se aleja del centro mecánico de la sección, tal que

- para $e_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^n \to \infty$, se tiene esfuerzo axil puro
- para $e_2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad x_2^n = 0$, se tiene flexión pura

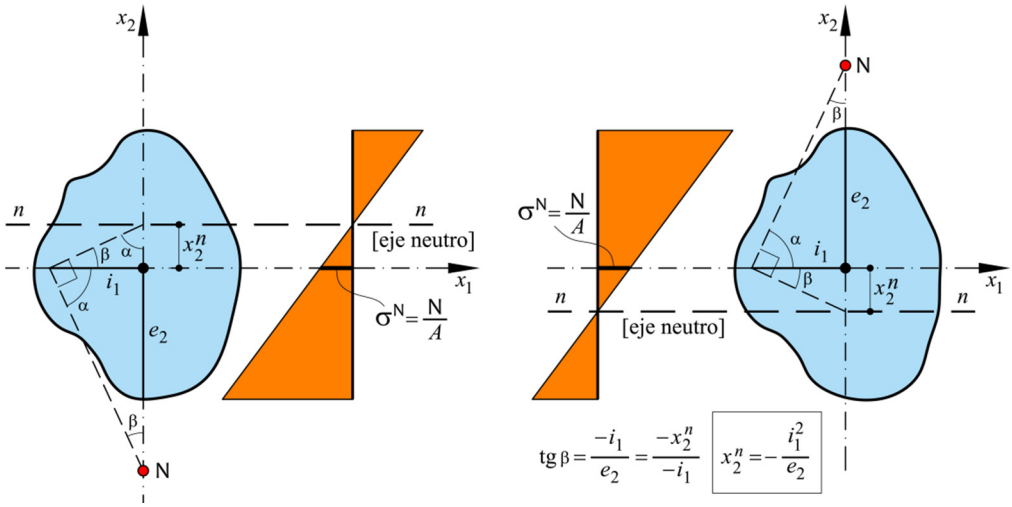


Figura 5.24- Representación geométrica de la posición del eje neutro en la sección transversal respecto de la posición de la carga.

5.4.1 Eje neutro

Como se observa en la Figura 5.24, el eje neutro puede obtenerse gráficamente. Esta misma determinación se puede realizar analíticamente a partir de la ecuación (5.96) admitiendo que el eje neutro es el lugar geométrico donde la tensión es nula en la sección. Esto es,

$$\sigma = 0 = \frac{\mathrm{N}}{A}\left(1 + \frac{e_2}{i_1^2} x_2^n\right) \tag{5.97}$$

$$x_2^n = -\frac{i_1^2}{e_2} \tag{5.98}$$

La ecuación (5.98) también surge de la relación geométrica de la Figura 5.24. Es decir

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{-i_1}{e_2} = \frac{-x_2^n}{-i_1} \quad \rightarrow \quad x_2^n = -\frac{i_1^2}{e_2} \tag{5.99}$$

5.4.2 Núcleo central

El *núcleo central* de una sección transversal es el área delimitada por el lugar geométrico de los puntos, centros de presión, que hacen que el eje neutro esté siempre sobre el contorno externo de la sección transversal. El límite del núcleo central, punto de presión para el cual la excentricidad del esfuerzo axil genera tensión nula en el borde de la sección (ver Figura 5.25), está dado por,

$$e_2^{\lim} = -\frac{i_1^2}{x_2^{\max}} \tag{5.100}$$

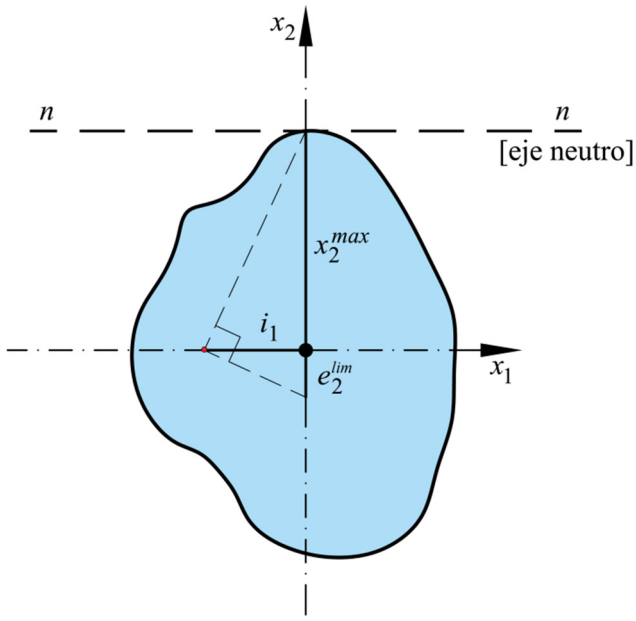


Figura 5.25 - Posición del eje neutro cuando el esfuerzo normal (de tracción o compresión) se aplica en un punto que dista $e_2^{\lim}$ del centro de coordenadas principales.

5.5 Flexión compuesta esviada

Sea el caso de tracción excéntrica, donde el punto de aplicación de la fuerza normal es el punto B, como muestra la Figura 5.26.

Al trasladar la fuerza actuante N al centro geométrico de la sección se tiene,

$$M_1 = N e_2 ; \qquad M_2 = -N e_1 \tag{5.101}$$

Entonces, la tensión total $\sigma = \sigma_3$ puede obtenerse, por superposición, como sigue

$$\sigma = \sigma^N + \sigma^{M_1} + \sigma^{M_2} \tag{5.102}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1} x_2 - \frac{M_2}{I_2} x_1 = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{\overbrace{M_1 / N}^{e_2}}{\underbrace{I_1 / A}_{i_1^2}} x_2 + \frac{\overbrace{M_2 / N}^{e_1}}{\underbrace{I_2 / A}_{i_2^2}} x_1 \right) \tag{5.103}$$

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_2}{i_1^2} x_2 + \frac{e_1}{i_2^2} x_1 \right) \tag{5.104}$$

La ecuación (5.104) constituye una generalización de la ecuación (5.96) para el caso de una fuerza normal excéntrica respecto de los dos ejes principales de inercia de la sección.

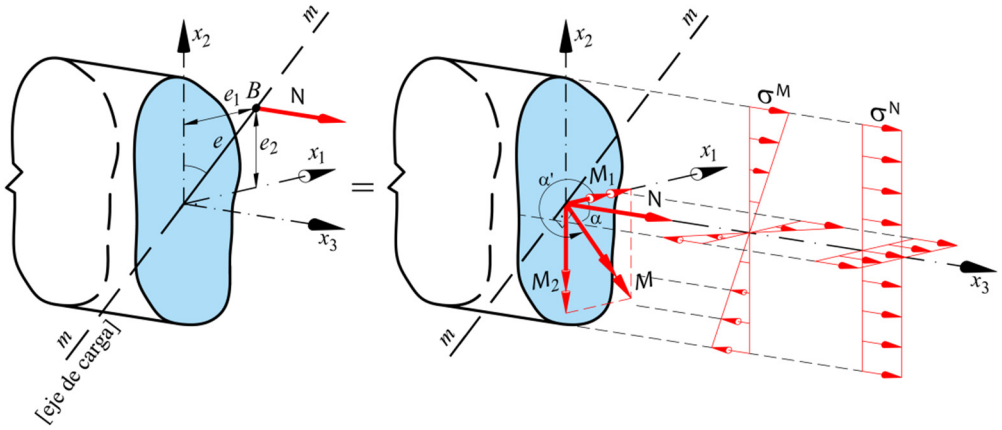


Figura 5.26 - Representación gráfica del eje de carga *m-m*, el vector ortogonal de momento flector M y su descomposición en ejes principales M_1 y M_2. Estados tensionales σ^M y σ^N en los planos determinados por la intersección de la sección transversal con los ejes principales de inercia.

5.5.1 Determinación del eje neutro

La ecuación del eje neutro, como se vio antes, se obtiene como el lugar geométrico de los puntos de tensión nula, esto es (de la ecuación (5.104)),

$$\sigma = 0 = \frac{\mathrm{N}}{A}\left(1 + \frac{e_2}{i_1^2}x_2^n + \frac{e_1}{i_2^2}x_1^n\right) \quad \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{e_2}{i_1^2}x_2^n + \frac{e_1}{i_2^2}x_1^n \tag{5.105}$$

$$x_2^n = -\underbrace{\left(\frac{i_1^2}{e_2}\right)}_{c} - \left(\frac{e_1}{e_2}\frac{i_1^2}{i_2^2}\right)x_1^n \tag{5.106}$$

$$x_2^n = -c - \underbrace{\left(\mathrm{tg}\,\alpha\,\frac{I_1}{I_2}\right)}_{K^n} x_1^n \tag{5.107}$$

$$x_2^n = -c + \mathrm{tg}\,\alpha'\,\frac{I_1}{I_2}x_1^n \tag{5.108}$$

Así, de la ecuación (5.108), se puede ver que el eje neutro es siempre paralelo al eje que produce la flexión esviada y dista de éste una magnitud c, medida sobre el eje principal de inercia x_2 (ver Figura 5.27). En esta misma figura se puede ver la composición de los momentos $\mathbf{M}_1$ *y* $\mathbf{M}_2$ y giros $\boldsymbol{\varphi}_1$ *y* $\boldsymbol{\varphi}_2$, actuantes en los ejes principales, de donde resulta el *vector giro* de la sección $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2$ coincidente con con la dirección del eje neutro y un vector $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ normal al plano de cargas, que forma un ángulo α con el eje x_1 o α' medido en el sentido positivo trigonométrico, el cual no necesariamente está sobre el mencionado eje neutro.

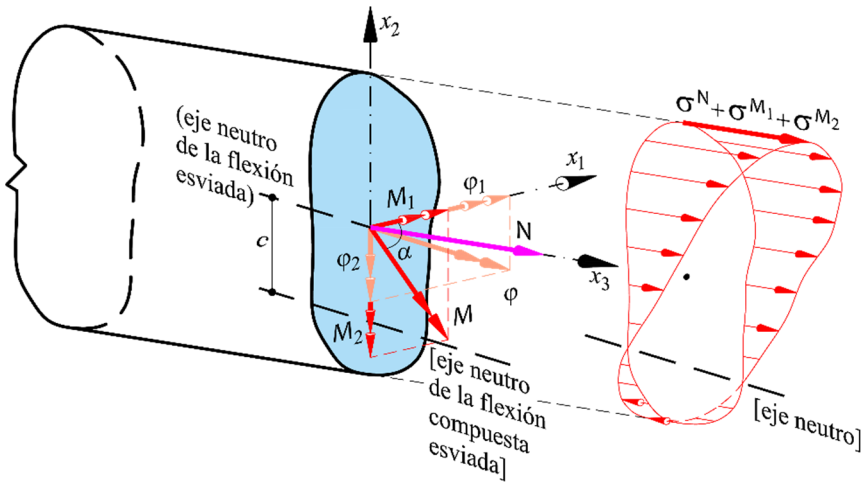


Figura 5.27 – Composición de los momentos y giros actuantes en cada eje principal. Obsérvese que las resultantes de ambas composiciones dan vectores no-colineales: **φ** que yace sobre el eje neutro y **M** es normal al plano de cargas.

5.5.1.1 Forma geométrica de obtener el eje neutro

La Figura 5.28 muestra una representación gráfica que ayuda a situar en forma simple y esquemática la posición del eje neutro en una sección transversal para un problema de flexión esviada. Esta figura representa en forma gráfica la ecuación (5.105) para flexión compuesta esviada desacoplada en cada eje de inercia principal. Así, el punto $(0, x_2^n)$ por donde pasa el eje neutro **se obtiene en forma analítica,**

$$\sigma = 0 = \frac{\mathrm{N}}{A}\left(1 + \frac{e_2}{i_1^2}x_2^n + \frac{e_1}{i_2^2}x_1^n\right) \quad \overset{x_1=0}{\rightarrow} \quad x_2^n = -\frac{i_1^2}{e_2}$$

cuya **representación gráfica** resulta de igualar las siguientes relaciones de magnitudes representadas en los triángulos que se muestra en la Figura 5.28, esto es,

$$\frac{i_1}{e_2} = -\frac{x_2^n}{i_1} \Rightarrow \; x_2^n = -\frac{i_1^2}{e_2}$$

donde se puede ver la coincidencia en los resultados de los dos procedimientos.

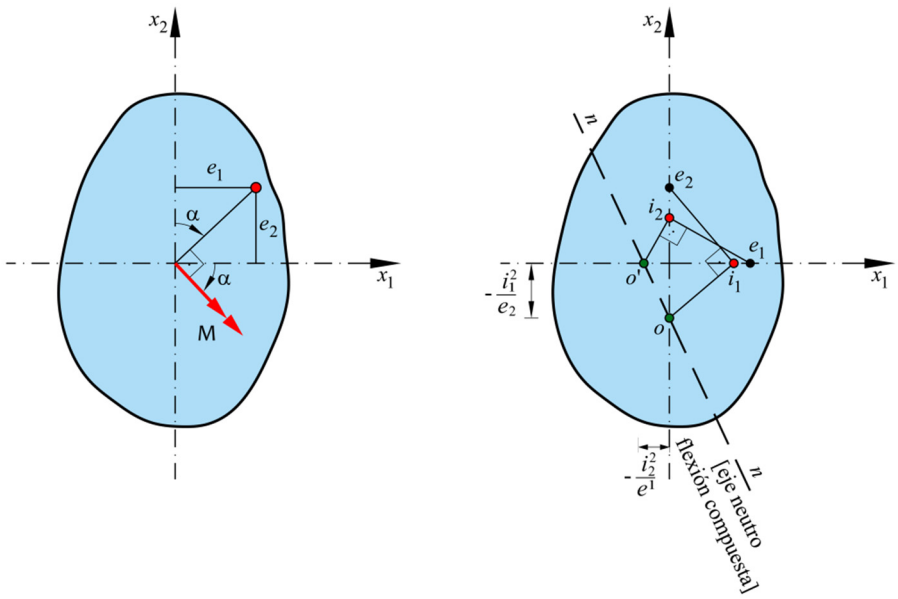


Figura 5.28 Forma gráfica esquemática de ver la posición el eje neutro en una sección transversal cuando actúa una flexión compuesta esviada.

Por otro lado, el punto $(x_1^n,0)$ donde pasa el eje neutro corta al eje x_1 **se obtiene en forma analítica** de la siguiente manera,

$$\sigma = 0 = \frac{\mathrm{N}}{A}\left(1+\frac{e_2}{i_1^2}x_2^n+\frac{e_1}{i_2^2}x_1^n\right) \quad \overset{x_2=0}{\rightarrow} \quad x_1^n = -\frac{i_2^2}{e_1}$$

cuya **representación gráfica** resulta de igualar las siguientes relaciones de magnitudes representadas en los triángulos que se muestra en la Figura 5.28, esto es,

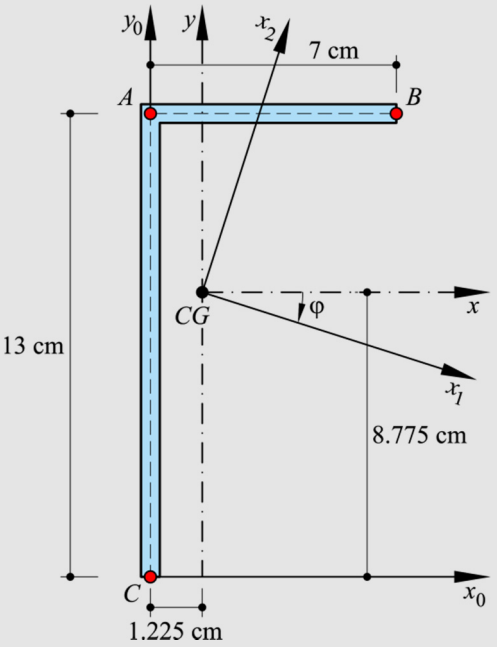
$$\frac{i_2}{e_1} = -\frac{x_1^n}{i_2} \Rightarrow \; x_1^n = -\frac{i_2^2}{e_1}$$

donde nuevamente puede verse la coincidencia en los resultados del procedimiento analítico y gráfico-trigonométrico.

Ejemplo 5-14: La sección que se representa en la figura, de espesor constante $t = 1.5\,cm$, está sometida a una carga de compresión de $500\,kN$ aplicada en el punto A. Determinar:

a) La distribución de las tensiones en la sección debidamente representadas.

b) La ecuación del eje neutro.



$$A = 30\,cm^2$$

Centro geométrico

$$x_{CG} = 1.225cm; \quad y_{CG} = 8.775cm$$

Momentos de inercia

$$I_{xx} = 562.981\,cm^4$$

$$I_{yy} = 126.481\,cm^4$$

$$I_{xy} = 155.268\,cm^4$$

Propiedades geométricas de la sección

Los momentos de inercia principales centroidales y su orientación se obtienen empleando, respectivamente, las siguientes ecuaciones,

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}\,; \qquad \varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}}\right)$$

Reemplazando se tiene,

$$I_{1,2} = \frac{562.981 + 126.481}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{562.981 - 126.481}{2}\right)^2 + (155.268)^2} \qquad \begin{cases} I_1 = 612.57\,cm^4 \\ I_2 = 76.88\,cm^4 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{2 \cdot 155.268}{562.981 - 126.481}\right) = -17.714^{\circ}$$

Los radios de giro referidos a los ejes principales de inercia resultan,

$$\begin{cases} i_1^2 = I_1 / A = 612.57 / 30 = 20.419\, cm^2 \\ i_2^2 = I_2 / A = 76.88 / 30 = 2.563\, cm^2 \end{cases}$$

Cálculo de las tensiones. Se utiliza la ecuación (5.104), es decir

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_2}{i_1^2} x_2 + \frac{e_1}{i_2^2} x_1\right)$$

$$\text{con } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi \\ x_2 = -x\operatorname{sen}\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-14.

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [cm]	y [cm]	x_1 [cm]	x_2 [cm]	σ [kN/cm^2]
2	A	-1.225	4.225	-2.452	3.652	-66.669
3	B	5.775	4.225	4.216	5.782	33.338
4	C	-1.225	-8.775	1.503	-8.732	33.334
5	**Excentrici-dades**	e_x [cm]	e_y [cm]	e_1 [cm]	e_2 [cm]	
6		-1.225	4.225	-2.452	3.652	
7						
8			grados	radianes		
9	**Ángulo**	φ	-17.714	-0.309167624		
10	**Normal**	N	-5.00E+02	kN		
11	**Área**	A	3.00E+01	cm^2		
12	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	612.570	cm^4		
13		I_2	76.880	cm^4		
14	**Radios de giro**	$i_1^2 = I_1 / A$	20.419	cm^2		
15		$i_2^2 = I_2 / A$	2.563	cm^2		

b) Ecuación del eje neutro. Empleando la ecuación (5.105), se tiene,

$$\sigma = 0 = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_2}{i_1^2} x_2^n + \frac{e_1}{i_2^2} x_1^n\right) \quad \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{e_2}{i_1^2} x_2^n + \frac{e_1}{i_2^2} x_1^n$$

$$0 = 1 + \frac{3.652}{20.42} x_2^n - \frac{2.452}{2.56} x_1^n$$

$$x_2^n = -5.588 + 5.353 x_1^n$$

La ecuación del eje neutro en la base (x, y) se obtiene realizando el cambio de base

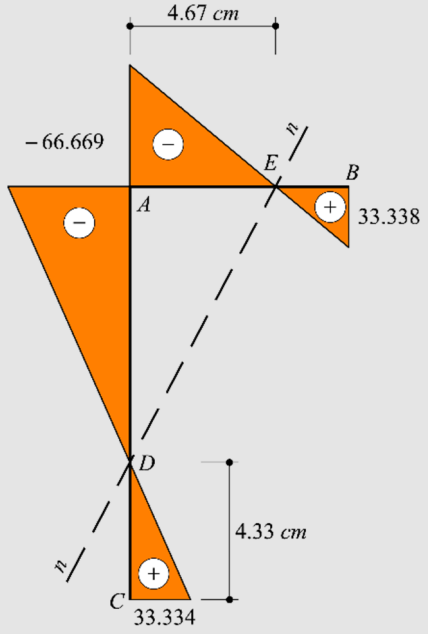
$$\begin{Bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-17.714^o) & \text{sen}(-17.714^o) \\ -\text{sen}(-17.714^o) & \cos(-17.714^o) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^n \\ y^n \end{Bmatrix}$$

$$x_1^n = 0.95258\, x^n - 0.304265\, y^n$$
$$x_2^n = 0.304265\, x^n - 0.952585\, y^n$$

Sustituyendo estas últimas expresiones en la ecuación del eje neutro en la base (x_1, x_2), se obtiene la ecuación del eje neutro en la base (x, y)

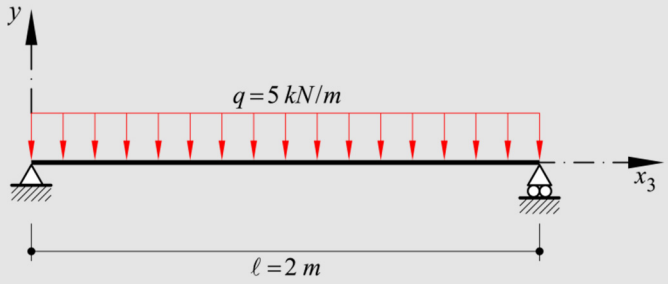
$$-x^n \cdot 4.79461 + y^n \cdot 2.581119 + 5.58846 = 0$$

Representación gráfica de la distribución de tensiones

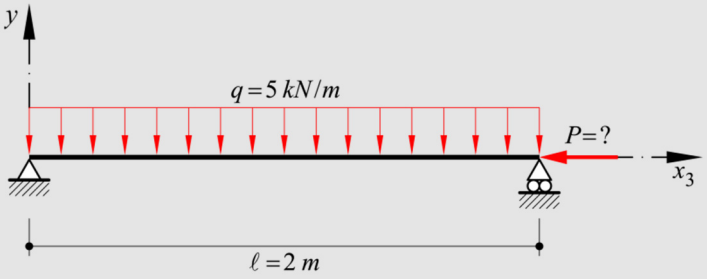


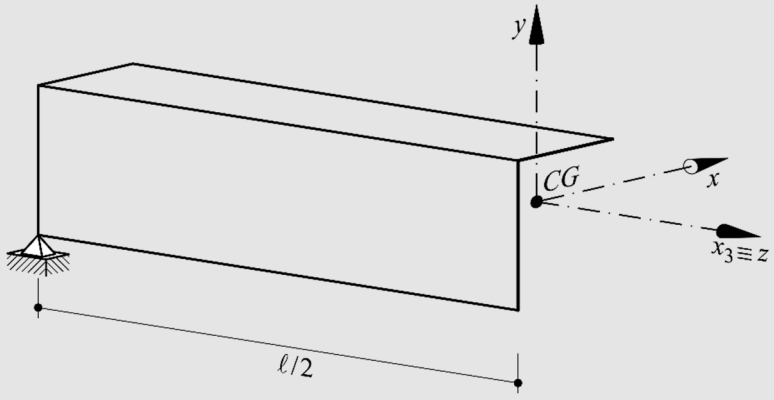
Ejemplo 5-15: Dada la viga de la figura, obtener:

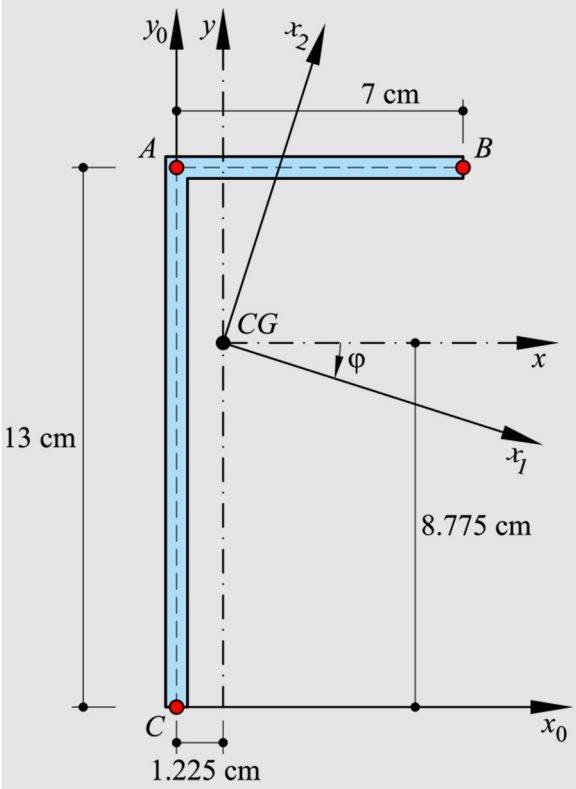
a) La distribución de las tensiones en la sección transversal del centro de la luz producidas por la flexión.



b) La magnitud de la fuerza axial P de compresión que es necesario aplicar en el centro geométrico (CG) de la barra para que no haya tracción en ningún punto de la sección transversal del centro de la luz.







Esp. Paredes $t = 0.015\,m$

$A = 0.003\,m^2$

Momentos de inercia

$I_{xx} = 0.5629 \cdot 10^{-5}\ m^4$

$I_{yy} = 0.1264 \cdot 10^{-5}\ m^4$

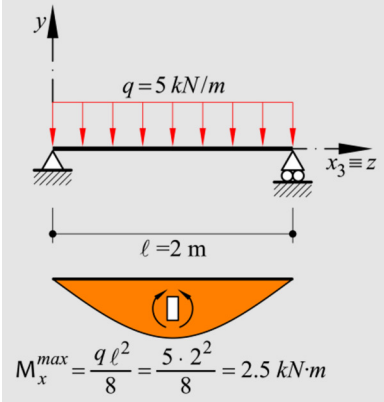
$I_{xy} = 0.1552 \cdot 10^{-5}\ m^4$

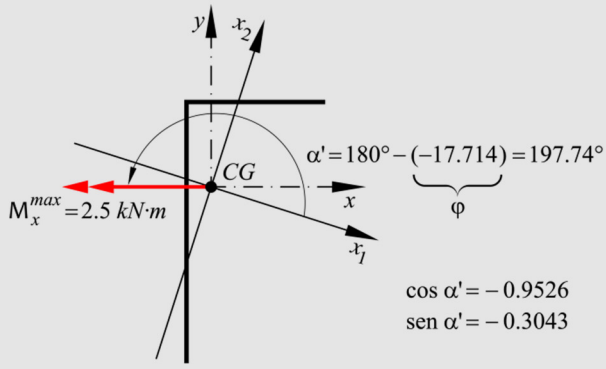
$I_1 = 0.6125 \cdot 10^{-5}\ m^4$

$I_2 = 0.0768 \cdot 10^{-5}\ m^4$

$\varphi = -17.714^{\circ}$

a) Distribución de tensiones por flexión en el centro de la luz.





Se utiliza la ecuación correspondiente a la flexión simple esviada, es decir,

$$\sigma = M\left(\frac{\cos\alpha'}{I_1}x_2 - \frac{\text{sen}\,\alpha'}{I_2}x_1\right)$$

$$\text{con}\ \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\,\varphi \\ -\text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\,\text{sen}\,\varphi \\ x_2 = -x\,\text{sen}\,\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-15a.

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [m]	y [m]	x_1 [m]	x_2 [m]	σ [kPa]
2	A	-0.01225	0.04225	-0.02452	0.03652	-38489.390
3	B	0.05775	0.04225	0.04216	0.05782	19273.684
4	C	-0.01225	-0.08775	0.01503	-0.08732	48836.308
5						
6			grados	radianes		
7	**Ángulos**	φ	-17.714	-0.309167624		
8		α'	197.714	3.450760277		
9	**Momento**	M	2.5	kNm		
10	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	6.125E-06	m^4		
11		I_2	7.680E-07	m^4		

Ecuación del eje neutro

Se utiliza la ecuación (5.108), haciendo $c = 0$, es decir

$$x_2^n = x_1^n\left(\frac{I_1}{I_2}\right)\text{tg}\,\alpha' \quad \rightarrow \quad x_2^n = x_1^n\left(\frac{0.6125\cdot10^{-5}}{0.0768\cdot10^{-5}}\right)\text{tg}\,197.714^\text{o} = x_1^n\cdot 2.54472$$

$$\theta^{x_1x_2} = \text{tg}^{-1}\left(2.54472\right) = 68.546^\text{o} \quad \text{y} \quad \theta^{xy} = 68.546^\text{o} - 17.714^\text{o} = 50.83^\text{o}$$

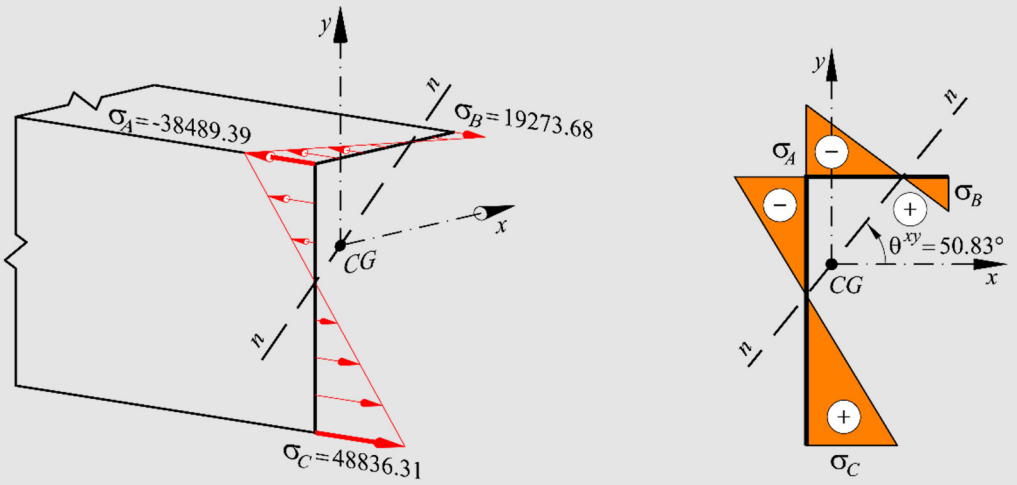
Intersección con los lados de la sección, en la base (x, y)

$$y^n = x^n\cdot\text{tg}\left(50.83^\text{o}\right) = x^n\cdot 1.2276$$

Intersección lado $\overline{\text{AB}}$: $y^n = 0.04225\,m \rightarrow x^n = 0.0344\,m$

Intersección lado $\overline{AC}$: $x^n = -0.01225\,m \rightarrow y^n = -0.01504\,m$

Representación gráfica de la distribución de tensiones



b) Magnitud de la fuerza P para que no haya tracción en la sección.

$$\left(\sigma^{trac}\right)^{\max} = \sigma^{C} = 48836.308\,kPa = -\frac{P}{A} \quad \rightarrow \quad P = -146.51\,kN$$

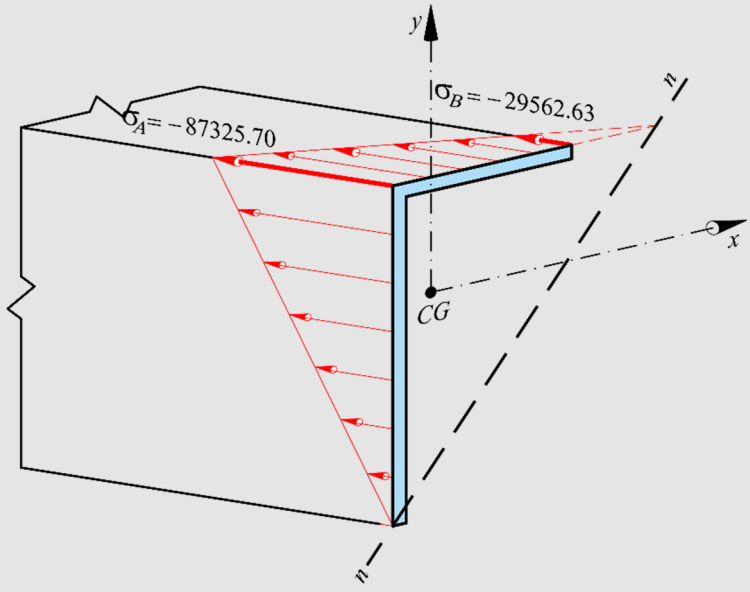
El estado de tensión resultante se obtiene considerando la acción del momento flector y la carga de compresión, empleando la ecuación (5.103),

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1}x_2 - \frac{M_2}{I_2}x_1 = \overbrace{\frac{N}{A}}^{-146.51kN} + M\left(\frac{\cos\alpha'}{I_1}x_2 - \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{I_2}x_1\right)$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-15b.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Punto**	x [m]	y [m]	x_1 [m]	x_2 [m]	σ [kPa] (P)	σ [kPa] (M)	σ [kPa]
2	A	-0.01225	0.04225	-0.02452	0.03652	-48836.308	-38489.38962	-87325.698
3	B	0.05775	0.04225	0.04216	0.05782	-48836.308	19273.68352	-29562.625
4	C	-0.01225	-0.08775	0.01503	-0.08732	-48836.308	48836.30829	0.000
5								
6			grados	radianes				
7	**Ángulos**	φ	-17.714	-0.309167624				
8		α'	197.714	3.450760277				
9	**Momento**	M	2.5	kNm				
10	**Normal**	P	-146.5089	kN				
11	**Área**	A	0.003	m^2				
12	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	6.125E-06	m^4				
13		I_2	7.680E-07	m^4				

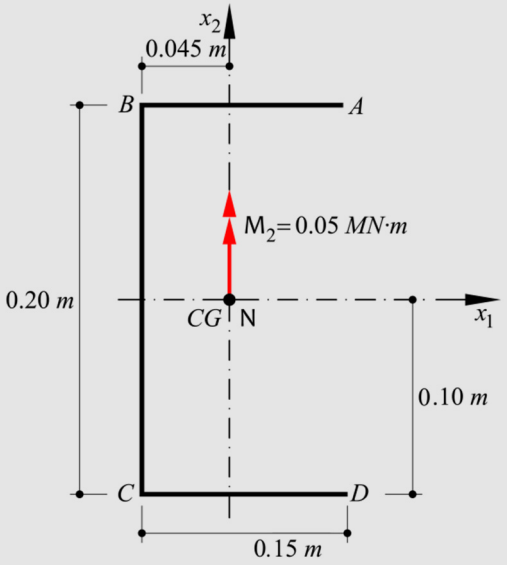
Representación gráfica de la distribución de tensiones



Ejemplo 5-16: La sección de la figura se encuentra sometida a la acción de un momento flector $\mathrm{M}_2 = 0.05 MN \cdot m$ y a una fuerza de compresión N aplicada en el centro geométrico (CG). Determinar:

a) La magnitud y signo de la fuerza N para que la sección esté totalmente comprimida y el eje neutro contenga al segmento $\overline{\mathrm{BC}}$ de la sección transversal.

b) La distribución de las tensiones sobre la sección transversal.



Espesor $t = 0.01 m$

$A = 0.005 m^2$

Momentos de inercia

$I_1 = 3.666 \cdot 10^{-5}\ m^4$

$I_2 = 1.237 \cdot 10^{-5}\ m^4$

a) Magnitud de la fuerza

Se aplica la ecuación (5.103), es decir

$$\sigma = \frac{\mathrm{N}}{A} + \frac{\cancelto{=0}{\mathrm{M}_1}}{I_1} x_2 - \frac{\mathrm{M}_2}{I_2} x_1 = \frac{\mathrm{N}}{A} - \frac{\mathrm{M}_2}{I_2} x_1$$

Para que la sección esté totalmente comprimida el eje neutro debe ubicarse sobre el segmento $\overline{\mathrm{BC}}$, de donde surge el valor de N,

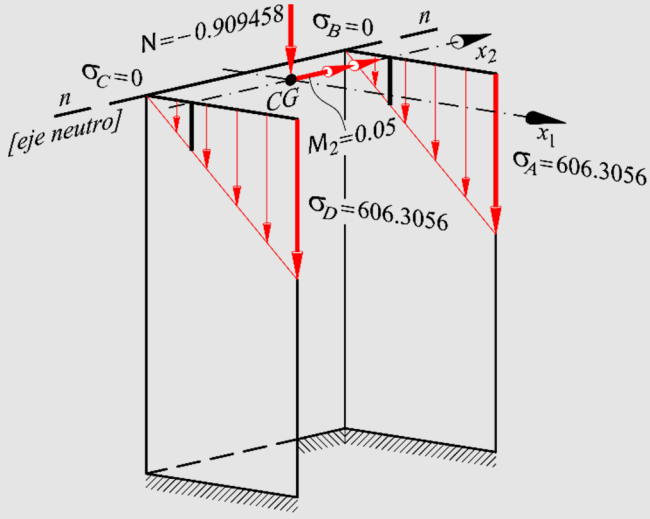
$$\sigma = 0 = \frac{\mathrm{N}}{A} - \frac{\mathrm{M}_2}{I_2} x_1^{\mathrm{BC}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{M}_2}{I_2 / A} x_1^{\mathrm{BC}} = \frac{0.05 MN \cdot m}{\left(1.237 \cdot 10^{-5} / 5 \cdot 10^{-3}\right) m^2} \left(-0.045 m\right)$$

$$\mathrm{N} = -0.909458 MN$$

b) Distribución de tensiones

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-16.

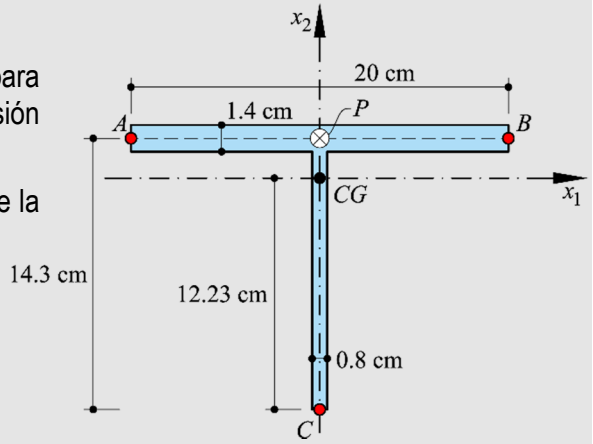
	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x_1 [m]	x_2 [m]	σ [MPa] (P)	σ [MPa] (M)	σ [MPa]
2	A	0.10500	0.10000	-181.892	-424.414	-606.306
3	B	-0.04500	0.10000	-181.892	181.892	0.000
4	C	-0.04500	-0.10000	-181.892	181.892	0.000
5	D	0.10500	-0.10000	-181.892	-424.414	-606.306
6						
7	**Momento**	M	-0.05	MNm		
8	**Normal**	N	-0.909458	MN		
9	**Área**	A	0.005	m^2		
10	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	3.666E-05	m^4		
11		I_2	1.237E-05	m^4		



Ejemplo 5-17: Dada la sección de la figura, cargada con una fuerza de compresión P tal como se indica. Determinar:

a) La magnitud de la fuerza P para que la máxima tensión de compresión no supere los $-60MPa$.

b) La distribución de tensiones sobre la sección transversal.



Características geométricas de la sección

$$A = (0.014 \cdot 0.20) + (0.008 \cdot 0.143) = 0.0039\, m^2$$

Por simetría el centro geométrico está sobre el eje x_2.

$$x_2^{CG} = \frac{(0.014 \cdot 0.20) \cdot 0.143 + (0.008 \cdot 0.143) \cdot 0.143/2}{\underbrace{0.0039}_{A}} = 0.1223\, m$$

Se produce flexión compuesta recta en el plano $(x_2 - x_3)$ por lo que sólo es necesario calcular el momento de inercia respecto a x_1,

$$I_1 = \left[\left(\frac{0.20 \cdot 0.014^3}{12}\right) + (0.20 \cdot 0.014) \cdot (0.143 - 0.1223)^2\right] +$$
$$+ \left[\left(\frac{0.008 \cdot 0.143^3}{12}\right) + (0.008 \cdot 0.143) \cdot \left(\frac{0.143}{2} - 0.1223\right)^2\right]$$

$$I_1 = 6.1472 \cdot 10^{-6}\, m^4; \qquad i_1^2 = \frac{I_1}{A} = \frac{6.1472 \cdot 10^{-6}}{0.0039} = 0.0016\, m^2$$

a) Magnitud de la fuerza P

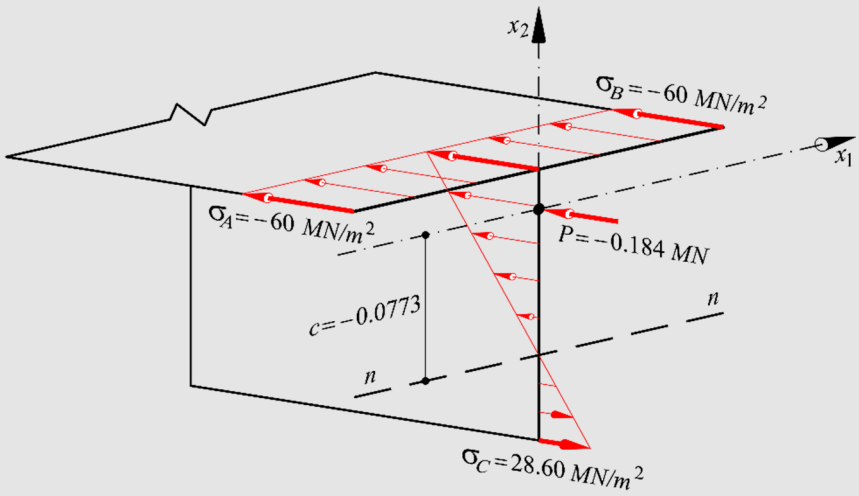
Se aplica la ecuación (5.103), es decir

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1} x_2 - \frac{\cancel{M_2}^{=0}}{I_2} x_1 = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1} x_2$$

$$\sigma = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{e_2}{i_1^2} x_2\right) \quad \rightarrow \quad -60 MPa = \frac{P}{0.0039}\left[1 + \frac{(0.143 - 0.1223)}{0.0016}(0.143 - 0.1223)\right]$$

$$P = -0.184 MN$$

b) Distribución de tensiones



Posición del eje neutro

$$0 = 1 + \frac{e_2}{i_1^2} x_2^n \quad \rightarrow \quad x_2^n = c = -\frac{i_1^2}{e_2} = -\frac{0.0016}{(0.143 - 0.1223)} = -0.0773\, m$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-17.

	A	B	C	D
1	**Punto**	x_2 [m]	σ [MPa]	
2	A	0.021	-60.00	
3	B	0.021	-60.00	
4	C	-0.122	28.60	
5	**Excentricidad**	e_2 [m]		
6		0.021		
7				
8	**Normal**	$N = P$	-1.840E-01	MN
9	**Área**	A	3.900E-03	m^2
10	**Momento principal de inercia**	I_1	6.147E-06	m^4
11	**Radio de giro**	i_1^2	1.576E-03	m^2

5.5.2 Núcleo Central

Es importante recordar que el *núcleo central* es el lugar geométrico de los puntos de presión que consiguen tensión nula en los contornos de la sección transversal. Para determinar el contorno del núcleo central, en primer lugar se determina la distancia del origen de coordenada a una recta que pase por el contorno de la sección, como se muestra en la Figura 5.29.

De la ecuación (5.105) se puede obtener la ecuación del eje neutro, o sea

$$0 = 1 + \frac{e_2}{i_1^2} x_2^n + \frac{e_1}{i_2^2} x_1^n \tag{5.109}$$

De donde surge, operando algebraicamente, que la distancia d es

$$d = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{e_2}{i_1^2}\right)^2 + \left(\frac{e_1}{i_2^2}\right)^2}} \tag{5.110}$$

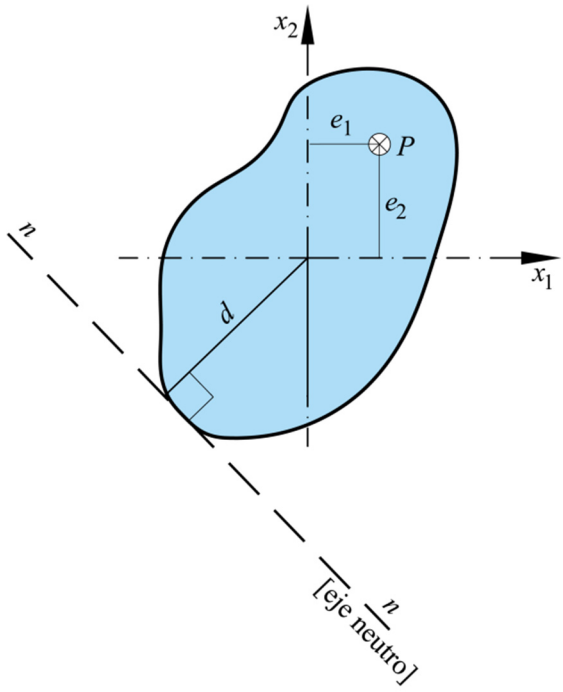
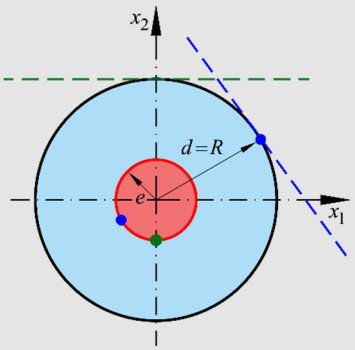


Figura 5.29 - Punto de presión que hace que el eje neutro sea tangente a la sección transversal.

A partir de la ecuación (5.110) se pueden obtener los siguientes casos particulares de solicitaciones,

- para $e = 0 \quad \Rightarrow \quad d \to \infty$, tracción o compresión pura
- para $e \to \infty \quad \Rightarrow \quad d = 0$, flexión pura.

Ejemplo 5-18: Determinar el núcleo central de una sección circular de radio R.

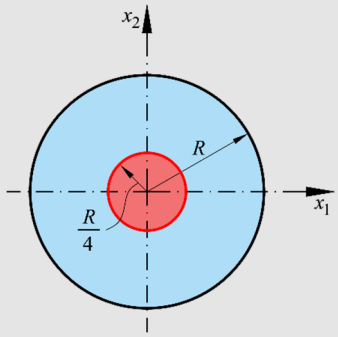


$$\left.\begin{aligned} I_1 = I_2 &= \frac{\pi R^4}{4} \\ A &= \pi R^2 \end{aligned}\right\} i^2 = \frac{R^2}{4}$$

Debido a que se trata de una sección simétrica, se puede tomar $e_1 = 0$ y $e_2 = e$. Reemplazando en la ecuación (5.110) se tiene

$$|d| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{e_2}{i_1^2}\right)^2 + \left(\frac{e_1}{i_2^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{e^2}{i^4}}} = \frac{1}{\frac{e}{i^2}} = \frac{i^2}{e} \qquad |d| = R = \frac{R^2}{4e} \;\rightarrow\; e = \frac{R}{4}$$

Resultando para una sección circular de radio R el núcleo central que se representa a continuación,



En casos más generales, especialmente cuando las secciones presentan aristas, se puede seguir la siguiente operatoria para la determinación del núcleo central:

- Se sitúa el eje neutro sobre uno de los lados.
- Se fijan las coordenadas x_1^n y x_2^n de este eje (ec. (5.109)), quedando como incógnitas las excentricidades e_1 y e_2 (ver Figura 5.30). Es decir,

$$e_1 = -\frac{i_2^2}{x_1^n} - e_2 \frac{i_2^2}{i_1^2}\frac{x_2^n}{x_1^n} \tag{5.111}$$

$$e_2 = -\frac{i_1^2}{x_2^n} - e_1 \frac{i_1^2}{i_2^2}\frac{x_1^n}{x_2^n} \tag{5.112}$$

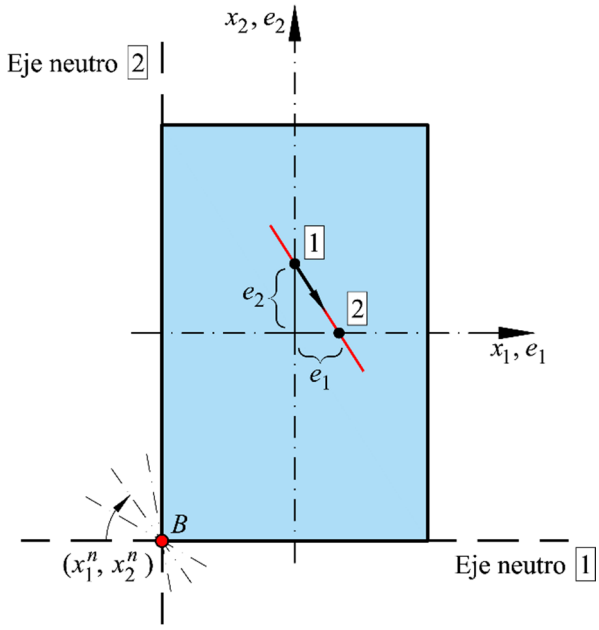


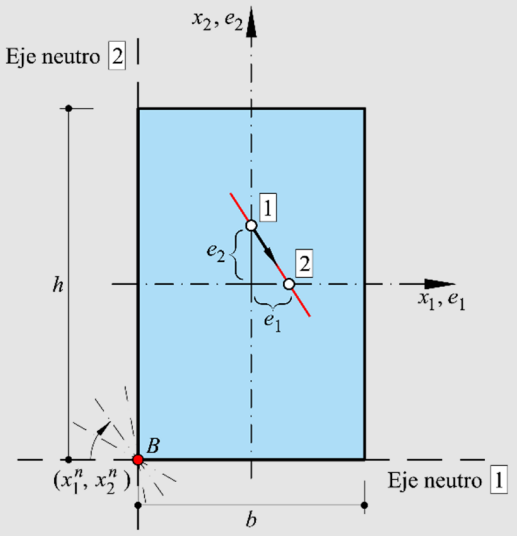
Figura 5.30 – Giro del eje neutro en la esquina de la sección cuando el punto de presión se desplaza en una recta.

Ejemplo 5-19: Determinar el núcleo central de una sección rectangular de altura h y ancho b.

Características geométricas

$$A = b\,h$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{bh^3}{12} \\ I_2 &= \frac{hb^3}{12} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} i_1^2 &= \frac{I_1}{A} = \frac{h^2}{12} \\ i_2^2 &= \frac{I_2}{A} = \frac{b^2}{12} \end{aligned}\right.$$



Para el punto $\boxed{1}$ es $x_2^n = -\dfrac{h}{2}, \quad x_1^n = 0$, reemplazando en (5.112) se tiene

$$e_1 = 0 \quad \rightarrow \quad e_2 = -\frac{i_1^2}{x_2^n} = -\frac{\dfrac{h^{\not 3 2}}{12}}{-\dfrac{\not h}{2}} = \frac{h}{6}$$

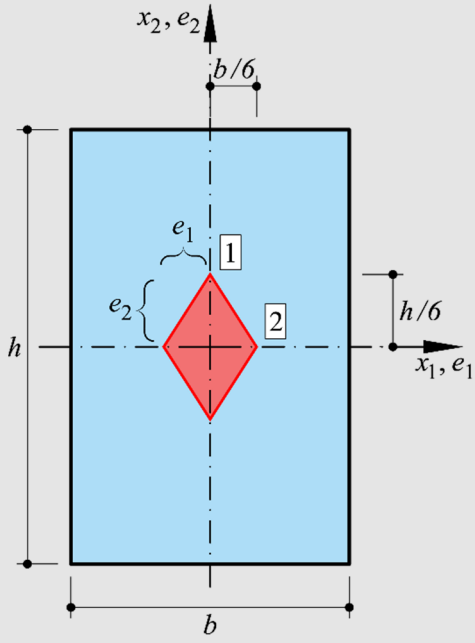
Para el punto $\boxed{2}$ es $x_1^n = -\dfrac{b}{2}, \quad x_2^n = 0$, reemplazando en (5.111) se tiene

$$e_2 = 0 \quad \rightarrow \quad e_1 = -\frac{i_2^2}{x_1^n} = -\frac{\dfrac{b^{\not 3 2}}{12}}{-\dfrac{\not b}{2}} = \frac{b}{6}$$

Para los puntos ubicados sobre la recta que une los puntos $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ (rotación respecto a B), se fijan las coordenadas $\left(x_1^n, x_2^n\right)$ de B y. de la ec. (5.112), resulta la ecuación de una recta en e_1 y e_2,

$$e_2 = -\frac{i_1^2}{x_2^n} - e_1 \frac{i_1^2}{i_2^2} \frac{x_1^n}{x_2^n}$$

En consecuencia, para una sección rectangular se obtiene el núcleo central que se representa a continuación



5.5.2.1 Determinación del núcleo central en un caso general

Se supone el caso general de una sección que presenta vértices entrantes y salientes (perímetros cóncavos y convexos). A modo de ejemplo se presenta un perfil T como muestra la Figura 5.31.

Se aplica la ecuación del eje neutro que, para mayor claridad, se reescribe a continuación,

$$1 + e_2 \frac{x_2^n}{i_1^2} + e_1 \frac{x_1^n}{i_2^2} = 0 \tag{5.113}$$

La determinación del núcleo central implica obtener las excentricidades que hacen que el eje neutro sea tangente (o secante) a la sección transversal. Por ello, el procedimiento para determinar el núcleo central se centra en la utilización sucesiva de la ecuación (5.113), donde las incógnitas son las excentricidades. Se usa a continuación la siguiente notación:

- e_1^{ij}, e_2^{ij} designa las excentricidades que corresponden al eje neutro pasando por los puntos de la sección de coordenadas $\left(x_1^i, x_2^i\right)$ y $\left(x_1^j, x_2^j\right)$.

Debido a que los puntos $i\left(x_1^i, x_2^i\right)$ y $j\left(x_1^j, x_2^j\right)$ pertenecen al eje neutro, la tensión en ellos es nula, es decir que en ambos puntos se debe cumplir la ecuación (5.113). Esto es,

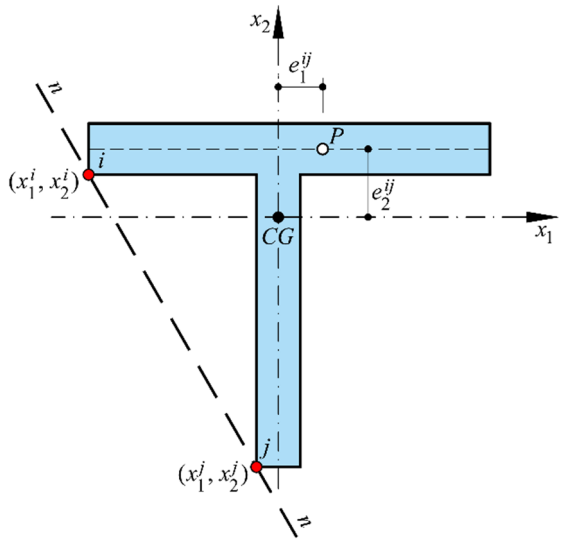


Figura 5.31 – Eje neutro que pasa por los puntos *i, j* tangente al contorno de una sección T.

$$\begin{cases} 0 = 1 + e_1^{ij}\dfrac{x_1^i}{i_2^2} + e_2^{ij}\dfrac{x_2^i}{i_1^2} \\ 0 = 1 + e_1^{ij}\dfrac{x_1^j}{i_2^2} + e_2^{ij}\dfrac{x_2^j}{i_1^2} \end{cases} \tag{5.114}$$

El sistema de ecuaciones (5.114) puede escribirse matricialmente como,

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^i}{i_2^2} & \dfrac{x_2^i}{i_1^2} \\ \dfrac{x_1^j}{i_2^2} & \dfrac{x_2^j}{i_1^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1^{ij} \\ e_2^{ij} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.115}$$

La solución del sistema de ecuaciones (5.115) permite encontrar las excentricidades buscadas. Es decir,

$$\begin{Bmatrix} e_1^{ij} \\ e_2^{ij} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{x_1^i}{i_2^2} & \frac{x_2^i}{i_1^2} \\ \frac{x_1^j}{i_2^2} & \frac{x_2^j}{i_1^2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{i_2^2\left(x_2^i - x_2^j\right)}{x_1^i x_2^j - x_1^j x_2^i} \\ -\frac{i_1^2\left(x_1^i - x_1^j\right)}{x_1^i x_2^j - x_1^j x_2^i} \end{Bmatrix} \tag{5.116}$$

En síntesis, para el eje neutro tangente a la sección en los puntos $i\left(x_1^i, x_2^i\right)$ y $j\left(x_1^j, x_2^j\right)$ las excentricidades correspondientes valen

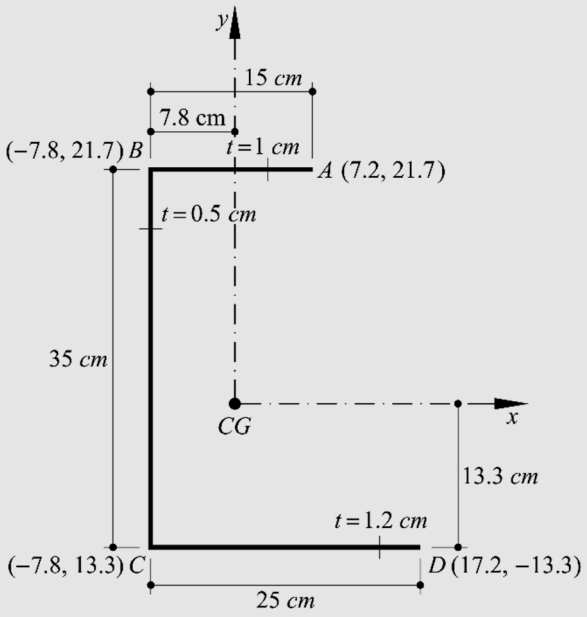
$$\begin{cases} e_1^{ij} = \dfrac{i_2^2\left(x_2^i - x_2^j\right)}{x_1^i x_2^j - x_1^j x_2^i} \\ e_2^{ij} = -\dfrac{i_1^2\left(x_1^i - x_1^j\right)}{x_1^i x_2^j - x_1^j x_2^i} \end{cases} \tag{5.117}$$

El núcleo central puede obtenerse en la base (x, y) realizando el correspondiente cambio de base, es decir

$$\begin{Bmatrix} e_x^{ij} \\ e_y^{ij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} e_1^{ij} \\ e_2^{ij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_1^{ij} \\ e_2^{ij} \end{Bmatrix} \tag{5.118}$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} e_x^{ij} = e_1^{ij}\cos\varphi - e_2^{ij}\operatorname{sen}\varphi \\ e_y^{ij} = e_1^{ij}\operatorname{sen}\varphi + e_2^{ij}\cos\varphi \end{cases} \tag{5.119}$$

Ejemplo 5-20: Determinar el núcleo central de la sección transversal representada en la figura



$$A = 62.5\,cm^2$$

$$I_{xx} = 1.447 \cdot 10^4\,cm^4$$

$$I_{yy} = 4.349 \cdot 10^4\,cm^4$$

$$I_{xy} = -105\,cm^4$$

$$I_1 = 1.447 \cdot 10^4\,cm^4$$

$$I_2 = 4.348 \cdot 10^3\,cm^4$$

$$\varphi = 0.01037\,rad$$

Radios de giro

$$i_1^2 = \frac{I_1}{A} = \frac{1.447 \cdot 10^4\,cm^4}{62.5\,cm^2} = 231.538\,cm^2$$

$$i_2^2 = \frac{I_2}{A} = \frac{4.348 \cdot 10^3\,cm^4}{62.5\,cm^2} = 69.568\,cm^2$$

Se utiliza la ecuación del eje neutro,

$$1 + e_2 \frac{x_2^n}{i_1^2} + e_1 \frac{x_1^n}{i_2^2} = 0$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{AB}}$,

- Ecuación para el punto A

$$\left(x_1^{\mathrm{A}} = 7.2, x_2^{\mathrm{A}} = 21.7\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{21.7}{231.538} e_2^{\mathrm{AB}} + \frac{7.2}{69.568} e_1^{\mathrm{AB}}$$

- Ecuación para el punto B

$$\left(x_1^{\mathrm{B}} = -7.8, x_2^{\mathrm{B}} = 21.7\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{21.7}{231.538} e_2^{\mathrm{AB}} + \frac{(-7.8)}{69.568} e_1^{\mathrm{AB}}$$

Resolviendo se tiene,

$$e_1^{\mathrm{AB}} = 0; \qquad e_2^{\mathrm{AB}} = -10.76\, cm$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{AD}}$,

● Ecuación para el punto A

$$\left(x_1^{\mathrm{A}} = 7.2, x_2^{\mathrm{A}} = 21.7\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{21.7}{231.538} e_2^{\mathrm{AD}} + \frac{7.2}{69.568} e_1^{\mathrm{AD}}$$

● Ecuación para el punto D

$$\left(x_1^{\mathrm{D}} = 17.2, x_2^{\mathrm{D}} = -13.3\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{(-13.3)}{231.538} e_2^{\mathrm{AD}} + \frac{17.2}{69.568} e_1^{\mathrm{AD}}$$

Resolviendo se tiene,

$$e_1^{\mathrm{AD}} = -5.192\, cm; \qquad e_2^{\mathrm{AD}} = -4.937\, cm$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{DC}}$,

● Ecuación para el punto D

$$\left(x_1^{\mathrm{D}} = 17.2, x_2^{\mathrm{D}} = -13.3\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{(-13.3)}{231.538} e_2^{\mathrm{DC}} + \frac{17.2}{69.568} e_1^{\mathrm{DC}}$$

● Ecuación para el punto C

$$\left(x_1^{\mathrm{C}} = -7.8, x_2^{\mathrm{C}} = -13.3\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{(-13.3)}{231.538} e_2^{\mathrm{DC}} + \frac{(-7.8)}{69.568} e_1^{\mathrm{DC}}$$

Resolviendo se tiene,

$$e_1^{\mathrm{DC}} = 0; \qquad e_2^{\mathrm{DC}} = 17.409\, cm$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{CB}}$,

● Ecuación para el punto C

$$\left(x_1^C=-7.8, x_2^C=-13.3\right)\rightarrow \quad 0=1+\frac{(-13.3)}{231.538}e_2^{CB}+\frac{(-7.8)}{69.568}e_1^{CB}$$

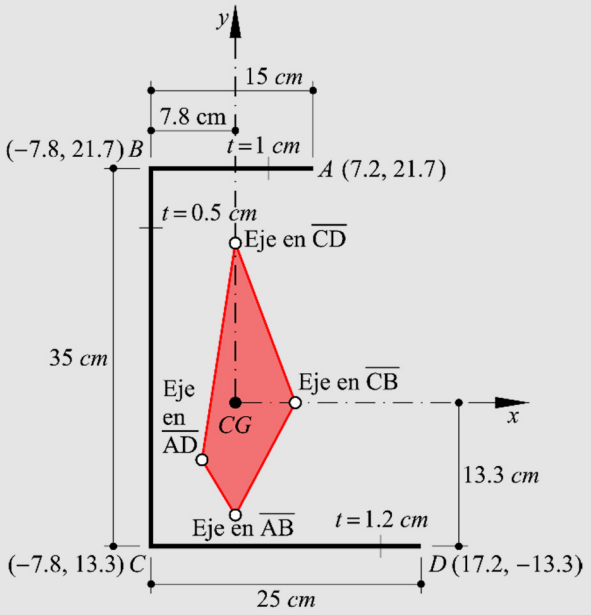
- Ecuación para el punto B

$$\left(x_1^B=-7.8, x_2^B=21.7\right)\rightarrow \quad 0=1+\frac{21.7}{231.538}e_2^{CB}+\frac{(-7.8)}{69.568}e_1^{CB}$$

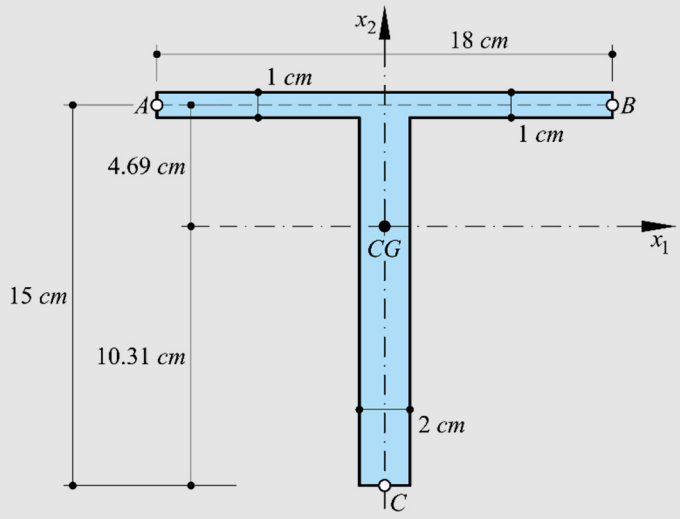
Resolviendo se tiene,

$$e_1^{CB}=8.919\,cm; \qquad e_2^{CB}=0$$

Resultando para la sección el núcleo central que se representa a continuación



Ejemplo 5-21: Determinar el núcleo central de la sección transversal representada en la figura



$$A = 48\,cm^2 = 0.0048\,m^2$$

$$I_1 = 1195.313\,cm^4 = 1.1953\cdot 10^{-5}\,m^4; \quad I_2 = 486.0\,cm^4 = 0.486\cdot 10^{-5}\,m^4$$

Radios de giro

$$i_1^2 = \frac{I_1}{A} = \frac{1.1953\cdot 10^{-5}}{0.0048} = 0.00249\,m^2 \quad i_2^2 = \frac{I_2}{A} = \frac{0.486\cdot 10^{-5}}{0.0048} = 0.00101\,m^2$$

Se utiliza la ecuación del eje neutro,

$$1 + e_2 \frac{x_2^n}{i_1^2} + e_1 \frac{x_1^n}{i_2^2} = 0$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{AB}}$

- Por simetría $\rightarrow \quad e_1^{\mathrm{AB}} = 0$
- Ecuación para el punto $\mathrm{B}\ \left(x_1^{\mathrm{B}} = 0.09, x_2^{\mathrm{B}} = 0.0469\right)$

$$0 = 1 + \frac{x_2^{\mathrm{AB}}}{i_1^2} e_2^{\mathrm{AB}} \quad \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{0.0469}{0.00249} e_2^{\mathrm{AB}} \quad \rightarrow \quad e_2^{\mathrm{AB}} = -5.31\cdot 10^{-2}\,m$$

Es decir, $\quad e_1^{\mathrm{AB}} = 0; \quad e_2^{\mathrm{AB}} = -5.31\cdot 10^{-2}\,m$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{AC}}$,

- Ecuación para A

$$\left(x_1^{\mathrm{A}} = -0.09, x_2^{\mathrm{A}} = 0.0469\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{0.0469}{0.00249} e_2^{\mathrm{AC}} + \frac{(-0.09)}{0.00101} e_1^{\mathrm{AC}}$$

- Ecuación para C

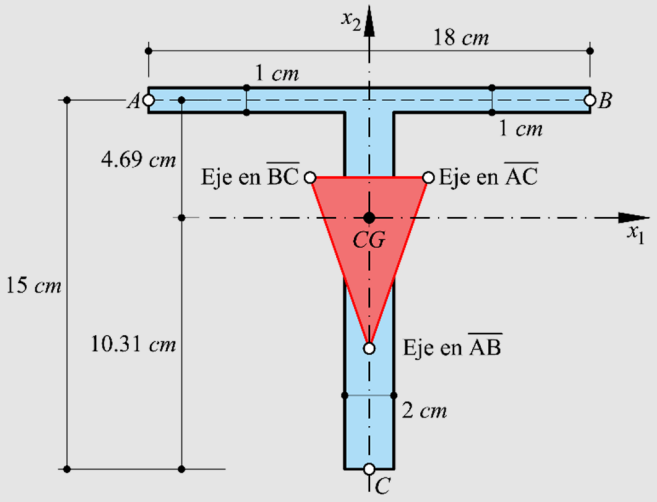
$$\left(x_1^{\mathrm{C}} = 0, x_2^{\mathrm{C}} = -0.1031\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{(-0.1031)}{0.00249} e_2^{\mathrm{AC}}$$

Resolviendo se tiene, $e_1^{\mathrm{AC}} = 0.01632\, m; \qquad e_2^{\mathrm{AC}} = 0.024151\, m$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{BC}}$,

- por simetría con el caso $\overline{\mathrm{AC}}$ se tiene,

$$e_1^{\mathrm{BC}} = -0.01632\, m; \qquad e_2^{\mathrm{BC}} = 0.024151\, m$$

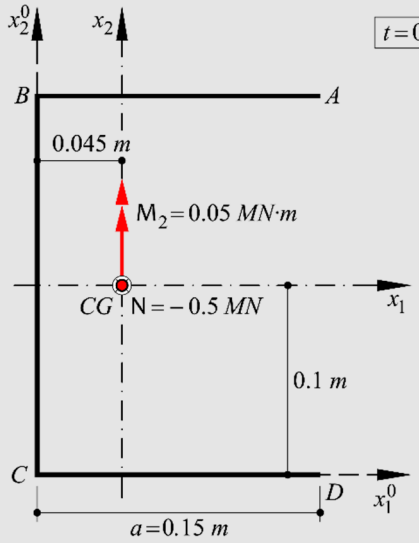


Ejemplo 5-22: Dada la sección de la figura, sometida a la acción de una fuerza $\mathrm{N} = 0.5MN$ aplicada en el centro geométrico (CG) y con un momento flector $\mathrm{M} = 0.05MN \cdot m$. Determinar:

a) La distribución de tensiones. Dibujar dicha distribución sobre la sección transversal.

b) La ecuación del eje neutro.

c) El núcleo central.



$$A=(2\cdot 0.15+0.2)\cdot 0.01=0.005 m^2$$
$$I_1=3.666\cdot 10^{-5} m^4$$
$$I_2=1.237\cdot 10^{-5} m^4$$
$$i_1^2=I_1/A=7.32\cdot 10^{-3} m^2$$
$$i_2^2=I_2/A=2.474\cdot 10^{-3} m^2$$

a) Distribución de tensiones

Se aplica la ecuación (5.104), es decir

$$\sigma(x_1,x_2)=\frac{N}{A}\left(1+\frac{\cancel{e_2}^{=0}}{i_1^2}x_2+\frac{e_1}{i_2^2}x_1\right) \quad \rightarrow \quad \sigma(x_1)=\frac{N}{A}\left(1+\frac{e_1}{i_2^2}x_1\right)$$

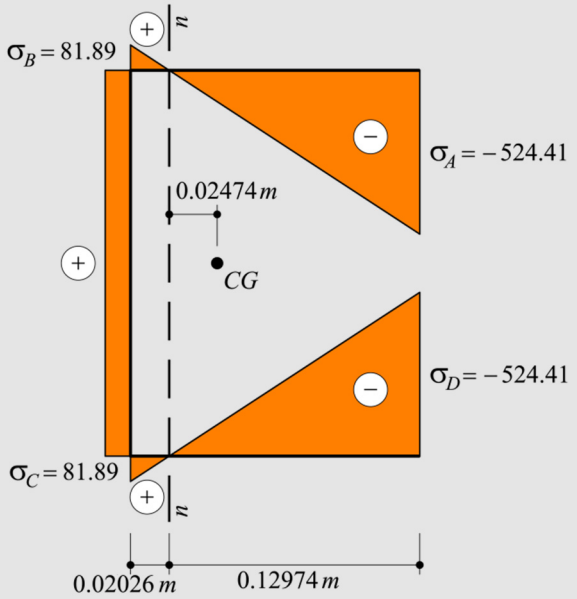
La excentricidad vale

$$e_1=e=-\frac{M_2}{N}=-\frac{0.05 MN\cdot m}{-0.5 MN}=0.1 m$$

$$\sigma(x_1)=\frac{N}{A}\left(1+\frac{e_1}{i_2^2}x_1\right)=-\frac{0.5}{0.005}\left(1+\frac{0.1}{2.474\cdot 10^{-3}}x_1\right)$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-22

	A	B	C	D
1	**Punto**	x_1 [m]	σ [MPa]	
2	A	0.105	-524.414	
3	B	-0.045	81.892	
4	C	-0.045	81.892	
5	D	0.105	-524.414	
6	**Excentricidad**	e_1 [m]		
7		0.100		
8				
9	**Normal**	N	-5.00E-01	MN
10	**Área**	A	5.00E-03	m^2
11	**Momento principal de inercia**	I_2	1.2370E-05	m^4
12	**Radio de giro**	i_2^2	2.474E-03	m^2



b) Eje neutro

$$\sigma(x_1) = 0 = -\frac{0.5}{0.005}\left(1 + \frac{0.1}{2.474 \cdot 10^{-3}} x_1^n\right) \quad \rightarrow \quad x_1^n = -0.02474m$$

c) Núcleo central

Empleando la ecuación del eje neutro, es decir,

$$1+e_2\frac{x_2^n}{i_1^2}+e_1\frac{x_1^n}{i_2^2}=0$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{AB}}$

● Por simetría $\rightarrow \quad e_1^{\mathrm{AB}}=0$

● Ecuación para el punto $\mathrm{A}\ \left(x_1^{\mathrm{A}}=0.105; x_2^{\mathrm{A}}=0.1\right)$

$$0=1+\frac{0.1}{7.332\cdot 10^{-3}}e_2^{\mathrm{AB}} \quad \rightarrow \begin{cases} e_1^{\mathrm{AB}}=0 \\ e_2^{\mathrm{AB}}=-0.0733\,m \end{cases}$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{DC}}$

$$\text{Simétrico de } \overline{\mathrm{AB}} \qquad \rightarrow \begin{cases} e_1^{\mathrm{DC}}=0 \\ e_2^{\mathrm{DC}}=0.0733\,m \end{cases}$$

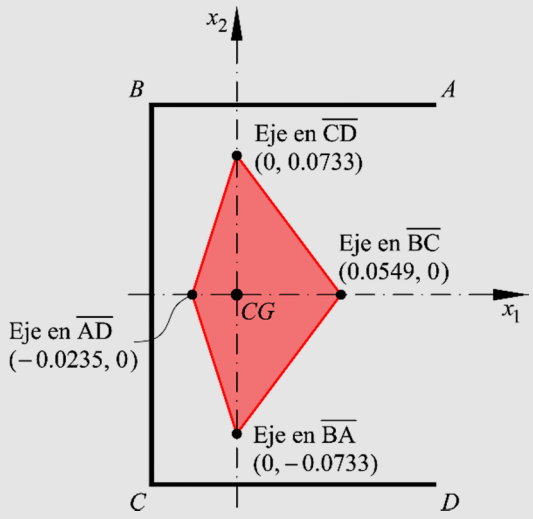
Eje neutro en $\overline{\mathrm{AD}}$, ecuación para el punto D $\left(x_1^{\mathrm{D}}=0.105; x_2^{\mathrm{D}}=-0.1\right)$

$$0=1+\frac{0.105}{2.474\cdot 10^{-3}}e_1^{\mathrm{AD}} \quad \rightarrow \begin{cases} e_1^{\mathrm{AD}}=-0.0235\,m \\ e_2^{\mathrm{AD}}=0 \end{cases}$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{CB}}$, ecuación para el punto C $\left(x_1^{\mathrm{C}}=-0.045; x_2^{\mathrm{CB}}=-0.1\right)$

$$0=1+\left(\frac{-0.045}{2.474\cdot 10^{-3}}\right)e_2^{\mathrm{CB}} \quad \rightarrow \begin{cases} e_1^{\mathrm{CB}}=0.05497\,m \\ e_2^{\mathrm{CB}}=0 \end{cases}$$

Resultando para la sección el núcleo central que se representa a continuación



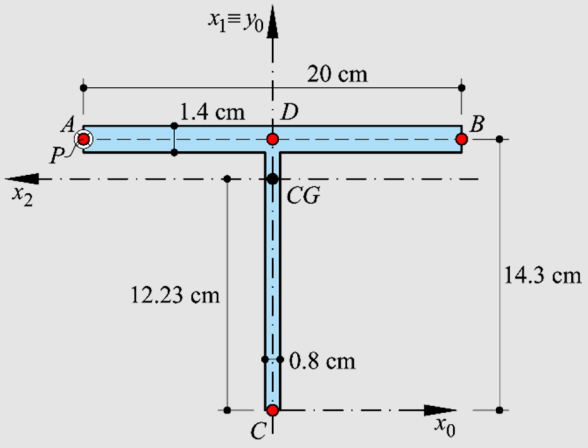
Ejemplo 5-23: Dada la sección simétrica de la figura, obtener:

a) La magnitud de la fuerza P (aplicada en el punto A), de tracción, para que la tensión máxima (en valor absoluto), no supere $\sigma^{max} = 250MPa$.

b) La distribución de tensiones en la sección y su trazado.

c) La ecuación del eje neutro y su trazado.

d) El núcleo central.



$$A = 0.0039\,m^2$$
$$x_0^{CG} = 0; \quad y_0^{CG} = 0.1223m$$
$$I_1 = 9.339 \cdot 10^{-6}\,m^4$$
$$I_2 = 6.1472 \cdot 10^{-6}\,m^4$$
$$\varphi = 0^o$$

a) Magnitud de la fuerza P

Se aplica la ecuación (5.103), es decir

$$\sigma\left(x_1,x_2\right)=\frac{\mathrm{N}}{A}+\frac{\mathrm{M}_1}{I_1}x_2-\frac{\mathrm{M}_2}{I_2}x_1=\frac{P}{A}\left(1+\frac{e_2}{i_1^2}x_2+\frac{e_1}{i_2^2}x_1\right)$$

Los radios de giro y las excentricidades están dados respectivamente por

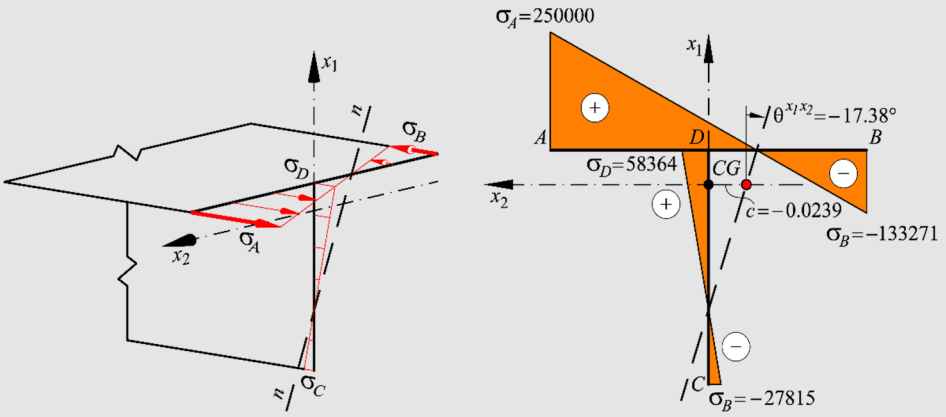
$$\begin{cases}e_1=0.0207\,m\\ e_2=0.1\,m\end{cases}\qquad \begin{cases}i_1^2=\dfrac{I_1}{A}=\dfrac{9.339\cdot10^{-6}}{0.0039}=0.00239\,m^2\\ i_2^2=\dfrac{I_2}{A}=\dfrac{6.1472\cdot10^{-6}}{0.0039}=0.00158\,m^2\end{cases}$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-23a

	A	B	C	D
1	**Punto**	x_1 [m]	x_2 [m]	σ/N
2	A	0.0207	0.1000	1396.894
3	B	0.0207	-0.1000	-744.663
4	C	-0.1223	0.0000	-155.421
5	D	0.0207	0.0000	326.115
6	**Excentrici-**	e_1 [m]	e_2 [m]	
7	**dades**	0.0207	0.1000	
8				
9	**Área**	A	3.900E-03	m^2
10	**Momentos**	I_1	9.339E-06	m^4
11	**de Inercia**	I_2	6.147E-06	m^4
12	**Radios de**	i_1^2	2.395E-03	m^2
13	**giro**	i_2^2	1.576E-03	m^2

$$\left(\frac{\sigma}{\mathrm{N}}\right)^{\max}=1396.89\quad\rightarrow\quad P=\mathrm{N}=\frac{250000}{1396.89}=178.969kN$$

b) Distribución de tensiones



Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-23b

	A	B	C	D	E
1	**Punto**	x_1 [m]	x_2 [m]	σ/N	σ [kPa]
2	A	0.0207	0.1000	1396.894	250000.000
3	B	0.0207	-0.1000	-744.663	-133271.296
4	C	-0.1223	0.0000	-155.421	-27815.494
5	D	0.0207	0.0000	326.115	58364.352
6	**Excentrici-dades**	e_1 [m]	e_2 [m]		
7		0.0207	0.1000		
8					
9	**Área**	A	3.900E-03	m^2	
10	**Momentos de Inercia**	I_1	9.339E-06	m^4	
11		I_2	6.147E-06	m^4	
12	**Radios de giro**	i_1^2	2.395E-03	m^2	
13		i_2^2	1.576E-03	m^2	
14	**Normal**	N	178.969	kN	

c) Ecuación del eje neutro

$$x_2^n = \underbrace{-\frac{i_1^2}{e_2}}_{c} \underbrace{-\left(\frac{e_1}{e_2}\frac{i_1^2}{i_2^2}\right)}_{m=\mathrm{tg}\,\theta} x_1^n = c + m\,x_1^n$$

$$\begin{cases} c = -\dfrac{i_1^2}{e_2} = -\dfrac{0.00239}{0.1} = -0.0239\,m \\ \operatorname{tg}\theta = -\left(\dfrac{e_1}{e_2}\dfrac{i_1^2}{i_2^2}\right) = -\dfrac{0.0207\cdot 0.00239}{0.1\cdot 0.00158} = -0.31312 \rightarrow \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(-0.31312\right) = -17.38^{\text{o}} \end{cases}$$

d) Núcleo central

Para la determinación del núcleo central se sigue un procedimiento análogo al del **Ejemplo 5-21**.

De igual forma que en el ejemplo mencionado, el problema se simplifica debido a la simetría de la sección.

Eje neutro en $\overline{\mathrm{AB}}$

- $e_2^{\mathrm{AB}} = 0$
- $\left(x_1^{\mathrm{B}} = 0.0207, x_2^{\mathrm{B}} = -0.1\right)$

$$0 = 1 + \frac{x_1^{\mathrm{B}}}{i_2^2} e_1^{\mathrm{AB}} \quad \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{0.0207}{0.00158} e_1^{\mathrm{AB}} \quad \rightarrow \quad e_1^{\mathrm{AB}} = -0.07633\,m$$

Es decir,

$$e_2^{\mathrm{AB}} = 0; \qquad e_1^{\mathrm{AB}} = -0.07633\,m$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{BC}}$,

- Ecuación para B

$$\left(x_1^{\mathrm{B}} = -0.1, x_2^{\mathrm{B}} = 0.0207\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{0.0207}{0.00158} e_1^{\mathrm{BC}} + \frac{\left(-0.1\right)}{0.00239} e_2^{\mathrm{BC}}$$

- Ecuación para C $\left(x_1^{\mathrm{C}} = -0.1223, x_2^{\mathrm{C}} = 0\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \dfrac{\left(-0.1223\right)}{0.00158} e_1^{\mathrm{BC}}$

Resolviendo se tiene,

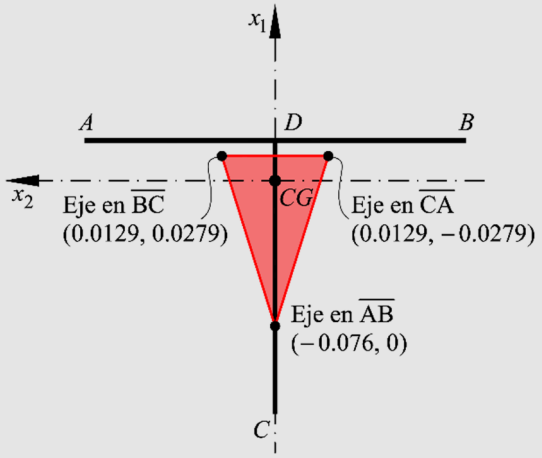
$$e_1^{BC} = 0.01292\,m; \qquad e_2^{BC} = 0.02795\,m$$

Eje neutro en $\overline{CA}$,

- por simetría con el caso $\overline{BC}$ se tiene,

$$e_1^{CA} = 0.01292\,m; \qquad e_2^{CA} = 0.02795\,m$$

Resultando para la sección el núcleo central que se representa a continuación



Ejemplo 5-24: Un pilar cuya sección transversal se representa en la figura, está sometido a una carga de compresión de $150\,kN$ aplicada en el punto A de la sección. Determinar:

a) La tensión a la que está sometida la pieza en el punto de aplicación de la carga.

b) La ecuación de la línea neutra y su representación.

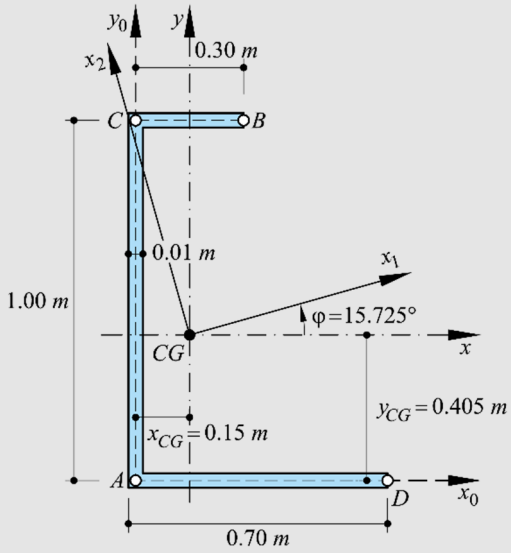
c) El núcleo central.

Características geométricas

$$\begin{cases} i_1^2 = \dfrac{I_1}{A} = \dfrac{33.3358 \cdot 10^{-4}}{0.02} = 0.1667\, m^2 \\ i_2^2 = \dfrac{I_2}{A} = \dfrac{6.11929 \cdot 10^{-4}}{0.02} = 0.0306\, m^2 \end{cases}$$

Las excentricidades en la base (x, y) valen $\begin{cases} e_x = -0.15\, m \\ e_y = -0.405\, m \end{cases}$, se realiza el cambio a

la base (x_1, x_2) $\rightarrow$ $\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\,\varphi \\ -\text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \end{Bmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} e_1 = -0.254\, m \\ e_2 = -0.349\, m \end{cases}$



Datos

$A = 0.02\, m^2$

$I_1 = 33.3358 \cdot 10^{-4}\, m^4$

$I_2 = 6.11929 \cdot 10^{-4}\, m^4$

$\varphi = 15.725°$

a) Distribución de tensiones

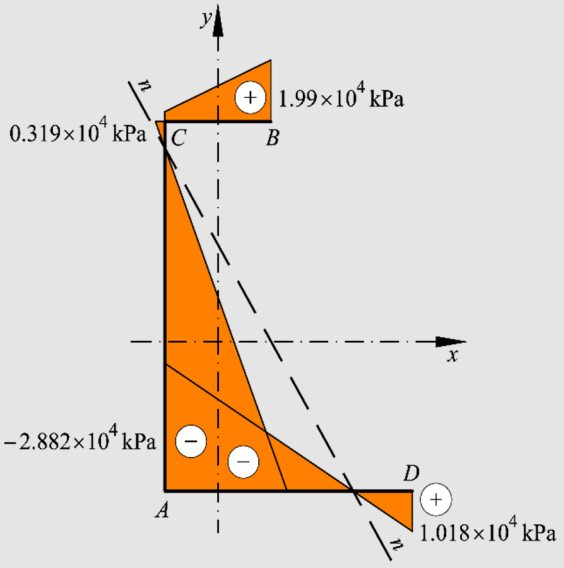
Se aplica la siguiente ecuación

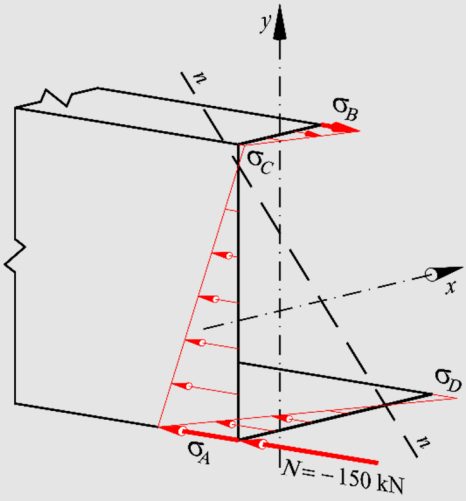
$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{\text{N}}{A}\left(1 + \frac{e_2}{i_1^2} x_2 + \frac{e_1}{i_2^2} x_1\right)$$

con $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\,\varphi \\ -\text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\,\text{sen}\,\varphi \\ x_2 = -x\,\text{sen}\,\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-24a

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [m]	y [m]	x_1 [m]	x_2 [m]	σ [kN/m^2]
2	B	0.15	0.595	0.306	0.532	1.990E+04
3	C	-0.15	0.595	0.017	0.613	3.189E+03
4	A	-0.15	-0.405	-0.254	-0.349	-2.882E+04
5	D	0.55	-0.405	0.420	-0.539	1.018E+04
6	**Excen-**	e_x	e_y	e_1	e_2	
7	**tricidades**	-0.15	-0.405	-0.254	-0.349	
8						
9	x_{CG}	0.15				
10	y_{CG}	0.405				
11			grados	radianes		
12	**Ángulo**	φ	15.725	0.27445		
13	**Normal**	N	-150	kN		
14	**Área**	A	0.02	m^2		
15	**Mom.**	I_1	3.334E-03	m^4		
16	**de Inercia**	I_2	6.119E-04	m^4		
17	**Radios de**	i_1^2	1.667E-01	m^2		
18	**giro**	i_2^2	3.060E-02	m^2		





b) Ecuación del eje neutro

● En la base (x_1, x_2)

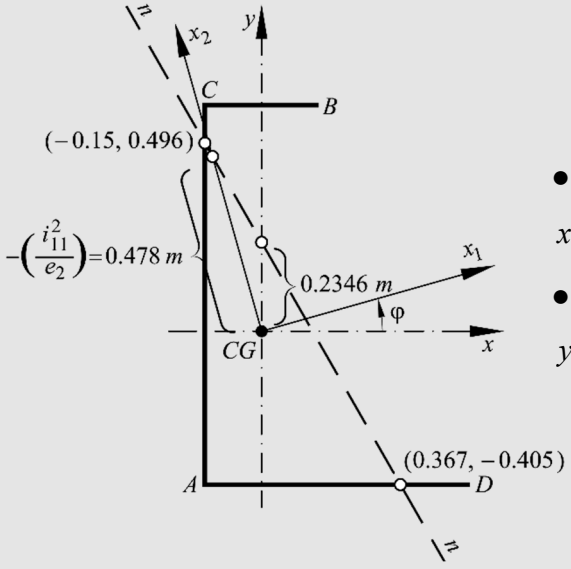
$$\rightarrow \quad x_2^n = -\frac{i_1^2}{e_2} - \left(\frac{e_1}{e_2}\frac{i_1^2}{i_2^2}\right) x_1^n = -\frac{0.408^2}{-0.349} - \left(\frac{-0.254}{-0.349}\frac{0.408^2}{0.175^2}\right) x_1^n$$

$$x_2^n = 0.478 - 3.965\, x_1^n \rightarrow \quad \theta_{12}^n = \mathrm{tg}^{-1}(-3.965) = -75.84°$$

● En la base (x, y), sustituyendo en las ecuaciones del cambio de base,

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ x_2 = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi \end{cases},$$

resulta $y^n = 0.2346 - 1.7404\, x^n \rightarrow \theta_{xy}^n = \mathrm{tg}^{-1}(-1.7404) = -60.12°$



● Intersección con el lado $\overline{\mathrm{CA}}$

$x^n = -0.15\,m \quad \rightarrow \quad y^n = 0.496\,m$

● Intersección con el lado $\overline{\mathrm{AD}}$

$y^n = -0.405\,m \quad \rightarrow \quad x^n = 0.3675\,m$

b) Determinación del núcleo central

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-24b.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Eje Neutro**	**Punto**	x^n [m]	y^n [m]	$x_1{}^n$ [m]	$x_2{}^n$ [m]	e_1^{ij} [m]	e_2^{ij} [m]	e_x^{ij} [m]	e_y^{ij} [m]
2	BC	B	0.15	0.595	0.306	0.532	-0.01394	-0.26965	0.05967	-0.26333
3		C	-0.15	0.595	0.017	0.613				
4	CA	C	-0.15	0.595	0.017	0.613	0.19634	-0.30116	0.27061	-0.23667
5		A	-0.15	-0.405	-0.254	-0.349				
6	AD	A	-0.15	-0.405	-0.254	-0.349	0.02047	0.39615	-0.08766	0.38687
7		D	0.55	-0.405	0.420	-0.539				
8	DB	D	0.55	-0.405	0.420	-0.539	-0.08445	-0.04898	-0.06802	-0.07003
9		B	0.15	0.595	0.306	0.532				
10										
11			grados	radianes						
12	**Ángulo**	φ	15.725	0.27445						
13	**Área**	A	0.02	m^2						
14	**Mom.**	I_1	3.334E-03	m^4						
15	**de Inercia**	I_2	6.119E-04	m^4						
16	**Radios**	i_1^2	1.667E-01	m^2						
17	**de giro**	i_2^2	3.060E-02	m^2						

Se utiliza la ecuación del núcleo central, donde las incógnitas son las excentricidades para las distintas posiciones del eje neutro coincidentes con los bordes de la sección trasversal. O sea,

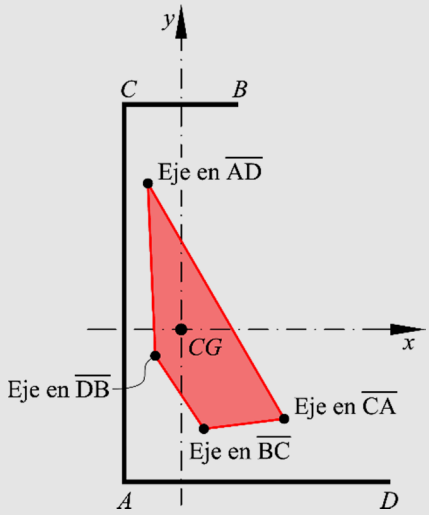
$$\sigma\left(x_1,x_2\right)=0=1+e_2\frac{x_2^n}{i_1^2}+e_1\frac{x_1^n}{i_2^2}=0$$

● Para el eje neutro en $\overline{ij}$ con $i,j=\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}$ se obtienen, de la ecuación (5.117), las coordenadas que definen el núcleo central en la base $\left(x_1,x_2\right)$,

$$\begin{cases} e_1^{ij}=\dfrac{i_2^2\left(x_2^i-x_2^j\right)}{x_1^ix_2^j-x_1^jx_2^i} \\ e_2^{ij}=-\dfrac{i_1^2\left(x_1^i-x_1^j\right)}{x_1^ix_2^j-x_1^jx_2^i} \end{cases}$$

A partir de estas ecuaciones el núcleo central en la base $\left(x,y\right)$ está dado por las ecuaciones (5.119),

$$\begin{cases} e_x^{ij} = e_1^{ij}\cos\varphi - e_2^{ij}\,\text{sen}\,\varphi \\ e_y^{ij} = e_1^{ij}\,\text{sen}\,\varphi + e_2^{ij}\cos\varphi \end{cases}$$



Ejemplo 5-25: Dada la viga de la figura, obtener:

a) La magnitud del esfuerzo de tracción N, necesaria para que la tensión máxima (en valor absoluto), no supere $\sigma^{\max} = 250MPa$.

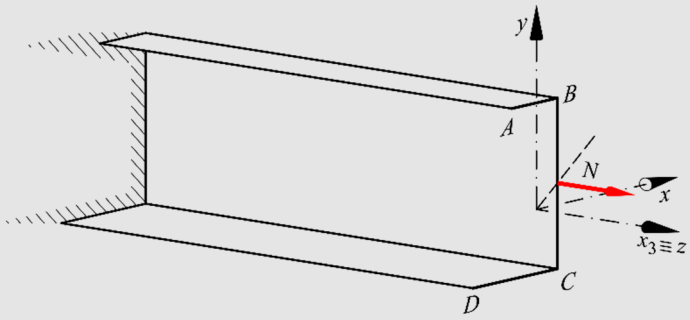
b) La distribución de tensiones en la sección y su trazado.

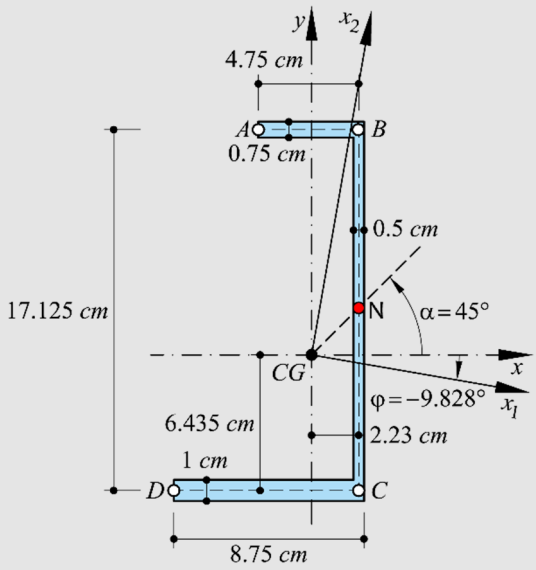
c) La ecuación del eje neutro y su representación.

d) El núcleo central.

Datos

$$A = 0.2087\cdot 10^{-2}\ m^2$$
$$I_{xx} = 1.018\cdot 10^{-5}\ m^4$$
$$I_{yy} = 0.145\cdot 10^{-5}\ m^4$$
$$I_{xy} = 0.155\cdot 10^{-5}\ m^4$$
$$I_1 = 1.045\cdot 10^{-5}\ m^4$$
$$I_2 = 0.118\cdot 10^{-5}\ m^4$$
$$\varphi = -9.828^{\circ}$$





Características geométricas

$$\begin{cases} i_1^2 = \dfrac{I_1}{A} = \dfrac{1.045 \cdot 10^{-5}}{0.2087 \cdot 10^{-2}} = 5.01 \cdot 10^{-3}\ m^2 \\ i_2^2 = \dfrac{I_2}{A} = \dfrac{0.118 \cdot 10^{-5}}{0.2087 \cdot 10^{-2}} = 5.65 \cdot 10^{-4}\ m^2 \end{cases}$$

Las excentricidades en la base (x, y) valen $\begin{cases} e_x = 0.0223\,m \\ e_y = 0.0223\,m \end{cases}$

Cambio a la base (x_1, x_2),

$$\rightarrow \quad \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \end{Bmatrix} \rightarrow \quad \begin{cases} e_1 = 0.01817\,m \\ e_2 = 0.02578\,m \end{cases}$$

a) Máximo valor de N

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-25a.

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [m]	y [m]	x_1 [m]	x_2 [m]	σ/N
2	A	-0.0252	0.1069	-0.0431	0.1010	65.208
3	B	0.0223	0.1069	0.0037	0.1091	805.749
4	C	0.0223	-0.0644	0.0330	-0.0596	839.506
5	D	-0.0652	-0.0644	-0.0533	-0.0745	-524.649
6	**Excentrici-**	e_x [m]	e_y [m]	e_1 [m]	e_2 [m]	
7	**dades**	0.0223	0.0223	0.0182	0.0258	
8						
9			grados	radianes		
10	**Ángulo**	φ	-9.828	-0.17153		
11	**Área**	A	2.087E-03	m^2		
12	**Momentos**	I_1	1.045E-05	m^4		
13	**de Inercia**	I_2	1.180E-06	m^4		
14	**Radios de**	i_1^2	5.007E-03	m^2		
15	**giro**	i_2^2	5.654E-04	m^2		

Se aplica la siguiente ecuación

$$\sigma(x_1,x_2)=\frac{N}{A}\left(1+\frac{e_2}{i_1^2}x_2+\frac{e_1}{i_2^2}x_1\right)$$

$$\text{con}\quad \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi\\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\y\end{Bmatrix}\quad\rightarrow\begin{cases}x_1=x\cos\varphi+y\operatorname{sen}\varphi\\ x_2=-x\operatorname{sen}\varphi+y\cos\varphi\end{cases}$$

Y se determina

$$\frac{\sigma(x_1,x_2)}{N}=\frac{1}{A}\left(1+\frac{e_2}{i_1^2}x_2+\frac{e_1}{i_2^2}x_1\right)$$

La máxima tensión se da en el punto C y de aquí se obtiene el valor máximo de N, es decir

$$\left(\frac{\sigma}{N}\right)^{\max}=839.50598\quad\rightarrow\quad N=\frac{250}{839.50598}=0.29779MN=297.79kN$$

b) Distribución de tensiones

Con este valor de la carga se obtienen las tensiones en los restantes puntos de la sección transversal.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Punto**	x [m]	y [m]	x_1 [m]	x_2 [m]	σ/N	σ [MPa]=(σ/N).N
2	A	-0.0252	0.1069	-0.0431	0.1010	65.208	19.4185
3	B	0.0223	0.1069	0.0037	0.1091	805.749	239.9474
4	C	0.0223	-0.0644	0.0330	-0.0596	839.506	250.0000
5	D	-0.0652	-0.0644	-0.0533	-0.0745	-524.649	-156.2374
6	**Excentrici-**	e_x [m]	e_y [m]	e_1 [m]	e_2 [m]		
7	**dades**	0.0223	0.0223	0.0182	0.0258		
8							
9			grados	radianes			
10	**Ángulo**	φ	-9.828	-0.17153			
11	**Área**	A	2.087E-03	m^2			
12	**Momentos**	I_1	1.045E-05	m^4			
13	**de Inercia**	I_2	1.180E-06	m^4			
14	**Radios de**	i_1^2	5.007E-03	m^2			
15	**giro**	i_2^2	5.654E-04	m^2			
16	**Normal**	N	0.297794	MN			

c) Ecuación del eje neutro

● En la base (x_1, x_2) $\rightarrow$ $x_2^n = -\dfrac{i_1^2}{e_2} - \left(\dfrac{e_1}{e_2}\dfrac{i_1^2}{i_2^2}\right) x_1^n$

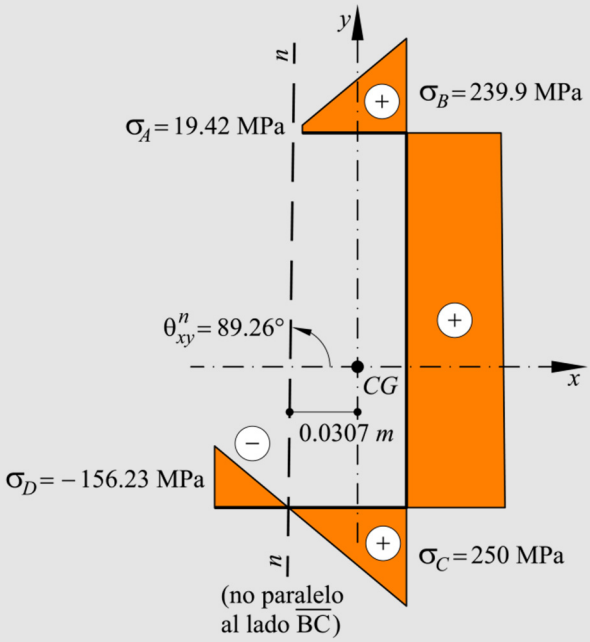
$$x_2^n = -\frac{5.007\cdot 10^{-3}}{0.02578} - \left(\frac{001817}{0.02578}\frac{5.007\cdot 10^{-3}}{5.654\cdot 10^{-4}}\right) x_1^n$$

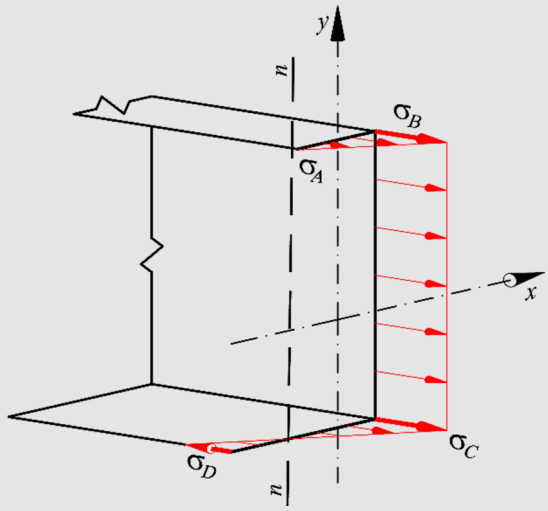
$$x_2^n = -0.19434 - 6.24973\, x_1^n$$

● En la base (x, y), sustituyendo en las ecuaciones del cambio de base,

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ x_2 = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi \end{cases}, \text{ resulta } \quad y^n = 2.3861 + 77.703\, x^n$$

$\rightarrow$ $\theta_{xy}^n = \mathrm{tg}^{-1}(77.703) = 89.26°$ y para $y^n = 0 \rightarrow$ $x^n = -0.0307$





d) Determinación del núcleo central

● Para el eje neutro en $\overline{ij}$ con $i, j = \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ se obtienen, de la ecuación (5.117), las coordenadas que definen el núcleo central en la base (x_1, x_2),

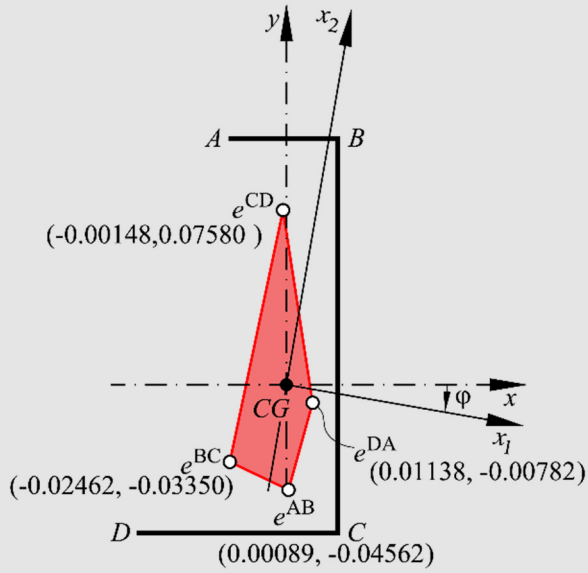
$$\begin{cases} e_1^{ij} = \dfrac{i_2^2\left(x_2^i - x_2^j\right)}{x_1^i x_2^j - x_1^j x_2^i} \\ e_2^{ij} = -\dfrac{i_1^2\left(x_1^i - x_1^j\right)}{x_1^i x_2^j - x_1^j x_2^i} \end{cases}$$

A partir de estas ecuaciones, el núcleo central en la base (x, y), está dado por las ecuaciones (5.119), es decir,

$$\begin{cases} e_x^{ij} = e_1^{ij}\cos\varphi - e_2^{ij}\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ e_y^{ij} = e_1^{ij}\,\mathrm{sen}\,\varphi + e_2^{ij}\cos\varphi \end{cases}$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-25b.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Eje Neutro**	**Punto**	x^n [m]	y^n [m]	$x_1{}^n$ [m]	$x_2{}^n$ [m]	e_1^{ij} [m]	e_2^{ij} [m]	e_x^{ij} [m]	e_y^{ij} [m]
2	AB	A	-0.02520	0.10690	-0.04308	0.10103				
3		B	0.02230	0.10690	0.00373	0.10914	0.00090	-0.04615	0.00089	-0.04563
4	BC	B	0.02230	0.10690	0.00373	0.10914				
5		C	0.02230	-0.06435	0.03296	-0.05960	-0.02498	-0.03833	-0.02462	-0.03350
6	CD	C	0.02230	-0.06435	0.03296	-0.05960				
7		D	-0.06520	-0.06435	-0.05326	-0.07453	-0.00150	0.07667	-0.00148	0.07580
8	DA	D	-0.06520	-0.06435	-0.05326	-0.07453				
9		A	-0.02520	0.10690	-0.04308	0.10103	0.01155	-0.00593	0.01138	-0.00782
10										
11			grados	radianes						
12	**Ángulo**	φ	-9.828	-0.17153						
13	**Área**	A	2.087E-03	m^2						
14	**Momentos**	I_1	1.045E-05	m^4						
15	**de Inercia**	I_2	1.180E-06	m^4						
16	**Radios de**	i_1^2	5.007E-03	m^2						
17	**giro**	i_2^2	5.654E-04	m^2						

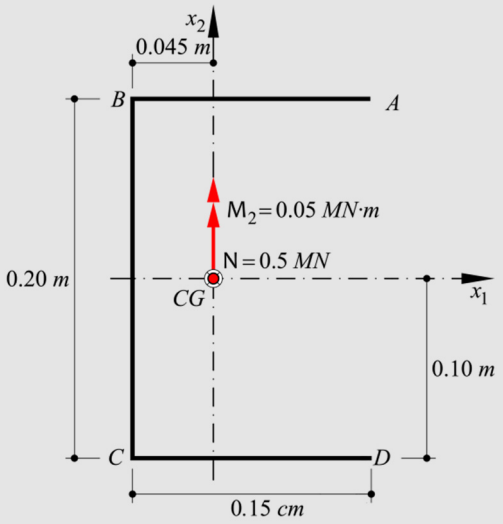


Ejemplo 5-26: Dada la sección de la figura, que tiene un espesor $t = 0.01m$, cargada con una fuerza de compresión $\mathrm{N} = 0.5MN$ en el centro geométrico (CG) y un momento flector como el que se indica en la figura. Determinar:

a) La distribución de tensiones en la sección transversal y su trazado.

b) La ecuación del eje neutro y su representación.

c) El núcleo central.



Datos

$$A = 5 \cdot 10^{-3}\ m^2$$

$$I_1 = 3.666 \cdot 10^{-5}\ m^4$$

$$I_2 = 1.237 \cdot 10^{-5}\ m^4$$

$$I_{12} = 0$$

Características geométricas

$$\begin{cases} i_1^2 = \dfrac{I_1}{A} = \dfrac{3.666 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^{-3}} = 7.332 \cdot 10^{-3}\ m^2 \\ i_2^2 = \dfrac{I_2}{A} = \dfrac{1.237 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^{-3}} = 2.474 \cdot 10^{-3}\ m^2 \end{cases}$$

Las excentricidades valen

$$\rightarrow \quad \begin{cases} e_1 = -\dfrac{M_2}{N} = -\dfrac{0.05 MN \cdot m}{-0.5 MN} = 0.1 m \\ e_2 = \dfrac{M_1}{N} = 0 \end{cases}$$

a) Distribución de tensiones producidas por el axil y la flexión

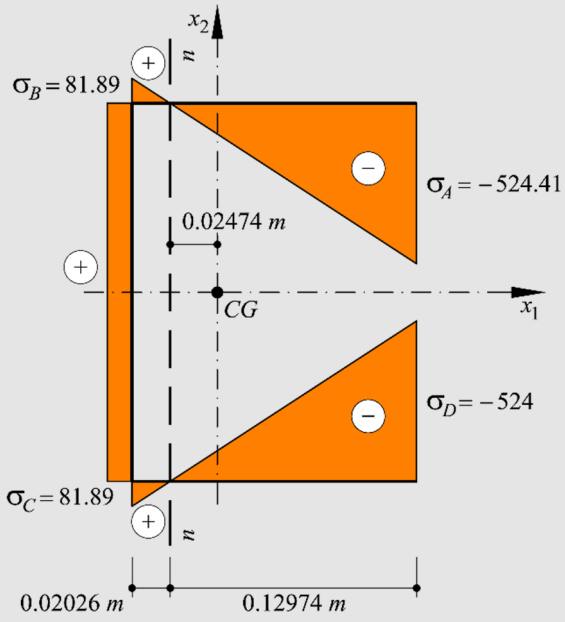
Se utiliza la siguiente ecuación

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_2}{i_1^2} x_2 + \frac{e_1}{i_2^2} x_1\right) = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_1}{i_2^2} x_1\right) = -100 - 4042.03\, x_1$$

Se obtienen así las tensiones en los puntos representativos de la sección transversal,

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-26.

	A	B	C	D
1	**Punto**	x_1 [m]	x_2 [m]	σ [MPa]
2	A	0.10500	0.10000	-524.414
3	B	-0.04500	0.10000	81.892
4	C	-0.04500	-0.10000	81.892
5	D	0.10500	-0.10000	-524.414
6	**Excentrici-**	e_1 [m]	e_2 [m]	
7	**dades**	0.1	0	
8				
9	**Normal**	N	-0.5	MN
10	**Área**	A	0.005	m^2
11	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	3.666E-05	m^4
12		I_2	1.237E-05	m^4
13	**Radios de giro**	i_1^2	7.332E-03	m^4
14		i_2^2	2.474E-03	m^4



b) Ecuación del eje neutro

$$\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{\mathrm{N}}{A}\left(1 + \frac{e_1}{i_2^2}x_1\right) = -100 - 4042.03\,x_1$$

$$x_1 = -\frac{100}{4042.03} = -0.02474\,m$$

O también,

$$c_2 = x_1 = -\frac{i_2^2}{e_1} = -\frac{2.474\cdot 10^{-3}\,m^2}{0.1\,m} = -0.02474\,m$$

c) Núcleo central

Eje neutro en $\overline{\mathrm{AB}}$,

- Para el punto A

$$\left(x_1^{\mathrm{A}} = 0.105, x_2^{\mathrm{A}} = 0.1\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{0.1}{7.332\cdot 10^{-3}}e_2^{\mathrm{AB}} + \frac{0.105}{2.474\cdot 10^{-3}}e_1^{\mathrm{AB}}$$

- Para el punto B

$$\left(x_1^{\mathrm{B}} = -0.045, x_2^{\mathrm{B}} = 0.1\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{0.1}{7.332\cdot 10^{-3}}e_2^{\mathrm{AB}} + \frac{(-0.045)}{2.474\cdot 10^{-3}}e_1^{\mathrm{AB}}$$

Resolviendo se tiene,

$$e_1^{\mathrm{AB}} = 0; \qquad e_2^{\mathrm{AB}} = -0.0733\,m$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{DC}}$,

- Simétrico al $\overline{\mathrm{AB}}$

$$e_1^{\mathrm{DC}} = 0; \qquad e_2^{\mathrm{DC}} = 0.0733\,m$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{AD}}$,

- Para el punto A

$$\left(x_1^{\mathrm{A}} = 0.105, x_2^{\mathrm{A}} = 0.1\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{0.1}{7.332\cdot 10^{-3}}e_2^{\mathrm{AD}} + \frac{0.105}{2.474\cdot 10^{-3}}e_1^{\mathrm{AD}}$$

● Para el punto D

$$\left(x_1^{\mathrm{D}}=0.105, x_2^{\mathrm{D}}=-0.1\right)\rightarrow \quad 0=1-\frac{0.1}{7.332\cdot 10^{-3}}e_2^{\mathrm{AD}}+\frac{0.105}{2.474\cdot 10^{-3}}e_1^{\mathrm{AD}}$$

Resolviendo se tiene,

$$e_1^{\mathrm{AD}}=-0.02356\,m; \qquad e_2^{\mathrm{AD}}=0$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{CB}}$,

● Para el punto C

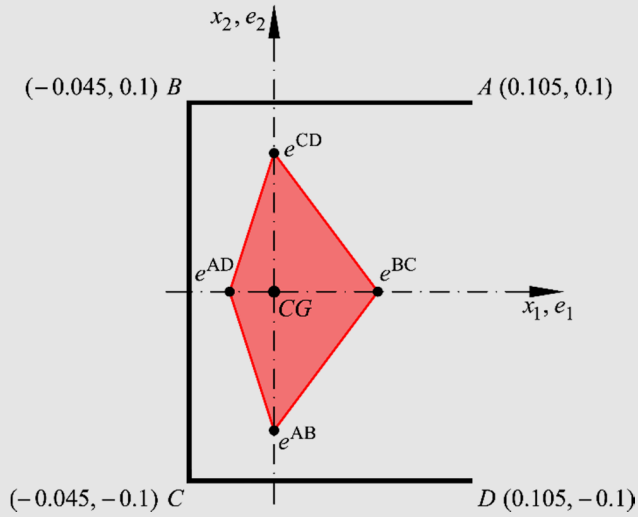
$$\left(x_1^{\mathrm{C}}=-0.045, x_2^{\mathrm{C}}=-0.1\right)\rightarrow \quad 0=1+\frac{(-0.1)}{7.332\cdot 10^{-3}}e_2^{\mathrm{CB}}+\frac{(-0.045)}{2.474\cdot 10^{-3}}e_1^{\mathrm{CB}}$$

● Para el punto B

$$\left(x_1^{\mathrm{B}}=-0.045, x_2^{\mathrm{B}}=0.1\right)\rightarrow \quad 0=1+\frac{0.1}{7.332\cdot 10^{-3}}e_2^{\mathrm{CB}}+\frac{(-0.045)}{2.474\cdot 10^{-3}}e_1^{\mathrm{CB}}$$

Resolviendo se tiene,

$$e_1^{\mathrm{CB}}=0.05497\,cm; \qquad e_2^{\mathrm{CB}}=0$$

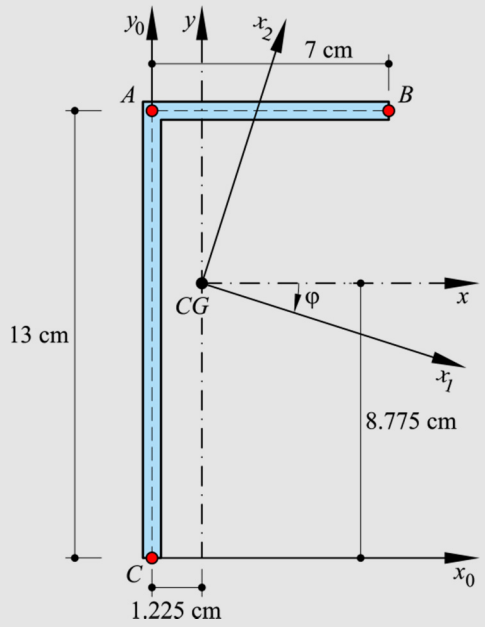


Ejemplo 5-27: Dada la sección transversal que se muestra en la figura, cometida a una carga de compresión $\mathrm{N} = 500\,kN$, obtener:

a) El punto de aplicación de dicha carga para que el lado $\overline{\mathrm{AB}}$ de la sección tenga tensión nula.

b) La magnitud de la tensión en el punto C.

c) El momento flector que es necesario añadir al estado de carga existente para que en la sección transversal la tensión sea uniforme. Se pide la magnitud, sentido y dirección de dicho momento flector y también la magnitud de la tensión final.



Esp. Paredes $t = 1.5\,cm$

Características geométricas

$$A = 20 \cdot 1.5 = 30\,cm^2$$

$$y_{CG} = \left[\left(7 \cdot 1.5\right) \cdot 13 + \left(13 \cdot 1.5\right) \cdot \frac{13}{2} \right] \cdot \frac{1}{30} = 8.775\,cm$$

$$x_{CG} = \left[\left(7 \cdot 1.5\right) \cdot \frac{7}{2} + \left(13 \cdot 1.5\right) \cdot 0 \right] \cdot \frac{1}{30} = 1.225\,cm$$

$$I_{xx} = \left\{0 + \left[(7\cdot 1.5)\cdot(13-8.775)^2\right]\right\} + \left\{\left(\frac{1.5\cdot 13^3}{12}\right) + \left[(13\cdot 1.5)\cdot\left(\frac{13}{2}-8.775\right)^2\right]\right\}$$
$$= 562.9812\, cm^4$$

$$I_{yy} = \left\{\left(\frac{1.5\cdot 7^3}{12}\right) + \left[(7\cdot 1.5)\cdot\left(\frac{7}{2}-1.225\right)^2\right]\right\} + \left\{0 + \left[(13\cdot 1.5)\cdot(0-1.225)^2\right]\right\}$$
$$= 126.481 cm^4$$

$$I_{xy} = \left\{0 + \left[(7\cdot 1.5)\cdot(13-8.775)\cdot\left(\frac{7}{2}-1.225\right)\right]\right\} + \left\{0 + \left[(13\cdot 1.5)\cdot\left(\frac{13}{2}-8.775\right)(-1.225)\right]\right\}$$
$$= 155.268 cm^4$$

Los momentos de inercia principales centroidales y su orientación se obtienen empleando, respectivamente, las siguientes ecuaciones,

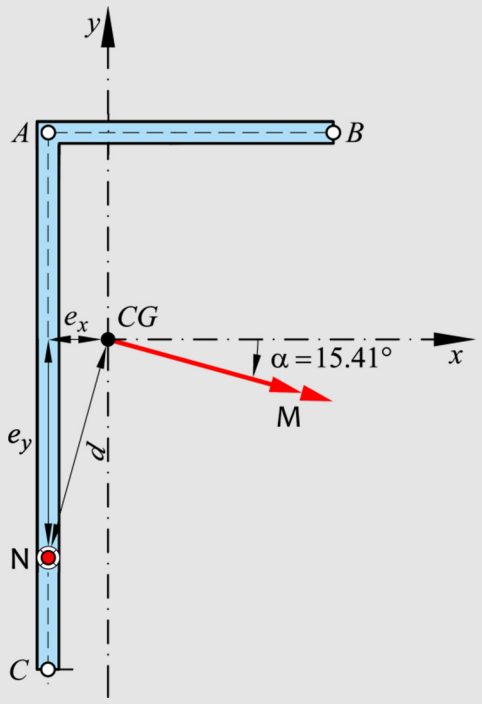
$$I_{1,2} = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}\ ; \qquad \varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{2I_{xy}}{I_{xx}-I_{yy}}\right)$$

Reemplazando se tiene,

$$I_{1,2} = \frac{562.981+126.481}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{562.981-126.481}{2}\right)^2 + (155.268)^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} I_1 = 612.57\, cm^4 \\ I_2 = 76.88\, cm^4 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{2\cdot 155.268}{562.981-126.481}\right) = -17.714^{\circ}$$



$$d = \sqrt{\left(e_x^{AB}\right)^2 + \left(e_y^{AB}\right)^2}$$
$$= \sqrt{(-1.224)^2 + (-4.439)^2}$$
$$= 4.604cm = 0.04604m$$

$$M = 500 \cdot 0.04604 = -23.02\, kN \cdot m$$
$$\alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1.224}{4.439}\right) = 15.41^{o}$$

a) Tensión nula en $\overline{AB}$, significa que el eje neutro contiene al lado $\overline{AB}$.

Empleando la ecuación del eje neutro, $1 + e_2 \frac{x_2^n}{i_1^2} + e_1 \frac{x_1^n}{i_2^2} = 0$, se obtiene:

- Para el punto $A\ \left(x_1^A = -2.452, x_2^A = 3.654\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{3.654}{20.42} e_2^{AB} - \frac{2.452}{2.56} e_1^{AB}$

- Para el punto $B\ \left(x_1^B = 4.219, x_2^B = 5.782\right) \rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{5.782}{20.42} e_2^{AB} + \frac{4.219}{2.56} e_1^{AB}$

Resolviendo se tienen las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza N en la base (x_1, x_2),

$$e_1^{AB} = 0.184\, cm; \qquad e_2^{AB} = -4.604\, cm$$

Para encontrar el punto de aplicación de N en la base (x, y) se aplican las ecuaciones de cambio de base,

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\,\varphi \\ -\text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\text{sen}\,\varphi \\ \text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}$$

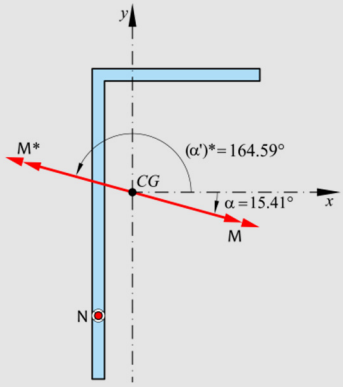
$$\begin{cases} e_x = e_1 \cos\varphi - e_2\, \text{sen}\,\varphi \\ e_y = e_1\, \text{sen}\,\varphi + e_2 \cos\varphi \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} e_x^{AB} = 0.184 \cdot \cos(-17.714) - (-4.604) \cdot \text{sen}(-17.714) = -1.224 cm \\ e_y^{AB} = 0.184 \cdot \text{sen}(-17.714) + (-4.604) \cdot \cos(-17.714) = -4.439 cm \end{cases}$$

b) Tensión en el punto C

$$\sigma^C = \frac{-500}{0.0030}\left(1 + \frac{(-0.04604)}{0.002042}(-0.08735) + \frac{0.00184}{0.000256}0.015\right) = -5.1288 \cdot 10^5\, kN/m^2$$

c) Momento flector para lograr tensión uniforme



$$M^* = 23.02\, kN \cdot m$$

$$(\alpha')^* = 180^o - 15.41^o = 164.59^o$$

$$\sigma^{final} = -\frac{500}{0.0030} = -1.666 \cdot 10^5\, kN/m^2$$

5.5.3 Teoría generalizada de flexión compuesta esviada

Hasta aquí se ha estudiado la flexión compuesta esviada u oblicua basada en los ejes principales de inercia de la sección. Este tratamiento permite resolver cualquier problema de flexión esviada. Sin embargo, hay casos en los cuales trabajar en ejes principales puede complicar la resolución del problema. Otra alternativa es formular la *teoría generalizada de la flexión compuesta*, que permite trabajar con *dos ejes cualesquiera ortogonales y no princi-*

pales. Sólo se requiere que sean ejes centroidales de manera análoga al caso de flexión pura esviada.

Como no se hace el análisis sobre ejes principales, sino sobre ejes ortogonales $x-y$, las componentes del momento actuante M sobre estos ejes, es decir M_x y M_y, producen flexión en ambos ejes (Figura 5.32), análogo a lo visto en la sección 5.3.3.

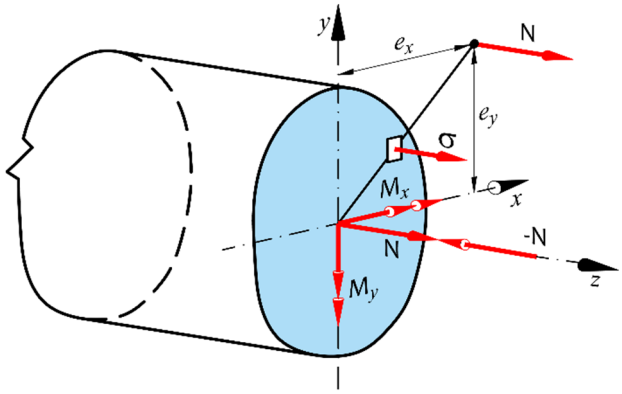


Figura 5.32 – Flexión compuesta esviada en ejes no principales.

Teniendo en cuenta la ec. (5.82), las tensiones normales resultan

$$\sigma=\sigma_3\left(x,y\right)=\frac{\mathsf{N}}{A}+\frac{I_{yy}\mathsf{M}_x+I_{xy}\mathsf{M}_y}{I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2}y-\frac{I_{xx}\mathsf{M}_y+I_{xy}\mathsf{M}_x}{I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2}x \tag{5.120}$$

En el caso que el momento flector M provenga de una carga excéntrica, las componentes del momento están dadas por

$$\begin{aligned}\mathsf{M}_x&=\mathsf{N}e_y\\ \mathsf{M}_y&=-\mathsf{N}e_x\end{aligned} \tag{5.121}$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.121) en la ecuación (5.120) se obtiene

$$\sigma=\frac{\mathsf{N}}{A}\left(1+\underbrace{\frac{I_{yy}e_y-I_{xy}e_x}{\left(I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2\right)/A}}_{\hat{i}^2}y+\underbrace{\frac{I_{xx}e_x-I_{xy}e_y}{\left(I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2\right)/A}}_{\hat{i}^2}x\right) \tag{5.122}$$

donde $\hat{i}^2=\left(I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2\right)/A$.

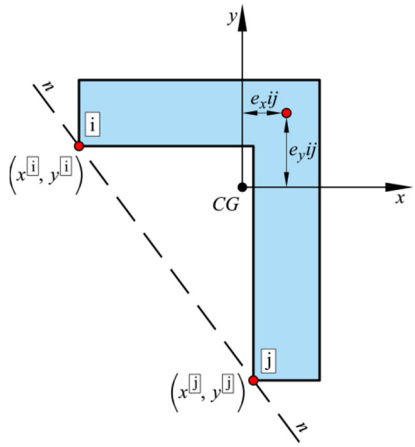


Figura 5.33 – Núcleo central en ejes no principales.

Finalmente, la tensión por flexión compuesta esviada, producida por carga excéntrica, en ejes ortogonales centroidales cualesquiera, puede determinarse empleando la siguiente expresión,

$$\sigma = \frac{\mathrm{N}}{A}\left(1 + \frac{I_{yy}e_y - I_{xy}e_x}{\hat{i}^2}\, y + \frac{I_{xx}e_x - I_{xy}e_y}{\hat{i}^2}\, x\right) \tag{5.123}$$

La ecuación del eje neutro se encuentra igualando a cero la ecuación de la tensión (5.123), es decir,

$$\sigma = 0 = 1 + \frac{I_{yy}e_y - I_{xy}e_x}{\hat{i}^2}\, y^n + \frac{I_{xx}e_x - I_{xy}e_y}{\hat{i}^2}\, x^n \tag{5.124}$$

De donde se obtiene

$$y^n = -\frac{\hat{i}^2}{I_{yy}e_y - I_{xy}e_x} + \left(\frac{-I_{xx}e_x + I_{xy}e_y}{I_{yy}e_y - I_{xy}e_x}\right) x^n \tag{5.125}$$

Siguiendo un procedimiento similar al explicado para ejes principales, se puede determinar el núcleo central trabajando en coordenadas ortogonales no principales. En este caso, nuevamente, las incógnitas son las excentricidades que hacen que el eje neutro contenga a un lado o a los vértices de la sección transversal. Para ello, se escribe la ecuación (5.125) en forma implícita, es decir,

$$0 = \hat{i}^2 + \left(x^n I_{xx} - y^n I_{xy}\right) e_x + \left(y^n I_{yy} - x^n I_{xy}\right) e_y \tag{5.126}$$

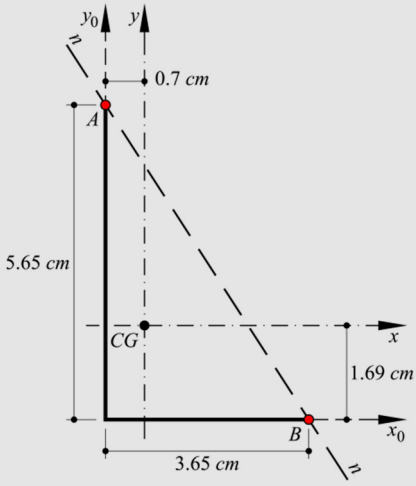
La ecuación (5.126) permite, conocidas coordenadas de dos puntos del eje neutro, determinar las excentricidades correspondientes. Sea por ejemplo la sección mostrada en la Figura 5.33 para la que se quiere determinar las excentricidades (e_x y e_y) que hacen que el eje neutro pase por los puntos i y j de la sección. Entonces, aplicando la ecuación (5.126) para las coordenadas de los puntos del eje neutro $\left(x^i, \mathrm{y}^i\right)$ y $\left(x^j, \mathrm{y}^j\right)$, se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones con las incógnitas e_x^{ij} y e_y^{ij},

$$\begin{cases} 0 = \hat{i}^2 + \left(x^i I_{xx} - y^i I_{xy}\right) e_x^{ij} + \left(y^i I_{yy} - x^i I_{xy}\right) e_y^{ij} \\ 0 = \hat{i}^2 + \left(x^j I_{xx} - y^j I_{xy}\right) e_x^{ij} + \left(y^j I_{yy} - x^j I_{xy}\right) e_y^{ij} \end{cases} \tag{5.127}$$

La solución del sistema de ecuaciones (5.127) permite encontrar las correspondientes excentricidades. Esto es,

$$\begin{cases} e_x^{ij} = \dfrac{I_{xy}\left(x^i - x^j\right) + I_{yy}\left(y^j - y^i\right)}{\left(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2\right)\left(x^j y^i - x^i y^j\right)} \hat{i}^2 \\ e_y^{ij} = \dfrac{I_{xx}\left(x^j - x^i\right) + I_{xy}\left(y^j - y^i\right)}{\left(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2\right)\left(x^j y^i - x^i y^j\right)} \hat{i}^2 \end{cases} \tag{5.128}$$

Ejemplo 5-28: Hallar el punto de aplicación del esfuerzo axil para que la línea neutra pase por los puntos A y B.



Datos

Espesor paredes $t = 0.704\,cm$

Centro geométrico $\begin{cases} x_{CG} = 0.7\,cm \\ y_{CG} = 1.69\,cm \end{cases}$

Área $A = 6.55\,cm^2$

Momentos de inercia $\begin{cases} I_{xx} = 22.9\,cm^4 \\ I_{yy} = 8.09\,cm^4 \\ I_{xy} = -8.00\,cm^4 \end{cases}$

Punto de aplicación del esfuerzo axil

Las incógnitas son las excentricidades (e_x y e_y) que hacen que el eje neutro pase por los puntos A y B de la sección cuyas coordenadas son:

Punto A $\begin{cases} x^A = -0.7 \\ y^A = 5.65 - 1.69 = 3.96 \end{cases}$ Punto B $\begin{cases} x^B = 3.65 - 0.7 = 2.95 \\ y^B = -1.69 \end{cases}$

Además $\hat{i}^2 = \left(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2 \right) / A = 18.513 cm^2$

Sustituyendo estas coordenadas en la solución del sistema de ecuaciones (5.127), dado por (5.128), se obtiene:

$$\begin{cases} 18.513 + 15.650 \cdot e_x + 26.436 \cdot e_y = 0 \\ 18.513 + 54.035 \cdot e_x + 9.928 \cdot e_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e_x = -0.24\,cm \\ e_y = -0.558\,cm \end{cases}$$

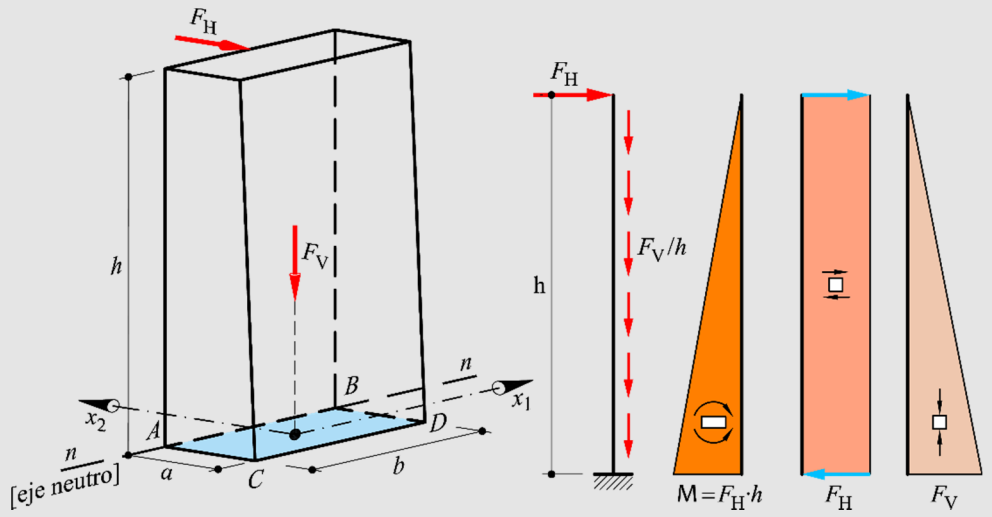
Ejemplo 5-29: El muro de la figura está sometido a la acción de una fuerza horizontal F_H y a una fuerza vertical F_V debida a su peso propio. Se pide:

a) Determinar la relación entre la altura del muro h y la dimensión a de su sección transversal para que en ésta no se produzcan tensiones de tracción.

b) Determinar la magnitud de a si el peso específico del muro es $\gamma = 20\,kN/m^3$, $h = 2.4\,m$, $b = 1\,m$ y $F_H = 1\,kN$

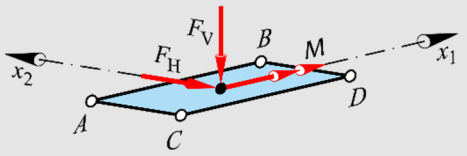
c) Obtener la tensión máxima.

d) Con los resultados obtenidos verificar que sólo se producen tensiones de compresión en la base del muro. Verificar también la seguridad al deslizamiento considerando un coeficiente de fricción de $\mathrm{tg}(30^o)$.

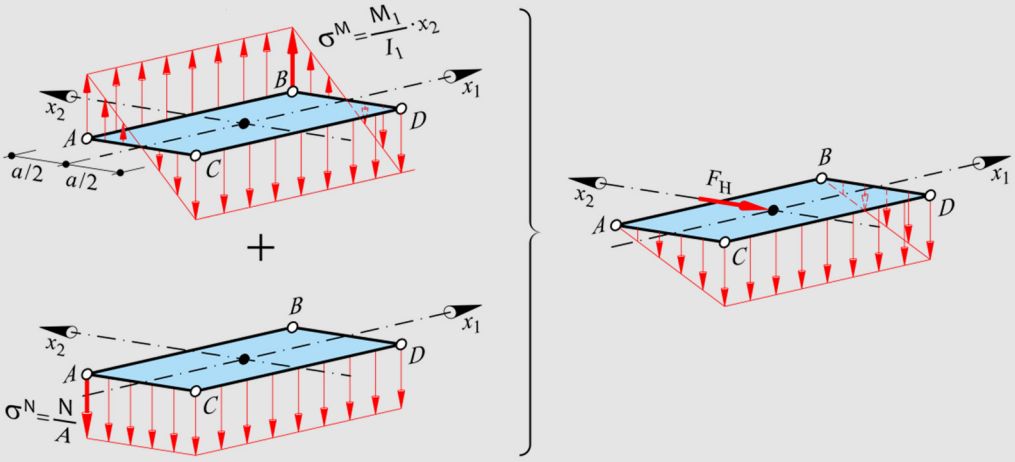


Solicitaciones en la base del muro

La base del muro se encuentra sometida a flexión compuesta recta.



Las tensiones normales pueden obtenerse como la superposición de las tensiones originadas por el esfuerzo normal $\mathrm{N} = F_V$ y las originadas por el momento flector $\mathrm{M}_1 = h\,F_H$, como se representa gráficamente a continuación,



a) Relación entre la altura del muro y el lado de la sección

Debido a que se trata de un problema de flexión compuesta recta, las tensiones sobre rectas paralelas al eje principal x_1 son uniformes. En particular en la arista $\overline{\mathrm{AB}}$ ($\sigma^{\mathrm{A}} = \sigma^{\mathrm{B}}$) las tensiones están dadas por,

$$\sigma^{\mathrm{A}} = \left(\sigma^{\mathrm{A}}\right)^{\mathrm{N}} + \left(\sigma^{\mathrm{A}}\right)^{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{N}}{A} + \frac{\mathrm{M}_1}{I_1}\frac{a}{2} = -\frac{F_V}{a\,b} + \frac{\overbrace{h\,F_H}^{\mathrm{M}_1}}{\left(b\,a^3/12\right)}\frac{a}{2} = \frac{F_V}{a\,b}\left(-1 + \frac{F_H}{F_V}\frac{6\,h}{a}\right)$$

Para que la sección transversal en la base del muro se encuentre sometida sólo a tensiones de compresión es necesario que el eje neutro coincida con la arista $\overline{\mathrm{AB}}$ de la sección, es decir

$$\sigma^{\mathrm{A}} = 0 = \frac{F_V}{a\,b}\left(-1 + \frac{F_H}{F_V}\frac{6\,h}{a}\right) \quad \rightarrow \quad -1 + \frac{F_H}{F_V}\frac{6\,h}{a} = 0$$

$$\frac{a}{h} = 6\frac{F_H}{F_V}$$

b) Magnitud de a

F_V proviene del peso propio de muro, cuyo peso específico es γ, es decir,

$$F_V = (a\,b\,h)\gamma \equiv \frac{6h}{a} F_H \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{6\not{h}}{b\not{h}\,\gamma} F_H$$

$$a = \sqrt{\frac{6}{b\gamma} F_H} = \sqrt{\frac{6}{1 \cdot 20} \cdot 1} = 0.548\,m$$

c) Tensión máxima

La tensión máxima se da en la arista $\overline{\mathrm{CD}}$ de la sección, es decir en las fibras más alejadas del eje neutro.

$$\sigma^{\mathrm{C}} = \left(\sigma^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{N}} + \left(\sigma^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{N}}{A} + \frac{\mathrm{M}_1}{I_1}\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{F_V}{a\,b} - \frac{h\,F_H}{\left(b\,a^3/12\right)}\frac{a}{2} = \frac{F_V}{a\,b}\left(-1 - \frac{F_H}{F_V}\frac{6h}{a}\right)$$

$$\sigma^{\mathrm{C}} = -\frac{26.291}{0.548} - \frac{2.40}{0.01369}\frac{0.55}{2} = -48.00\frac{kN}{m^2} - 48.00\frac{kN}{m^2}$$

$$\sigma^{\mathrm{C}} = -96.00\frac{kN}{m^2}$$

Este será el valor de la tensión que debe resistir el terreno.

d) Verificaciones

Características geométricas

$$A = a\,b = 0.548 \cdot 1 = 0.548\,m^2\,, \qquad I_1 = \frac{b\,a^3}{12} = \frac{1 \cdot 0.548^3}{12} = 0.01369\,m^4$$

Esfuerzos en la sección de la base

$$F_V = (a\,b\,h)\gamma = -(0.548 \cdot 1 \cdot 2.40) \cdot 20 = -26.291\,kN$$
$$\mathrm{M}_1 = F_H h = 1 \cdot 2.40 = 2.40\,kN \cdot m$$

Verificación de tensión nula en $\overline{\mathrm{AB}}$

$$\sigma^{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{N}}{A} + \frac{\mathrm{M}_1}{I_1}\frac{a}{2} = -\frac{26.291}{0.548} + \frac{2.40}{0.01369}\frac{0.55}{2} = -48.00\frac{kN}{m^2} + 48.00\frac{kN}{m^2} = 0$$

Verificación al deslizamiento del muro

$$F_{friccón}^{resistente} = \mu F_V = \text{tg}(30^o)(26.291\,kN) = 15.17\,kN$$

$$F_H = 1\,kN \ll F_{friccón}^{resistente} = 15.17\,kN$$

$$\zeta^{seguridad} = \frac{\left|F_{friccón}^{resistente}\right|}{F_H} = \frac{15.71}{1} = 15.71$$

5.6 Flexión recta en piezas de distintos materiales

Sea una pieza constituida por diferentes materiales cuya sección transversal se representa en la Figura 5.34, en la cual se muestran los ejes principales de inercia y el centro mecánico (CM). Los distintos materiales se identifican en la sección a través del área A_i y del módulo elástico E_i, para $i = 1,...,N$, donde N es el número de materiales diferentes que aparecen en la sección.

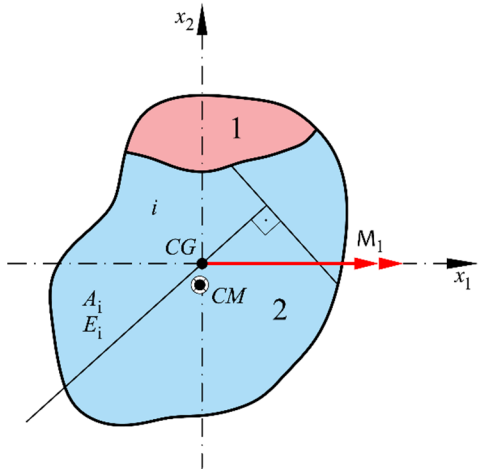


Figura 5.34 – Sección transversal de una pieza con diferentes materiales sometida flexión recta.

La deducción de la ecuaión de la tensión se basa en la hipótesis de Bernoulli,

a) Relaciones geométricas. Las secciones transversales, separadas una distnacia infinitesimal dx_3, se mantienen planas pero giran respecto al eje neutro un ángulo $d\varphi$. Para pequeñas rotaciones, se verifica

$$\frac{d\varphi}{dx_3} = \frac{1}{\rho} \text{ y } \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx_3} = \kappa \tag{5.129}$$

donde ρ es *radio de curvatura* y κ es la *curvatura* del eje deformado de la viga.

b) Relaciones de compatibilidad. La deformación específica longitudinal en la dirección normal x_3 es el gradiente del desplazamiento. Esto es,

$$\varepsilon\left(x_2\right) = \varepsilon_3\left(x_2\right) = \frac{du_3(x_2)}{dx_3} = x_2 \frac{d\varphi}{dx_3} = \frac{x_2}{\rho} \tag{5.130}$$

c) Ley constitutiva. Las tensiones se obtienen directamente de la Ley de Hooke, pero en este caso dependerán del material. Así, para la parte de la sección transversal ocupada por el material $i-ésimo$, resulta

$$\sigma^i = \sigma_3^i = E_i \varepsilon = \frac{E_i x_2}{\rho} \tag{5.131}$$

d) Condiciones de equilibrio

Las siguientes condiciones de equilibrio se deben satisfacer en este caso

$$\mathrm{N} = 0 = \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} \sigma^i dA \tag{5.132}$$

$$\mathrm{M}_2 = 0 = \sum_{i=1}^{N} \int_{Ai} \sigma^i x_1 dA \tag{5.133}$$

$$\mathrm{M}_1 = \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} \sigma^i x_2 dA \tag{5.134}$$

De la condición de equilibrio (5.132) y teniendo en cuenta la ec. (5.131), se tiene

$$\mathrm{N} = 0 = \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} \sigma^i dA = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\int_{A_i} E_i x_2 dA}_{S_1^i} = \frac{1}{\rho} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} S_1^i}_{S_1=0} \tag{5.135}$$

De la ecuación (5.135) se concluye que para satisfacer la ecuación de equilibrio, el momento estático de la sección respecto al eje x_1 debe ser nulo ($S_1 = 0$) lo cual implica que la línea neutra x_1 contiene al centro mecánico de la sección.

Reemplazando ahora la ley constitutiva (5.131) en la condición de equilibrio (5.133) se obtiene

$$0 = \mathsf{M}_2 = \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} \sigma^i x_1 \, dA = \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} \frac{E_i x_2}{\rho} x_1 \, dA = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{N} E_i \underbrace{\int_{A_i} x_2 x_1 \, dA}_{I_{12}^i} = \frac{1}{\rho} E_i \underbrace{\sum_{i=1}^{N} I_{12}^i}_{I_{12}=0} \tag{5.136}$$

Esta expresión indica que la línea neutra coincide con el eje principal x_1 de la sección ya que el producto de inercia es nulo, es decir $I_{12} = 0$.

Finalmente, reemplazando la ley constitutiva (5.131) en la condición de equilibro (5.134), se obtiene

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 = \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} \sigma^i x_2 \, dA = \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} \frac{E_i}{\rho} x_2^2 \, dA = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{N} E_i \underbrace{\int_{A_i} x_2^2 \, dA}_{I_1^i} \tag{5.137}$$

De donde se obtiene la siguiente relación

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{N} E_i I_1^i \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\mathsf{M}}{\sum_{i=1}^{N} E_i I_1^i} \tag{5.138}$$

e) Ecuación de Navier

Considerando la ley de Hooke (ec. (5.131)) y la ec. (5.138), se obtiene:

$$\sigma^i = \sigma_3^i = E_i \frac{1}{\rho} x_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma^i = \frac{\mathsf{M}}{\sum_{j=1}^{N} E_i I_1^j} E_i x_2} \tag{5.139}$$

5.6.1 Materiales compuestos con compatibilidad

En materiales que cumplen la condición cinemática de compatibilidad, las deformaciones específicas por axil y por flexión están dadas respectivamente por

$$\varepsilon^{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{N}}{\sum_{i=1}^{N} E_i A_i}; \qquad \varepsilon^{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M}}{\sum_{i=1}^{N} E_i I_1^i} x_2 \tag{5.140}$$

Las tensiones por axil y por flexión para el material i, están dadas respectivamente por

$$\left(\sigma^i\right)^{\mathrm{N}} = E_i \varepsilon^{\mathrm{N}} = \frac{E_i}{\sum_{j=1}^{N} E_j A_j} \mathrm{N}; \qquad \left(\sigma^i\right)^{\mathrm{M}} = E_i \varepsilon^{\mathrm{M}} = \frac{E_i}{\sum_{j=1}^{N} E_j I_1^j} \mathrm{M} x_2 \tag{5.141}$$

5.6.2 Materiales compuestos sin compatibilidad – Postesado de tendones sobre una sección de hormigón

Sea una pieza de hormigón con armadura postesada. Los esfuerzos se representan en la Figura 5.35.

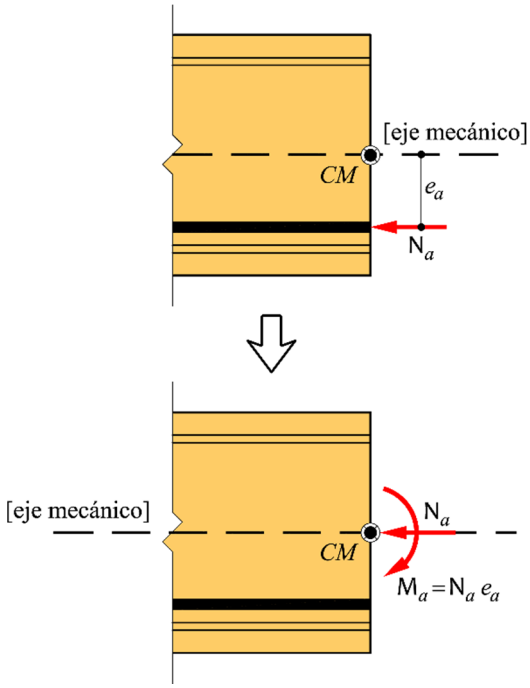


Figura 5.35 – Reducción al centro mecánico de la sección transversal del esfuerzo axil en el tendón.

a) Problema axil

Para el problema axil, se tiene para el acero las siguientes expresiones para el alargamiento, deformación y tensión,

$$\Delta \ell_a = \frac{\mathsf{N}_a}{E_a A_a} \ell_0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_a^{\mathsf{N}} = \frac{\mathsf{N}_a}{E_a A_a} \quad \rightarrow \quad \sigma_a^{\mathsf{N}} = \frac{\mathsf{N}_a}{A_a} \tag{5.142}$$

Análogamente para el hormigón, el acortamiento, la deformación y la tensión están dadas por

$$\Delta \ell_h = \frac{\mathsf{N}_h}{E_h A_h} \ell_0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_h^{\mathsf{N}} = \frac{\mathsf{N}_h}{E_h A_h} \quad \rightarrow \quad \sigma_h^{\mathsf{N}} = \frac{\mathsf{N}_h}{A_h} \tag{5.143}$$

Se debe tener presente que tratándose de barras postesadas la deformación específica $\varepsilon_a^{\mathsf{N}}$ es conocida (dato) a partir del sistema de fabricación.

Por equilibrio axial resulta,

$$0 = \mathsf{N} = \int_{A_a} \sigma_a \, dA + \int_{A_h} \sigma_h \, dA = \mathsf{N}_a + \mathsf{N}_h \tag{5.144}$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.142) y (5.143) en la ecuación (5.144) se obtiene,

$$0 = \sum \left(\varepsilon_a^{\mathsf{N}} E_a \, A_a \right) + \varepsilon_h^{\mathsf{N}} E_h \, A_h \, ; \tag{5.145}$$

Despejando de la ecuación (5.145) la deformación específica del hormigón resulta

$$\varepsilon_h^{\mathsf{N}} = - \frac{\sum \varepsilon_a^{\mathsf{N}} E_a \, A_a}{E_h \, A_h} \tag{5.146}$$

Entonces, sustituyendo la deformación (5.146) en la tercera de las ecuaciones (5.143) se obtiene la tensión en el hormigón,

$$\sigma_h^{\mathsf{N}} = E_h \varepsilon_h^{\mathsf{N}} = - \frac{\sum \varepsilon_a^{\mathsf{N}} E_a \, A_a}{A_h} \tag{5.147}$$

La tensión en las barras de acero está dada por,

$$\sigma_a^{\mathsf{N}} = E_a \varepsilon_a^{\mathsf{N}} = \frac{\mathsf{N}_a}{A_a} \tag{5.148}$$

b) Problema de flexión por la excentricidad

La ecuación de equilibrio flexional debido a la acción de la fuerza de postesado excéntrica se escribe,

$$0 = \mathsf{M} = \int_{A_a} \sigma_a \, x_2 \, dA + \int_{A_h} \sigma_h \, x_2 \, dA \tag{5.149}$$

Teniendo en cuenta (5.139) la ecuación (5.149) puede escribirse como,

$$0 = \mathsf{M} = \sum \varepsilon_a^{\mathsf{N}} E_a \, A_a \, e_a + \int_{A_h} \left(E_h \frac{1}{\rho} x_2 \right) x_2 \, dA \tag{5.150}$$

$$0 = \mathsf{M} = \sum \varepsilon_a^{\mathsf{N}} E_a \, A_a \, e_a + \frac{1}{\rho} E_h \, I_1^h \tag{5.151}$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sum \varepsilon_a^{\mathsf{N}} E_a \, A_a \, e_a}{E_h \, I_1^h} \tag{5.152}$$

La deformación específica del hormigón se obtiene reemplazando la curvatura dada por la ecuación (5.152) en la ecuación (5.130). Esto es,

$$\varepsilon_h^{\mathsf{M}} = \frac{x_2}{\rho} = -\frac{\sum \overbrace{\varepsilon_a^{\mathsf{N}} E_a \, A_a}^{\mathsf{N}_a} e_a}{E_h \, I_1^h} x_2 = -\frac{\sum \mathsf{M}_a}{E_h \, I_1^h} x_2 \tag{5.153}$$

Empleando la ley constitutiva y la deformación (5.153) se puede calcular la tensión en el hormigón producida por la flexión. Es decir,

$$\sigma_h^{\mathsf{M}} = E_h \, \varepsilon_h^{\mathsf{M}} = -\frac{\sum \varepsilon_a^{\mathsf{N}} E_a \, A_a \, e_a}{I_1^h} x_2 = -\frac{\sum \mathsf{N}_a \, e_a}{I_1^h} x_2 \tag{5.154}$$

Finalmente, las tensiones en el hormigón y en el acero están dadas respectivamente por

$$\sigma_h = \sigma_h^{\mathsf{N}} + \sigma_h^{\mathsf{M}} = -\frac{\sum \mathsf{N}_a}{A_h} - \frac{\sum \mathsf{N}_a\, e_a}{I_1^h}\, x_2 \tag{5.155}$$

$$\sigma_a = \sigma_a^{\mathsf{N}} = \frac{\mathsf{N}_a}{A_a} \tag{5.156}$$

5.6.3 Postesado sobre una barra previamente tesada (2do. Postesado)

Este apartado trata el tesado (2da. Etapa de Tesado) de unos nuevos tendones sobre una barra que ya ha sido tesada previamente (1ra. Etapa de Tesado). Tomando como base la barra de hormigón postesada del apartado anterior, se tesa un nuevo tendón/tendones con una deformación impuesta $\varepsilon_a^{\mathsf{N}^*}$, que es dato en este nuevo problema (ver Figura 5.36). El (*) distingue al nuevo tendón que se tesa en esta nueva etapa de tesado.

a) Equilibrio axial,

La ecuación de equilibrio axial de la barra pretensada (apartado anterior) con el nuevo cable de tesado se escribe de la siguiente manera,

$$0 = \int_{A_T} \Delta\sigma_m \, dA + \int_{A_a^*} \sigma_a^* \, dA \tag{5.157}$$

Tal que $\Delta\sigma_m$ representa el cambio de tensión en el material mixto de base (hormigón más los antiguos tendones), y σ_a^* la tensión impuesta en el nuevo tendón. La ecuación anterior se puede reescribir considerando los materiales que componen el material mixto,

$$0 = \sum \int_{A_i} \Delta\sigma_i \, dA + \int_{A_a^*} \sigma_a^* \, dA \tag{5.158}$$

De donde resulta

$$0 = \Delta\varepsilon_m^{\mathrm{N}} \left(\sum E_a A_a + E_h A_h \right) + \sum \varepsilon_a^{\mathrm{N}^*} E_a^* A_a^* \tag{5.159}$$

$$\Delta\varepsilon_m^{\mathrm{N}} = -\frac{\sum \overbrace{\varepsilon_a^{\mathrm{N}^*} E_a^* A_a^*}^{\mathrm{N}_a^*}}{\sum E_a A_a + E_h A_h} \tag{5.160}$$

donde

$$\left(\varepsilon_a^{\mathrm{N}^*}\right)_i = \left(\frac{\mathrm{N}_a^*}{E_a^* A_a^*} \right)_i \tag{5.161}$$

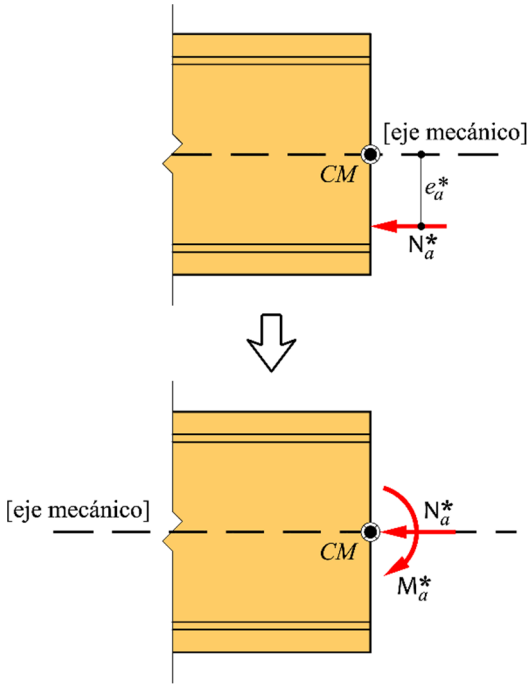


Figura 5.36 -Reducción al centro mecánico de la sección transversal del esfuerzo axil en el nuevo tendón añadido en un segundo tesado.

Luego, sustituyendo la ecuación (5.161) en la correspondiente ley constitutiva es posible obtener

$$\sigma_a^{\mathrm{N}^*} = E_a^* \left(\varepsilon_a^{\mathrm{N}^*}\right)_i \tag{5.162}$$

Y

$$\Delta\sigma_a^{\mathsf{N}} = E_a\,\Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}}; \qquad \Delta\sigma_h^{\mathsf{N}} = E_h\,\Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}} \tag{5.163}$$

b) Flexión por excentricidad, equilibrio sobre el incremento de la flexión

La ecuación de equilibrio flexional de la barra pretensada (apartado anterior) con el nuevo cable de tesado se escribe,

$$0 = \mathsf{M} = \int_{A_T} \Delta\sigma_m\, x_2\, dA + \int_{A_a^*} \sigma_a^*\, x_2\, dA \tag{5.164}$$

Operando se obtiene,

$$0 = \left(\sum \int_{A_i} \Delta\sigma_i\, x_2\, dA\right) + \sum \varepsilon_a^{\mathsf{N}*} E_a^* A_a^* e_a^* \tag{5.165}$$

$$0 = \frac{1}{\Delta\rho}\left(\int_{A_h} E_h\, x_2^2\, dA + \int_{A_a} E_a\, x_2^2\, dA\right) + \sum \varepsilon_a^{\mathsf{N}*} E_a^* A_a^* e_a^* \tag{5.166}$$

De donde se obtiene el incremento de curvatura en toda la pieza como

$$\frac{1}{\Delta\rho} = -\frac{\sum \overbrace{\varepsilon_a^{\mathsf{N}*} E_a^* A_a^* e_a^*}^{\mathsf{M}_a^*}}{E_h I_1^h + \sum E_a I_1^a} \tag{5.167}$$

Entonces, a partir de la ecuación anterior (5.167) se obtiene el incremento de deformación específica por flexión en el material mixto (hormigón y acero)

$$\Delta\varepsilon_m^{\mathsf{M}} = \frac{x_2}{\Delta\rho} = -\frac{\sum \overbrace{\mathsf{N}_a^* e_a^*}^{\mathsf{M}_a^*}}{E_h I_1^h + \sum E_a I_1^a}\, x_2 \tag{5.168}$$

De donde se puede obtener la tensión $\sigma_a^{\mathsf{N}*}$ en el nuevo tendón, así como el incremento de tensión en los tendones ya existentes $\Delta\sigma_a^{\mathsf{M}}$ y en el hormigón $\Delta\sigma_h^{\mathsf{M}}$

$$\sigma_a^{\mathsf{N}*} = E_a^*\left(\varepsilon_a^{\mathsf{N}*}\right)_i = \frac{\mathsf{N}_a^*}{A_a^*} \tag{5.169}$$

$$\Delta\sigma_a^{\mathsf{M}} = E_a \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{M}} \quad \text{y} \quad \Delta\sigma_h^{\mathsf{M}} = E_h \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{M}} \tag{5.170}$$

c) Superposición de las tensiones debido al problema axial y al problema de flexión

$$\Delta\sigma_h = \Delta\sigma_h^{\mathsf{N}} + \Delta\sigma_h^{\mathsf{M}} = E_h \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}} + E_h \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{M}} \tag{5.171}$$

$$\Delta\sigma_h = -\frac{E_h \sum \mathsf{N}_a^*}{\sum E_a A_a + E_h A_h} - \frac{E_h \sum \mathsf{N}_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a I_1^a} x_2 \tag{5.172}$$

$$\Delta\sigma_a = \Delta\sigma_a^{\mathsf{N}} + \Delta\sigma_a^{\mathsf{M}} = E_a \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}} + E_a \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{M}} \tag{5.173}$$

$$\Delta\sigma_a = -\frac{E_a \sum \mathsf{N}_a^*}{\sum E_a A_a + E_h A_h} - \frac{E_a \sum \mathsf{N}_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a I_1^a} x_2 \tag{5.174}$$

Con

$$\sigma_a^{\mathsf{N}*} = \frac{\mathsf{N}_a^*}{A_a^*} \tag{5.175}$$

d) Obtención de los estados finales de tensión por superposición

La tensión en el hormigón resulta,

$$\begin{aligned} \sigma_h &= \left(\sigma_h^{\mathsf{N}} + \sigma_h^{\mathsf{M}}\right) + \left(\Delta\sigma_h^{\mathsf{N}} + \Delta\sigma_h^{\mathsf{M}}\right) \\ &= \left(-\frac{\sum \mathsf{N}_a}{A_h} - \frac{\sum \mathsf{N}_a e_a}{I_1^h} x_2\right) + \left(-\frac{E_h \sum \mathsf{N}_a^*}{\sum E_a A_a + E_h A_h} - \frac{E_h \sum \mathsf{N}_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a I_1^a} x_2\right) \end{aligned} \tag{5.176}$$

La tensión final en el acero resulta,

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \left(\sigma_a^{\mathsf{N}}\right) + \left(\Delta\sigma_a^{\mathsf{N}} + \Delta\sigma_a^{\mathsf{M}}\right) \\ &= \frac{\mathsf{N}_a}{A_a} + \left(-\frac{E_a \sum \mathsf{N}_a^*}{\sum E_a A_a + E_h A_h} - \frac{E_a \sum \mathsf{N}_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a I_1^a} x_2\right) \end{aligned} \tag{5.177}$$

La tensión final en el tendón añadido se mantiene, excepto que haya habido pérdidas por penetración de cuña etc., que debería ser tenida en cuenta atendiendo la tecnología de tesado que se haya utilizado.

$$\sigma_a^{N^*} = \frac{N_a^*}{A_a^*} \tag{5.178}$$

5.6.4 Pretensado con adherencia

Sea una barra de hormigón con cables de acero de pretensado ubicados a una distancia e_a^* del centro mecánico como muestra la Figura 5.37. Se fabrica la barra pretensando primeramente el cable y luego se vierte el hormigón en el molde dejando fraguar y posteriormente endurecer el hormigón. Una vez el hormigón adquiere una adherencia plena con el cable, se sueltan los extremos de este hasta que se autoequilibra el nuevo sistema hormigón - acero tesado.

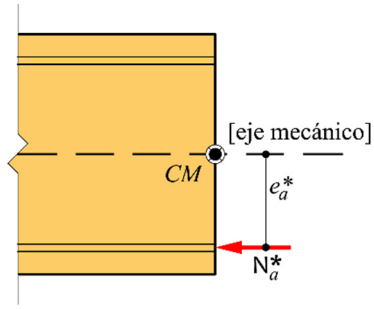


Figura 5.37 – Barra de hormigón pretensado con adherencia. Esfuerzo axil actuante en el tendón con adherencia.

El momento de inercia de cada cable de acero, respecto del eje mecánico será

$$I_1^{a^*} \cong A_a^* \left(e_a^*\right)^2 \tag{5.179}$$

a) Estado previo de tensión

Antes de verter el hormigón en el molde, se tiene para cada cable un esfuerzo normal de tracción N_a^* que da una tensión previa $\left(\sigma_a^*\right)^0$ en el cable o tendón

$$\mathsf{N}_a^* = E_a^* A_a^* \varepsilon_a^{\mathsf{N}*} \quad \rightarrow \quad \left(\sigma_a^*\right)^0 = \frac{\mathsf{N}_a^*}{A_a^*} = E_a^* \varepsilon_a^{\mathsf{N}*} \tag{5.180}$$

De la ecuación (5.180) se obtiene la deformación específica impuesta,

$$\varepsilon_a^{\mathsf{N}*} = \frac{\mathsf{N}_a^*}{E_a^* A_a^*} \tag{5.181}$$

b) Problema de equilibrio axial una vez endurecido el hormigón y soltado los extremos de los cables

En este caso particular, la sección mixta está compuesta por el hormigón y por el propio cable que se va acortando, tanto como se lo permita el hormigón, al cual está perfectamente adherido. Es decir,

$$0 = \int_{A_T} \Delta\sigma_m \, dA + \int_{A_a^*} \sigma_a^* \, dA \tag{5.182}$$

De donde resulta la siguiente ecuación de autoequilibrio axial entre los materiales que componen la barra estructural,

$$0 = \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}} \left(\sum E_a^* A_a^* + E_h A_h \right) + \sum \mathsf{N}_a^* \tag{5.183}$$

Despejando de la ecuación (5.183), el incremento de deformación está dado por

$$\Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}} = -\frac{\sum \mathsf{N}_a^*}{\sum E_a^* A_a^* + E_h A_h} \tag{5.184}$$

El incremento de tensión se obtiene empleando la ley constitutiva correspondiente a cada material,

$$\Delta\sigma_a^{\mathsf{N}*} = E_a^* \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}} \tag{5.185}$$

$$\Delta\sigma_h^{\mathsf{N}*} = E_h \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}} \tag{5.186}$$

c) Problema de equilibrio de momento una vez endurecido el hormigón y soltado los extremos de los cables

$$0 = \mathsf{M} = \int_{A_T} \Delta\sigma_m \, x_2 \, dA + \int_{A_a^*} \sigma_a^* \, x_2 \, dA \tag{5.187}$$

Exigiendo que la curvatura sea única para toda la pieza, se reescribe la ecuación anterior como

$$0 = \frac{1}{\Delta\rho}\left(\int_{A_h} E_h \, x_2^2 \, dA + \int_{A_a^*} E_a^* \, x_2^2 \, dA \right) + \sum \mathsf{N}_a^* e_a^* \tag{5.188}$$

$$\frac{1}{\Delta\rho} = -\frac{\sum \mathsf{N}_a^* e_a^*}{E_h \, I_1^h + \sum E_a^* I_1^{a^*}} \tag{5.189}$$

De donde surge la deformación por flexión en el material mixto $\Delta\varepsilon_m^{\mathsf{M}}$

$$\Delta\varepsilon_m^{\mathsf{M}} = \frac{x_2}{\Delta\rho} = -\frac{\sum \mathsf{N}_a^* e_a^*}{E_h \, I_1^h + \sum E_a^* I_1^{a^*}} x_2 \tag{5.190}$$

Empleando la ecuación (5.190) se obtienen los incrementos de tensión por flexión para el acero y para el hormigón,

$$\Delta\sigma_a^{\mathsf{M}^*} = E_a^* \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{M}} \tag{5.191}$$

$$\Delta\sigma_h^{\mathsf{M}^*} = E_h^* \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{M}} \tag{5.192}$$

d) Superposición de estados axiales y flexionales en los materiales que componen la sección transversal

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_h &= \Delta\sigma_h^{\mathsf{N}^*} + \Delta\sigma_h^{\mathsf{M}^*} = E_h \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}} + E_h \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{M}} \\ &= -\frac{E_h \sum \mathsf{N}_a^*}{E_h \, A_h + \sum E_a^* A_a^*} - \frac{E_h \sum \mathsf{N}_a^* e_a^*}{E_h \, I_1^h + \sum E_a^* I_1^{a^*}} x_2 \end{aligned} \tag{5.193}$$

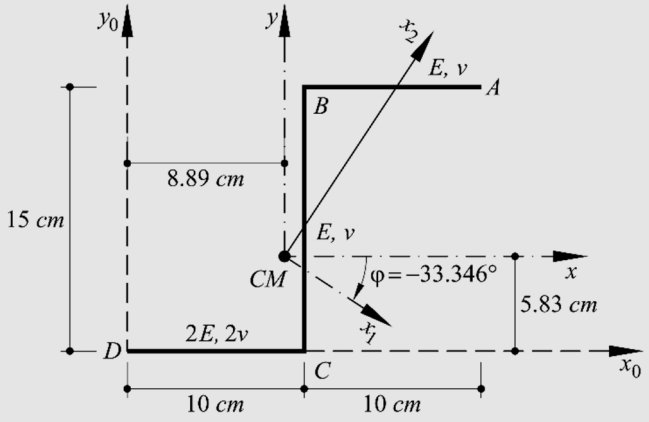
$$\begin{aligned} \Delta\sigma_a^* &= \Delta\sigma_a^{\mathsf{N}^*} + \Delta\sigma_a^{\mathsf{M}^*} = E_a^* \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}} + E_a^* \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{M}} \\ &= -\frac{E_a^* \sum \mathsf{N}_a^*}{E_h \, A_h + \sum E_a^* A_a^*} - \frac{E_a^* \sum \mathsf{N}_a^* e_a^*}{E_h \, I_1^h + \sum E_a^* I_1^{a^*}} e_a^* \end{aligned} \tag{5.194}$$

e) Estado final añadiendo el proceso de tesado previo del cable antes de hormigonar la barra

$$\sigma_h = (0) + \left(\Delta\sigma_h^{N^*} + \Delta\sigma_h^{M^*}\right) = -\frac{E_h \sum N_a^*}{E_h A_h + \sum E_a^* A_a^*} - \frac{E_h \sum N_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a^* I_1^{a^*}} x_2 \tag{5.195}$$

$$\sigma_a^* = \left(\sigma_a^*\right)^0 + \left(\Delta\sigma_a^{N^*} + \Delta\sigma_a^{M^*}\right) = \underbrace{\frac{N_a^*}{A_a^*}}_{E_a^* \varepsilon_a^{N^*}} + \left(-\frac{E_a^* \sum N_a^*}{E_h A_h + \sum E_a^* A_a^*} - \frac{E_a^* \sum N_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a^* I_1^{a^*}} e_a^* \right) \tag{5.196}$$

Ejemplo 5-30: La sección que se representa en la figura está compuesta por dos materiales con módulos elásticos: E y $2E$, respectivamente. El espesor es constante y vale $t = 0.7cm$. Se pide hallar y representar gráficamente los puntos que definen el núcleo central.



Área mecánica

$$\overline{A} = \left(31.5\,cm^2\right) E$$

Centro mecánico:

$$x_{CM} = 8.89cm;\ y_{CM} = 5.83cm;$$

Inercias mecánicas

$$\begin{cases} \overline{I}_{xx}^{CM} = \left(1291.00cm^4\right) E \\ \overline{I}_{yy}^{CM} = \left(661.54cm^4\right) E \\ \overline{I}_{xy}^{CM} = \left(729.16cm^4\right) E \end{cases}$$

Características geométricas

- Orientación de los ejes principales de inercia mecánica

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{2\overline{I}_{xy}^{CM}}{\overline{I}_{xx}^{CM} - \overline{I}_{yy}^{CM}}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{2 \cdot 729.16 \cdot E}{1291 \cdot E - 661.54 \cdot E}\right) = -0.582\,rad = -33.346^{\circ}$$

- Inercias mecánicas principales

$$\overline{I}_{1,2}^{CM} = \frac{\overline{I}_{xx}^{CM} + \overline{I}_{yy}^{CM}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\overline{I}_{xx}^{CM} - \overline{I}_{yy}^{CM}}{2}\right)^2 + \left(\overline{I}_{xy}^{CM}\right)^2}$$

$$= \left[\frac{1291 + 661.54}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1291 - 661.54}{2}\right)^2 + (729.167)^2}\right] E$$

$$\begin{cases} \overline{I}_1^{CM} = \left(1770\, cm^4\right) \cdot E \\ \overline{I}_2^{CM} = \left(182.079\, cm^4\right) \cdot E \end{cases}$$

- Radios de giro

$$\overline{i}_1^2 = \frac{\overline{I}_1^{CM}}{\overline{A}} = \frac{\left(1770\, cm^4\right) \cdot E}{\left(31.5\, cm^2\right) \cdot E} = 56.1905\, cm^2; \quad \overline{i}_2^2 = \frac{\overline{I}_2^{CM}}{\overline{A}} = \frac{\left(182.079\, cm^4\right) \cdot E}{\left(31.5\, cm^2\right) \cdot E} = 5.7803\, cm^2$$

Coordenadas de los puntos representativos de la sección

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = x\cos(-0.582) + y\operatorname{sen}(-0.582) \\ x_2 = -x\operatorname{sen}(-0.582) + y\cos(-0.582) \end{cases}$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 5. Ejemplo 5-31.

	A	B	C	D	E
1	**Punto**	x [cm]	y [cm]	x_1 [cm]	x_2 [cm]
2	A	11.1	9.17	4.23184	13.76192
3	B	1.1	9.17	-4.12181	8.26496
4	C	1.1	-5.83	4.12363	-4.26551
5	D	-8.89	-5.83	-4.22167	-9.75697

Núcleo Central

Se emplea la ecuación del eje neutro, es decir

$$1+e_2\frac{x_2^n}{i_1^2}+e_1\frac{x_1^n}{i_2^2}=0$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{AB}}$,

- Para el punto A $0=1+0.2449\cdot e_2^{\mathrm{AB}}+0.731\cdot e_1^{\mathrm{AB}}$
- Para el punto B $0=1+0.1470\cdot e_2^{\mathrm{AB}}+\left(-0.713\right)\cdot e_1^{\mathrm{AB}}$

Resolviendo se tiene,

$$e_1^{\mathrm{AB}}=0.347\,cm;\qquad e_2^{\mathrm{AB}}=-5.119\,cm$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{DC}}$,

- Para el punto D $0=1+\left(-0.1736\right)\cdot e_2^{\mathrm{DC}}+\left(-0.729\right)\cdot e_1^{\mathrm{DC}}$
- Para el punto C $0=1+\left(-0.07587\right)\cdot e_2^{\mathrm{DC}}+\left(0.7136\right)\cdot e_1^{\mathrm{DC}}$

$$e_1^{\mathrm{DC}}=-0.545\,cm;\qquad e_2^{\mathrm{DC}}=8.051\,cm$$

Eje neutro en $\overline{\mathrm{DB}}$,

- Para el punto D $0=1+\left(-0.1736\right)\cdot e_2^{\mathrm{DB}}+\left(-0.729\right)\cdot e_1^{\mathrm{DB}}$
- Para el punto B $0=1+0.1470\cdot e_2^{\mathrm{DB}}+\left(-0.713\right)\cdot e_1^{\mathrm{DB}}$

Resolviendo se tiene,

$$e_1^{\mathrm{DB}}=1.388\,cm;\qquad e_2^{\mathrm{DB}}=-0.069\,cm$$

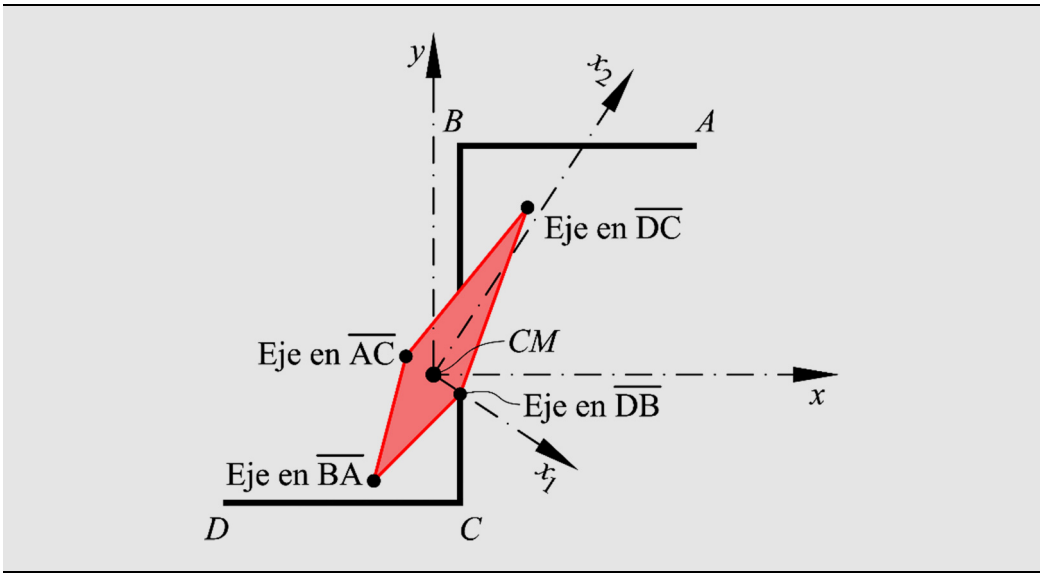
Eje neutro en $\overline{\mathrm{AC}}$,

- Para el punto A $0=1+\left(0.2449\right)\cdot e_2^{\mathrm{AC}}+\left(0.731\right)\cdot e_1^{\mathrm{AC}}$
- Para el punto C $0=1+\left(-0.07587\right)\cdot e_2^{\mathrm{AC}}+\left(0.7136\right)\cdot e_1^{\mathrm{AC}}$

Resolviendo se tiene,

$$e_1^{\mathrm{AC}}=-1.393\,cm;\qquad e_2^{\mathrm{AC}}=0.076\,cm$$

Resultando para la sección el núcleo central que se representa a continuación



5.7 Flexión compuesta en secciones que no resisten a tracción

Existen diversos materiales que se suelen utilizar en estructuras resistente con un comportamiento muy diferenciado a tracción respecto de sus capacidades a compresión. Esta característica es típica de los geomateriales (rocas, suelos, hormigones, cerámicos, etc.), que normalmente tienen resistencia bajas o muy bajas a tracción generando un reordenamiento tensional en las secciones transversales para alcanzar un estado de equilibrio estable.

5.7.1 Flexión compuesta recta

Sea la sección de la Figura 5.38 solicitada por una carga de compresión N aplicada en el punto C ubicado sobre el eje principal de inercia x_2 y fuera del núcleo central de la sección. De acuerdo a lo estudiado en secciones previas, el eje neutro sería perpendicular al eje x_2 y cortaría a la sección originando tensiones de tracción, con valor máximo en el punto B, de magnitud

$$\sigma^{B} = \frac{N}{A}\left(-1 + \frac{e_2}{i_1^2} x_2\right) \tag{5.197}$$

Sin embargo, el material que se está analizando no resiste tensiones de tracción, por lo que el equilibrio sólo debe satisfacerse con las tensiones de compresión generadas en la sección transversal. Estas tensiones son proporcionales a la distancia ζ al eje neutro $n-n$, lo que puede obtenerse de la Figura 5.38 como

$$\frac{\sigma^{max}}{x_2^0} = \frac{\sigma(\zeta)}{\zeta} \tag{5.198}$$

de donde se obtiene

$$\sigma(\zeta) = \sigma = \zeta \frac{\sigma^{max}}{x_2^0} \tag{5.199}$$

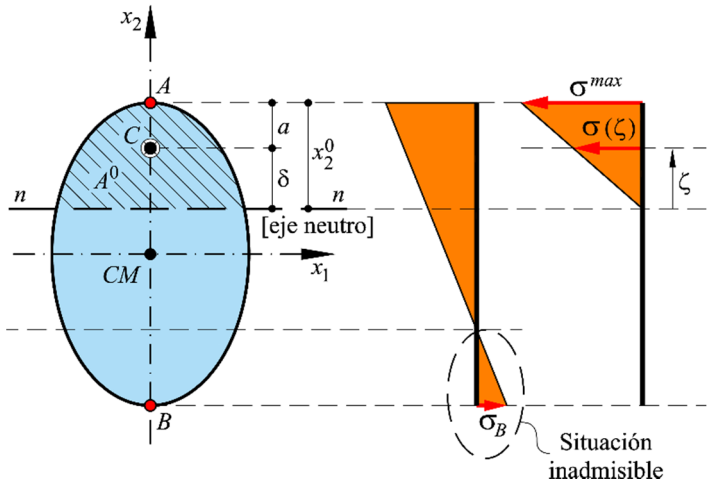


Figura 5.38 – Sección sometida a flexión compuesta recta – material sin resistencia a tracción.

En estas condiciones se plantea un nuevo sistema de ecuaciones de equilibrio axial, de momento respecto al eje neutro $n-n$ y de momento respecto al eje x_2. Es decir,

$$\begin{cases} \mathrm{N} = \int_{A^0} \sigma \, dA \\ \mathrm{M}_1 = \mathrm{N}\underbrace{\left(x_2^0 - a\right)}_{\delta} = \int_{A^0} \sigma \, \zeta \, dA \\ \mathrm{M}_2 = 0 = \int_{A^0} \sigma \, x_1 \, dA \end{cases} \tag{5.200}$$

donde A^0 es el área de la zona de compresión y δ la distancia del punto de aplicación de la carga C al eje neutro.

Sustituyendo la tensión σ dada por la ecuación (5.199) en las ecuaciones de equilibrio (5.200), se obtiene

$$\begin{cases} \mathrm{N} = \int_{A^0} \left(\zeta \dfrac{\sigma^{\max}}{x_2^0} \right) dA = \dfrac{\sigma^{\max}}{x_2^0} \int_{A^0} \zeta \, dA = \dfrac{\sigma^{\max}}{x_2^0} S_n^{A^0} \\ \mathrm{M}_1 = \mathrm{N}\delta = \int_{A^0} \left(\zeta \dfrac{\sigma^{\max}}{x_2^0} \right) \zeta \, dA = \dfrac{\sigma^{\max}}{x_2^0} \int_{A^0} \zeta^2 \, dA = \dfrac{\sigma^{\max}}{x_2^0} I_n^{A^0} \end{cases} \tag{5.201}$$

donde $S_n^{A^0}$ y $I_n^{A^0}$ son, respectivamente, el momento estático y el momento de inercia del área comprimida A^0 respecto al eje neutro.

Dividiendo miembro a miembro las dos ecuaciones (5.201) resulta,

$$\delta = \frac{I_n^{A^0}}{S_n^{A^0}} \tag{5.202}$$

La ecuación (5.202) permite definir la posición del eje neutro a partir del punto de aplicación de la carga. Conocida la magnitud δ se puede determinar el valor de la tensión máxima empleando la segunda de las ecuaciones (5.201), es decir,

$$\begin{aligned} \sigma^{\max} &= \frac{\mathrm{N}\delta x_2^0}{I_n^{A^0}} = \frac{\mathrm{N} x_2^0}{\cancel{I_n^{A^0}}} \frac{\cancel{I_n^{A^0}}}{S_n^{A^0}} \\ \sigma^{\max} &= \frac{\mathrm{N} x_2^0}{S_n^{A^0}} \end{aligned} \tag{5.203}$$

5.7.2 Aplicación a una sección rectangular

Sea la sección rectangular representada en la Figura 5.39, de dimensiones $b \times h$, proveniente de una pieza de material que no resiste tensiones de tracción. Para determinar la distribución de las tensiones, la tensión máxima y la posición del eje neutro, es necesario determinar en primer lugar δ empleando la ecuación (5.202), que permite definir la posición del eje neutro medida desde el punto de aplicación de la carga. Para ello, se obtienen en primer lugar las características geométricas de la parte comprimida de la sección rectangular respecto del eje neutro, es decir,

$$I_n^{A^0} = \frac{b\left(x_2^0\right)^3}{3} \qquad S_n^{A^0} = \frac{b\left(x_2^0\right)^2}{2} \tag{5.204}$$

Sustituyendo en la ecuación (5.202) se obtiene

$$\delta = \frac{I_n^{A^0}}{S_n^{A^0}} = \frac{\dfrac{b\left(x_2^0\right)^3}{3}}{\dfrac{b\left(x_2^0\right)^2}{2}} = \frac{2}{3}x_2^0 \tag{5.205}$$

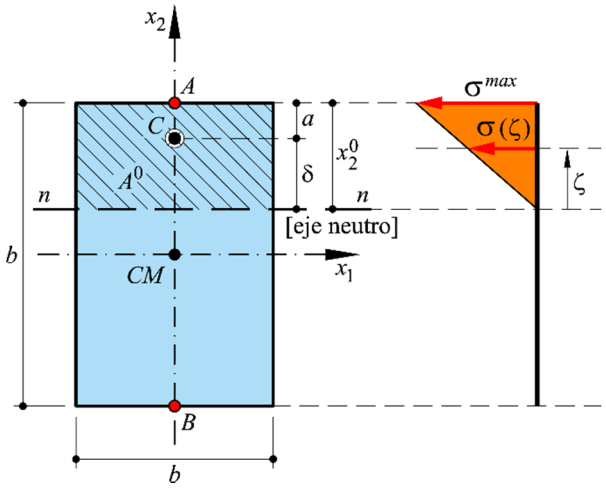


Figura 5.39 – Sección rectangular sometida a flexión compuesta recta – material sin resistencia a tracción.

Como es $\delta = x_2^0 - a$, reemplazando en la ecuación (5.205) se obtiene

$$\delta = \frac{2}{3} x_2^0 = x_2^0 - a \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{3} x_2^0 \tag{5.206}$$

$$x_2^0 = 3\,a \tag{5.207}$$

La tensión máxima se obtiene mediante la ecuación (5.203)

$$\sigma^{\max} = \frac{\mathrm{N}\, \cancel{x_2^0}}{\frac{b\left(x_2^0\right)^{\cancel{2}}}{2}} = 2\frac{\mathrm{N}}{b\, x_2^0} = 2\frac{\mathrm{N}}{A^0} \tag{5.208}$$

O bien, la ecuación (5.208) se puede escribir en función de la distancia a empleando la relación (5.207). Esto es,

$$\sigma^{\max} = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{N}}{b\, a} \tag{5.209}$$

La tensión en cualquier punto del área comprimida tiene una variación lineal y está dada por,

$$\sigma(\zeta) = \frac{\mathrm{N}}{S_n^{A^0}}\zeta = \frac{\mathrm{N}}{\frac{b(3a)^2}{2}}\zeta = \frac{2}{9}\frac{\mathrm{N}}{b\, a^2}\zeta \tag{5.210}$$

Ejemplo 5-31: Obtener las dimensiones de la zapata de sección rectangular que se muestra en la figura, para que la tensión máxima en el terreno no supere $0.5MPa$. Determinar la posición del eje neutro y trazar la distribución de las tensiones en el plano de contacto.

Datos: $\mathrm{N} = 0.5MN$, $\mathrm{M} = 0.3MN \cdot m$, $b = \frac{h}{2}$

Dimensiones de la zapata

La excentricidad de la carga se obtiene dividiendo el momento y la fuerza normal actuante en la sección, es decir,

$$e = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = \frac{0.3MNm}{0.5MN} = 0.6m$$

La tensión máxima está dada por la ecuación (5.209).

Siendo $a = \frac{h}{2} - e$, se obtiene la tensión máxima,

$$\sigma^{\max} = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{N}}{b\,a} \qquad \text{con} \qquad e + a = \frac{h}{2}$$

$$\sigma^{\max} = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{N}}{\frac{b\,h}{2} - b\,e} = \frac{4\,\mathrm{N}}{3\left(b\,h - 2\,b\,e\right)}$$

Teniendo en cuenta que la relación entre las dimensiones de la sección transversal es $b = h/2$, la tensión máxima resulta,

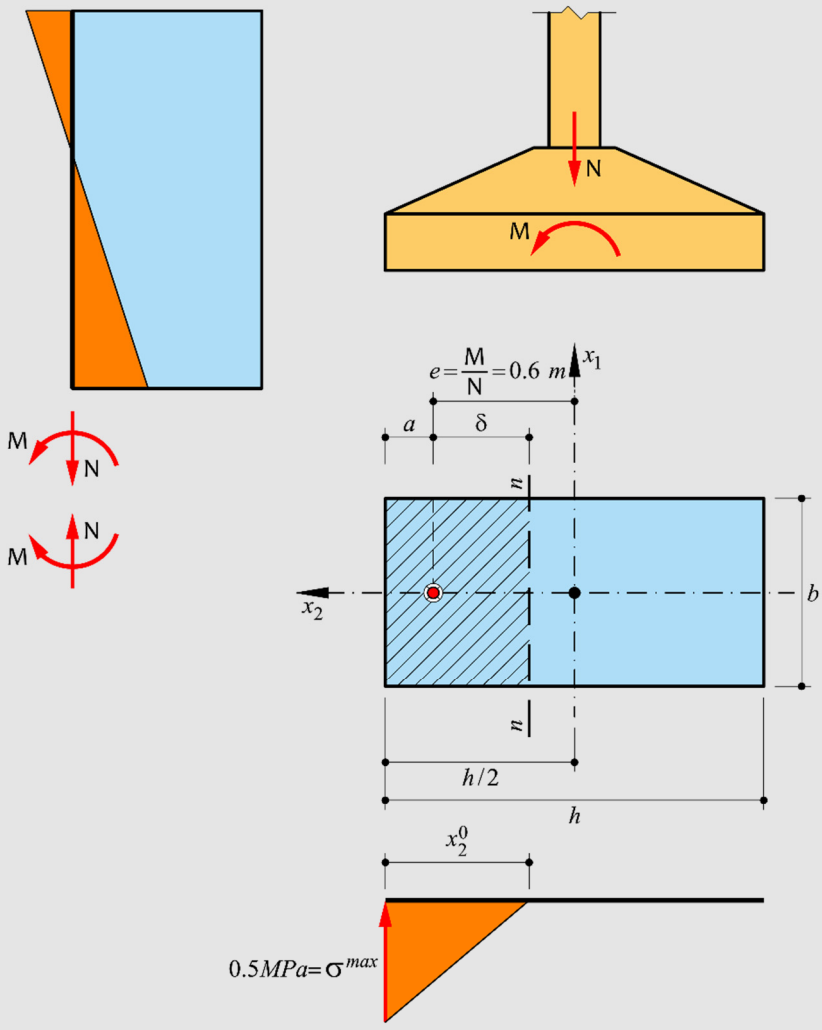
$$\sigma^{\max} = \frac{4\,\mathrm{N}}{3\left(\frac{h^2}{2} - he\right)} = \frac{4 \cdot 0.5}{1.5\,h^2 - 3 \cdot 0.6\,h} \le 0.5$$

De donde surge la siguiente ecuación cuadrática

$$0.75\,h^2 - 0.9\,h - 2 \ge 0$$

Cuya solución permite encontrar la magnitud mínima de h

$$h = 0.6 \pm 1.739 \;\rightarrow \begin{cases} h = 2.34\,m \\ b = \frac{h}{2} = 1.17m \end{cases}$$

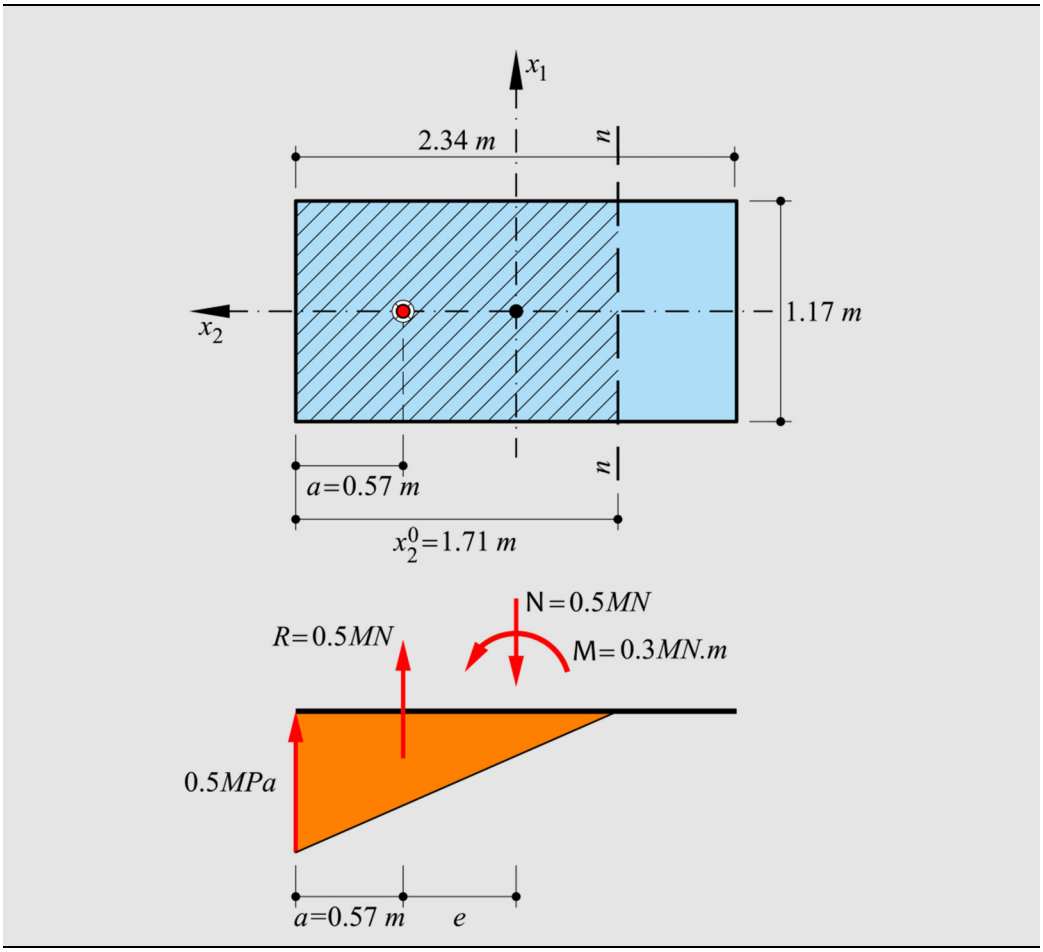


Posición del eje neutro

$$a=\frac{h}{2}-e=1.17m-0.6m=0.57m$$

$$x_2^0=3\,a=3\cdot 0.57m=1.71m$$

Distribución de tensiones



5.8 Flexión recta en una pieza de hormigón armado de sección rectangular

Sea una pieza de hormigón armado de sección rectangular sometida a flexión pura recta, tal como se representa en la Figura 5.40. Para este análisis de considerará un comportamiento elástico lineal tanto para el hormigón como para el acero y se admite como hipótesis que el hormigón no resiste tensiones de tracción.

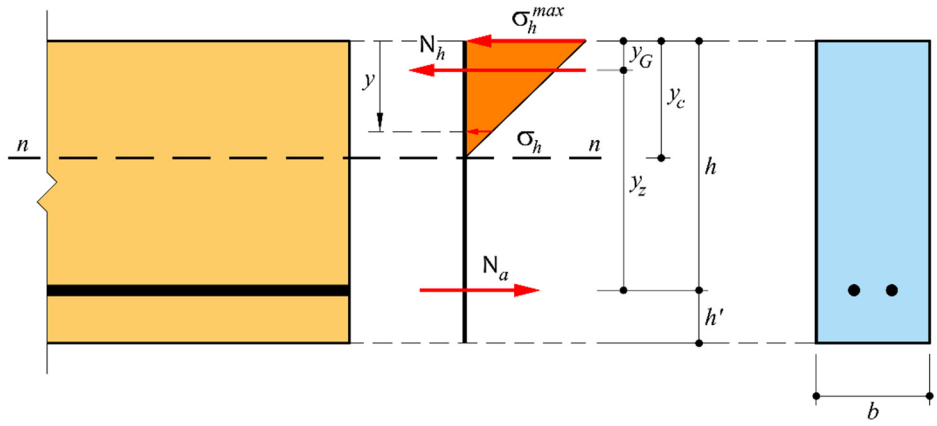


Figura 5.40 – Pieza de hormigón armado sometida a flexión pura recta.

Considerando un comportamiento elástico lineal para el hormigón en compresión, la tensión en la parte comprimida de la sección rectangular se obtiene de la siguiente relación,

$$\frac{\sigma_h^{\max}}{y_c} = \frac{\sigma_h}{(y_c - y)} \quad \rightarrow \quad \sigma_h = \sigma_h^{\max}\left(1 - \frac{y}{y_c}\right) \tag{5.211}$$

siendo $\sigma_h^{\max}$ la tensión máxima de compresión en el hormigón, σ_h la tensión de compresión en el hormigón a una distancia y de la fibra superior e y_c la altura de la zona comprimida (o distancia del eje neutro a la fibra superior).

El punto de aplicación de la resultante de compresión N_h se encuentra a una distancia y_G de la fibra superior y está dada por

$$y_G = \frac{1}{3} y_c \tag{5.212}$$

a) Condiciones de equilibrio

$$\begin{cases} \mathsf{N} = 0 = \mathsf{N}_a - \mathsf{N}_h \\ \mathsf{M} = \mathsf{N}_h\, y_z = \mathsf{N}_a\, y_z \end{cases} \tag{5.213}$$

donde N_a es el esfuerzo normal en las barras de acero.

De la primera de las ecuaciones (5.213) se obtiene

$$\mathsf{N}_a = \mathsf{N}_h = \sigma_a A_a = \frac{\sigma_h^{\max} y_c}{2} b \tag{5.214}$$

donde σ_a y A_a son, respectivamente, la tensión y el área de las barras de acero.

$$y_c = \frac{2\sigma_a A_a}{\sigma_h^{\max} b} \qquad y_G = \frac{2}{3}\frac{\sigma_a A_a}{\sigma_h^{\max} b} \tag{5.215}$$

De la segunda de las ecuaciones (5.213) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathsf{M} &= \mathsf{N}_a\, y_z = \sigma_a A_a\, y_z = \sigma_a A_a \left(h - y_G\right) \\ &= \sigma_a A_a\, h - \sigma_a A_a\, y_G \end{aligned} \tag{5.216}$$

de donde resulta,

$$\mathsf{M} = \sigma_a A_a\, h - \frac{2}{3}\frac{\sigma_a^2 A_a^2}{\sigma_h^{\max} b} \tag{5.217}$$

La ecuación (5.217) puede reescribirse de la siguiente manera,

$$\left(-\frac{2}{3}\frac{\sigma_a^2}{\sigma_h^{\max} b}\right) A_a^2 + \left(\sigma_a\, h\right) A_a - \mathsf{M} = 0 \tag{5.218}$$

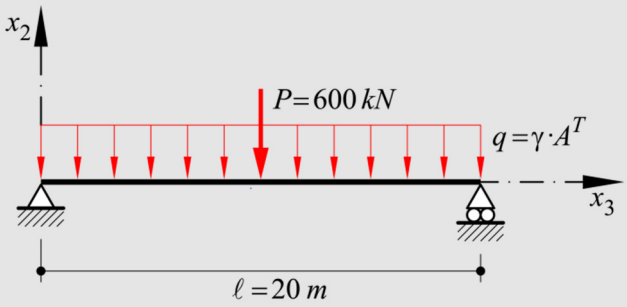
La solución de la ecuación cuadrática (5.218) proporciona el área de acero necesaria para el equilibrio,

$$A_a = \frac{-\sigma_a\, h \pm \sqrt{\sigma_a^2 h^2 - \dfrac{8\sigma_a^2}{3\sigma_h^{\max} b}\mathsf{M}}}{-\dfrac{4\sigma_a^2}{3\sigma_h^{\max} b}} \tag{5.219}$$

Asumiendo valores de b y de h, y denominando $A_h = b\,h$, se obtiene de la ecuación (5.219) el área de acero,

$$A_a = \frac{3\sigma_h^{\max} A_h}{4\sigma_a}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\,\mathrm{M}}{3\sigma_h^{\max} A_h h}}\right) \tag{5.220}$$

Ejemplo 5-32: La viga de hormigón armado de la figura posee sección rectangular y $20\,m$ de luz. Dimensionar la sección transversal considerando que tiene que soportar, además de su peso propio, una carga puntual de $600\,kN$.



Datos

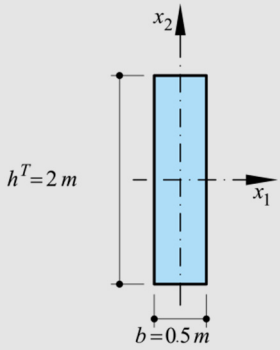
$\gamma = 24 kN/m^3$

$\sigma_h^{\max} = 30 MPa$

$\sigma_a^{\max} = 440 MPa$

Sección de hormigón

Se presupone la altura de la sección como la décima parte de la luz,



$$h^T = \frac{\ell}{10} = 2m$$

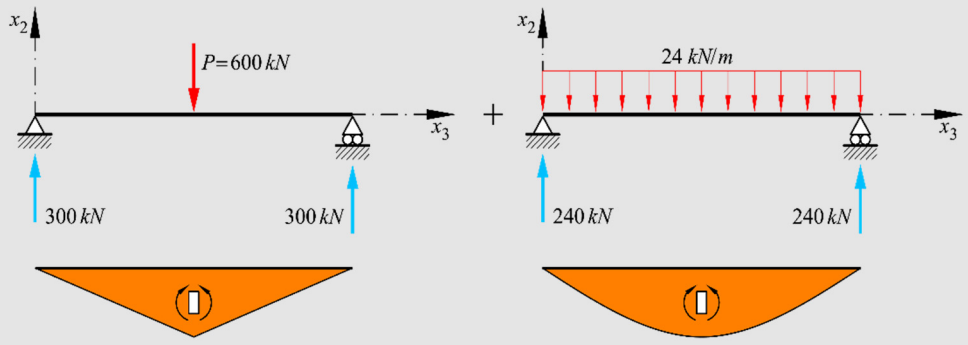
y se propone $b = \frac{h^T}{4} = 0.5m$

Así resulta una carga uniformemente distribuida debido al peso propio, dada por:

$$q = \gamma\, A^T = 24 \cdot (2 \cdot 0.5) = 24\,kN/m$$

Ley de momentos flectores

A continuación se representa la ley de mommentos flectores debido a la acción de la carga concentrada y a la acción de la carga uniformemente distribuida,



Aplicando el principio de superposición se puede hallar el momento debido a la carga concentrada P (M^P) y el momento debido a la carga distribuida q (M^q). Así, se tiene,

$$M^P = \frac{P\ell}{4} = \frac{600 \cdot 20}{4} = 3000 kN \cdot m$$

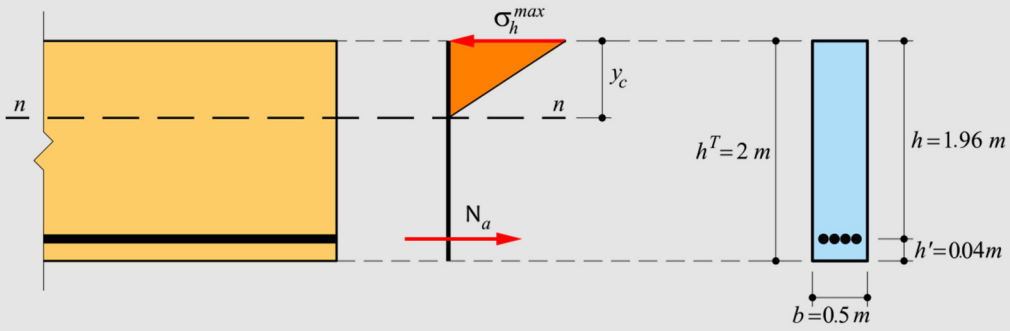
$$M^q = \frac{q\ell^2}{8} = \frac{24 \cdot 20^2}{8} = 1200 kN \cdot m$$

$$\rightarrow \quad M^{\max} = M^P + M^q = 3000 + 1200 = 4200 kN \cdot m$$

Definición de la posición de las barras de acero y cálculo del área de las armaduras A_a

Para un recubrimiento $h' = 0.04\,m$, el área A^h resulta,

$$A^h = 1.96 \cdot 0.5 = 0.98\,m^2$$



Aplicando la ecuación (5.220) se obtiene,

$$A_a = \frac{3\sigma_h^{max} A_h}{4\sigma_a}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8M}{3\sigma_h^{max} A_h h}}\right) = \frac{3 \cdot 30 \cdot 0.98}{4 \cdot 440}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8 \cdot 4200}{3 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 0.98 \cdot 1.96}}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} A_a &= 0.501 \cdot (1 \pm 0.897) \overset{min}{=} 0.005161\, m^2 \\ A_{\phi 20} &= \frac{\pi \phi^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0.02^2}{4} = \pi \cdot 0.0001 m^2 \end{aligned}\right\} \overset{n^o}{17}\,\phi 20 = 0.005340\, m^2$$

Esta cantidad de barras exigiría un ancho de sección que pueda albergar las barras con una separación entre ellas igual al diámetro ϕ. Esto es,

$$b' = 2 \cdot \phi \cdot n^o = 2 \cdot 0.02 \cdot 17 = 0.68\, m > b$$

Es necesario escoger un diámetro mayor para las barras, a fin de poder colocarlas en el ancho $b = 0.5m$. Se propone emplear barras con un diámetro $\phi = 0.028\, m$, entonces resulta,

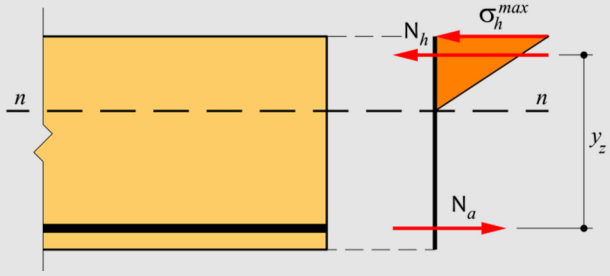
$$\frac{A_a}{\frac{\pi \cdot 0.028^2}{4}} = \frac{0.005161}{0.000615} = 8.38 \quad \rightarrow \quad \overset{n^o}{9}\,\phi 28 = 0.005535\, m^2$$

Posición del eje neutro

Se utiliza la ecuación (5.215) para determinar la posición del eje neutro,

$$y_c = \frac{2\sigma_a^{max} A_a}{\sigma_h^{max} b} = \frac{2 \cdot 440 \cdot 0.005161}{30 \cdot 0.5} = 0.3027\, m$$

Verificación



$$N_h = \frac{\sigma_h^{max} y_c b}{2} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0.3027 \cdot 0.5}{2} = 2270.25\, kN$$

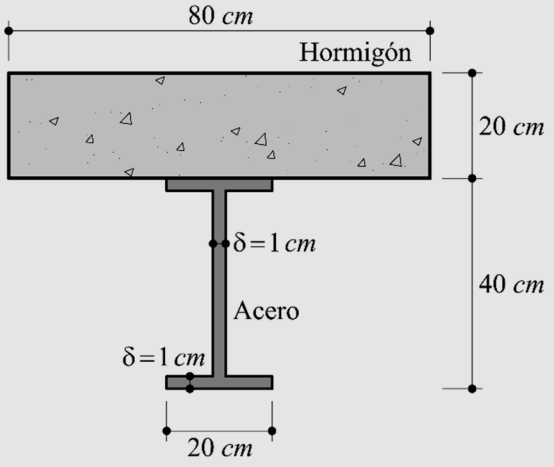
$$N_a = \sigma_a^{max} A_a = 440 \cdot 10^3 \cdot 0.005161 = 2270.84 kN$$

$$y_z = (h - y_G) = \left(h - \frac{1}{3} y_c \right) = 1.96 - \frac{1}{3} 0.3027 = 1.8591 m$$

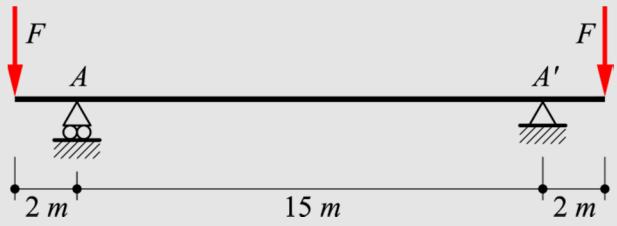
$$M = N_a \, y_z = 2270.84 \cdot 1.8591 = 4.22 \cdot 10^3 kN \cdot m$$

Ejemplo 5-33: La sección mixta de la figura corresponde a una barra de 15.00m de luz y se fabrica en dos etapas que luego se detallan (Etapa 1 y Etapa 2). Determinar las tensiones en ambos materiales al final del proceso de fabricación. Despreciar en el cálculo de la etapa de fabricación el peso propio del acero y de la capa de hormigón. Una vez fabricada la barra, determinar la magnitud de la carga P, concentrada en el centro de la luz, para que el estado de tensión sea constante en el alma de acero de la barra (Etapa 3).

La relación entre los módulos elásticos de ambos materiales es $m = E_a / E_h = 7$, $\sigma_a^{max} = 50 MPa$ y $\sigma_h^{max} = 5 MPa$.



Etapa 1) Se coloca la viga de acero sobre dos apoyos y se la carga con dos fuerzas F tal como indica la figura.



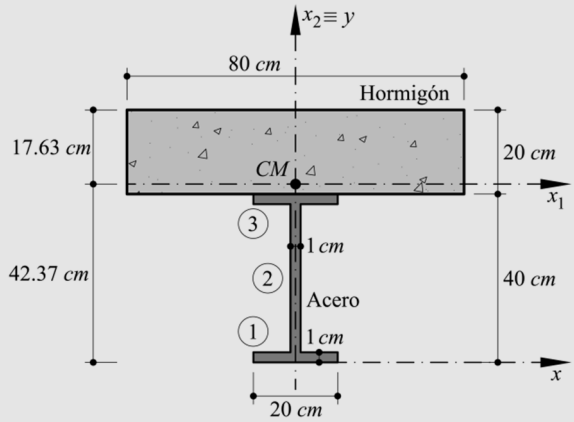
Etapa 2) Seguidamente se coloca sobre $\mathrm{AA'}$ la capa de hormigón y una vez que éste ha endurecido, se retiran las fuerzas F .

a) Cálculo del centro mecánico y momentos de inercia mecánicos

$$A_h = 0.20 \cdot 0.80 = 0.16\, m^2$$

$$A_a = 2 \cdot \left(0.20 \cdot 0.01\right) + \left(0.38 \cdot 0.01\right) = 0.0078\, m^2$$

$$\overline{A} = \left(A_h + A_a \cdot m\right) E_h = \left(0.16 + 0.0078 \cdot 7\right) E_h = 0.2146\, E_h$$



$$y_{CM} = \frac{E_h A_h y_h + E_a \left(A_a^1 y_a^1 + A_a^2 y_a^2 + A_a^3 y_a^3\right)}{E_h A_h + E_a A_a} = \frac{A_h y_h + m\left(A_a^1 y_a^1 + A_a^2 y_a^2 + A_a^3 y_a^3\right)}{A_h + m A_a}$$

$$y_{CM} = \frac{\left(0.16 \cdot 0.5\right) + 7\left(0.002 \cdot 0.005 + 0.0038 \cdot 0.2 + 0.002 \cdot 0.395\right)}{0.16 + 0.0078 \cdot 7} = 0.4237 m$$

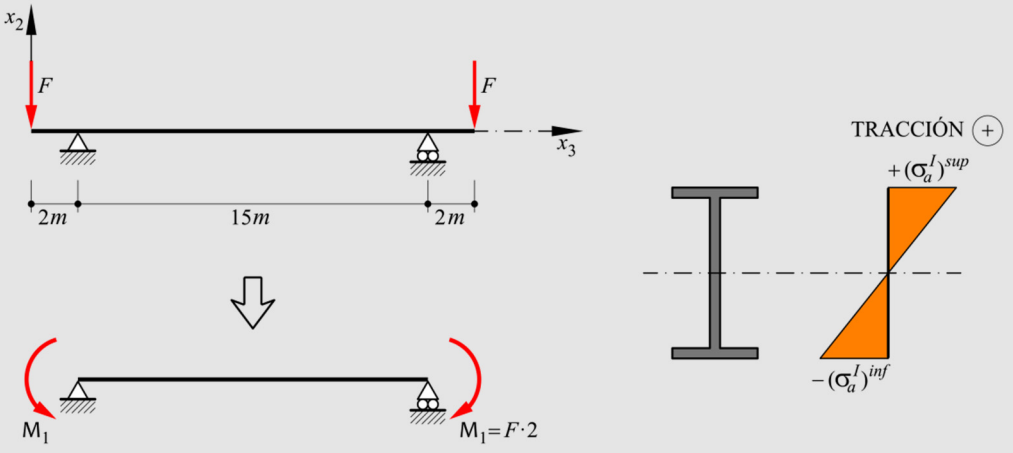
$$I_h^0 = \frac{0.80 \cdot 0.20^3}{12} = 5.333 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$I_a^0 = \left(\frac{0.2 \cdot 0.01^3}{12} + 0.002 \cdot 0.195^2 \right) \cdot 2 + \left(\frac{0.01 \cdot 0.38^3}{12} \right) = 1.9786 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$\begin{aligned} \overline{I}_{CM} &= \left\{ \left[5.333 \cdot 10^{-4} + 0.16 \left(0.1763 - 0.1 \right)^2 \right] + \right. \\ &\left. + \left[1.9786 \cdot 10^{-4} + 0.0078 \cdot \left(0.4237 - 0.2 \right)^2 \right] \cdot 7 \right\} E_h \\ &= \left\{ 1.4648 \cdot 10^{-3} + 5.88185 \cdot 10^{-4} \cdot 7 \right\} E_h = 5.5821 \cdot 10^{-3} \cdot E_h \end{aligned}$$

b) Aplicación de las fuerzas F soportadas solamente por el acero

Se aplican las dos cargas, como se muestra en la siguiente figura, las que se soportan solamente con el acero. Se denotará como estado I a los resultados correspondientes a esta etapa.

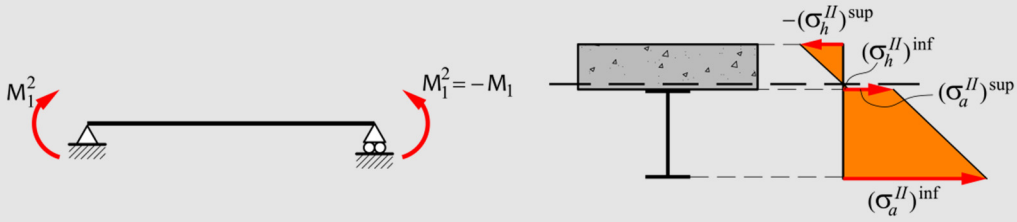


$$\sigma_a^I = \pm \frac{M_1}{I_a^0}\frac{h_a}{2} = \pm \frac{\left(F^I \cdot 2\right)}{1.9786 \cdot 10^{-4}}\frac{0.4}{2} = \pm F^I \cdot 2021.6$$

$$F^I = \frac{\sigma_a^I}{2021.6} = \frac{50 \cdot 10^6 \left(N/m^2\right)}{2021.6\left(1/m^2\right)} = 24732.5N$$

c) Sección compuesta (sin peso del hormigón)

Se resuelve ahora la segunda etapa con el estado de carga que se muestra en la siguiente figura. Se denotará como estado II a los resultados correspondientes a esta etapa.



$$\left(\sigma_h^{II}\right)^{\sup} = -\frac{M_1^2 E_h}{\bar{I}_{CM}} x_2^{\max} = -\frac{\left(F^{II} \cdot 2\right) \cdot 0.1763}{5.5821 \cdot 10^{-3}} = -F^{II} \cdot 63.166$$

$$\left(\sigma_h^{II}\right)^{\inf} = +\frac{\left(F^{II} \cdot 2\right) \cdot \left(0.2 - 0.1763\right)}{5.5821 \cdot 10^{-3}} = F^{II} \cdot 8.4914$$

$$\left(\sigma_a^{II}\right)^{\sup} = +\frac{\left(F^{II} \cdot 2\right) \cdot 7 \cdot \left(0.2 - 0.1763\right)}{5.5821 \cdot 10^{-3}} = F^{II} \cdot 59.44$$

$$\left(\sigma_a^{II}\right)^{\inf} = +\frac{\left(F^{II} \cdot 2\right) \cdot 7 \cdot 0.4237}{5.5821 \cdot 10^{-3}} = F^{II} \cdot 1062.65$$

d) Sección compuesta más estado previo de carga

El estado c) actúa sobre el estado b), entonces teniendo en cuenta que $|F| = |F^I| = |F^{II}|$, el estado (III) resultante será,

$$\left(\sigma_h^{III}\right)^{\sup} = \left(\sigma_h^{II}\right)^{\sup} = -F \cdot 63.166$$

$$\left(\sigma_h^{III}\right)^{\inf} = \left(\sigma_h^{II}\right)^{\inf} = F \cdot 8.4914$$

$$\left(\sigma_a^{III}\right)^{\sup} = \left(\sigma_a^{II}\right)^{\sup} + \left(\sigma_a^{I}\right)^{\sup} = F\left(59.44 + 2021.6\right) = F \cdot 2081.04$$

$$\left(\sigma_a^{III}\right)^{\inf} = \left(\sigma_a^{II}\right)^{\inf} + \left(\sigma_a^{I}\right)^{\inf} = F\left(1062.65 - 2021.6\right) = -F \cdot 958.95$$

Suponiendo

$$\left(\sigma_a^{III}\right)^{\sup} = 50 \cdot 10^6 N/m^2 \quad \rightarrow \quad F = \frac{50 \cdot 10^6}{2081.04} = 24026N$$

$$\left(\sigma_a^{III}\right)^{\inf} = 50 \cdot 10^6 N/m^2 \quad \rightarrow \quad F = \frac{50 \cdot 10^6}{958.95} = 52140N$$

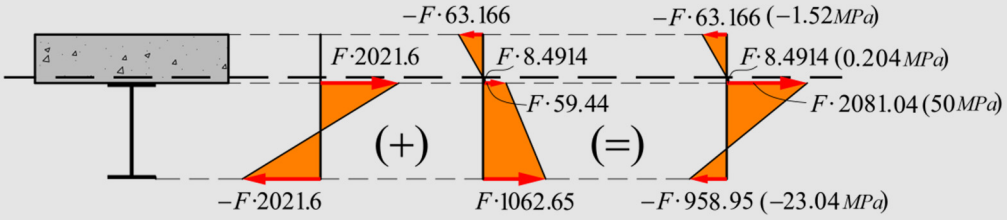
Para que σ no supere el valor de $50MPa$ se debe elegir la menor de estas fuerzas, o sea la que corresponde a $\left(\sigma_a^{III}\right)^{\sup}$

$$\rightarrow \quad F = 24026N$$

Ahora se verifica que la tensión en el hormigón no supere $\sigma_h^{\max} = 5MPa$,

$$\left(\sigma_h^{III}\right)^{\sup} = \left(\sigma_h^{II}\right)^{\sup} = -24026 \cdot 63.166 \quad \rightarrow \left|-1.5176\right| MPa < 5MPa$$

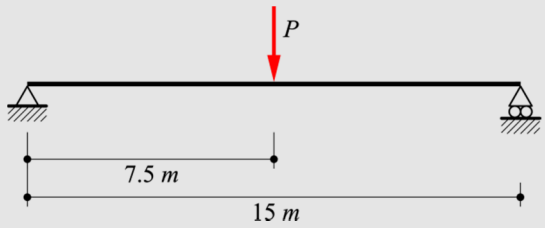
Para este caso el diagrama de tensiones resulta



Etapa 3) Estado tensional en la barra mixta sometida a una carga concentrada de magnitud P en el centro de la luz, tal como indica la figura.

a) Carga vertical en el centro de la luz

Se hace ahora el análisis del caso en que se aplica una carga concentrada P en el centro de la luz de la viga de sección compuesta.



$$M_1^P = \frac{P}{2}\cdot 7.5 = P\cdot 3.75$$

$$\left(\sigma_h^{IV}\right)^{\sup} = -\frac{\left(P\cdot 3.75\right)\cdot 0.1763}{5.5821\cdot 10^{-3}} = -P\cdot 118.44$$

$$\left(\sigma_h^{IV}\right)^{\inf} = \frac{\left(P\cdot 3.75\right)\cdot\left(0.20-0.1763\right)}{5.5821\cdot 10^{-3}} = P\cdot 15.921$$

$$\left(\sigma_a^{IV}\right)^{\sup} = \frac{\left(P\cdot 3.75\right)\cdot 7\cdot\left(0.20-0.1763\right)}{5.5821\cdot 10^{-3}} = P\cdot 111.45$$

$$\left(\sigma_a^{IV}\right)^{\inf} = \frac{\left(P\cdot 3.75\right)\cdot 7\cdot 0.4237}{5.5821\cdot 10^{-3}} = P\cdot 1992.5$$

b) Carga vertical en el centro de la luz más estados previos en la viga

Ahora se obtiene el valor de P para que la tensión sea constante en el alma de la viga de acero,

$$\left(\sigma_h\right)^{\sup} = \left(\sigma_h^{III}\right)^{\sup} + \left(\sigma_h^{IV}\right)^{\sup} = -F\cdot 63.166 - P\cdot 1184$$

$$\left(\sigma_h\right)^{\inf} = \left(\sigma_h^{III}\right)^{\inf} + \left(\sigma_h^{IV}\right)^{\inf} = F\cdot 8.4914 + P\cdot 15.921$$

$$\left(\sigma_a\right)^{\sup} = \left(\sigma_a^{III}\right)^{\sup} + \left(\sigma_a^{IV}\right)^{\sup} = F\cdot 2081.04 + P\cdot 111.45$$

$$\left(\sigma_a\right)^{\inf} = \left(\sigma_a^{III}\right)^{\inf} + \left(\sigma_a^{IV}\right)^{\inf} = -F\cdot 958.95 + P\cdot 1992.5$$

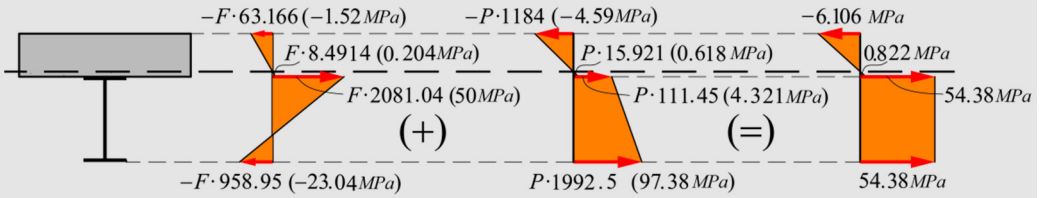
Para hacer constante la tensión en el alma de la viga de acero, se tiene,

$$\left(\sigma_a\right)^{\sup} \equiv \left(\sigma_a\right)^{\inf}$$

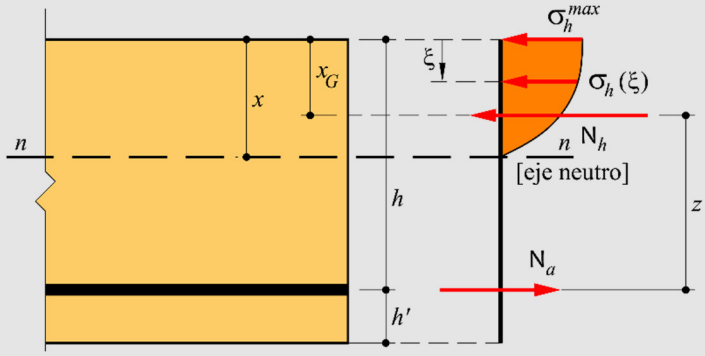
$$P = \frac{F\left(2081.04+958.95\right)}{\left(1992.5-111.45\right)} = F\cdot 1.6164$$

$$P = 24026 \cdot 1.6164 = 38835.7N$$

El estado de tensión resultante se muestra en la siguiente figura



Ejemplo 5-34: En la figura se muestra una barra de hormigón armado cuya sección se encuentra sometida a flexión simple. El comportamiento tensional a compresión del hormigón responde a una ley constitutiva parabólica dada por la siguiente expresión $\sigma_h(\xi) = \frac{\sigma_h^{\max}}{x^2}\left(x^2 - \xi^2\right)$. Dados $\sigma_h^{\max}$, M y el ancho b de la sección transversal, encontrar la magnitud mínima para la altura h de la sección transversal.



$$\overline{N}_a = \sigma_a A_a$$

$$\overline{N}_h = \int_{\xi=0}^{\xi=x} b\sigma_h(\xi)\, d\xi = \frac{2\sigma_h^{\max} b\, x}{3} \qquad (1)$$

$$x_G = \frac{\int_{\xi=0}^{\xi=x} b\sigma_h(\xi)\xi d\xi}{\mathrm{N}_h} = \frac{3x}{8} \qquad (2)$$

$$\bar{\mathrm{M}} = \bar{\mathrm{N}}_b\, z = \bar{\mathrm{N}}_a\, z\,; \qquad \bar{\mathrm{N}}_b = \bar{\mathrm{N}}_a \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \bar{\mathrm{M}} = \mathrm{M}\,\nu \\ \bar{\mathrm{N}} = \mathrm{N}\,\nu \end{cases}$$

Siendo ν un coeficiente de seguridad de mayoración de las acciones a establecerse según normativas.

De la ecuación (1) se obtiene la posición de la fibra neutra.

$$x = \frac{3}{2}\frac{\bar{\mathrm{N}}_h}{\sigma_h^{\max} b} = \frac{3}{2}\frac{\left(\frac{\bar{\mathrm{M}}}{z}\right)}{\sigma_h^{\max} b} \quad \Rightarrow \quad x \cdot z = \frac{3\bar{\mathrm{M}}}{2\sigma_h^{\max} b}$$

Siendo $z = h - x_G$ se reescribe la anterior de la siguiente forma.

$$x\left(h - x_G\right) = x\left(h - \frac{3}{8}x\right) = \frac{3\bar{\mathrm{M}}}{2\sigma_h^{\max} b}$$

Resultando de ésta última la siguiente ecuación cuadrática en la posición x del eje neutro.

$$x\,h - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3\bar{\mathrm{M}}_h}{2\sigma_h^{\max} b} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \left(\frac{8}{3}h\right)x + \frac{4\bar{\mathrm{M}}_h}{\sigma_h^{\max} b}$$

$$x = \frac{8}{3}h \pm \sqrt{\left(\frac{8}{3}h\right)^2 - \frac{16\bar{\mathrm{M}}}{\sigma_h^{\max} b}} \quad \Rightarrow \quad k_x = \frac{x}{h} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{16\bar{\mathrm{M}}}{\sigma_h^{\max} b h^2}}$$

Anulando el discriminante de la raíz resulta la altura mínima necesaria para equilibrar la sección

$$h^{\min} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{16\bar{\mathrm{M}}}{\sigma_h^{\max} b\, h^2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{h^{\min} = \sqrt{\frac{9 \cdot 16 \cdot \bar{\mathrm{M}}}{\sigma_h^{\max} b \cdot 64}} = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{\bar{\mathrm{M}}}{\sigma_h^{\max} b}}}$$

Además, teniendo en cuenta que $z = h - x_G = h - \frac{3}{8}x$, la sección transversal de acero necesaria para equilibrar la sección transversal, resulta

$$A_a = \frac{\bar{\mathrm{N}}_a}{\sigma_a} = \frac{\bar{\mathrm{M}}}{z\,\sigma_a} = \frac{\bar{\mathrm{M}}}{h\left(1-\frac{3}{8}k_x\right)\sigma_a}$$

5.9 Efecto de la temperatura en un material compuesto con compatibilidad

Sea la barra de la Figura 5.41, compuesta de hormigón con área A_h y una barra de acero de área A_a ubicada en el centro mecánico de la pieza, ambos materiales con adherencia plena entre sí (condición de compatibilidad)[5]. La barra se encuentra sometida a cambios de temperatura diferentes en cada material, manteniendo sus magnitudes en cualquier sección de la longitud de la barra. Se utiliza este sistema estructural como introducción conceptual al estudio del efecto térmico en materiales compuestos en problemas más complejos (apartados 5.9.1 y 5.9.2).

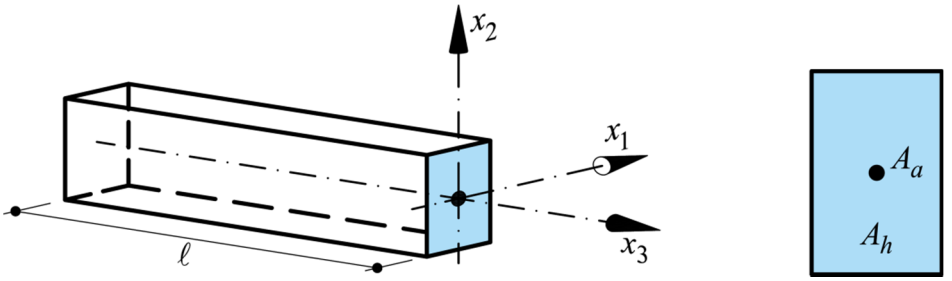


Figura 5.41 – Barra de hormigón armado con armadura centrada sometida a un cambio de temperatura.

a) Condición de equilibrio

$$\mathrm{N} = 0 = \int_A \sigma\, dA = A_a E_a \left(\varepsilon_a^{total} - \alpha_a \Delta t_a\right) + A_h E_h \left(\varepsilon_h^{total} - \alpha_h \Delta t_h\right) \qquad (5.221)$$

[5] En este caso, al estar la barra ubicada en el centro mecánico, se producen sólo desplazamientos axiales y la curvatura del eje de la pieza resulta nula.

donde los sub-índices a y h denotan al acero y al hormigón respectivamente; siendo E el módulo elástico, α el coeficiente de dilatación térmica y Δt el cambio de temperatura.

b) Condición de compatibilidad de deformaciones

$$\varepsilon_a^{total} = \varepsilon_h^{total} = \varepsilon^{total} \tag{5.222}$$

Sustituyendo la ecuación (5.221) en (5.222), se obtiene,

$$0 = \varepsilon^{total}\left(A_a E_a + A_h E_h\right) - \left(A_a E_a \alpha_a \Delta t_a + A_h E_h \alpha_h \Delta t_h\right) \tag{5.223}$$

Despejando, se obtiene la deformación total

$$\varepsilon^{total} = \frac{\left(A_a E_a \alpha_a \Delta t_a + A_h E_h \alpha_h \Delta t_h\right)}{\left(A_a E_a + A_h E_h\right)} \tag{5.224}$$

Las tensiones en los materiales: acero y hormigón resultan,

$$\begin{cases} \sigma_a = E_a\left(\varepsilon^{total} - \alpha_a \Delta t_a\right) \\ \sigma_h = E_h\left(\varepsilon^{total} - \alpha_h \Delta t_h\right) \end{cases} \tag{5.225}$$

Verificación

$$\mathrm{N}_a = \sigma_a A_a = \mathrm{N}_h = \sigma_h A_h \tag{5.226}$$

Ejemplo 5-35: Dada una barra de hormigón armado de longitud $\ell = 2m$, con una armadura ubicada en el centro mecánico de la pieza, determinar el desplazamiento sufrido por la barra cuando se produce una disminución de temperatura de 20 ºC en el hormigón, juntamente a un incremento de temperatura de 30ºC en el acero. Obtener las tensiones y las fuerzas interiores que se desarrollan en cada material. Tener en cuenta los siguientes datos:

$$E_h = 20\,GPa\,;\; E_a = 200\,GPa$$

$$\alpha_h = 1\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{^{\circ}C}\,;\; \alpha_a = 2\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{^{\circ}C}$$

$$\Delta t_h = -20^{\circ}\,C\,;\; \Delta t_a = +30^{\circ}\,C$$

$$A_h = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04\,m^2\,;\; A_a = 0.0002\,m^2$$

Deformación total

$$\varepsilon^{total} = \frac{\left(A_a E_a \alpha_a \Delta t_a + A_h E_h \alpha_h \Delta t_h\right)}{\left(A_a E_a + A_h E_h\right)}$$

$$= \frac{\overbrace{\left(0.0002 \cdot 200 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 30\right)}^{acero} + \overbrace{\left[0.04 \cdot 20 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot \left(-20\right)\right]}^{hormigón}}{\left(0.0002 \cdot 200 + 0.04 \cdot 20\right)}$$

$$\varepsilon^{total} = -1.619 \cdot 10^{-4}$$

Desplazamiento total del compuesto

$$u^{total} = \varepsilon^{total}\,\ell = -1.619 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = -0.000323\,m$$

Tensiones en cada material

$$\sigma_a = E_a\left(\varepsilon^{total} - \alpha_a \Delta t_a\right) = 200 \cdot \left(-1.619 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-5} \cdot 30\right) = -0.1524 GPa = -152.4 MPa$$

$$\sigma_h = E_h\left(\varepsilon^{total} - \alpha_h \Delta t_h\right) = 20 \cdot \left[-1.619 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-5} \cdot \left(-20\right)\right] = 0.000762 GPa = 0.762 MPa$$

Esfuerzos normales en cada material

$$N_a = \sigma_a A_a = -152.4 \cdot 0.0002 = -0.03048 MN$$

$$N_h = \sigma_h A_h = 0.762 \cdot 0.04 = 0.03048 MN$$

Nota: Si el acero estuviese sólo, las deformaciones y desplazamientos provocados por el cambio de temperatura serían respectivamente,

$$\varepsilon_a^{\Delta t} = \alpha_a \Delta t_a = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 30 = 6 \cdot 10^{-4}$$

$$u_a = \varepsilon_a^{\Delta t}\,\ell = 6 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 0.0012\,m$$

Si el hormigón estuviese sólo, las deformaciones y desplazamientos provocados por el cambio de temperatura serían respectivamente,

$$\varepsilon_h^{\Delta t} = \alpha_h \Delta t_h = 1 \cdot 10^{-5} \cdot \left(-20\right) = -2 \cdot 10^{-4}$$

$$u_h = \varepsilon_h^{\Delta t}\,\ell = -2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = -0.0004\,m$$

Ejemplo 5-36: Resolver el ejemplo anterior tomando el área neta de la sección de hormigón, es decir descontando el área de acero.

Deformación total

$$\varepsilon^{total} = \frac{\left[A_a E_a \alpha_a \Delta t_a + \left(A_T - A_a \right) E_h \alpha_h \Delta t_h \right]}{\left[A_a E_a + \left(A_T - A_a \right) E_h \right]} = \frac{\left[A_a m \alpha_a \Delta t_a + \left(A_T - A_a \right) E_h \alpha_h \Delta t_h \right]}{\left[A_a m + \left(A_T - A_a \right) \right]}$$

, con $m = \frac{E_a}{E_h}$ y $A_T = b\,h$

Reordenando resulta

$$\varepsilon^{total} = \frac{A_T \alpha_h \Delta t_h + A_a \left(m \alpha_a \Delta t_a - \alpha_h \Delta t_h \right)}{A_T + \left(m - 1 \right) A_a}$$

Esta última expresión tiene en cuenta el área neta del hormigón.

Considerando los datos del ejemplo, resulta $m = E_a / E_h = 10$, y la deformación específica total está dada por

$$\varepsilon^{total} = \frac{0.04 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \left(-20 \right) + 0.0002 \cdot \left[10 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 30 - 1 \cdot 10^{-5} \left(-20 \right) \right]}{0.04 + \left(10 - 1 \right) \cdot 0.0002} = -1.617 \cdot 10^{-4}$$

Tensiones en cada material

$$\sigma_a = 200 \cdot \left(-1.617 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-5} \cdot 30 \right) = -0.1523 GPa = -152.3 MPa$$

$$\sigma_h = 20 \cdot \left[-1.617 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-5} \cdot \left(-20 \right) \right] = 0.000766 GPa = 0.766 MPa$$

Esfuerzos normales en cada material

$$\mathrm{N}_a = \sigma_a A_a = -152.3 \cdot 0.0002 = -0.03047 MN$$

$$\mathrm{N}_h = \sigma_h \left(A_T - A_a \right) = 0.766 \cdot \left(0.04 - 0.0002 \right) = 0.03048 MN$$

5.9.1 Barras mixtas de distintos materiales sometidas a variación de temperatura

Sea la barra de la Figura 5.42, de longitud ℓ, constituida por distintos materiales M_1, $M_2,\ldots,M_i$ y sometida a un gradiente térmico variable a lo largo de la sección según el eje x_2, es decir $t_i\left(x_2\right)$.

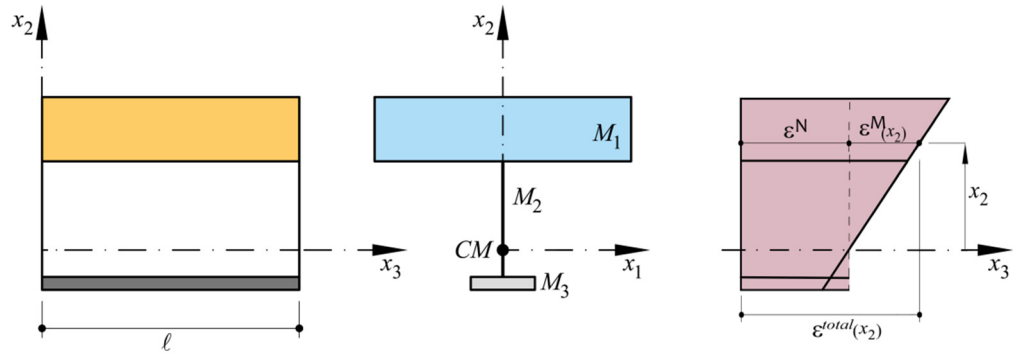


Figura 5.42 – Barra de distintos materiales sometida a un gradiente térmico.

La deformación total resulta de la suma de la deformación mecánica (ε^{mec}) y la deformación térmica (ε^{term}). Asimismo, la misma puede escribirse como la superposición de una deformación constante en todos los materiales (ε^N) y una deformación provocada por la curvatura (ε^M) (ver Figura 5.42). Esto es,

$$\varepsilon^{total}\left(x_2\right)=\varepsilon^N+\varepsilon^M\left(x_2\right)=\underbrace{\frac{\sigma_i\left(x_2\right)}{E_i}}_{\varepsilon_i^{mec}\left(x_2\right)}+\underbrace{\alpha_i t_i\left(x_2\right)}_{\varepsilon^{term}}\quad i=1,\ldots,n^o \tag{5.227}$$

siendo n^o el número de materiales diferentes presentes en la sección transversal.

La deformación por flexión ε^M está dada por,

$$\varepsilon^M\left(x_2\right)=\frac{x_2}{\rho} \tag{5.228}$$

donde $1/\rho$ es la curvatura.

Entonces, la tensión en el material $i-ésimo$ resulta,

$$\sigma_i\left(x_2\right)=E_i\left(\varepsilon^{\mathrm{N}}+\varepsilon^{\mathrm{M}}\left(x_2\right)-\alpha_i t_i\left(x_2\right)\right)\quad i=1,...,n^{\mathrm{o}} \tag{5.229}$$

a) Condición de equilibrio axial

$$\mathrm{N}=0=\sum_i\int_{A_i}\sigma_i\,dA=\sum_i E_i\int_{A_i}\left(\varepsilon^{\mathrm{N}}+\varepsilon^{\mathrm{M}}\left(x_2\right)-\alpha_i t_i\left(x_2\right)\right)dA \tag{5.230}$$

Reemplazando la ecuación (5.228) en la ecuación (5.230) se obtiene

$$0=\sum_i E_i\left(\int_{A_i}\varepsilon^{\mathrm{N}}dA+\int_{A_i}\frac{x_2}{\rho}dA-\int_{A_i}\alpha_i t_i\left(x_2\right)dA\right) \tag{5.231}$$

Teniendo en cuenta que la deformación ε^{N} y la curvatura $1/\rho$ son constantes en todos los materiales y operando, resulta

$$0=\sum_i E_i\left(\varepsilon^{\mathrm{N}}A_i+\frac{1}{\rho}S_1^i-\alpha_i\int_{A_i}t_i\left(x_2\right)dA\right) \tag{5.232}$$

b) Condición de equilibrio de momentos

$$\mathrm{M}_1=0=\sum_i\int_{A_i}\sigma_i x_2\,dA=\sum_i E_i\int_{A_i}\left(\varepsilon^{\mathrm{N}}+\varepsilon^{\mathrm{M}}\left(x_2\right)-\alpha_i t_i\left(x_2\right)\right)x_2 dA \tag{5.233}$$

Reemplazando la ecuación (5.228) en la ecuación (5.233) se obtiene

$$0=\sum_i E_i\left(\int_{A_i}\varepsilon^{\mathrm{N}}x_2 dA+\int_{A_i}\frac{x_2}{\rho}x_2 dA-\int_{A_i}\alpha_i t_i\left(x_2\right)x_2 dA\right) \tag{5.234}$$

Teniendo en cuenta que $\varepsilon^{\mathrm{N}}=cte$, $1/\rho=cte$ y operando, resulta

$$0=\sum_i E_i\left(\varepsilon^{\mathrm{N}}S_1^i+\frac{1}{\rho}I_1^i-\alpha_i\int_{A_i}t_i\left(x_2\right)x_2 dA\right) \tag{5.235}$$

Las ecuaciones (5.232) y (5.235) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: ε^{N} y $1/\rho$. Resolviendo este sistema se obtienen las expresiones para la parte de la deformación total que es constante en todos los materiales de la sección (ε^{N}) y la que varía linealmente con la distancia x_2 (ε^{M}). Resolviendo el sistema se obtiene,

$$\varepsilon^{N}=\frac{\left(\sum_i E_i I_1^i\right)\left(\sum_i E_i\alpha_i\int_{A_i} t_i\left(x_2\right)dA\right)-\left(\sum_i E_i S_1^i\right)\left(\sum_i E_i\alpha_i\int_{A_i} t_i\left(x_2\right)x_2 dA\right)}{\left(\sum_i E_i I_1^i\right)\cdot\left(\sum_i E_i A_i\right)-\left(\sum_i E_i S_1^i\right)^2} \tag{5.236}$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\left(\sum_i E_i\alpha_i\int_{A_i} t_i\left(x_2\right)x_2 dA\right)\cdot\left(\sum_i E_i A_i\right)-\left(\sum_i E_i\alpha_i\int_{A_i} t_i\left(x_2\right)dA\right)\cdot\left(\sum_i E_i S_1^i\right)}{\left(\sum_i E_i I_1^i\right)\cdot\left(\sum_i E_i A_i\right)-\left(\sum_i E_i S_1^i\right)^2} \tag{5.237}$$

En el caso particular que $t_i\left(x_2\right)$ sea constante en cada material, las ecuaciones (5.236) y (5.237) resultan, respectivamente,

$$\varepsilon^{N}=\frac{\left(\sum_i E_i I_1^i\right)\left(\sum_i E_i\alpha_i t_i A_i\right)-\left(\sum_i E_i S_1^i\right)\left(\sum_i E_i\alpha_i t_i S_1^i\right)}{\left(\sum_i E_i I_1^i\right)\cdot\left(\sum_i E_i A_i\right)-\left(\sum_i E_i S_1^i\right)^2} \tag{5.238}$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\left(\sum_i E_i\alpha_i t_i S_1^i\right)\cdot\left(\sum_i E_i A_i\right)-\left(\sum_i E_i\alpha_i t_i A_i\right)\cdot\left(\sum_i E_i S_1^i\right)}{\left(\sum_i E_i I_1^i\right)\cdot\left(\sum_i E_i A_i\right)-\left(\sum_i E_i S_1^i\right)^2} \tag{5.239}$$

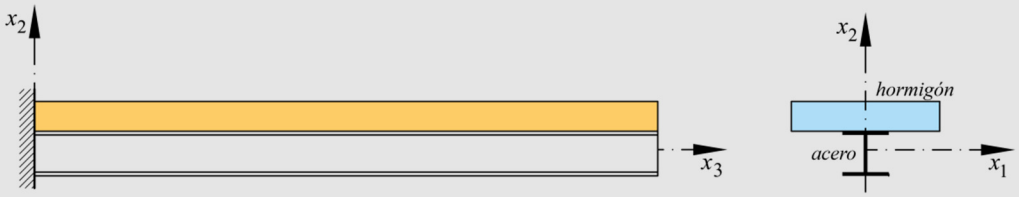
Conociendo la deformación ε^{N} y la curvatura $\frac{1}{\rho}$, la tensión en el material *i – ésimo* se obtiene utilizando la ecuación (5.229),

$$\sigma_i\left(x_2\right)=E_i\left(\varepsilon^{N}+\frac{x_2}{\rho}-\alpha_i t_i\left(x_2\right)\right) \tag{5.240}$$

Mientras que la deformación total, de acuerdo a la ecuación (5.227), está dada por

$$\varepsilon^{total}\left(x_2\right)=\varepsilon^{N}+\frac{x_2}{\rho} \tag{5.241}$$

Ejemplo 5-37: La barra compuesta de acero y hormigón que se muestra en la figura está sometida a una variación de temperatura uniforme t, obtener la deformación axil, la curvatura y el estado tensional final.



Deformación axil (constante)

$$\varepsilon^{N} = \frac{t\left[\left(E_h I_1^h + E_a I_1^a\right)\left(E_h \alpha_h A_h + E_a \alpha_a A_a\right) - \left(E_h S_1^h + E_a S_1^a\right)\left(E_h \alpha_h S_1^h + E_a \alpha_a S_1^a\right)\right]}{\tilde{S}}$$

con $\tilde{S} = \left(E_h I_1^h + E_a I_1^a\right)\cdot\left(E_h A_h + E_a A_a\right) - \left(E_h S_1^h + E_a S_1^a\right)^2$

Curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{t\left[\left(E_h \alpha_h S_1^h + E_a \alpha_a S_1^a\right)\cdot\left(E_h A_h + E_a A_a\right) - \left(E_h \alpha_h A_h + E_a \alpha_a A_a\right)\cdot\left(E_h S_1^h + E_a S_1^a\right)\right]}{\tilde{S}}$$

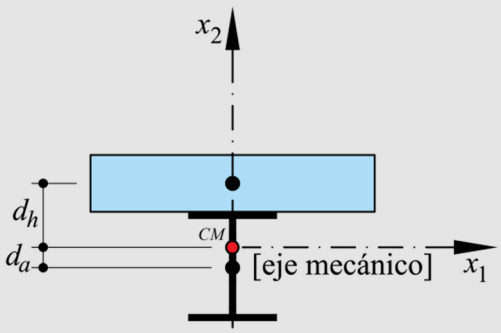
Deformación por flexión

$$\varepsilon^{M}\left(x_2\right) = \frac{t\left[\left(E_h \alpha_h S_1^h + E_a \alpha_a S_1^a\right)\cdot\left(E_h A_h + E_a A_a\right) - \left(E_h \alpha_h A_h + E_a \alpha_a A_a\right)\cdot\left(E_h S_1^h + E_a S_1^a\right)\right]}{\tilde{S}} x_2$$

Tensiones

$$\sigma_j\left(x_2\right) = E_j\left(\varepsilon^{N} + \frac{x_2}{\rho} - t\cdot\alpha_j\right) \quad \text{para} \quad j = a, h$$

Nota: Los momentos de inercia se calculan utilizando el teorema de Steiner y los momentos estáticos se obtienen mediante las siguientes expresiones



$$S_h = A_h\, d_h$$
$$S_a = A_a\left(-d_a\right)$$

5.9.2 Problema termo-elástico integrado en vigas de Bernoulli - Material compuesto con compatibilidad de deformaciones

Sea la viga mostrada en la Figura 5.43, constituida por n^c láminas con compatibilidad de deformaciones y sometida al gradiente térmico indicado en la misma figura.

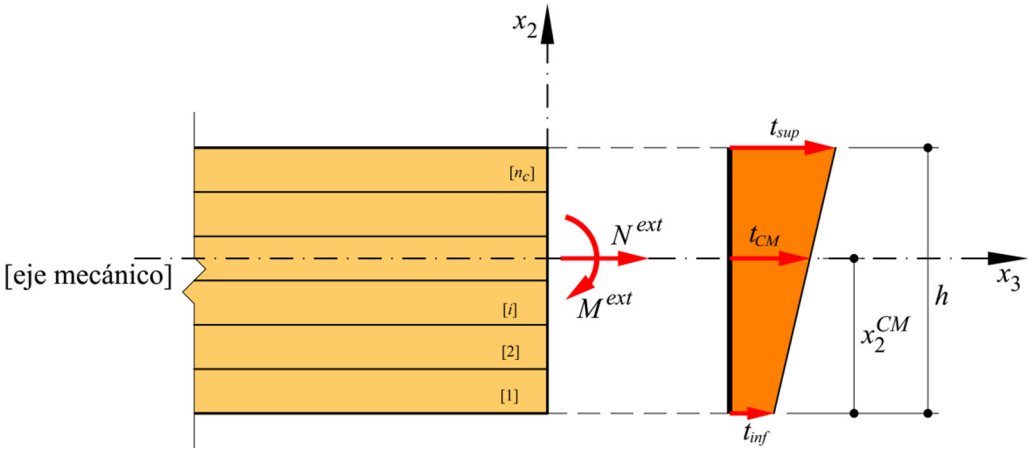


Figura 5.43 – Barra de material compuesto sometida a un gradiente térmico $t\left(x_2\right)$.

La temperatura a la altura del eje mecánico está dada por

$$t_{CM} = t_{inf} + \frac{t_{sup} - t_{inf}}{h} x_2^{CM} \tag{5.242}$$

Debe notarse que si $x_2^{CM} = \dfrac{h}{2} \;\rightarrow\; t_{CM} = \dfrac{t_{sup} + t_{inf}}{2}$

Luego, la ecuación que define la variación de la temperatura a lo largo del eje x_2 está dada por,

$$t\left(x_2\right)=t_{CM}+\underbrace{\left(\frac{t_{sup}-t_{CM}}{h-x_2^{CM}}\right)}_{\delta}x_2=t_{CM}+\delta\, x_2 \tag{5.243}$$

La deformación en un punto cualquiera de la sección está dada por

$$\varepsilon_i^{total}\left(x_2\right)=\underbrace{\frac{\sigma_i\left(x_2\right)}{E_i}}_{\varepsilon^{mec}}+\underbrace{\alpha_i t\left(x_2\right)}_{\varepsilon^{term}}\quad\rightarrow\quad\sigma_i\left(x_2\right)=\left[\varepsilon_i^{total}\left(x_2\right)-\alpha_i t\left(x_2\right)\right]E_i \tag{5.244}$$

La condición de equilibrio axial de la pieza está dada por

$$\sum F_{x_3}=N^{ext}=\sum_{i=1}^{n_c}\sigma_i dA=\sum_{i=1}^{n_c}\int_{A_i}E_i\varepsilon_i^{total}\left(x_2\right)dA-\sum_{i=1}^{n_c}\int_{A_i}E_i\alpha_i t\left(x_2\right)dA \tag{5.245}$$

La condición de equilibrio de momentos de la pieza está dada por

$$\sum M_{x_1}=M^{ext}=\sum_{i=1}^{n_c}\sigma_i x_2 dA=\sum_{i=1}^{n_c}\int_{A_i}E_i\varepsilon_i^{total}\left(x_2\right)x_2 dA-\sum_{i=1}^{n_c}\int_{A_i}E_i\alpha_i t\left(x_2\right)x_2 dA \tag{5.246}$$

Sustituyendo la función de temperatura dada por las ecuación (5.243) en las ecuaciones (5.245) y (5.246) se obtiene, respectivamente,

$$N^{ext}=\sum_{i=1}^{n_c}\int_{A_i}E_i\varepsilon_i^{total}\left(x_2\right)dA-\left(\sum_{i=1}^{n_c}\int_{A_i}E_i\alpha_i t_{CM}dA+\sum_{i=1}^{n_c}\int_{A_i}E_i\,\delta\, x_2 dA\right) \tag{5.247}$$

$$M^{ext}=\sum_{i=1}^{n_c}\int_{A_i}E_i\varepsilon_i^{total}\left(x_2\right)x_2 dA-\left(\sum_{i=1}^{n_c}\int_{A_i}E_i\alpha_i t_{CM}x_2 dA-\sum_{i=1}^{n_c}\int_{A_i}E_i\alpha_i\delta\, x_2^2 dA\right) \tag{5.248}$$

Por otra parte la deformación puede descomponerse como la suma de una de extensión y otra de flexión, esto es

$$\varepsilon_i^{total}\left(x_2\right)=\varepsilon_i^{\mathrm{N}}+\varepsilon_i^{\mathrm{M}}\left(x_2\right)=\varepsilon_i^{\mathrm{N}}+\frac{x_2}{\rho}\ \text{ donde }\ \varepsilon_i^{\mathrm{N}}=\varepsilon^{\mathrm{N}}=cte\ \text{ y }\ \rho=cte \tag{5.249}$$

Sustituyendo la ecuación (5.249) en la ecuación (5.247) se obtiene

$$N^{ext} = \sum_{i=1}^{n_c} \int_{A_i} E_i \varepsilon^N dA + \sum_{i=1}^{n_c} \int_{A_i} E_i \frac{x_2}{\rho} dA - \sum_{i=1}^{n_c} \int_{A_i} E_i \alpha_i t_{CM} dA - \sum_{i=1}^{n_c} \int_{A_i} E_i \alpha_i \delta x_2 dA \qquad (5.250)$$

Sustituyendo la ecuación (5.249) en la ecuación (5.248) se obtiene

$$\begin{aligned} M^{ext} = & \sum_{i=1}^{n_c} \int_{A_i} E_i \varepsilon^N x_2 dA + \sum_{i=1}^{n_c} \int_{A_i} E_i \frac{x_2^2}{\rho} dA - \sum_{i=1}^{n_c} \int_{A_i} E_i \alpha_i t_{CM} x_2 dA \\ & - \sum_{i=1}^{n_c} \int_{A_i} E_i \alpha_i \delta x_2^2 dA \end{aligned} \qquad (5.251)$$

Operando, de la ecuación (5.250) se obtiene,

$$\begin{aligned} N^{ext} = & \varepsilon^N \sum_{i=1}^{n_c} E_i \int_{A_i} dA + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n_c} E_i \int_{A_i} x_2 dA \\ & - t_{CM} \sum_{i=1}^{n_c} E_i \alpha_i \int_{A_i} dA - \delta \sum_{i=1}^{n_c} E_i \alpha_i \int_{A_i} x_2 dA \end{aligned} \qquad (5.252)$$

Operando, de la ecuación (5.251) se obtiene,

$$\begin{aligned} M^{ext} = & \varepsilon^N \sum_{i=1}^{n_c} E_i \int_{A_i} x_2 dA + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n_c} E_i \int_{A_i} x_2^2 dA \\ & - t_{CM} \sum_{i=1}^{n_c} E_i \alpha_i \int_{A_i} x_2 dA - \delta \sum_{i=1}^{n_c} E_i \alpha_i \int_{A_i} x_2^2 dA \end{aligned} \qquad (5.253)$$

Considerando la definición de momento estático y momento de inercia, las ecuaciones (5.252) y (5.253) resultan

$$N^{ext} = \varepsilon^N \sum_{i=1}^{n_c} \left(E_i A_i \right) + \frac{1}{\rho} \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{n_c} E_i S_1^i} - t_{CM} \sum_{i=1}^{n_c} \left(E_i \alpha_i A_i \right) - \delta \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{n_c} \left(E_i \alpha_i S_1^i \right)} \qquad (5.254)$$

$$M^{ext} = \varepsilon^N \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{n_c} \left(E_i S_1^i \right)} + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n_c} \left(E_i I_1^i \right) - t_{CM} \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{n_c} \left(E_i \alpha_i S_1^i \right)} - \delta \sum_{i=1}^{n_c} \left(E_i \alpha_i I_1^i \right) \qquad (5.255)$$

De las ecuaciones (5.254) y (5.255) se obtienen las deformaciones de extensión y de flexión, es decir,

$$\varepsilon^{\mathsf{N}} = \frac{N^{ext} + t_{CM}\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i\alpha_i A_i\right)}{\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i A_i\right)} \tag{5.256}$$

$$\varepsilon^{\mathsf{M}} = \left(\frac{1}{\rho}\right)x_2 = \left[\frac{M^{ext} + \delta\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i\alpha_i I_1^i\right)}{\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i I_1^i\right)}\right]x_2 \tag{5.257}$$

Reemplazando (5.256) y (5.257) en la ecuación (5.249) se obtiene,

$$\varepsilon_i^{total}\left(x_2\right) = \varepsilon^{\mathsf{N}} + \varepsilon_i^{\mathsf{M}}\left(x_2\right) = \frac{N^{ext} + t_{CM}\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i\alpha_i A_i\right)}{\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i A_i\right)} + \left[\frac{M^{ext} + \delta\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i\alpha_i I_1^i\right)}{\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i I_1^i\right)}\right]x_2 \tag{5.258}$$

La tensión en la lámina $j-ésima$ del material compuesto se obtiene reemplazando la deformación total dada por la ecuación (5.258) en la ecuación (5.244),

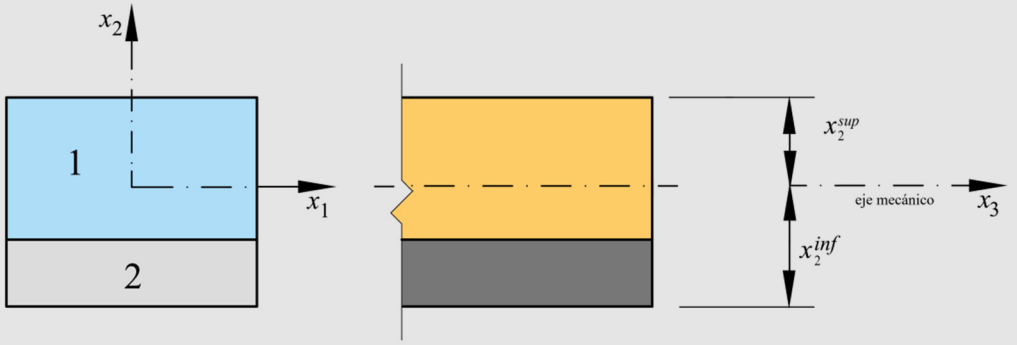
$$\sigma_j\left(x_2\right) = E_j\left[\frac{N^{ext}}{\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i A_i\right)} + \frac{t_{CM}\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i\alpha_i A_i\right)}{\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i A_i\right)} - \alpha_j t_{CM}\right] + E_j x_2\left[\frac{M^{ext}}{\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i I_1^i\right)} + \frac{\delta\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i\alpha_i I_1^i\right)}{\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i I_1^i\right)} - \alpha_j\delta\right] \tag{5.259}$$

Nótese que la curvatura provocada por el problema térmico es

$$\frac{1}{\rho^{térmico}} = \frac{d\varphi^{térmico}}{dx_3} = \frac{\delta\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i\alpha_i I_1^i\right)}{\sum_{i=1}^{n_c}\left(E_i I_1^i\right)} \tag{5.260}$$

Para aplicar el concepto anterior es imprescindible tener en cuenta la condición de borde del problema.

Ejemplo 5-38: La figura presenta la sección de una barra compuesta por dos materiales, sometida a un cambio de temperatura único (t_m) y en la que están restringidas las deformaciones. Obtener el estado tensional final.



Deformación en las fibras superiores e inferiores

$$\varepsilon = 0 = \varepsilon^{N} + \varepsilon^{M}\left(x_2^{\sup}\right) \qquad \varepsilon = 0 = \varepsilon^{N} + \varepsilon^{M}\left(x_2^{\inf}\right)$$

En este caso al ser $t_m = cte$, resulta $\delta = 0$, reemplazando en la ecuación (5.258) se obtiene, para $x_2^{\sup}$ y $x_2^{\inf}$ respectivamente,

$$0 = \frac{N^{ext} + t_m \sum_{i=1}^{2}\left(E_i \alpha_i A_i\right)}{\sum_{i=1}^{2}\left(E_i A_i\right)} + \left[\frac{M^{ext}}{\sum_{i=1}^{2}\left(E_i I_1^i\right)}\right] x_2^{\sup}$$

$$0 = \frac{N^{ext} + t_m \sum_{i=1}^{2}\left(E_i \alpha_i A_i\right)}{\sum_{i=1}^{2}\left(E_i A_i\right)} + \left[\frac{M^{ext}}{\sum_{i=1}^{2}\left(E_i I_1^i\right)}\right] x_2^{\inf}$$

Escribiendo en forma matricial se obtiene

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{N^{ext} + t_m \sum_{i=1}^{2} \left(E_i \alpha_i A_i \right)}{\sum_{i=1}^{2} \left(E_i A_i \right)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{M^{ext}}{\sum_{i=1}^{2} \left(E_i I_1^i \right)} \begin{Bmatrix} x_2^{\sup} \\ x_2^{\inf} \end{Bmatrix}$$

De este sistema de ecuaciones se obtienen N^{ext} y M^{ext} que se oponen a la deformación de la viga. Finalmente, sustituyendo en la ecuación (5.259) se obtiene el estado tensional final.

5.10 Flexión elastoplástica

En el análisis de la flexión que se ha realizado hasta aquí se ha supuesto que el material de las barras obedece a la ley de Hooke. Se estudiará ahora el caso de flexión elastoplástica de barras, es decir cuando el material se deforma más allá de la región lineal. En este análisis se supone que el material presenta un comportamiento elasto-plástico perfecto, es decir que se idealiza la curva tensión –deformación como se muestra en la Figura 5.44, despreciando los efectos del endurecimiento del material. Esto último, al generar un incremento de la resistencia del material, hace que considerar un comportamiento elasto-plástico perfecto esté del lado de la seguridad.

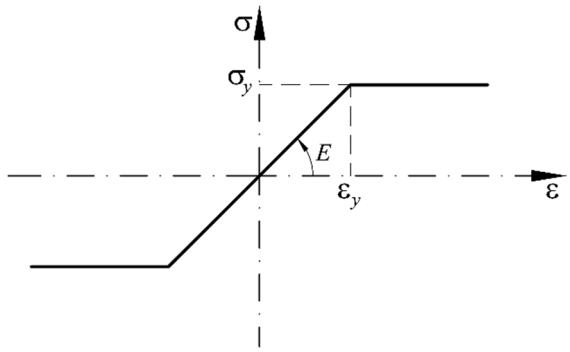


Figura 5.44 – Curva $\sigma - \varepsilon$ idealizada de un material elasto-plástico perfecto

En los desarrollos que siguen se considera que el módulo elástico E y la tensión de fluencia σ_y son de igual magnitud en tracción y compresión; y que las secciones se mantienen planas luego de la deformación lo que puede verificarse experimentalmente.

5.10.1 Sección con dos ejes de simetría

Por simplicidad se comenzará analizando el caso de flexión pura y recta, en secciones con dos ejes de simetría (ver Figura 5.45). Mientras el momento flector $M_1 = M$ es lo suficientemente pequeño, la sección se mantiene elástica y las tensiones ($\sigma_3 = \sigma < \sigma^y$) pueden calcularse con la expresión (Figura 5.45 a)

$$\sigma = \frac{M x_2}{I_1} \tag{5.261}$$

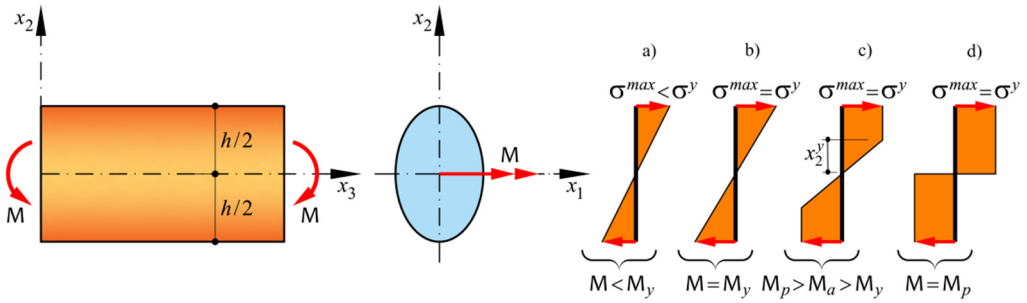


Figura 5.45 – Tensiones por flexión, sección con dos ejes de simetría, producidas por: a) Momento elástico, b) Momento de fluencia, c) Momento de plastificación parcial, d) Momento de plastificación total.

Si se aumenta el valor del momento flector M hasta que las deformaciones en las fibras más alejadas alcancen el valor de $\varepsilon_3 = \varepsilon = \varepsilon^y$, las tensiones en esas fibras llegarán al valor de la tensión de fluencia σ^y (ver Figura 5.45 b). El momento flector que corresponde a este caso se denomina *momento de fluencia* y se lo designa como M_y, y está dado por

$$\sigma^y = \frac{M_y x_2^{\max}}{I_1} = \frac{M_y h}{I_1 2} \quad \rightarrow \quad M_y = \frac{2\sigma^y I_1}{h} \tag{5.262}$$

Si ahora se aumenta nuevamente el valor del momento flector por encima del valor del momento de fluencia, la deformación crece de manera que existen fibras en las que a una distancia $x_2 > x_2^y$ se verifica que $\varepsilon > \varepsilon^y$, manteniéndose en estas fibras la tensión constante e igual a σ^y (ver Figura 5.45 c). En este caso se dice que la sección se encuentra parcialmente plastificada, ya que posee una zona plastifica-

da ($\sigma = \sigma^y$) y un *núcleo elástico* de altura $2x_2^y$ donde las tensiones se encuentran por debajo de la tensión de fluencia ($\sigma < \sigma^y$). El momento flector para este caso se denomina *momento de plastificación parcial* (M_a).

Finalmente, es posible incrementar aún más el momento flector de manera que el núcleo elástico se reduce hasta una magnitud despreciable ($x_2^y \to 0$) y la sección de la viga se encuentra totalmente plastificada (ver Figura 5.45d). Se dice que en este caso la sección ha alcanzado su capacidad resistente última por flexión y el valor del momento flector se denomina *momento plástico* (M_p).

5.10.1.1 Determinación del momento de plastificación parcial

En esta sección se determina el momento M_a que produce en la sección transversal un núcleo elástico de altura $2x_2^y$. Para este análisis se retoma la Figura 5.45 c) y se la reproduce con mayor detalle en la Figura 5.46.

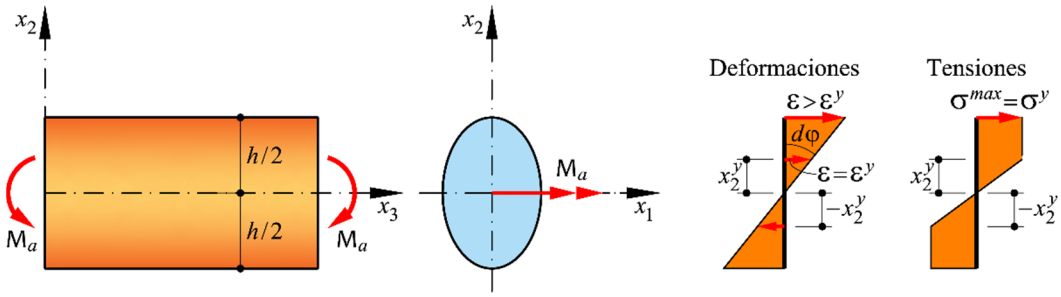


Figura 5.46 –Momento de plastificación parcial en secciones con dos ejes de simetría

a) *Relaciones geométricas*. Se cumple la hipótesis de conservación de secciones planas, por lo que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx_3}; \quad du_3 = x_2 d\varphi \tag{5.263}$$

b) *Relaciones de compatibilidad.*

$$\varepsilon = \varepsilon_3 = \frac{du_3}{dx_3} = \frac{d\varphi}{dx_3} x_2 = \frac{x_2}{\rho} \tag{5.264}$$

c) Ley constitutiva.

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_3 = E\varepsilon = E\frac{x_2}{\rho} \quad & \forall\, \varepsilon < \varepsilon_y \\ \sigma = \sigma_y \quad & \forall\, \varepsilon \geq \varepsilon_y \end{aligned} \tag{5.265}$$

d) Ecuaciones de equilibrio.

$$M_a = \int_A \sigma x_2 dA = \int_A \sigma x_2 \overbrace{b(x_2)dx_2}^{dA} \tag{5.266}$$

Teniendo en cuenta que la sección es simétrica respeto del eje x_1, la integral de la ecuación (5.266) puede realizarse en la mitad de la sección y multiplicar el resultado por dos, así se tiene,

$$M_a = 2\left[\overbrace{\int_0^{x_2^y} \sigma x_2 b(x_2) dx_2}^{\text{zona elástica}} + \overbrace{\int_{x_2^y}^{\frac{h}{2}} \sigma x_2 b(x_2) dx_2}^{\text{zona plástica}} \right] \tag{5.267}$$

Por otra parte, la dimensión x_2^y del núcleo elástico puede determinarse en función de la curvatura mediante la siguiente expresión

$$x_2^y = \rho\, \varepsilon^y \tag{5.268}$$

Reemplazando las ecuaciones (5.264) y (5.268) en la ecuación (5.267) y teniendo en cuenta que en la zona plástica $\sigma = \sigma^y$ se obtiene,

$$M_a = 2\left[\int_0^{\rho\varepsilon^y} \frac{E x_2^2}{\rho} b(x_2) dx_2 + \int_{\rho\varepsilon^y}^{\frac{h}{2}} \sigma^y x_2 b(x_2) dx_2 \right] \tag{5.269}$$

$$\mathrm{M}_a = 2\left[\frac{E}{\rho}\overbrace{\int_0^{\rho\varepsilon^y} x_2^2 b(x_2)\,dx_2}^{I_1^e} + \sigma^y \overbrace{\int_{\rho\varepsilon^y}^{\frac{h}{2}} x_2 b(x_2)\,dx_2}^{S_1^p}\right] \tag{5.270}$$

$$\mathrm{M}_a = 2\left(\frac{E}{\rho} I_1^e + \sigma^y S_1^p\right) \tag{5.271}$$

donde I_1^e es el momento de inercia de la mitad del núcleo elástico (A^e) respecto del eje neutro (x_1) y S_1^p es el momento estático respecto del eje x_1 de una de las zonas plásticas (A^p) (ver Figura 5.47).

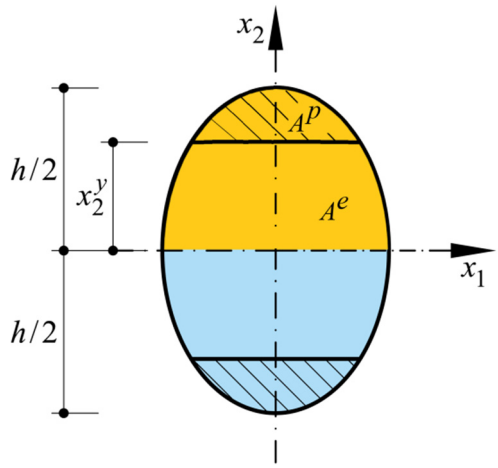


Figura 5.47 –Sección parcialmente plastificada

La curvatura ρ en la ecuación (5.278) se puede escribir, a partir de la ecuación (5.264) como,

$$\varepsilon = \frac{x_2^y}{\rho} = \frac{\sigma^y}{E} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{E\, x_2^y}{\sigma^y} \tag{5.272}$$

Sustituyendo esta última ecuación (ec. (5.272)) en la ecuación (5.271) se obtiene la siguiente expresión para el momento de plastificación parcial,

$$\mathsf{M}_a = 2\left(\frac{\cancel{E}}{\dfrac{\cancel{E}\, x_2^y}{\sigma^y}} I_1^e + \sigma^y S_1^p \right) = 2\left(\frac{\sigma^y}{x_2^y} I_1^e + \sigma^y S_1^p \right) \tag{5.273}$$

5.10.1.2 Determinación del momento plástico

Como se mencionó anteriormente, el momento plástico es aquel que hace que en la sección transversal las tensiones sean iguales a la tensión de fluencia y para el cálculo se adopta el diagrama ideal mostrado en la Figura 5.45 d. El valor de M_p puede deducirse fácilmente como un caso límite del momento M_a cuando el núcleo elástico es nulo, es decir $x_2^y = 0$ en la ecuación (5.267),

$$\mathsf{M}_p = 2\left[\overbrace{\int_0^0 \sigma x_2 b(x_2)\, dx_2}^{\text{zona elástica}=0} + \overbrace{\int_0^{\frac{h}{2}} \sigma x_2 b(x_2)\, dx_2}^{\text{zona plástica}} \right] = 2\sigma^y \overbrace{\int_0^{\frac{h}{2}} x_2 b(x_2)\, dx_2}^{S_1^p}$$

$$\mathsf{M}_p = 2\sigma^y S_1^p \tag{5.274}$$

5.10.1.3 Particularización para una sección rectangular

Sea una sección rectangular de altura h y ancho b, el *momento de plastificación parcial* puede obtenerse empleando la ecuación (5.270) o la ecuación (5.273). Tomando como referencia la sección representada en la Figura 5.48, se calculan las características geométricas necesarias. Es decir,

$$I_1^e = \frac{b\left(x_2^y\right)^3}{3}; \qquad S_1^p = b\left(\frac{h}{2} - x_2^y\right) d \tag{5.275}$$

donde d es la distancia del centro geométrico de la zona plástica A^p al eje neutro x_1 y está dada por (ver Figura 5.48),

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - x_2^y\right) + x_2^y = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - x_2^y + 2x_2^y\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + x_2^y\right) \tag{5.276}$$

Sustituyendo la distancia d dada por la ecuación (5.276) en la ecuación (5.275) se obtiene para el momento estático S_1^p la siguiente expresión,

$$S_1^p = b\left(\frac{h}{2} - x_2^y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + x_2^y\right) = \frac{1}{2}b\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(x_2^y\right)^2\right] \tag{5.277}$$

Reemplazando I_1^e dado por (5.275) y S_1^p dado por (5.277) en la ecuación (5.273), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_a &= 2\left(\frac{\sigma^y}{x_2^y}\overbrace{\frac{b\left(x_2^y\right)^3}{3}}^{I_1^e} + \sigma^y\overbrace{\frac{1}{2}b\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(x_2^y\right)^2\right]}^{S_1^p}\right) \\ &= 2\sigma^y b\left(\frac{\left(x_2^y\right)^{\not 3^2}}{\not x_2^y\, 3} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(x_2^y\right)^2\right]\right) \end{aligned} \tag{5.278}$$

Resultando,

$$\mathsf{M}_a = 2\sigma^y b\left(-\frac{\left(x_2^y\right)^2}{6} + \frac{h^2}{8}\right) \tag{5.279}$$

El *momento de fluencia* puede obtenerse empleando la ecuación (5.262)

$$\mathsf{M}_y = \frac{2\sigma^y I_1}{h} = \frac{2\sigma^y b\, h^3}{h12} = \sigma^y\frac{b\, h^2}{6} \tag{5.280}$$

La misma expresión puede obtenerse como un caso límite de la ecuación (5.279) cuando la zona plástica es nula, es decir tomando $x_2^y = h/2$. Reemplazando se obtiene,

$$\mathsf{M}_y = 2\sigma^y b\left(-\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{6}+\frac{h^2}{8}\right)=2\left(-\frac{h^2}{24}+\frac{h^2}{8}\right)=\sigma^y\frac{bh^2}{6} \tag{5.281}$$

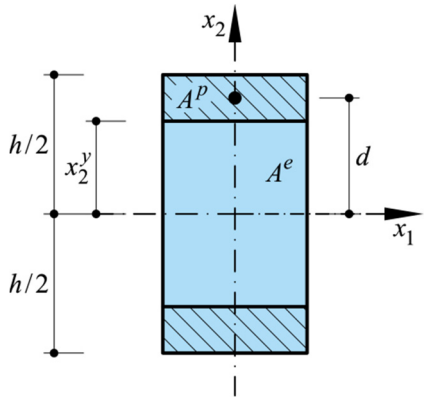


Figura 5.48 –Sección rectangular parcialmente plastificada

El *momento plástico* para la sección rectangular puede obtenerse a través de la ecuación (5.279) haciendo $x_2^y = 0$, es decir

$$\mathsf{M}_p = 2\sigma^y b\left(-\frac{(0)^2}{6}+\frac{h^2}{8}\right)=2\sigma^y b\frac{h^2}{8}=\sigma^y\frac{bh^2}{4} \tag{5.282}$$

O bien utilizando la ecuación (5.274), reemplazando en ésta el valor del momento estático de la mitad del área plastificada $A^p = b\,h/2$ con respecto al eje neutro x_1, esto es

$$S_1^p = b\frac{h}{2}\frac{h}{4}=b\frac{h^2}{8} \quad\rightarrow\quad \mathsf{M}_p = 2\sigma^y S_1^p = 2\sigma^y\frac{bh^2}{8}=\sigma^y\frac{bh^2}{4} \tag{5.283}$$

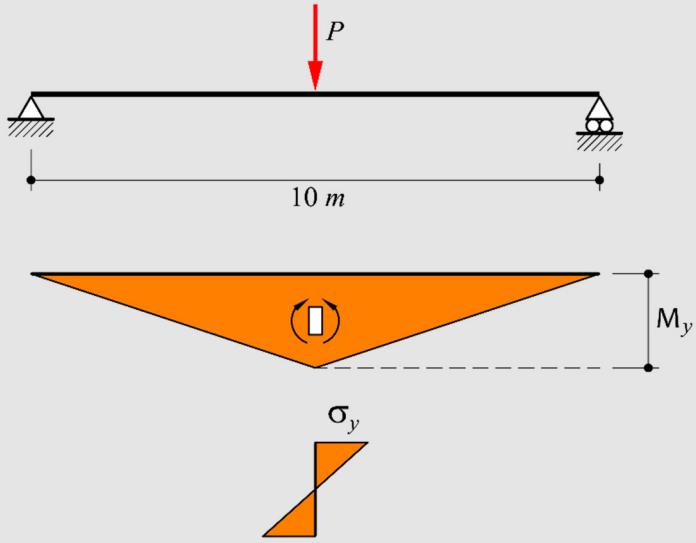
Ejemplo 5-39: La viga de sección rectangular ($h = 16.51cm$ y $b = 5.5cm$) representada en la figura, está simplemente apoyada y se encuentra sometida a la acción de una carga concentrada en el centro de la luz. Si el material de la viga posee un comportamiento elasto-plástico perfecto con $\sigma^y = 300MPa$, obtener

a) La fuerza al inicio de la plastificación (fuerza de fluencia)

b) La fuerza máxima que puede aplicarse (fuerza plástica)

c) La zona, a lo largo de la luz de la viga, que trabaja completamente en régimen elástico, cuando actúa la fuerza plástica.

d) La representación de las zonas elásticas y plásticas de la viga, a lo largo de la luz y de la altura de la sección en el caso c).



Momento flector máximo

El momento máximo, por simetría, se da en el centro de la luz,

$$\mathrm{M} = \frac{P\ell}{4}$$

a) Fuerza de fluencia P_y. Se utiliza la ecuación (5.280) (o (5.281))

$$\mathrm{M}_y = \frac{P_y \ell}{4} = \sigma^y \frac{b\,h^2}{6}$$

$$\rightarrow \quad P_y = \sigma^y \frac{b\,h^2}{6}\frac{4}{\ell} = \frac{2\sigma^y b\,h^2}{3\ell} = \frac{2\cdot 300\cdot 0.055\cdot 0.1651^2}{3\cdot 10} = 0.03MN$$

El momento de fluencia vale,

$$\mathrm{M}_y = \frac{P_y \ell}{4} = \frac{0.03 \cdot 10}{4} = 0.075 MN \cdot m$$

b) Fuerza plástica P_p . Se utiliza la ecuación (5.282) (o (5.283))

$$\mathrm{M}_p = \frac{P_p \ell}{4} = \sigma^y \frac{bh^2}{4}$$

$$\rightarrow \quad P_p = \sigma^y \frac{bh^2}{\ell} = \frac{300 \cdot 0.055 \cdot 0.1651^2}{10} = 0.045 MN$$

El momento plástico vale,

$$\mathrm{M}_p = \frac{P_p \ell}{4} = \frac{0.045 \cdot 10}{4} = 0.1125 MN \cdot m$$

c) Zona elástica cuando actúa $P_p = 0.045 MN$

En este caso las reacciones de vínculo valen $R_A = R_B = \frac{P_p}{2} = \frac{0.045}{2} = 0.0225 MN$

Teniendo en cuenta que el problema es simétrico, se analizará la mitad izquierda de la viga. Las secciones transversales permanecerán elásticas mientras el momento flector actuante en éstas no supere al momento de fluencia.

$$\mathrm{M}_y = 0.075 MN \cdot m = R_A x_3^y \quad \rightarrow \quad x_3^y = \frac{0.0225}{0.075} = 3.33 m$$

Es decir que el tramo de viga comprendido entre $0 \le x_3 < 3.33 m$ permenecerá completamente en régimen elástico cunado actúe la carga P_p . Por simetría, lo mismo ocurre para el tramo $6.66 m < x_3 \le 10 m$.

d) Zonas elásticas y plásticas cuando actúa $P_p = 0.045 MN$

- En el tramo $0 \le x_3 < 3.33 m$ las secciones de la viga se encuentran en régimen elástico.
- En la sección ubicada en $x_3 = 3.33 m$ las fibras más alejadas de la sección alcanzan la tensión de fluencia, actuando en esta sección el momento $\mathrm{M}_y = 0.075 MN \cdot m$.

• La sección ubicada en $x_3 = \ell / 2 = 5m$ se encuentra totalmente plastificada, actuando allí el momento plástico $\mathrm{M}_p = 0.1125 MN \cdot m$.

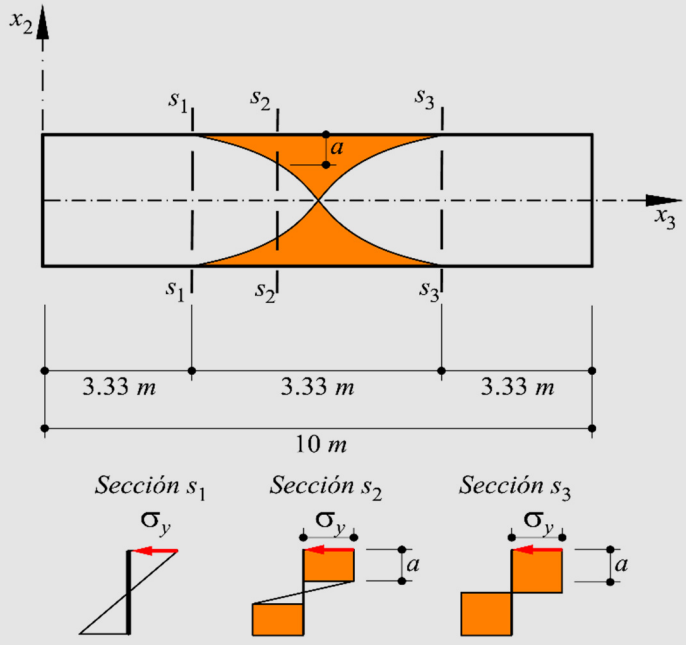
• En el tramo de viga $3.33m < x_3 < 5m$ las secciones se encuentran parcialmente plastificadas. La altura del núcleo elástico disminuye de manera continua desde la sección ubicada en $x_3 = 3.33m$ donde $x_2^y = h/2$ hasta $x_3 = \ell / 2 = 5m$ donde $x_2^y = 0$. Así, en el tramo $3.33m < x_3 < 5m$ actúa un momento de plastificación parcial dado por la ecuación (5.279), es decir,

$$\mathrm{M}_a = R_A x_3 = 2\sigma^y b\left(-\frac{\left(x_2^y\right)^2}{6}+\frac{h^2}{8}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{P_p}{2}x_3 = 2\sigma^y b\left(-\frac{\left(x_2^y\right)^2}{6}+\frac{h^2}{8}\right)$$

Despejando de la ecuación anterior x_2^y se obtiene,

$$x_2^y = \pm\sqrt{6\left(\frac{h^2}{8}-\frac{P_p x_3}{4\sigma^y b}\right)} = \pm\sqrt{6\left(\frac{0.1651^2}{8}-\frac{0.045\cdot x_3}{4\cdot 300\cdot 0.055}\right)}$$

$$x_2^y = \pm\sqrt{0.02044 - 0.00409\cdot x_3} \quad \rightarrow \quad a = h/2 - x_2^y$$



5.11 Resumen de la formulación básica obtenida en el capítulo

Flexión Pura Recta		
Relación geométrica	$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{dx_3}=\kappa \quad ; \quad du_3(x_2)=x_2\,d\varphi$	(5.7); (5.9)
Relación de compatibilidad	$\varepsilon_3(x_2)=\frac{du_3(x_2)}{dx_3}=x_2\frac{d\varphi}{dx_3}=\frac{x_2}{\rho}$	(5.10)
Ley constitutiva elástica	$\sigma_3=E\varepsilon_3=\frac{Ex_2}{\rho}$	(5.13)
Equilibrio y curvatura	$\kappa=\frac{1}{\rho}=\frac{M_1}{EI_1}=\frac{d\varphi}{dx_3}$	(5.20)
Ecuación de Navier	$\sigma=\frac{M_1}{I_1}x_2 \quad ; \quad \lvert\sigma\rvert^{\max}=\frac{M_1}{\left(\frac{I_1}{x_2^{\max}}\right)}=\frac{M_1}{W_1}$	(5.21) (5.22)
Rendimiento de una sección	$\eta=\frac{W_1}{W_1^{\text{ideal}}}=\frac{2}{Ah}W_1$	(5.29)
Ecuación elástica de Bernoulli	$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{ds}=\frac{M_1}{EI_1}=-\frac{d^2u_2}{dx_3^2}$	(5.32) (5.42)
Energía de deformación por flexión	$W^c=\int_\ell\frac{M_1^2}{2EI_1}dx_3=\int_\ell M_1\,d\varphi$	(5.50)
Flexión Pura Esviada		
Estad de tensión en un punto	$\sigma=\lvert M\rvert\left(\frac{x_2}{I_1}\cos\alpha'-\frac{x_1}{I_2}\operatorname{sen}\alpha'\right)$	(5.55)
Ecuación del eje neutro	$x_2^n=x_1^n\left(\frac{I_1}{I_2}\right)\operatorname{tg}\alpha'$	(5.58)
Ecuación de la curvatura	$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{dx_3}\equiv\frac{M}{E}\sqrt{\left(\frac{\cos\alpha'}{I_1}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{I_2}\right)^2}$	(5.64)

Estado tensional referido al eje neutro	$$\sigma_3 = \frac{\mathrm{M}}{\left(\frac{I_{nn}}{\cos(\alpha-\theta)}\right)}\xi = \frac{\mathrm{M}}{I^*_{nn}}\xi$$	(5.73)
Ecuación de la curvatura referida al eje neutro	$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx_3} = \frac{M}{EI^*_{nn}} \quad \text{con} \quad I^*_{nn} = \frac{I_{nn}}{\cos(\alpha-\theta)}$$	(5.74)
Flexión Compuesta Recta		
Esta de tensión en un punto	$$\sigma = \sigma^{\mathrm{N}} + \sigma^{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{N}}{A} + \frac{\mathrm{M}_1}{I_1}x_2 = \frac{\mathrm{N}}{A}\left(1 + \frac{e_2}{i_1^2}x_2\right)$$	(5.94) (5.96)
Ecuación del eje neutro	$$x_2^n = -\frac{i_1^2}{e_2}$$	(5.98)
Límite del núcleo central	$$e_2^{\lim} = -\frac{i_1^2}{x_2^{\max}}$$	(5.100)
Flexión Compuesta Esviada		
Estado de tensión en un punto	$$\sigma = \frac{\mathrm{N}}{A} + \frac{\mathrm{M}_1}{I_1}x_2 - \frac{\mathrm{M}_2}{I_2}x_1 = \frac{\mathrm{N}}{A}\left(1 + \frac{e_2}{i_1^2}x_2 + \frac{e_1}{i_2^2}x_1\right)$$	(5.103) (5.104)
Ecuación del eje neutro	$$x_2^n = -\underbrace{\left(\frac{i_1^2}{e_2}\right)}_{c} - \left(\frac{e_1}{e_2}\frac{i_1^2}{i_2^2}\right)x_1^n$$	(5.106)
Ecuación del núcleo central	$$1 + e_2\frac{x_2^n}{i_1^2} + e_1\frac{x_1^n}{i_2^2} = 0$$	(5.109)
Flexión Compuesta en Materiales Compuestos		
Para Materiales con Compatibilidad de deformación.	$$\varepsilon^{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{N}}{\sum_{i=1}^{N} E_i A_i}; \qquad \varepsilon^{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M}}{\sum_{i=1}^{N} E_i I_1^i}x_2$$	(5.140)

Estado de deformación y tensión	$\left(\sigma^{i}\right)^{\mathsf{N}} = E_i \varepsilon^{\mathsf{N}} = \dfrac{E_i}{\sum_{j=1}^{N} E_j A_j}\mathsf{N}$; $\left(\sigma^{i}\right)^{\mathsf{M}} = E_i \varepsilon^{\mathsf{M}} = \dfrac{E_i}{\sum_{j=1}^{N} E_j I_1^j}\mathsf{M}\, x_2$	(5.141)
Postesado: Materiales sin Compatibilidad de deformación. Estado de deformación y tensión	$\varepsilon_h^{\mathsf{N}} = -\dfrac{\sum \varepsilon_a^{\mathsf{N}} E_a A_a}{E_h A_h}$;	(5.146)
	$\varepsilon_h^{\mathsf{M}} = \dfrac{x_2}{\rho} = -\dfrac{\sum \overbrace{\varepsilon_a^{\mathsf{N}} E_a A_a}^{\mathsf{N}_a} e_a}{E_h I_1^h} x_2 = -\dfrac{\sum \mathsf{M}_a}{E_h I_1^h} x_2$	(5.153)
	$\sigma_h^{\mathsf{N}} = E_h \varepsilon_h^{\mathsf{N}} = -\dfrac{\sum \varepsilon_a^{\mathsf{N}} E_a A_a}{A_h}$	(5.147)
	$\sigma_h^{\mathsf{M}} = E_h \varepsilon_h^{\mathsf{M}} = -\dfrac{\sum \varepsilon_a^{\mathsf{N}} E_a A_a e_a}{I_1^h} x_2 = -\dfrac{\sum \mathsf{N}_a e_a}{I_1^h} x_2$	(5.154)
	$\sigma_a = \sigma_a^{\mathsf{N}} = -\dfrac{\mathsf{N}_a}{A_a}$	(5.156)
Postesado sobre un material compuesto de base. Estado de deformación y tensión	$\Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}} = -\dfrac{\sum \overbrace{\varepsilon_a^{\mathsf{N}*} E_a^* A_a^*}^{\mathsf{N}_a^*}}{\sum E_a A_a + E_h A_h}$	(5.160)
	$\Delta\varepsilon_m^{\mathsf{M}} = \dfrac{x_2}{\Delta\rho} = -\dfrac{\sum \overbrace{\mathsf{N}_a^* e_a^*}^{\mathsf{M}_a^*}}{E_h I_1^h + \sum E_a I_1^a} x_2$	(5.168)
	$\sigma_a^{\mathsf{N}*} = E_a^* \left(\varepsilon_a^{\mathsf{N}*}\right)_i \qquad \Delta\sigma_a^{\mathsf{N}} = E_a \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}}$ $\Delta\sigma_h^{\mathsf{N}} = E_h \Delta\varepsilon_m^{\mathsf{N}}$	(5.162) , (5.163) (5.169), (5.170)

	$\sigma_a^{N*} = E_a^* \left(\varepsilon_a^{N*}\right)_i = \dfrac{N_a^*}{A_a^*} \qquad \Delta\sigma_a^M = E_a \Delta\varepsilon_m^M$ y $\Delta\sigma_h^M = E_h \Delta\varepsilon_m^M$	
Superposición final	$\sigma_h = \left(\sigma_h^N + \sigma_h^f\right) + \left(\Delta\sigma_h^N + \Delta\sigma_h^f\right)$ $= \left(-\dfrac{\sum N_a}{A_h} - \dfrac{\sum N_a e_a}{I_1^h} x_2\right) + \left(-\dfrac{E_h \sum N_a^*}{\sum E_a A_a + E_h A_h} - \dfrac{E_h \sum N_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a I_1^a} x_2\right)$	(5.176)
	$\sigma_a = \left(\sigma_a^N\right) + \left(\Delta\sigma_a^N + \Delta\sigma_a^M\right)$ $= \dfrac{N_a}{A_a} + \left(-\dfrac{E_a \sum N_a^*}{\sum E_a A_a + E_h A_h} - \dfrac{E_a \sum N_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a I_1^a} x_2\right)$	(5.177)
	$\sigma_a^{N*} = \dfrac{N_a^*}{A_a^*}$	(5.178)
Pretensado con Adherencia	$\varepsilon_a^{N*} = \dfrac{N_a^*}{E_a^* A_a^*}$	(5.181)
	$\Delta\varepsilon_m^N = -\dfrac{\sum N_a^*}{\sum E_a^* A_a^* + E_h A_h}$	(5.184)
	$\Delta\varepsilon_m^M = \dfrac{x_2}{\Delta\rho} = -\dfrac{\sum N_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a^* I_1^{a*}} x_2$	(5.190)
	$\Delta\sigma_a^{N*} = E_a^* \Delta\varepsilon_m^N$ y $\Delta\sigma_h^{N*} = E_h \Delta\varepsilon_m^N$	(5.185) (5.186)
	$\Delta\sigma_a^{M*} = E_a^* \Delta\varepsilon_m^M \qquad \Delta\sigma_h^{M*} = E_h^* \Delta\varepsilon_m^M$	(5.191) (5.192)

Superposición de estados tensionales	$\Delta\sigma_h = \Delta\sigma_h^{N^*} + \Delta\sigma_h^{M^*} = E_h\Delta\varepsilon_m^N + E_h\Delta\varepsilon_m^M$ $= -\frac{E_h\sum N_a^*}{E_h A_h + \sum E_a^* A_a^*} - \frac{E_h\sum N_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a^* I_1^{a^*}} x_2$	(5.193)
	$\Delta\sigma_a^* = \Delta\sigma_a^{N^*} + \Delta\sigma_a^{M^*} = E_a^*\Delta\varepsilon_m^N + E_a^*\Delta\varepsilon_m^M$ $= -\frac{E_a^*\sum N_a^*}{E_h A_h + \sum E_a^* A_a^*} - \frac{E_a^*\sum N_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a^* I_1^{a^*}} e_a^*$	(5.194)
Estado final de tensiones	$\sigma_h = (0) + \left(\Delta\sigma_h^{N^*} + \Delta\sigma_h^{M^*}\right)$ $= -\frac{E_h\sum N_a^*}{E_h A_h + \sum E_a^* A_a^*} - \frac{E_h\sum N_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a^* I_1^{a^*}} x_2$	(5.195)
	$\sigma_a^* = \left(\sigma_a^*\right)^0 + \left(\Delta\sigma_a^{N^*} + \Delta\sigma_a^{M^*}\right)$ $= \underbrace{\frac{N_a^*}{A_a^*}}_{E_a^*\varepsilon_a^{N^*}} + \left(-\frac{E_a^*\sum N_a^*}{E_h A_h + \sum E_a^* A_a^*} - \frac{E_a^*\sum N_a^* e_a^*}{E_h I_1^h + \sum E_a^* I_1^{a^*}} e_a^*\right)$	(5.196)

ANEXO – Capítulo 5

Tablas Complementarias: Ejemplos de Flexión

En este Anexo se presentan las *Tablas Complementarias* con el detalle de las operaciones realizadas en cada celda de aquellas que se utilizan para obtener los resultados que se muestran en los ejemplos del Capítulo 5 de este libro.

Para mayor claridad se ordenan y designan a las diferentes tablas con el número del ejemplo al que se hace referencia en el Capítulo 5.

Ejemplo 5-6

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [cm]	y [cm]	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi$	$x_2 = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$	$\sigma(x_1, x_2) = M\left[(\cos\alpha' / I_2)x_2 - (\mathrm{sen}\,\alpha' / I_2)x_1\right]$
2	A	-90	-40	=B2*COS($D$14)+C2*SIN($D$14)	=B2*(-SIN($D$14))+C2*COS($D$14)	=$C$16*(COS($D$15)/$C$17*E2-SIN($D$15)/$C$18*D2)
3	B	-90	-60	=B3*COS($D$14)+C3*SIN($D$14)	=B3*(-SIN($D$14))+C3*COS($D$14)	=$C$16*(COS($D$15)/$C$17*E3-SIN($D$15)/$C$18*D3)
4	C	-10	-40	=B4*COS($D$14)+C4*SIN($D$14)	=B4*(-SIN($D$14))+C4*COS($D$14)	=$C$16*(COS($D$15)/$C$17*E4-SIN($D$15)/$C$18*D4)
5	D	-10	-60	=B5*COS($D$14)+C5*SIN($D$14)	=B5*(-SIN($D$14))+C5*COS($D$14)	=$C$16*(COS($D$15)/$C$17*E5-SIN($D$15)/$C$18*D5)
6	E	10	-60	=B6*COS($D$14)+C6*SIN($D$14)	=B6*(-SIN($D$14))+C6*COS($D$14)	=$C$16*(COS($D$15)/$C$17*E6-SIN($D$15)/$C$18*D6)
7	F	-10	60	=B7*COS($D$14)+C7*SIN($D$14)	=B7*(-SIN($D$14))+C7*COS($D$14)	=$C$16*(COS($D$15)/$C$17*E7-SIN($D$15)/$C$18*D7)
8	G	10	60	=B8*COS($D$14)+C8*SIN($D$14)	=B8*(-SIN($D$14))+C8*COS($D$14)	=$C$16*(COS($D$15)/$C$17*E8-SIN($D$15)/$C$18*D8)
9	H	10	40	=B9*COS($D$14)+C9*SIN($D$14)	=B9*(-SIN($D$14))+C9*COS($D$14)	=$C$16*(COS($D$15)/$C$17*E9-SIN($D$15)/$C$18*D9)
10	I	90	60	=B10*COS($D$14)+C10*SIN($D$14)	=B10*(-SIN($D$14))+C10*COS($D$14)	=$C$16*(COS($D$15)/$C$17*E10-SIN($D$15)/$C$18*D10)
11	J	90	40	=B11*COS($D$14)+C11*SIN($D$14)	=B11*(-SIN($D$14))+C11*COS($D$14)	=$C$16*(COS($D$15)/$C$17*E11-SIN($D$15)/$C$18*D11)
12						
13			grados	radianes		
14	**ángulos**	φ	-42.86	=C14*PI()/180		
15		α'	87.86	=C15*PI()/180		
16	**Momento Flector**	M	100000	kN.cm		
17	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	18410000	cm^4		
18		I_2	2364000	cm^4		

Ejemplo 5-7

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [cm]	y [cm]	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi$	$x_2 = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$	$\sigma(x_1, x_2) = M\left[\left(\cos\alpha' / I_1\right) x_2 - \left(\mathrm{sen}\,\alpha' / I_2\right) x_1\right]$
2	A	-9	10	=B2*COS($D$8)+C2*SIN($D$8)	=B2*(-SIN($D$8))+C2*COS($D$8)	=$C$10*(COS($D$9)/$C$11*E2-SIN($D$9)/$C$12*D2)
3	B	0	10	=B3*COS($D$8)+C3*SIN($D$8)	=B3*(-SIN($D$8))+C3*COS($D$8)	=$C$10*(COS($D$9)/$C$11*E3-SIN($D$9)/$C$12*D3)
4	C	0	-10	=B4*COS($D$8)+C4*SIN($D$8)	=B4*(-SIN($D$8))+C4*COS($D$8)	=$C$10*(COS($D$9)/$C$11*E4-SIN($D$9)/$C$12*D4)
5	D	9	-10	=B5*COS($D$8)+C5*SIN($D$8)	=B5*(-SIN($D$8))+C5*COS($D$8)	=$C$10*(COS($D$9)/$C$11*E5-SIN($D$9)/$C$12*D5)
6						
7			grados	radianes		
8	**ángulos**	φ	19.642	=C8*PI()/180		
9		α'	340.358	=C9*PI()/180		
10	**Momento Flector**	M	400	kN.cm		
11	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	4139	cm^4		
12		I_2	301	cm^4		

Ejemplo 5-8

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [m]	y [m]	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi$	$x_2 = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$	$\sigma / M = (\cos\alpha' / I_1)\,x_2 - (\mathrm{sen}\,\alpha' / I_2)\,x_1$
2	A	-0.01225	0.04225	=B2*COS($D$7)+C2*SIN($D$7)	=B2*(-SIN($D$7))+C2*COS($D$7)	=COS($D$8)/$C$9*E2-SIN($D$8)/$C$10*D2
3	B	0.0578	0.04225	=B3*COS($D$7)+C3*SIN($D$7)	=B3*(-SIN($D$7))+C3*COS($D$7)	=COS($D$8)/$C$9*E3-SIN($D$8)/$C$10*D3
4	C	-0.01225	-0.08775	=B4*COS($D$7)+C4*SIN($D$7)	=B4*(-SIN($D$7))+C4*COS($D$7)	=COS($D$8)/$C$9*E4-SIN($D$8)/$C$10*D4
5						
6			grados	radianes		
7	**ángulos**	φ	-17.714	=C7*PI()/180		
8		α'	197.714	=C8*PI()/180		
9	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	0.000006125	m^4		
10		I_2	0.000000768	m^4		

Ejemplo 5-9

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [cm]	y [cm]	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi$	$x_2 = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$	$\sigma(x_1, x_2) = M\left[\left(\cos\alpha' / I_1\right)x_2 - \left(\mathrm{sen}\,\alpha' / I_2\right)x_1\right]$
2	A	-9	10	=B2*COS($D$8)+C2*SIN($D$8)	=B2*(-SIN($D$8))+C2*COS($D$8)	=$C$10*(COS($D$9)/$C$11*E2-SIN($D$9)/$C$12*D2)
3	B	0	10	=B3*COS($D$8)+C3*SIN($D$8)	=B3*(-SIN($D$8))+C3*COS($D$8)	=$C$10*(COS($D$9)/$C$11*E3-SIN($D$9)/$C$12*D3)
4	C	0	-10	=B4*COS($D$8)+C4*SIN($D$8)	=B4*(-SIN($D$8))+C4*COS($D$8)	=$C$10*(COS($D$9)/$C$11*E4-SIN($D$9)/$C$12*D4)
5	D	9	-10	=B5*COS($D$8)+C5*SIN($D$8)	=B5*(-SIN($D$8))+C5*COS($D$8)	=$C$10*(COS($D$9)/$C$11*E5-SIN($D$9)/$C$12*D5)
6						
7			grados	radianes		
8	**ángulos**	φ	19.642	=C8*PI()/180		
9		α'	10.358	=C9*PI()/180		
10	**Momento Flector**	M	2000	kN.cm		
11	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	4139	cm^4		
12		I_2	301	cm^4		

Ejemplo 5-10

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [m]	y [m]	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi$	$x_2 = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$	$\sigma(x_1, x_2) = M\left[\left(\cos\alpha'/I_1\right)x_2 - \left(\mathrm{sen}\,\alpha'/I_2\right)x_1\right]$
2	A	=0-B6	=0.2-B7	=B2*COS($D$9)+C2*SIN($D$9)	=B2*(-SIN($D$9))+C2*COS($D$9)	=$C$11*(COS($D$10)/$C$12*E2-SIN($D$10)/$C$13*D2)
3	B	=0-B6	=0-B7	=B3*COS($D$9)+C3*SIN($D$9)	=B3*(-SIN($D$9))+C3*COS($D$9)	=$C$11*(COS($D$10)/$C$12*E3-SIN($D$10)/$C$13*D3)
4	C	=0.15-B6	=0-B7	=B4*COS($D$9)+C4*SIN($D$9)	=B4*(-SIN($D$9))+C4*COS($D$9)	=$C$11*(COS($D$10)/$C$12*E4-SIN($D$10)/$C$13*D4)
5						
6	x_{CG}	0.032				
7	y_{CG}	0.057				
8			grados	radianes		
9	**ángulos**	φ	29.706	=C9*PI()/180		
10		α'	330.294	=C10*PI()/180		
11	**Momento Flector**	M	5000	KN.m		
12	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	0.00001892	m^4		
13		I_2	0.00000398	m^4		

Ejemplo 5-11

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [m]	y [m]	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi$	$x_2 = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$	$\sigma(x_1, x_2) = M\left[\left(\cos\alpha' / I_1\right)x_2 - \left(\mathrm{sen}\,\alpha' / I_2\right)x_1\right]$
2	A	=0-B8	=0-B9	=B2*COS($D$11)+C2*SIN($D$11)	=B2*(-SIN($D$11))+C2*COS($D$11)	=$C$13*(COS($D$12)/$C$14*E2-SIN($D$12)/$C$15*D2)
3	B	=0-B8	=0-B9	=B3*COS($D$11)+C3*SIN($D$11)	=B3*(-SIN($D$11))+C3*COS($D$11)	=$C$13*(COS($D$12)/$C$14*E3-SIN($D$12)/$C$15*D3)
4	C	=0.3-B8	=0.2-B9	=B4*COS($D$11)+C4*SIN($D$11)	=B4*(-SIN($D$11))+C4*COS($D$11)	=$C$13*(COS($D$12)/$C$14*E4-SIN($D$12)/$C$15*D4)
5	D	=0-B8	=0.2-B9	=B5*COS($D$11)+C5*SIN($D$11)	=B5*(-SIN($D$11))+C5*COS($D$11)	=$C$13*(COS($D$12)/$C$14*E5-SIN($D$12)/$C$15*D5)
6	E	=0-B8	=0-B9	=B6*COS($D$11)+C6*SIN($D$11)	=B6*(-SIN($D$11))+C6*COS($D$11)	=$C$13*(COS($D$12)/$C$14*E6-SIN($D$12)/$C$15*D6)
7						
8		x_{CG} 0.1607				
9		y_{CG} 0.11429				
10			grados	radianes		
11	**ángulos**	φ	83.105	=C11*PI()/180		
12		α'	276.895	=C12*PI()/180		
13	**Momento Flector**	M	900	kN.m		
14	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	0.0001692	m^4		
15		I_2	0.00006134	m^4		

Ejemplo 5-13

	A	B	C	D
1	**Punto**	x [cm]	y [cm]	$\sigma = M_x / \hat{I}\left(I_{yy} y - I_{xy} x\right)$
2	A	-9	10	=$C$8/$C$12*($C$10*C2-$C$11*B2)
3	B	0	10	=$C$8/$C$12*($C$10*C3-$C$11*B3)
4	C	0	-10	=$C$8/$C$12*($C$10*C4-$C$11*B4)
5	D	9	-10	=$C$8/$C$12*($C$10*C5-$C$11*B5)
6				
7				
8	**Momento Flector**	M_x	400	kN.cm
9	**Momentos de inercia**	I_{xx}	3705	cm^4
10		I_{yy}	734	cm^4
11		I_{xy}	-1215	cm^4
12		$\hat{I}$	=C9*C10-C11^2	cm^4

Ejemplo 5-14

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [cm]	y [cm]	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi$	$x_2 = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$	$\sigma(x_1,x_2) = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_1}{i_1^2}x_2 + \frac{e_1}{i_2^2}x_1\right)$
2	A	-1.225	4.225	=B2*COS($D$9)+C2*SIN($D$9)	=B2*(-SIN($D$9))+C2*COS($D$9)	=$C$10/$C$11*(1+$E$6/$C$14*E2+$D$6/$C$15*D2)
3	B	5.775	4.225	=B3*COS($D$9)+C3*SIN($D$9)	=B3*(-SIN($D$9))+C3*COS($D$9)	=$C$10/$C$11*(1+$E$6/$C$14*E3+$D$6/$C$15*D3)
4	C	-1.225	-8.775	=B4*COS($D$9)+C4*SIN($D$9)	=B4*(-SIN($D$9))+C4*COS($D$9)	=$C$10/$C$11*(1+$E$6/$C$14*E4+$D$6/$C$15*D4)
5	**Excentrici-**	e_x [cm]	e_y [cm]	$e_1 = e_x\cos\varphi + e_y\,\mathrm{sen}\,\varphi$	$e_2 = -e_x\,\mathrm{sen}\,\varphi + e_y\cos\varphi$	
6	**dades**	-1.225	4.225	=B6*COS($D$9)+C6*SIN($D$9)	=B6*(-SIN($D$9))+C6*COS($D$9)	
7						
8			grados	radianes		
9	**Ángulo**	φ	-17.714	=C9*PI()/180		
10	**Normal**	N	-500	kN		
11	**Área**	A	30	cm^2		
12	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	612.57	cm^4		
13		I_2	76.88	cm^4		
14	**Radios de giro**	$i_1^2 = I_1 / A$	=C12/C11	cm^2		
15		$i_2^2 = I_2 / A$	=C13/C11	cm^2		

Ejemplo 5-15a

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [m]	y [m]	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi$	$x_2 = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$	$\sigma(x_1,x_2) = M\left[\left(\cos\alpha'/I_1\right)x_2 - \left(\mathrm{sen}\,\alpha'/I_2\right)x_1\right]$
2	A	-0.01225	0.04225	=B2*COS($D$7)+C2*SIN($D$7)	=B2*(-SIN($D$7))+C2*COS($D$7)	=$C$9*(COS($D$8)/$C$10*E2-SIN($D$8)/$C$11*D2)
3	B	0.05775	0.04225	=B3*COS($D$7)+C3*SIN($D$7)	=B3*(-SIN($D$7))+C3*COS($D$7)	=$C$9*(COS($D$8)/$C$10*E3-SIN($D$8)/$C$11*D3)
4	C	-0.01225	-0.08775	=B4*COS($D$7)+C4*SIN($D$7)	=B4*(-SIN($D$7))+C4*COS($D$7)	=$C$9*(COS($D$8)/$C$10*E4-SIN($D$8)/$C$11*D4)
5						
6			grados	radianes		
7	**Ángulos**	φ	-17.714	=C7*PI()/180		
8		α'	197.714	=C8*PI()/180		
9	**Momento**	M	2.5	kNm		
10	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	0.000006125	m^4		
11		I_2	0.000000768	m^4		

Ejemplo 5-15b

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Punto**	x [m]	y [m]	x_1 [m]	x_2 [m]	σ [kPa] (P/A)	σ [kPa] (M)	σ [kPa]
2	A	-0.01225	0.04225	-0.024524424111229 4	0.036519551229616	=$C$10/$C$11	-38489.3896223582	=F2+G2
3	B	0.05775	0.04225	0.042156677335430 9	0.057818159396822 5	=$C$10/$C$11	19273.6835225978	=F3+G3
4	C	-0.01225	-0.08775	0.015030133913582 5	-0.087316780028467 5	=$C$10/$C$11	48836.3082914599	=F4+G4
5								
6			grados	radianes				
7	**Ángulos**	φ	-17.714	=C7*PI()/180				
8		α'	197.714	=C8*PI()/180				
9	**Momento**	M	2.5	kNm				
10	**Normal**	P	-146.5089	kN				
11	**Área**	A	0.003	m^2				
12	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	0.000006125	m^4				
13		I_2	0.000000768	m^4				

Ejemplo 5-16

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x_1 [m]	x_2 [m]	$-P/A$	$-(M_2/I_2)x_1$	σ [MPa]
2	A	=0.15-0.045	=0.2-0.1	=$C$8/$C$9	=$C$7/$C$11*B2	=D2+E2
3	B	=0-0.045	=0.2-0.1	=$C$8/$C$9	=$C$7/$C$11*B3	=D3+E3
4	C	=0-0.045	=0-0.1	=$C$8/$C$9	=$C$7/$C$11*B4	=D4+E4
5	D	=0.15-0.045	=0-0.1	=$C$8/$C$9	=$C$7/$C$11*B5	=D5+E5
6						
7	**Momento**	M	-0.05	MNm		
8	**Normal**	N	-0.909458	MN		
9	**Área**	A	0.005	m^2		
10	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	0.00003666	m^4		
11		I_2	0.00001237	m^4		

Ejemplo 5-17

	A	B	C	D
1	**Punto**	x_2 [m]	$\sigma = \frac{P}{A}\left(1+\frac{e_2}{i_1^2}x_2\right)$	
2	A	=0.143-0.1223	=$C$8/$C$9*(1+$B$6/$C$11*B2)	
3	B	=0.143-0.1223	=$C$8/$C$9*(1+$B$6/$C$11*B3)	
4	C	=0-0.1223	=$C$8/$C$9*(1+$B$6/$C$11*B4)	
5	**Excentricidad**	e_2 [m]		
6		=0.143-0.1223		
7				
8	**Normal**	$N = P$	-0.18399	MN
9	**Área**	A	0.0039	m^2
10	**Momento principal de inercia**	I_1	0.0000061472	m^4
11	**Radio de giro**	i_1^2	=C10/C9	m^2

Ejemplo 5-22

	A	B	C	D
1	**Punto**	x_1 [m]	$\sigma(x_1)=\frac{N}{A}\left(1+\frac{e_1}{i_2^2}x_1\right)$	
2	A	=0.15-0.045	=$C$9/$C$10*(1+$B$7/$C$12*B2)	
3	B	=0-0.045	=$C$9/$C$10*(1+$B$7/$C$12*B3)	
4	C	=0-0.045	=$C$9/$C$10*(1+$B$7/$C$12*B4)	
5	D	=0.15-0.045	=$C$9/$C$10*(1+$B$7/$C$12*B5)	
6	**Excentricidad**	e_1 [m]		
7		=0.1		
8				
9	**Normal**	N	-0.5	MN
10	**Área**	A	0.005	m^2
11	**Momento principal de inercia**	I_2	0.00001237	m^4
12	**Radio de giro**	i_2^2	=C11/C10	m^2

Ejemplo 5-23a

	A	B	C	D
1	**Punto**	x_1 [m]	x_2 [m]	$\frac{\sigma(x_1,x_2)}{N}=\frac{1}{A}\left(1+\frac{e_2}{i_1^2}x_2+\frac{e_1}{i_2^2}x_1\right)$
2	A	0.0207	0.1	=1/$C$9*(1+$C$7/$C$12*C2+$B$7/$C$13*B2)
3	B	0.0207	-0.1	=1/$C$9*(1+$C$7/$C$12*C3+$B$7/$C$13*B3)
4	C	-0.1223	0	=1/$C$9*(1+$C$7/$C$12*C4+$B$7/$C$13*B4)
5	D	0.0207	0	=1/$C$9*(1+$C$7/$C$12*C5+$B$7/$C$13*B5)
6	**Excentrici-dades**	e_1 [m]	e_2 [m]	
7		0.0207	0.1	
8				
9	**Área**	A	0.0039	m^2
10	**Momentos de Inercia**	I_1	0.000009339	m^4
11		I_2	0.0000061472	m^4
12	**Radios de giro**	i_1^2	=C10/C9	m^2
13		i_2^2	=C11/C9	m^2

Ejemplo 5-23b

	A	B	C	D	E
1	**Punto**	x_1 [m]	x_2 [m]	σ/N	$\left[\frac{\sigma(x_1,x_2)}{N}\right]\cdot N$
2	A	0.0207	0.1	1396.894	=D2*$C$14
3	B	0.0207	-0.1	-744.663	=D3*$C$14
4	C	-0.1223	0	-155.421	=D4*$C$14
5	D	0.0207	0	326.115	=D5*$C$14
6	**Excentrici-dades**	e_1 [m]	e_2 [m]		
7		0.0207	0.1		
8					
9	**Área**	A	0.0039	m^2	
10	**Momentos de Inercia**	I_1	0.000009339	m^4	
11		I_2	0.0000061472	m^4	
12	**Radios de giro**	i_1^2	=C10/C9	m^2	
13		i_2^2	=C11/C9	m^2	
14	**Normal**	N	=250000/D2	KN	

Ejemplo 5-24a

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [m]	y [m]	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\text{sen}\,\varphi$	$x_2 = -x\,\text{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$	$\sigma(x_1,x_2) = \frac{N}{A}\left(1+\frac{e_2}{i_1^2}x_2+\frac{e_1}{i_2^2}x_1\right)$
2	B	=0.3-B9	=1-B10	=B2*COS($D$12)+C2*SIN($D$12)	=B2*(-SIN($D$12))+C2*COS($D$12)	=$C$13/$C$14*(1+$E$7/$C$17*E2+$D$7/$C$18*D2)
3	C	=0-B9	=1-B10	=B3*COS($D$12)+C3*SIN($D$12)	=B3*(-SIN($D$12))+C3*COS($D$12)	=$C$13/$C$14*(1+$E$7/$C$17*E3+$D$7/$C$18*D3)
4	A	=0-B9	=0-B10	=B4*COS($D$12)+C4*SIN($D$12)	=B4*(-SIN($D$12))+C4*COS($D$12)	=$C$13/$C$14*(1+$E$7/$C$17*E4+$D$7/$C$18*D4)
5	D	=0.7-B9	=0-B10	=B5*COS($D$12)+C5*SIN($D$12)	=B5*(-SIN($D$12))+C5*COS($D$12)	=$C$13/$C$14*(1+$E$7/$C$17*E5+$D$7/$C$18*D5)
6	**Excen-**	e_x	e_y	$e_1 = e_x\cos\varphi + e_y\,\text{sen}\,\varphi$	$e_2 = -e_x\,\text{sen}\,\varphi + e_y\cos\varphi$	
7	**tricidades**	-0.15	-0.405	=B7*COS($D$12)+C7*SIN($D$12)	=B7*(-SIN($D$12))+C7*COS($D$12)	
8						
9	x_{CG}	0.15				
10	y_{CG}	0.405				
11			grados	radianes		
12	**Ángulo**	φ	15.725	=C12*PI()/180		
13	**Normal**	N	-150	kN		
14	**Área**	A	0.02	m^2		
15	**Mom.**	I_1	0.00333358	m^4		
16	**de Inercia**	I_2	0.00061192	m^4		
17	**Radios de**	i_1^2	=C15/C14	m^2		
18	**giro**	i_2^2	=C16/C14	m^2		

Ejemplo 5-24b

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Punto	x^{xy} [m]	y^{xy} [m]	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\text{sen}\varphi$	$x_2 = -x\,\text{sen}\varphi + y\cos\varphi$	$e_1^{ij} = \frac{\xi_i^j (x_j^1 - x_i^1)}{x_1^1 x_2^1 - x_2^1 x_1^1}$	$e_2^{ij} = -\frac{\xi_i^j (x_j^1 - x_i^1)}{x_1^1 x_2^1 - x_2^1 x_1^1}$	$e_x^{ij} = e_1^{ij}\cos\varphi - e_2^{ij}\,\text{sen}\varphi$	$e_y^{ij} = e_1^{ij}\,\text{sen}\varphi + e_2^{ij}\cos\varphi$
2	B	0.15	0.595	=C2*COS(SDS12)+D2*SIN(SDS12)	=C2*(-SIN(SDS12))+D2*COS(SDS12)				
3	C	-0.15	0.595	=C3*COS(SDS12)+D3*SIN(SDS12)	=C3*(-SIN(SDS12))+D3*COS(SDS12)	=SCS17*(F2-F3)/(E2*F3-E3*F2)	=-SCS16*(E2-E3)/(E2*F3-E3*F2)	=G2*COS(SDS12)-H2*SIN(SDS12)	=G2*SIN(SDS12)+H2*COS(SDS12)
4	C	-0.15	0.595	=C4*COS(SDS12)+D4*SIN(SDS12)	=C4*(-SIN(SDS12))+D4*COS(SDS12)				
5	A	-0.15	-0.405	=C5*COS(SDS12)+D5*SIN(SDS12)	=C5*(-SIN(SDS12))+D5*COS(SDS12)	=SCS17*(F4-F5)/(E4*F5-E5*F4)	=-SCS16*(E4-E5)/(E4*F5-E5*F4)	=G4*COS(SDS12)-H4*SIN(SDS12)	=G4*SIN(SDS12)+H4*COS(SDS12)
6	A	-0.15	-0.405	=C6*COS(SDS12)+D6*SIN(SDS12)	=C6*(-SIN(SDS12))+D6*COS(SDS12)				
7	D	0.55	-0.405	=C7*COS(SDS12)+D7*SIN(SDS12)	=C7*(-SIN(SDS12))+D7*COS(SDS12)	=SCS17*(F6-F7)/(E6*F7-E7*F6)	=-SCS16*(E6-E7)/(E6*F7-E7*F6)	=G6*COS(SDS12)-H6*SIN(SDS12)	=G6*SIN(SDS12)+H6*COS(SDS12)
8	D	0.55	-0.405	=C8*COS(SDS12)+D8*SIN(SDS12)	=C8*(-SIN(SDS12))+D8*COS(SDS12)				
9	B	0.15	0.595	=C9*COS(SDS12)+D9*SIN(SDS12)	=C9*(-SIN(SDS12))+D9*COS(SDS12)	=SCS17*(F8-F9)/(E8*F9-E9*F8)	=-SCS16*(E8-E9)/(E8*F9-E9*F8)	=G8*COS(SDS12)-H8*SIN(SDS12)	=G8*SIN(SDS12)+H8*COS(SDS12)
10									
11		grados	radianes						
12	φ	15.725	=C12*PI()/180						
13	A	0.02	m^2						
14	I_1	0.0033335	m^4						
15	I_2	0.0006119	m^4						
16	i_1^2	=C14/C13	m^2						
17	i_2^2	=C15/C13	m^2						

Ejemplo 5-25a

	A	B	C	D	E	F
1	**Punto**	x [m]	y [m]	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\text{sen}\,\varphi$	$x_1 = -x\,\text{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$	$\frac{\sigma(x_1,x_2)}{N} = \frac{1}{A}\left(1+\frac{e_2}{i_1^2}x_2+\frac{e_1}{i_2^2}x_1\right)$
2	A	-0.0252	0.1069	=B2*COS($D$10)+C2*SIN($D$10)	=-B2*SIN($D$10)+C2*COS($D$10)	=1/$C$11*(1+$E$7/$C$14*E2+$D$7/$C$15*D2)
3	B	0.0223	0.1069	=B3*COS($D$10)+C3*SIN($D$10)	=-B3*SIN($D$10)+C3*COS($D$10)	=1/$C$11*(1+$E$7/$C$14*E3+$D$7/$C$15*D3)
4	C	0.0223	-0.06435	=B4*COS($D$10)+C4*SIN($D$10)	=-B4*SIN($D$10)+C4*COS($D$10)	=1/$C$11*(1+$E$7/$C$14*E4+$D$7/$C$15*D4)
5	D	-0.0652	-0.06435	=B5*COS($D$10)+C5*SIN($D$10)	=-B5*SIN($D$10)+C5*COS($D$10)	=1/$C$11*(1+$E$7/$C$14*E5+$D$7/$C$15*D5)
6	**Excentrici-**	e_x [m]	e_y [m]	$e_1 = e_x\cos\varphi + e_y\,\text{sen}\,\varphi$	$e_2 = -e_x\,\text{sen}\,\varphi + e_y\cos\varphi$	
7	**dades**	0.0223	0.0223	=B7*COS($D$10)+C7*SIN($D$10)	=-B7*SIN($D$10)+C7*COS($D$10)	
8						
9			grados	radianes		
10	**Ángulo**	φ	-9.828	=C10*PI()/180		
11	**Área**	A	0.002087	m^2		
12	**Momentos**		0.00001045	m^4		
13	**de Inercia**		0.00000118	m^4		
14	**Radios de**		=C12/C11	m^2		
15	**giro**		=C13/C11	m^2		

Ejemplo 5-25b

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Eje Neutro	Punto	x^N [m]	y^N [m]	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\text{sen}\varphi$	$x_2 = -x\,\text{sen}\varphi + y\cos\varphi$	$e_1^y = \frac{i_2^2(x_2' - x_2'')}{x_1'x_2' - x_2'x_1'}$	$e_2^y = -\frac{i_1^2(x_1' - x_1'')}{x_1'x_2' - x_2'x_1'}$	$e_1^g = e_1^y\cos\varphi - e_2^y\,\text{sen}\varphi$	$e_2^g = e_1^y\,\text{sen}\varphi + e_2^y\cos\varphi$
2	AB	A	-0.0252	0.1069	=C2*COS($D$12)+D2*SIN($D$12)	=-C2*SIN($D$12)+D2*COS($D$12)				
3		B	0.0223	0.1069	=C3*COS($D$12)+D3*SIN($D$12)	=-C3*SIN($D$12)+D3*COS($D$12)	=SCS17*(F2-F3)/(E2*F3-E3*F2)	=-SCS16*(E2-E3)/(E2*F3-E3*F2)	=G2*COS($D$12)-H2*SIN($D$129)	=G2*SIN($D$12)+H2*COS($D$12)
4	BC	B	0.0223	0.1069	=C4*COS($D$12)+D4*SIN($D$12)	=-C4*SIN($D$12)+D4*COS($D$12)				
5		C	0.0223	-0.06435	=C5*COS($D$12)+D5*SIN($D$12)	=-C5*SIN($D$12)+D5*COS($D$12)	=SCS17*(F4-F5)/(E4*F5-E5*F4)	=-SCS16*(E4-E5)/(E4*F5-E5*F4)	=G4*COS($D$12)-H4*SIN($D$129)	=G4*SIN($D$12)+H4*COS($D$12)
6	CD	C	0.0223	-0.06435	=C6*COS($D$12)+D6*SIN($D$12)	=-C6*SIN($D$12)+D6*COS($D$12)				
7		D	-0.0652	-0.06435	=C7*COS($D$12)+D7*SIN($D$12)	=-C7*SIN($D$12)+D7*COS($D$12)	=SCS17*(F6-F7)/(E6*F7-E7*F6)	=-SCS16*(E6-E7)/(E6*F7-E7*F6)	=G6*COS($D$12)-H6*SIN($D$129)	=G6*SIN($D$12)+H6*COS($D$12)
8	DA	D	-0.0652	-0.06435	=C8*COS($D$12)+D8*SIN($D$12)	=-C8*SIN($D$12)+D8*COS($D$12)				
9		A	-0.0252	0.1069	=C9*COS($D$12)+D9*SIN($D$12)	=-C9*SIN($D$12)+D9*COS($D$12)	=SCS17*(F8-F9)/(E8*F9-E9*F8)	=-SCS16*(E8-E9)/(E8*F9-E9*F8)	=G8*COS($D$12)-H8*SIN($D$129)	=G8*SIN($D$12)+H8*COS($D$12)
10										
11			grados	radianes						
12	Ángulo	φ	-9.828	=C12*PI()/180						
13	Área	A	0.002087	m^2						
14	Momentos	I_1	0.00001045	m^4						
15	de Inercia	I_2	0.00000118	m^4						
16	Radios de	i_1^2	=C14/C13	m^2						
17	giro	i_2^2	=C15/C13	m^2						

Ejemplo 5-26

	A	B	C	D
1	**Punto**	$x_1 = x_0 - x_{CG}$	$x_2 = y_0 - y_{CG}$	$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_1}{i_2^2} x_1\right)$
2	A	=0.15-0.045	=0.2-0.1	=$C$9/$C$10*(1+$B$7/$C$14*B2)
3	B	=0-0.045	=0.2-0.1	=$C$9/$C$10*(1+$B$7/$C$14*B3)
4	C	=0-0.045	=0-0.1	=$C$9/$C$10*(1+$B$7/$C$14*B4)
5	D	=0.15-0.045	=0-0.1	=$C$9/$C$10*(1+$B$7/$C$14*B5)
6	**Excentrici-**	e_1 [m]	e_2 [m]	
7	**dades**	0.1	0	
8				
9	**Normal**	N	-0.5	MN
10	**Área**	A	0.005	m^2
11	**Momentos**	I_1	0.00003666	m^4
12	**Principales de Inercia**	I_2	0.00001237	m^4
13	**Radios de**	i_1^2	=C11/C10	m^4
14	**giro**	i_2^2	=C12/C10	m^4

Ejemplo 5-30

	A	B	C	D	E
1	**Punto**	x [cm]	y [cm]	$x_1 = x\cos(-0.582) + y\,\text{sen}(-0.582)$	$x_2 = -x\,\text{sen}(-0.582) + y\cos(-0.582)$
2	A	11.1	9.17	=COS(-0.582)*B2+SENO(-0.582)*C2	=-SENO(-0.582)*B2+COS(-0.582)*C2
3	B	1.1	9.17	=COS(-0.582)*B3+SENO(-0.582)*C3	=-SENO(-0.582)*B3+COS(-0.582)*C3
4	C	1.1	-5.83	=COS(-0.582)*B4+SENO(-0.582)*C4	=-SENO(-0.582)*B4+COS(-0.582)*C4
5	D	-8.89	-5.83	=COS(-0.582)*B5+SENO(-0.582)*C5	=-SENO(-0.582)*B5+COS(-0.582)*C5

Capítulo 6

Esfuerzo de Corte

6.1 Introducción

El corte es un esfuerzo que puede, o no, coexistir con la flexión, el axil y la torsión, en la sección transversal de una barra cargada. Según su origen, existen dos tipos de esfuerzo de corte en una sección transversal de una pieza estructural:

1. **Esfuerzo de Corte Directo**, produce un efecto similar a las tijeras y actúa en remaches, tornillos, pasadores, etc., suele estar acompañado de un efecto de aplastamiento (ver Figura 6.1).

2. **Esfuerzo de Corte por Flexión**, producido en la sección transversal por la variación que sufre el momento flector a lo largo del eje de la pieza y es el que se tratará en este capítulo (ver Figura 6.2).

Centrado en el problema que se tratará en este capítulo, se define el *Corte por flexión* en una sección transversal de una barra estructural al esfuerzo resultante de la integración de las tensiones tangenciales producidas en dicha sección transversal por el cambio sufrido por el momento flector a lo largo de la barra $\left(\mathsf{Q} = \int_A \tau \, dA = d\mathsf{M}/dx_3\right)$, y cuyo vector representativo está contenido en el mismo plano de la sección transversal (ver Figura 6.2).

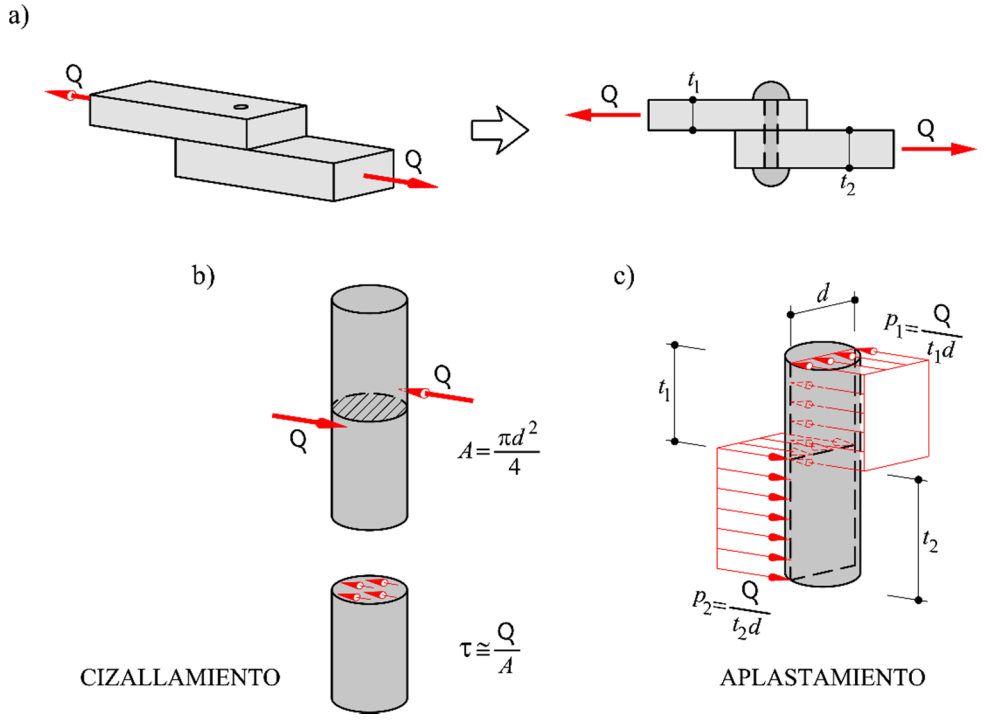


Figura 6.1 – Corte Directo: a) Efecto del Cizallamiento en un pasador; b) efecto del Corte Directo; c) efecto del aplastamiento.

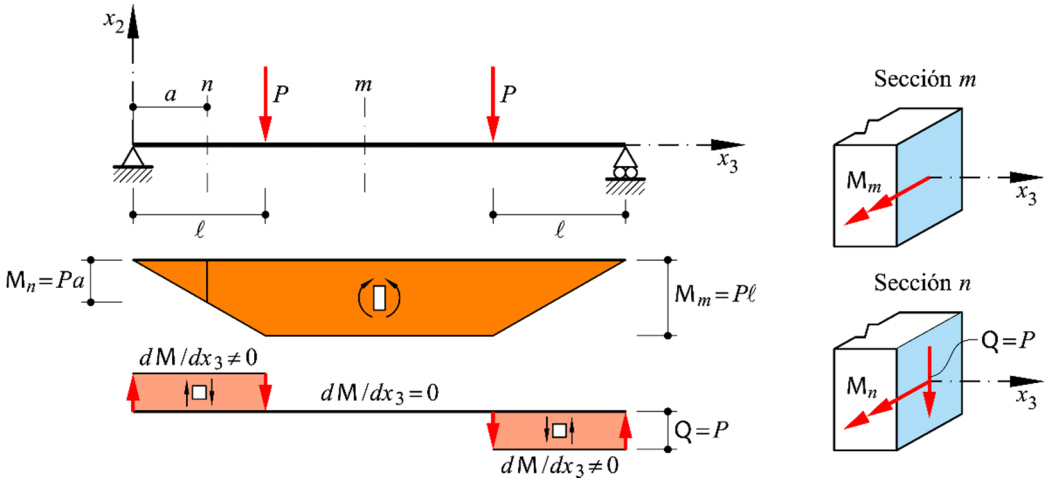


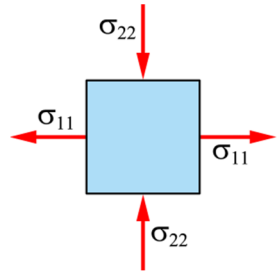
Figura 6.2 – Corte por Flexión: Barra sometida a acciones que producen Corte nulo en la sección transversal m y Corte $Q=P$ por efecto de la variación de la Flexión M en la sección transversal n.

El corte por flexión produce en la sección transversal un alabeo que impide el cumplimiento de la hipótesis de planaridad de las secciones transversales después de la deformación (ver apartado 5.2.1).

Para iniciar el estudio del corte por flexión es importante recordar los siguientes conceptos de elasticidad (ver capítulo 2),

a) El tensor de tensiones cumple con el principio de Reciprocidad de Tensiones de Cauchy (ver apartado 2.3.3), y por lo tanto es simétrico. Así, las tensiones tangenciales que dan origen al esfuerzo de corte cumplen con la siguiente expresión general: $\sigma_{ij} \equiv \tau_{ij} \neq 0 \quad , \ \forall\, i \neq j$.

b) Un estado de corte puro se puede obtener sobre un plano a 45º cuando se introduce un estado de tensión tracción-compresión en planos ortogonales, es decir,

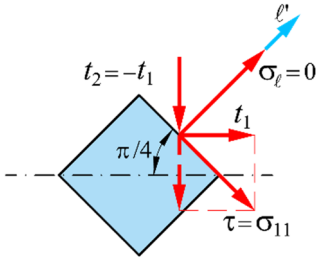


$$\sigma = \sigma_{11} = -\sigma_{22}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} \sigma_1^t \\ -\sigma_1^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell'_1 \\ \ell'_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\ell}' = \begin{Bmatrix} \ell'_1 \\ \ell'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\hat{\boldsymbol{\ell}', x_1}) \\ \cos(\hat{\boldsymbol{\ell}', x_2}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\pi/4) \\ \cos(\pi/4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{cases} t_1 = \sigma\ \ell'_1 = \sigma \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -t_1 = -\sigma\ \ell'_2 = -\sigma \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} \sigma_\ell = 0 = \sigma \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sigma \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \tau = \tau_\ell = \sigma \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sigma \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow \ \boxed{\tau = \sigma = \sigma_{11}} \end{cases}$$

c) La tensión tangencial producida por el esfuerzo cortante en el borde de una sección transversal es siempre tangente a la curva de dicho borde. Esta

afirmación se justifica partiendo del supuesto erróneo que las tensiones tangenciales τ_T producidas por el cortante Q se orientan en la dirección de dicho esfuerzo cortante (ver Figura 6.3), pero esta suposición exigiría la existencia de dos componentes de la tensión, una tangencial tangente al borde τ_t y otra normal al borde τ_n (ver Figura 6.3). Sin embargo, esta suposición no puede ser cierta por el principio de reciprocidad de tensiones tangenciales de Cauchy (ver Sección 2.3.3), ya que la tensión tangencial sobre la superficie de la barra debe ser necesariamente nula y por lo tanto su recíproca, la tensión normal al borde, también debe ser nula ($\tau_n = 0$). De esta disquisición resulta que la tensión tangencial sólo puede ser tangente al borde $\tau_T \equiv \tau_t$.

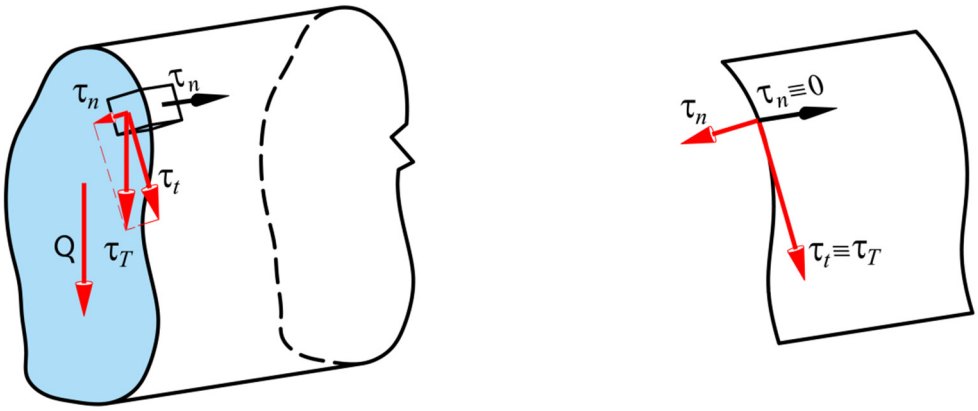


Figura 6.3 – Dirección de las tensiones tangenciales en el borde de una sección transversal.

d) Existe una relación entre el módulo de elasticidad transversal, o de cortante G, el módulo de elasticidad longitudinal E, y el módulo de Poisson ν. Para establecer esta relación se estudia a continuación la distorsión que sufre un elemento diferencial del sólido sometido a un estado de corte puro (ver apartado "b" de esta Introducción).

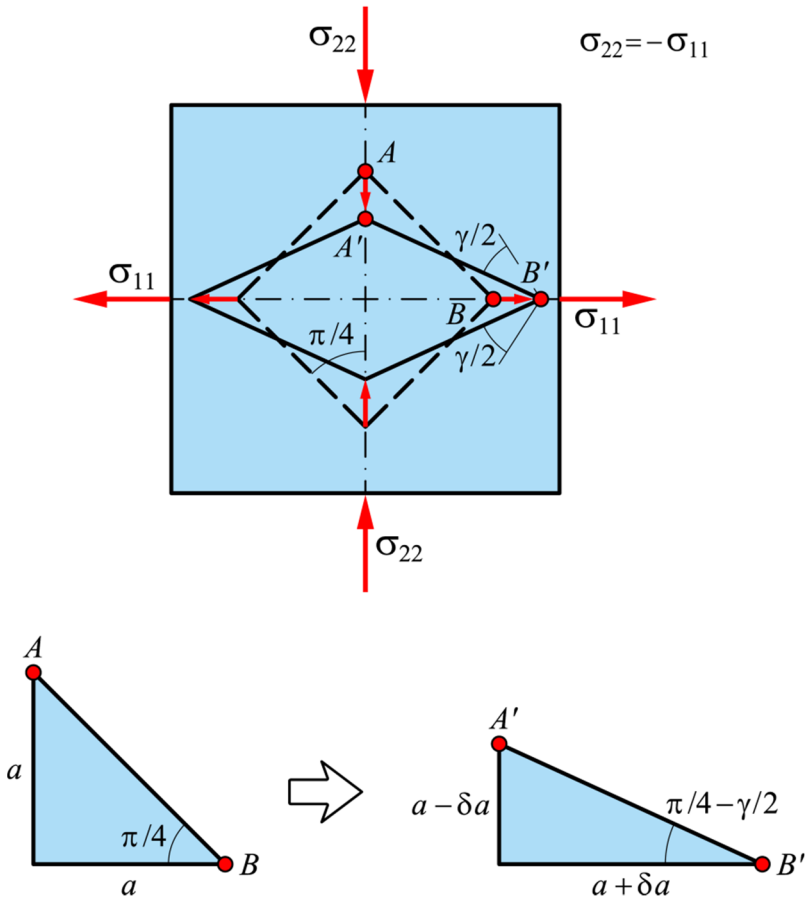


Figura 6.4 – Distorsión del elemento diferencial de sólido producido por un estado de corte puro.

A partir de la Figura 6.4, resultan las siguientes relaciones geométricas,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{a}=1 \quad ; \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{a-\delta a}{a+\delta a}$$

$$\text{pero:}\quad \varepsilon_{11}=\frac{\delta a}{a} \quad ; \quad \varepsilon_{22}=-\frac{\delta a}{a} \tag{6.2}$$

$$\text{resultando:}\quad \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{a+a\,\varepsilon_{22}}{a+a\,\varepsilon_{11}}=\frac{1+\varepsilon_{22}}{1+\varepsilon_{11}}$$

Teniendo en cuenta la ley de Hooke Generalizada (Sección 2.5.3), en este caso particular resulta,

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \nu\frac{\sigma_{11}}{E} = \frac{(1+\nu)\sigma_{11}}{E}$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{11}}{E} = -\frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{11}}{E} = -\frac{(1+\nu)\sigma_{11}}{E} \tag{6.3}$$

Sustituyendo esto último en la ecuación (6.2), se obtiene,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1+\varepsilon_{22}}{1+\varepsilon_{11}} = \frac{1 - \dfrac{(1+\nu)\sigma_{11}}{E}}{1 + \dfrac{(1+\nu)\sigma_{11}}{E}} \tag{6.4}$$

Pero, trigonométricamente se puede expresar la tangente de la diferencia de dos ángulos, como

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)}{1 + \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)} \simeq \frac{1 - \dfrac{\gamma}{2}}{1 + \dfrac{\gamma}{2}} \tag{6.5}$$

Igualando los resultados obtenidos en las ecuaciones (6.4) y (6.5), se obtiene el ángulo de distorsión γ en función del estado tensional que se muestra en la Figura 6.4, resultando así la ley constitutiva para un estado de corte puro (ver la sección 2.5.3)

$$\gamma = \frac{2\cdot(1+\nu)}{E}\underbrace{\sigma_{11}}_{=\tau} \;\Rightarrow\; \gamma = G^{-1}\,\tau \quad \text{con:} \quad \boxed{G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)}} \tag{6.6}$$

6.2 Cinemática producida por el acoplamiento Flexión-Corte en una sección transversal

Como se ha visto anteriormente, en el caso de flexión recta que se observa en la Figura 6.2, al actuar un momento flector variable a lo largo del eje de la barra estructural $M_1(x_3)$ aparece un esfuerzo cortante que se define como $Q_2(x_3) = dM_1(x_3)/dx_3$. Análogamente, si se trata de flexión simple esviada (oblicua) actuarán momentos flectores variables $M_1(x_3)$ y $M_2(x_3)$, dando lugar a la aparición de esfuerzos cortantes dados por $Q_2(x_3) = dM_1(x_3)/dx_3$ y $Q_1(x_3) = dM_2(x_3)/dx_3$. De esta manera, se produce en la sección transversal la coexistencia de un estado tensional compuesto por tensiones normales $\sigma_3(x_1, x_2, x_3)$ y tensiones tangenciales al plano de la sección $\sigma_{3i}(x_1, x_2, x_3) = \tau_{3i}(x_1, x_2, x_3)$, tal como se observa en la Figura 6.5.

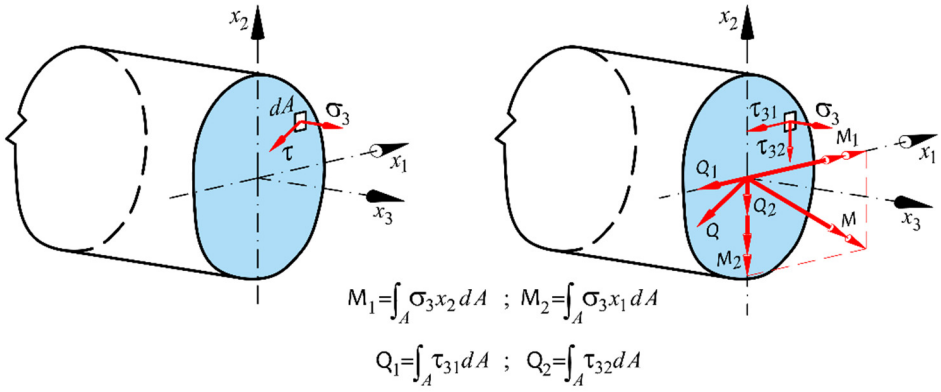


Figura 6.5 – Estado tensional en una sección transversal producido por un momento flector variable a lo largo de la pieza estructural.

Para una mayor claridad en el estudio, se analiza primeramente una viga sometida a flexión simple recta, es decir que la pieza estructural está sometida a la acción de $M_1(x_3) = M$ y, por lo tanto, a $Q_2 = Q$. En la Figura 6.6 se muestra una proyección en el plano $x_2 - x_3$ de un tramo de la viga mencionada. Se observa que las tensiones tangenciales $\tau(x_2, x_3)$ se distribuyen en la sección en forma no unifor-

me, produciendo deformaciones angulares no uniformes de la forma $\gamma(x_2, x_3) = \dfrac{\tau(x_2, x_3)}{G}$, que conducen al alabeo de la sección transversal, tal como se muestra en la Figura 6.6. Esto hace que el desplazamiento producido por la flexión quede alterado por la acción del desplazamiento producido por el corte.

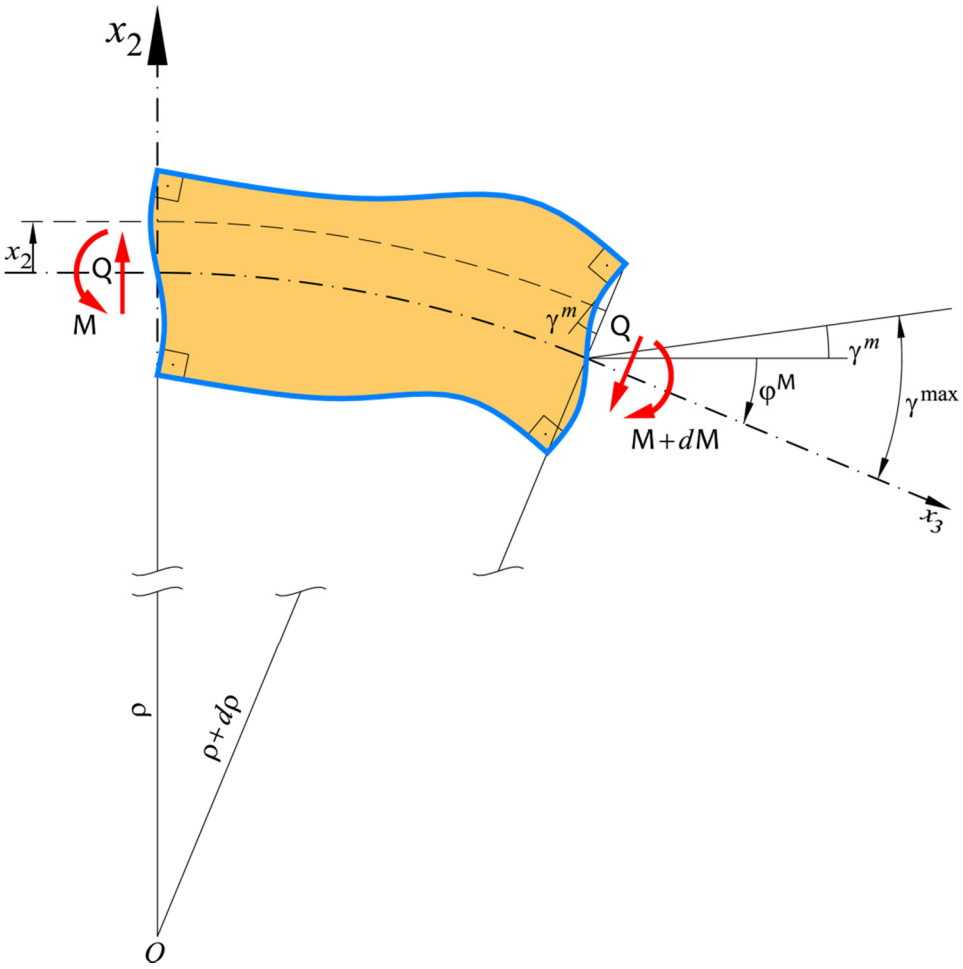


Figura 6.6 – Alabeo de la sección transversal producido por un momento flector variable a lo largo de la pieza estructural, en el plano $x_2 - x_3$.

En otras palabras, el estado simultáneo de *flexión* más *corte* (flexión simple) produce en una sección transversal la superposición de los estados cinemáticos de cada uno de estos efectos. Dicha superposición se resume en la Figura 6.7. En ella se puede ver que el radio de curvatura ρ no es constante, y el giro de la sección

transversal está afectado por la distorsión debido al alabeo de la sección transversal. Asimismo, el desplazamiento vertical ($v = u_2$) resulta de la superposición del desplazamiento producido por la flexión v^{M} más el producido por el corte v^{Q}. Es decir, que el desplazamiento de un punto de una sección transversal respecto de otra ubicada a una distancia $ds = dx_3$ resulta,

$$\begin{aligned} dv &= dv^{\mathrm{M}} + dv^{\mathrm{Q}} \\ dv &= \varphi^{\mathrm{M}}\, ds + \gamma^{m}\, ds \quad \Rightarrow \quad \varphi^{\mathrm{M}} = \frac{dv}{ds} - \gamma^{m} \end{aligned} \tag{6.7}$$

donde φ^{M} es el ángulo que gira una sección transversal debido a la acción del momento flector M, y que en este caso depende del movimiento normal al eje de la pieza v y de γ^{m} que es la deformación angular media producida por el esfuerzo de corte Q.

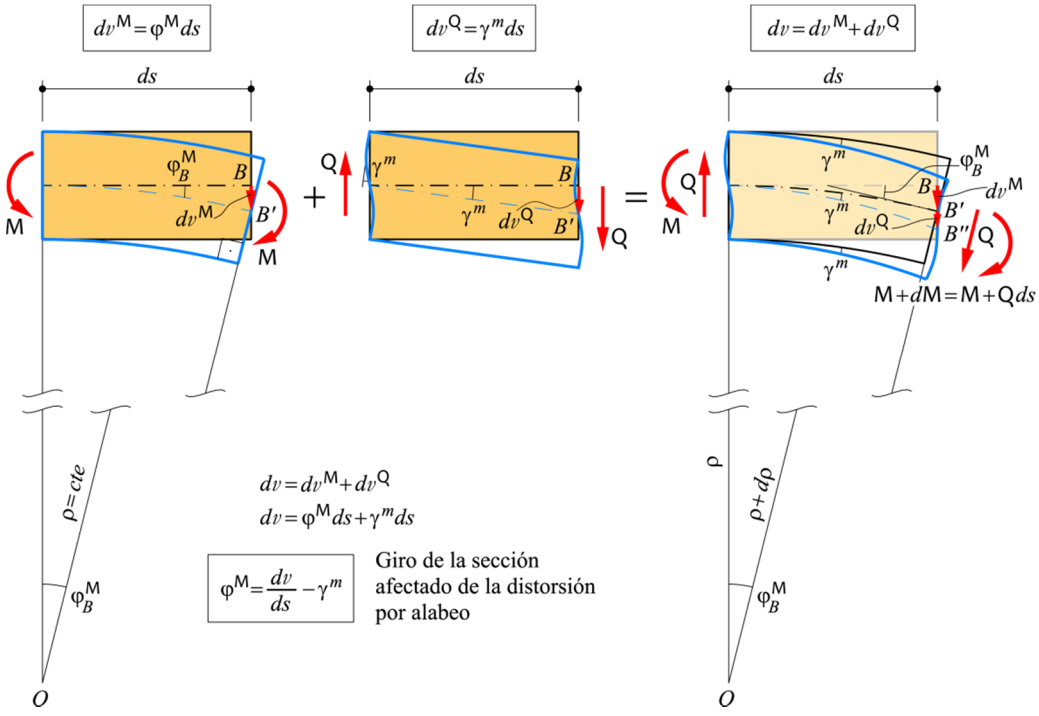


Figura 6.7 – Superposición de la cinemática producida por la flexión y el corte, en el plano $x_2 - x_3$.

El fenómeno de alabeo invalidaría la formulación de flexión de Bernoulli descrita en el Capítulo 5, porque las secciones transversales dejan de ser planas después de la deformación. Sin embargo, en ciertos casos el alabeo de las secciones influye muy poco en la validez de la teoría de Bernoulli. En particular, para el caso en que el esfuerzo de corte es constante a lo largo de la barra ($\mathsf{Q}(x_3) = cte$), todas las secciones transversales tendrán el mismo alabeo y, por lo tanto, las distancias relativas entre dos secciones transversales se mantiene constante de la misma manera que ocurre en el caso de la flexión pura y, en tal caso, seguiría valiendo la formulación de Navier-Bernoulli presentada en el Capítulo 5.

6.3 Corte por flexión recta – Fórmula general del corte o fórmula de Collignon-Jourawski

En esta sección se hará el análisis de tensiones tangenciales por corte recto, es decir aquel corte que resulta de la flexión simple recta. A continuación, se deduce la expresión que relaciona la tensión tangencial en una sección transversal de una barra con el corte que la produce.

Sea una barra cuya sección transversal se muestra en la Figura 6.8, donde (x_1, x_2) conforman un sistema de referencia centroidal principal, en la que actúa una ley de momentos flectores $\mathsf{M}(x_3) = \mathsf{M}_1(x_3) \neq cte$. Como se puede observar en la mencionada figura, el cambio que sufre el momento flector $\mathsf{M}_1(x_3)$ a lo largo de un elemento diferencial de barra de longitud dx_3, produce una fuerza axial desequilibrada dN^* entre dos secciones transversales contiguas, que sólo es reequilibrada por el esfuerzo de corte $d\mathsf{Q}_3 = \tau_{23}(x_2)\big(b(x_2)\,dx_3\big)$ que resulta de integrar las tensiones tangenciales que actúan a cada altura x_2 del eje de la viga. Así, el esfuerzo axial N^* resultante en el área A^*, comprendida entre $x_2 \le x_2^* \le x_2^{\max}$ (ver Figura 6.8a), se obtiene integrado en dicha área las tensiones normales a la sección transversal $\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = \sigma(x_1, x_2, x_3)$, de la siguiente manera

$$N^*(x_3) = \int_{A^*} \sigma(x_1, x_2, x_3)\, dA^* = \int_{A^*} \frac{\mathrm{M}_1(x_3)}{I_1} x_2^*\, dA^*$$
$$N^*(x_3) = \frac{\mathrm{M}_1(x_3)}{I_1} \int_{A^*} x_2^*\, dA^* = \frac{\mathrm{M}_1(x_3)}{I_1} S_1^*(x_2) \tag{6.8}$$

En forma análoga, para la sección transversal contigua (a una distancia dx_3), se tiene,

$$N^*(x_3) + dN^* = \frac{\mathrm{M}_1(x_3) + d\mathrm{M}_1}{I_1} S_1^*(x_2) \tag{6.9}$$

De las ecuaciones (6.8) y (6.9) se deduce que el cambio de fuerza axial entre las dos secciones transversales es la diferencia entre las ecuaciones (6.9) y (6.8),

$$dN^* = \frac{d\mathrm{M}_1}{I_1} S_1^*(x_2) \tag{6.10}$$

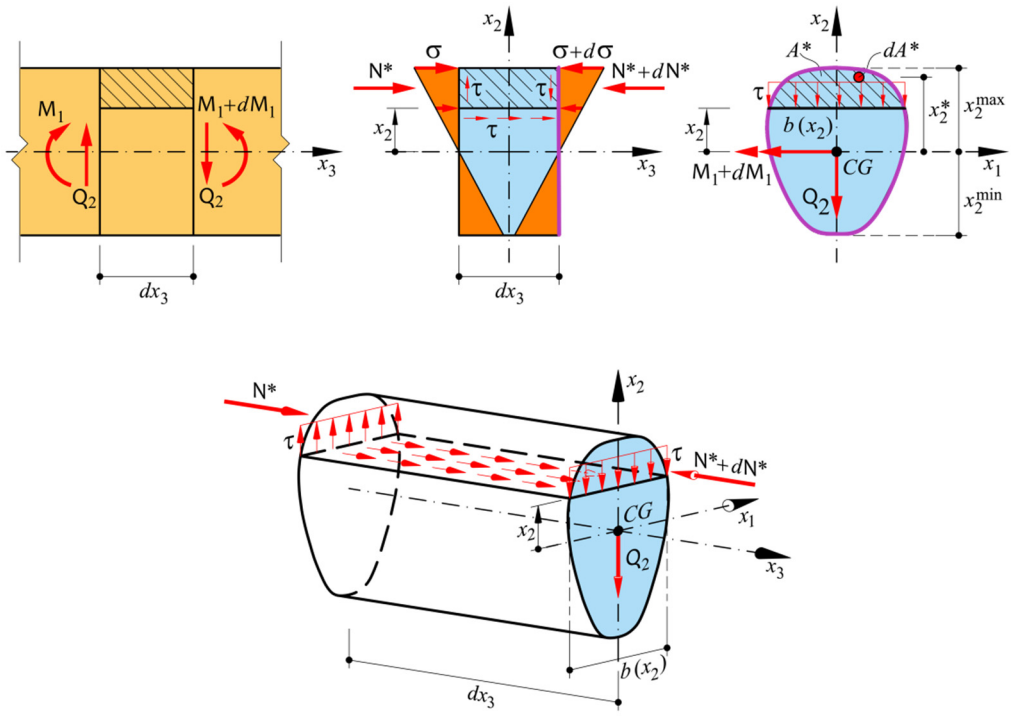


Figura 6.8 – Equilibrio en un elemento diferencial de barra sometida a flexión.

Pero esta fuerza axial debe ser equilibrada por un esfuerzo rasante en un plano paralelo al plano medio a la altura x_2, dando lugar a un esfuerzo cortante $dQ_3 = \tau_{23}(x_2)\big(b(x_2)\,dx_3\big)$, que por reciprocidad de tensiones aparece alojado en la sección transversal como dQ_2. Luego, teniendo en cuenta la ecuación (6.10), se tiene,

$$dQ_3 = dN^* \Rightarrow \tau_{23}(x_2)\big(b(x_2)\,dx_3\big) = \frac{dM_1}{I_1} S_1^*(x_2) \tag{6.11}$$

De donde resulta,

$$\tau_{23}(x_2) = \tau_{32}(x_2) = \tau(x_2) = \frac{dM_1}{dx_3}\frac{S_1^*(x_2)}{I_1\, b(x_2)} = \frac{Q_2\, S_1^*(x_2)}{I_1\, b(x_2)} \tag{6.12}$$

Siendo esta expresión la denominada fórmula de Collignon (1877)-Jourawski (1844), que permite obtener las tensiones tangenciales en una sección transversal a una altura x_2 desde el eje de la pieza. De esta relación se deduce que si x_2 está sobre las fibras superiores de la barra se tiene que $A^* = 0$ y $S_1^*(x_2^{\max}) = 0 \;\Rightarrow \tau(x_2^{\max}) = 0$, y si coincide con las fibras inferiores se tiene que el momento estático de la sección respecto a un eje centroidal es nulo $S_1^*(x_2^{\min}) = 0 \;\Rightarrow \tau(x_2^{\min}) = 0$. De la misma expresión (6.12) se deduce que el máximo momento estático se obtiene en el eje que pasa por el baricentro de la sección $x_2 = 0 \Rightarrow S_1^*(x_2 = 0) = S_1^*\big|^{\max}$, por lo que en el caso de secciones con $b(x_2) = cte$, con seguridad será máxima la tensión tangencial en $x_2 = 0$ [1].

6.3.1 Tensiones tangenciales por corte recto en secciones macizas

6.3.1.1 Sección rectangular – Tensiones tangenciales por corte

A continuación, se presenta a modo de ejemplo la distribución y magnitud de las tensiones tangenciales en una sección rectangular producidas por un corte vertical descendente, es decir, coincidente con el eje principal de inercia x_2 de la sección transversal.

---

[1] En algunas secciones con ancho variable $b(x_2) \neq cte$, $\tau^{\max}$ no se produce a la altura del eje neutro. Como por ejemplo en la sección triangular donde $\tau^{\max} = 6Q/bh$ se da en $x_2 = h/6$.

Primeramente, se hará el cálculo con un sistema de referencia situado en el centroide de la sección y luego se mostrará la simplificación del cálculo para el caso en que se utilice un sistema de referencia local con base en un extremo de la sección transversal.

El momento de inercia de la sección rectangular (ver Figura 6.9) respecto al eje principal de inercia x_1 está dado por

$$I_1 = \frac{b\,h^3}{12}$$

El momento estático de la parte de la sección A^* respecto al eje x_1 resulta

$$S_1^*(x_2) = \int_{A^*} x_2^*\, dA^* = \int_{x_2}^{x_2^{\max}=h/2} x_2^*\, \overbrace{b\, dx_2^*}^{dA^*} = b\,\frac{\left(x_2^*\right)^2}{2}\Bigg|_{x_2}^{h/2} = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - x_2^2\right]$$

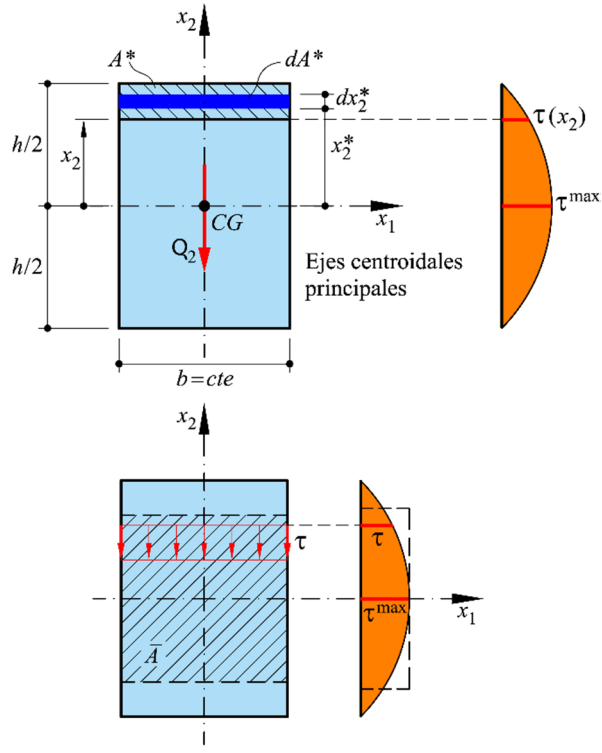


Figura 6.9 – Distribución de las tensiones tangenciales por corte en una sección transversal rectangular. Sistema de referencia con base en el centro geométrico de la sección.

Reemplazando estas dos últimas expresiones en la ecuación (6.12), se obtiene

$$\tau(x_2) = \frac{Q_2\, S_1^*(x_2)}{I_1\, b(x_2)} = \frac{Q_2 \dfrac{b}{2}\left[\left(\dfrac{h}{2}\right)^2 - x_2^2\right]}{\dfrac{b\,h^3}{12} b} \tag{6.13}$$

$$\tau(x_2) = \frac{6\,Q_2}{b\,h^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - x_2^2\right] \;\Rightarrow\; \begin{cases} \tau^{\max} = \dfrac{3}{2}\dfrac{Q_2}{b\,h} = \dfrac{3}{2}\dfrac{Q_2}{A} & \forall\; x_2 = 0 \\ 0 \quad \forall\; x_2^{\max} = \dfrac{h}{2},\; x_2^{\min} = -\dfrac{h}{2} \end{cases}$$

La tensión tangencial máxima también se suele escribir en función del *coeficiente de uniformidad de corte* κ que permite obtener la tensión tangencial máxima como (ver Figura 6.9 y Tabla 6.1),

$$\tau^{\max} = \frac{Q_2}{\kappa\, A} = \frac{Q_2}{\overline{A}} \quad , \text{ con } \kappa = \frac{2}{3} \tag{6.14}$$

donde $\overline{A} = \kappa\, A$ es una sección transversal reducida en κ, tal que al multiplicarla por la tensión tangencial uniforme de magnitud $\tau^{\max}$ da lugar a un corte Q_2. Esta simplificación permite resolver en forma más simple problemas de análisis estructural.

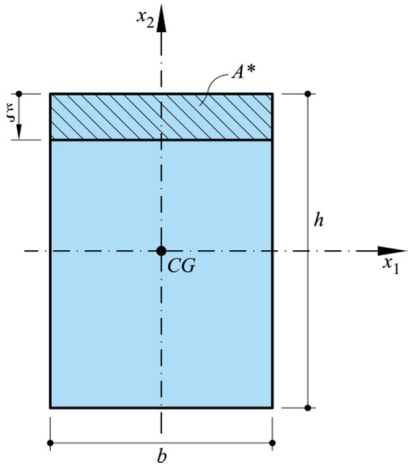


Figura 6.10 – Sistema de referencia local con base en un extremo de la sección.

Seguidamente se hará la determinación de las tensiones tangenciales en la misma sección rectangular, pero tomando como base un sistema de referencia local (eje ξ) con origen en un extremo de la sección transversal, tal como se muestra en la Figura 6.10.

En este caso, el momento estático del área A^* con respecto al eje principal de inercia x_1 se expresa en función de la coordenada local ξ de la siguiente manera,

$$S_1^*(\xi) = (\xi b)\left(\frac{h}{2} - \frac{\xi}{2}\right) = b\,h\frac{\xi}{2} - b\frac{\xi^2}{2}$$

Reemplazando esta última expresión en la ecuación (6.12) se obtiene la distribución de las tensiones tangenciales en la sección rectangular, en función de la coordenada ξ,

$$\begin{aligned} \tau(\xi) &= \frac{Q_2\, S_1^*(\xi)}{I_1\, b(\xi)} = \frac{Q_2\,(\xi b)\left(\frac{h}{2} - \frac{\xi}{2}\right)}{\frac{b\,h^3}{12} b} \\ \tau(\xi) &= \frac{6\,Q_2\,\xi\left(h-\xi\right)}{b\,h^3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tau^{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_2}{b\,h} = \frac{3}{2}\frac{Q_2}{A} & \forall\ \xi = \frac{h}{2} \\ 0 \quad \forall\ \xi = 0,\ \xi = h \end{cases} \end{aligned} \tag{6.15}$$

6.3.1.2 Sección circular – Tensiones tangenciales por corte

A continuación, se presenta la distribución y magnitud de las tensiones tangenciales en una sección circular producidas por un corte vertical ascendente.

El momento de inercia axial de la sección circular de radio R, mostrada en la Figura 6.11, respecto al eje principal está dado por

$$I_1 = \frac{\pi R^4}{4}$$

Para calcular el momento estático del área A^* respecto al eje x_1 es conveniente expresar el radio de la sección transversal en función de x_2^*,

$$R^2 = \left(\frac{b(x_2^*)}{2}\right)^2 + \left(x_2^*\right)^2 \quad \Rightarrow \quad b(x_2^*) = 2\cdot\sqrt{R^2 - \left(x_2^*\right)^2}$$

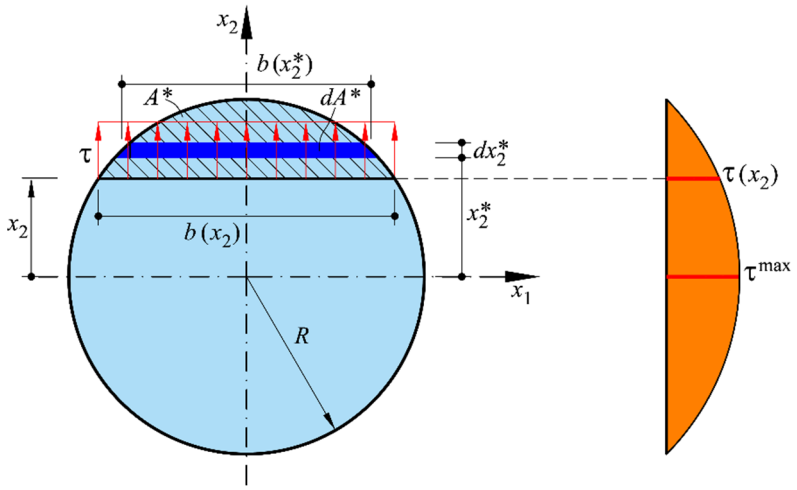


Figura 6.11 – Distribución de las tensiones tangenciales por corte en una sección transversal circular. Sistema de referencia con base en el centroide de la sección.

Usando esta última expresión se puede escribir el momento estático de la siguiente manera,

$$S_1^*(x_2) = \int_{A^*} x_2^*\, dA^* = \int_{x_2}^{R} x_2^*\, \overbrace{b(x_2^*)\, dx_2^*}^{dA^*} = \int_{x_2}^{R} 2\, x_2^* \sqrt{R^2 - \left(x_2^*\right)^2}\, dx_2^*$$

$$S_1^*(x_2) = \frac{2}{3}\left[R^2 - \left(x_2\right)^2\right]^{3/2}$$

Reemplazando esta expresión del momento estático y la del momento de inercia de la sección circular en la ecuación (6.12) se obtiene,

$$\tau(x_2) = \frac{Q_2\, S_1^*(x_2)}{I_1\, b(x_2)} = \frac{Q_2 \dfrac{2}{3}\left(R^2 - \left(x_2\right)^2\right)^{3/2}}{\dfrac{\pi R^4}{4} 2\sqrt{R^2 - \left(x_2\right)^2}} = \frac{4Q_2}{3\pi R^4}\left[R^2 - \left(x_2\right)^2\right] \tag{6.16}$$

$$\tau(x_2) = \begin{cases} \tau^{max} = \dfrac{4Q_2}{3\pi R^2} = \dfrac{4Q_2}{3A} & \forall \;\; x_2 = 0 \\ 0 \quad \forall \;\; x_2^{max},\, x_2^{min} = \pm R \end{cases}$$

Para el caso de una sección circular, la tensión tangencial máxima también puede escribirse en función del *coeficiente de uniformidad del cortante* κ (ver Tabla 6.1) como,

$$\tau^{\max} = \frac{Q_2}{\kappa A} = \frac{Q_2}{\overline{A}}, \text{ con } \kappa = \frac{3}{4}$$

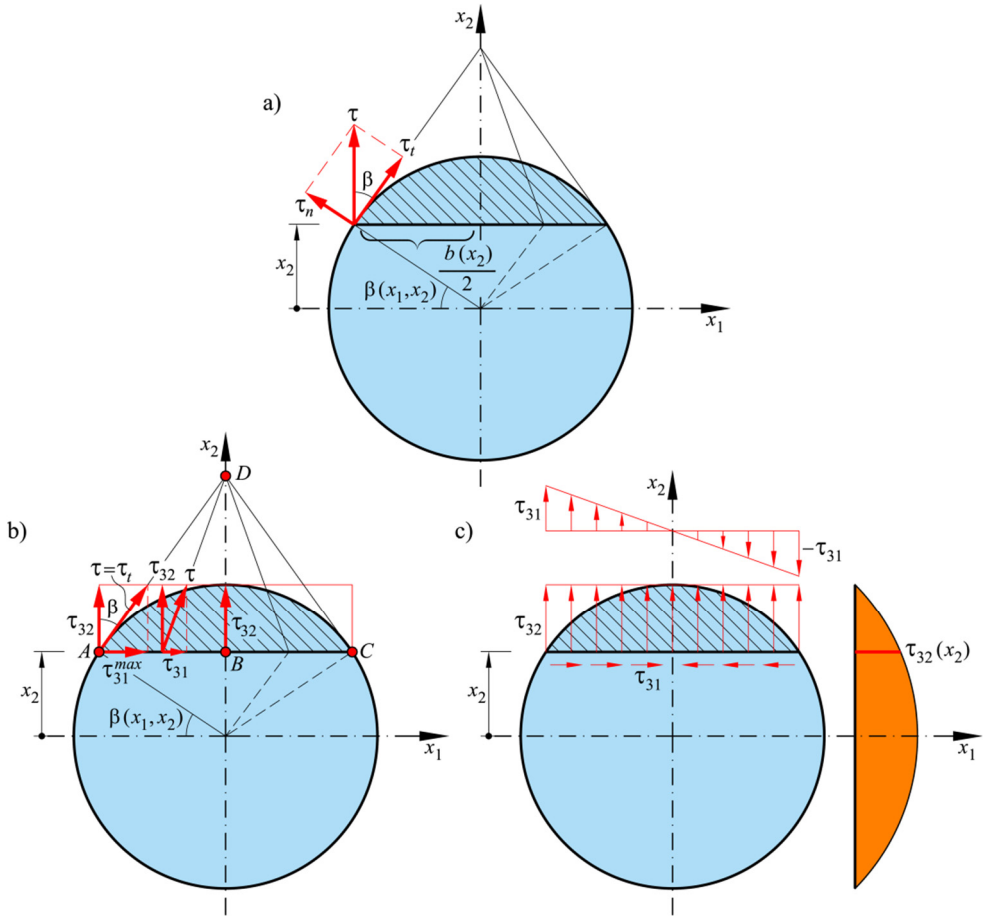


Figura 6.12 – Orientación de las tensiones tangenciales en una sección transversal circular. a) Supuesto erróneo, b) Orientación real, c) Magnitud de las componentes τ_{31} y τ_{32}.

Aunque aparentemente el cálculo mostrado en la ecuación (6.16) está bien, hay un error conceptual, porque este resultado supone que las tensiones tangenciales

$\tau(x_2)$ son paralelas a Q_2 y constantes a lo ancho de la base $b(x_2)$. Atendiendo el inciso c) de la Introducción (apartado 6.1 c)), las tensiones tangenciales deben ser tangentes al contorno de la sección, es decir que la componente $\tau_n(x_2) = 0$, y sólo existe $\tau_t(x_2)$ (verFigura 6.12 a). Según esto, el cálculo anterior sólo permite obtener la componente vertical (paralela a Q_2) de la tensión real (ver Figura 6.12 b).

Dicho esto, el cálculo mostrado en la ecuación (6.16) debe reinterpretarse conceptualmente considerando que la tensión tangencial obtenida es, en realidad, la componente vertical de la tensión resultante τ_t que, en virtud del teorema de Cauchy, debe ser tangente al contorno. En otras palabras, la tensión tangencial dada por la ecuación (6.16) es $\tau(x_2) = \tau_{32}(x_2)$, es decir,

$$\tau(x_2) = \tau_{32}(x_2) = \frac{4Q_2}{3\pi R^4}\left[R^2 - \left(x_2\right)^2 \right]$$

La distribución y magnitud de las tensiones tangenciales resultantes en cada punto de la sección transversal pueden obtenerse resolviendo las ecuaciones de la Teoría de la Elasticidad. Sin embargo, bajo las hipótesis simplificativas de la Resistencia de Materiales, la componente τ_{31} de la tensión τ_t puede obtenerse siguiendo un procedimiento aproximado, basado en la representación geométrica mostrada en la Figura 6.12. Para cada ordenada x_2 existen tres puntos para los cuales la dirección de la tensión tangencial resultante τ_t es conocida; τ_t es tangente al contorno en los puntos A y C $(x_1 = \pm b(x_2)/2)$ y τ_t es paralela al eje x_2 en el punto B $(x_1 = 0)$ por razones de simetría. Así, en los puntos mencionados, se conoce el ángulo β entre las direcciones de la tensión tangencial resultante τ_t y la tensión obtenida con la fórmula de Collignon-Jourawski τ_{32}, de manera que trigonométricamente es posible obtener la componente horizontal τ_{31} de la siguiente manera:

- **Para los puntos** A **y** C

$$\tau_{31}(x_1,x_2)\Big|_{x_1=\left|\frac{b(x_2)}{2}\right|} = \tau_{32}(x_2)\cdot\tan\left(\beta(x_1,x_2)\Big|_{x_1=\left|\frac{b(x_2)}{2}\right|}\right) = \tau_{32}(x_2)\cdot \overbrace{2\frac{x_2}{b(x_2)}}^{\tan\left(\beta(b(x_2)/2,x_2)\right)}$$

$$= \tau_{32}(x_2)\frac{x_2}{\sqrt{R^2-\left(x_2\right)^2}} = \tau_{31}^{\max} \tag{6.17}$$

$$\tau_{31}^{\max} = \frac{4\mathsf{Q}_2}{3\pi R^4}x_2\sqrt{R^2-\left(x_2\right)^2}$$

- **Para el punto** B

$$\tau_{31}(x_1,x_2)\Big|_{x_1=0} = \tau_{32}(x_2)\cdot\tan 0 = 0 \tag{6.18}$$

Para los puntos comprendidos entre los puntos A y B (o B y C) es posible asumir que las direcciones de las tensiones tangenciales resultantes τ_T concurren al punto D, de manera que se obtiene una variación lineal de la magnitud las tensiones tangenciales τ_{31}, tal como se muestra en la Figura 6.12 c).

6.3.1.3 Barra conformada por capas – Influencia del esfuerzo de corte

Tal como se ha visto anteriormente, el problema de corte en una barra estructural está completamente acoplado con el de flexión ($\mathsf{Q}(x_3)=\mathsf{Q}_2(x_3)=d\mathsf{M}_1(x_3)/dx_3$), y por lo tanto cuando se estudia el comportamiento de una barra a flexión, la influencia del corte es fundamental en la capacidad de carga de la barra. Así, a continuación, se presenta un ejemplo que muestra la resistencia y rigidez de una barra laminada sometida a flexión, considerando (o no) el efecto del corte.

Se supone una barra laminada compuesta por n capas superpuestas. En un **primer caso** se considera que las n capas están superpuestas pero no están adheridas entre sí y actúan independientemente una de otra, sin fricción entre ellas. En un **segundo caso** se pegan entre sí las capas superpuestas, o se bloquea mecánicamente el desplazamiento relativo entre ellas mediante m pasadores.

Primer caso: Láminas independientes no adheridas

Para cada lámina se obtiene el siguiente estado tensional (ver Figura 6.13),

$$\sigma^{\max} = \frac{M_1}{W_1} = \frac{\frac{P}{n}\ell}{\frac{b}{12}\left(\frac{h}{n}\right)^3}\frac{1}{2}\frac{h}{n} = \frac{12P\ell h}{2n^2 b\left(\frac{h}{n}\right)^3} = 6\frac{P\ell}{bh^2}n$$

$\tau = 0$ en cada zona interlaminar

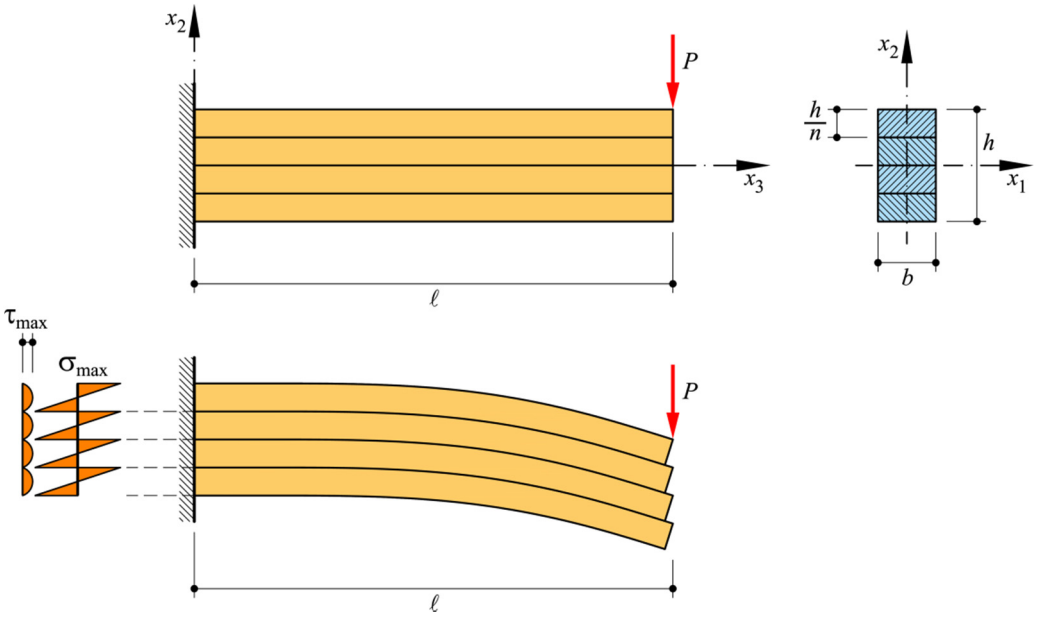


Figura 6.13 – Viga laminada sin adherencia interlaminar.

Segundo caso: Láminas adheridas

Si sobre la misma viga anterior se adhiere una lámina a la otra evitando el deslizamiento relativo entre las mismas (ver Figura 6.14), se obtiene el siguiente estado tensional

$$\sigma^{\max} = \frac{M_1}{W_1} = 6\frac{P\ell}{bh^2}$$

$$\tau^{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_2}{bh} = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}$$

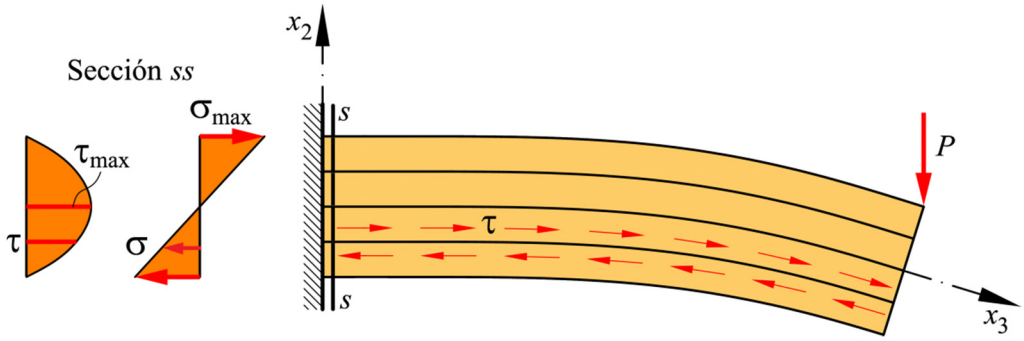


Figura 6.14 – Viga laminada con adherencia interlaminar.

El *estado tensional compuesto* o *combinado* en cualquier punto de la viga (ver Figura 6.15), para ambos casos, se obtiene a través de la composición para estado plano de tensiones tal como se estudió en el Capítulo 2. Realizando esta composición la tensión principal mayor resulta,

$$\sigma^I = \frac{\sigma_{33}+\sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{33}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{32}^2} \quad , \text{ pero: } \sigma_{33}=\sigma \ , \ \sigma_{32}=\tau_{32}=\tau \ , \ \sigma_{22}=0$$

$$\sigma^I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)$$

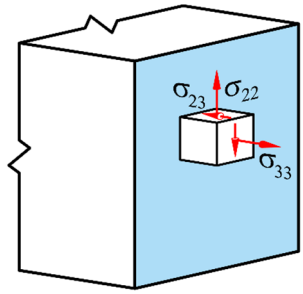


Figura 6.15 – Estado tensional en un punto de la viga.

Un caso de comportamiento estructural similar a este último se consigue bloqueando el desplazamiento relativo entre láminas mediante elementos mecánicos pasantes (tornillos, remaches, pernos, etc.). Para estudiar este caso se adopta, a modo de ejemplo, la viga en voladizo representada en la Figura 6.16. Este bloqueo mecánico evita el desplazamiento entre láminas, resultando una respuesta estructural similar a las láminas adheridas entre sí. La diferencia radica en el estado tensio-

nal local de cada lámina ya que se producen concentraciones de tensiones en las cercanías de cada pasador.

Así, cada uno de los *m* pasadores se verá sometido a un corte máximo que resulta del área de influencia del mismo.

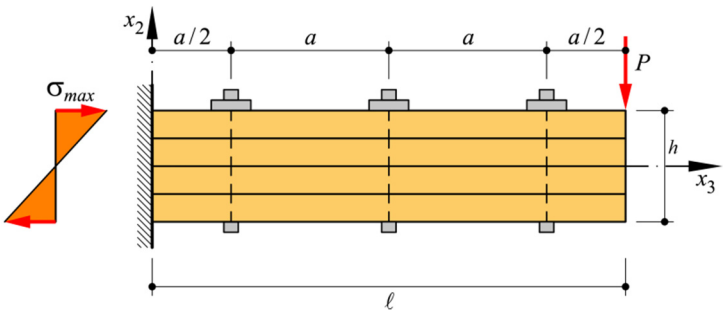
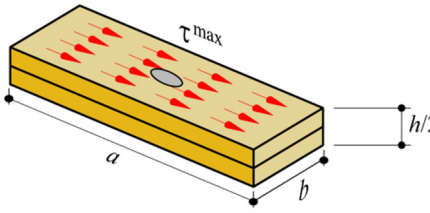


Figura 6.16 – Viga laminada con pasadores que evita el desplazamiento interlaminar.



$$\tau = cte = \tau^{max}$$

$$Q^{pasador} = \frac{Q_2}{m} = \tau^{max}\frac{(b\ a)}{m} = \frac{3}{2}\frac{P}{b\,h}\frac{(b\ a)}{m} = \frac{3}{2}\frac{P\,a}{m\,h}$$

Por último, es interesante observar la variación de curvatura que hay entre una barra con láminas adheridas, respecto de la otra en que las láminas están libre de deslizarse entre sí (no soportan las tensiones tangenciales interlaminares).

Primer caso: Láminas independientes no adheridas.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_1}{E\,I_1} = \frac{\frac{P}{n}\ell}{E\frac{b}{12}\left(\frac{h}{n}\right)^3} = \frac{12P\cdot\ell\cdot n^3}{E\cdot n\cdot b\cdot h^3} = \frac{12P\cdot\ell}{E\cdot b\cdot h^3}n^2$$

Segundo caso: Láminas adheridas.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_1}{E\,I_1} = \frac{P\ell}{E\frac{b}{12}h^3} = \frac{12P\cdot\ell}{E\cdot b\cdot h^3}$$

De donde se deduce que la barra con láminas no adheridas tiene una curvatura n^2 veces mayor que la barra con las láminas bloqueadas o bien, que la barra con

láminas no adheridas es n^2 veces más flexible que la barra con las láminas adheridas. Es claro que en el caso $n=1$ se recupera la curvatura de n láminas adheridas.

En cuanto a la resistencia, se puede observar que la tensión axial en una barra laminada sin adherencia es n veces más grande que en una barra que tiene sus láminas adheridas. Esta diferencia se debe a que la primera no tiene tensiones tangenciales interlaminares, mientras que la segunda sí las tiene y alcanza la máxima tensión tangencial en su eje mecánico.

6.3.2 Energía de deformación por corte recto – Teoría de Collignon-Jourawski

La energía específica de deformación, o densidad de energía, en un problema elástico lineal de corte recto resulta,

$$d\bar{\omega} = \tau\, d\gamma \quad \Rightarrow \quad \bar{\omega} = \int_0^{\gamma} \tau\, d\gamma = \int_0^{\gamma} \overbrace{G\gamma}^{\tau}\, d\gamma = \frac{1}{2} G\gamma^2 = \frac{1}{2}\tau\gamma \tag{6.19}$$

Pero, la distorsión promedio para una sección transversal se puede escribir en forma simplificada a partir de una condición de equilibrio basada en una tensión tangencial constante (ver Figura 6.7 y Figura 6.18), como

$$\gamma^m = \frac{\tau^m}{G} = \frac{Q_2}{\hat{A}G} \tag{6.20}$$

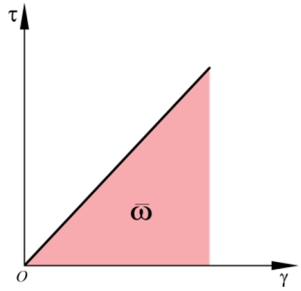


Figura 6.17 – Densidad de energía en un punto resultante de la acción de una tensión tangencial.

Tal que sustituida esta última en la condición cinemática que expresa el desplazamiento vertical en función de la distorsión $dv^Q = \gamma^m\, dx_3$ (ver ecuación (6.7)) se puede escribir esta distorsión media γ^m en función del área reducida $\hat{A}$,

$$\gamma^m = \frac{dv^Q}{dx_3} = \frac{Q_2}{\hat{A}G} \quad \Rightarrow \quad dv^Q = \frac{Q_2}{\hat{A}G} dx_3 \tag{6.21}$$

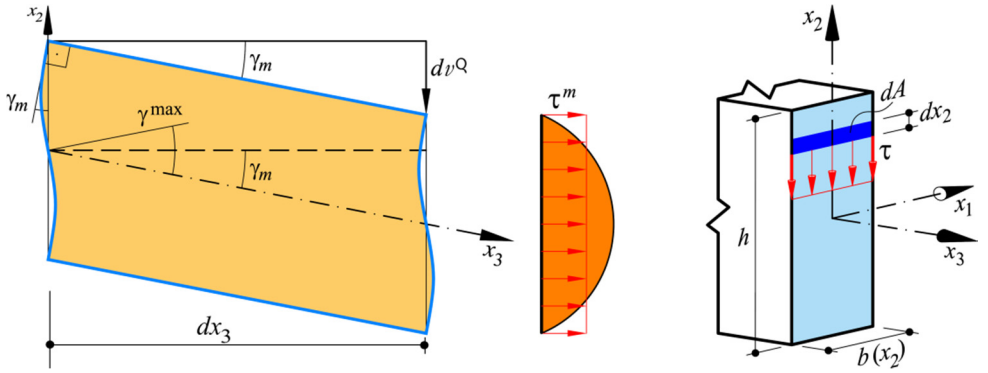


Figura 6.18 – Cinemática producida por el corte en un elemento diferencial de barra.

Así, la energía acumulada en toda la barra por el efecto del esfuerzo de corte se obtiene integrando la energía específica dada por la ec. (6.19) en el volumen de la misma,

$$W = \int_V \bar{\omega}\, dV = \int_V \frac{1}{2}\tau\gamma\, dV \simeq \int_V \frac{1}{2}\tau^m \gamma^m\, dV = \int_\ell \left[\int_{\hat{A}} \frac{1}{2}\left(\frac{Q_2}{\hat{A}}\right)\left(\frac{Q_2}{\hat{A}G}\right) dA \right] dx_3$$

$$W = \int_\ell \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{\hat{A}G}\, dx_3 \quad \Rightarrow \quad W = \int_\ell \frac{1}{2} Q_2\, \gamma^m\, dx_3 = \int_\ell \frac{1}{2} Q_2\, dv^Q \tag{6.22}$$

6.3.2.1 Área reducida – Factor de forma de las secciones

Trabajar con el *área reducida* $\hat{A}$ simplifica el análisis estructural y garantiza que la energía acumulada en la pieza sea la correcta y coherente con la distorsión media γ^m. Por lo tanto, es correcta su utilización para la evaluación de la energía acumulada, pero no debe utilizarse para el cálculo de las tensiones tangenciales producidas por el esfuerzo de corte ni para determinar la distribución de las mismas. Para obtener el área reducida se parte de igualar la energía obtenida a través de esta aproximación (ecuación (6.22)) con la energía real que se acumula en la pieza estructural. Así resulta,

$$dW = \frac{1}{2}\mathrm{Q}_2\,\gamma^m\,dx_3 = \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{Q}_2\,\gamma^m}_{\int_A \tau\,\gamma\,dA}\,dx_3 = \frac{1}{2}\left[\int_A \tau\,\gamma\,dA\right]dx_3 \tag{6.23}$$

A partir de esta última ecuación se despeja la distorsión media y se sustituye la expresión de Collignon-Jourawski para introducir una mejor aproximación de la distribución de la tensión en la expresión de la energía (ver Figura 6.18),

$$\begin{aligned}
\gamma^m &= \frac{1}{\mathrm{Q}_2}\int_A \tau\,\gamma\,dA = \frac{1}{\mathrm{Q}_2 G}\int_A \tau^2\,dA = \frac{1}{\mathrm{Q}_2 G}\int_h \tau^2\,b(x_2)\,dx_2 \\
\gamma^m &= \frac{1}{\mathrm{Q}_2 G}\int_h \left(\frac{\mathrm{Q}_2\,S_1^*(x_2)}{I_1\,b(x_2)}\right)^2 b(x_2)\,dx_2 = \frac{1}{\mathrm{Q}_2 G}\int_h \frac{\mathrm{Q}_2^2\,S_1^{*2}(x_2)}{I_1^2\,b(x_2)}\,dx_2 \\
\gamma^m &= \frac{\mathrm{Q}_2}{G}\int_h \frac{S_1^{*2}(x_2)}{I_1^2\,b(x_2)}\,dx_2
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Sustituyendo en esta última la ecuación (6.21), resulta la expresión del *área reducida* $\hat{A}$.

$$\gamma^m = \frac{dv^Q}{dx_3} = \frac{\mathrm{Q}_2}{\hat{A}\,G} = \frac{\mathrm{Q}_2}{G}\int_h \frac{S_1^{*2}(x_2)}{I_1^2\,b(x_2)}\,dx_2 = \frac{\mathrm{Q}_2}{\underbrace{G\left[\int_h \frac{S_1^{*2}(x_2)}{I_1^2\,b(x_2)}\,dx_2\right]^{-1}}_{\hat{A}}}$$

$$\hat{A} = \left[\int_h \frac{S_1^{*2}(x_2)}{I_1^2\,b(x_2)}\,dx_2\right]^{-1} = \frac{I_1^2}{\displaystyle\int_h \frac{S_1^{*2}(x_2)}{b(x_2)}\,dx_2} \tag{6.25}$$

La ecuación (6.25) permite definir el factor de forma $\hat{\kappa}$ como la relación que existe entre el área reducida y el área de la sección transversal,

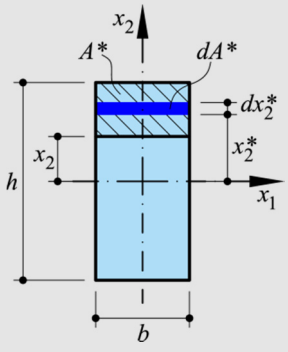
$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{A}}{A} = \frac{I_1^2}{\left(\displaystyle\int_h b(x_2)\,dx_2\right)\left(\displaystyle\int_h \frac{S_1^{*2}(x_2)}{b(x_2)}\,dx_2\right)} \tag{6.26}$$

El factor de forma $\hat{\kappa}$ suele encontrarse tabulado para casos de secciones transversales simples. Un ejemplo de estas tablas se muestra a continuación (Tabla 6.1).

Sección	Coeficiente de Corte κ	Factor de Forma $\hat{\kappa}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
	$\frac{A_{alma}}{A}$	$\frac{A_{alma}}{A}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{10}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabla 6.1 – Coeficiente de Corte (ver ecuación(6.14)) y Factor de Forma (ver ecuación (6.26)) para distintas secciones.

Ejemplo 6-1: Obtener el Factor de Forma $\hat{\kappa}$ de la sección transversal rectangular que se muestra en la figura.



$$I_1 = \frac{b\,h^3}{12} \quad \Rightarrow \quad I_1^2 = \frac{b^2\,h^6}{144}$$

$$S_1^*(x_2) = \frac{b(x_2)}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - x_2^2\right]$$

Para evaluar el denominador de la ec. (6.26), se considera la simetría de la sección respecto al eje x_1, entonces la integral a lo largo de h resulta,

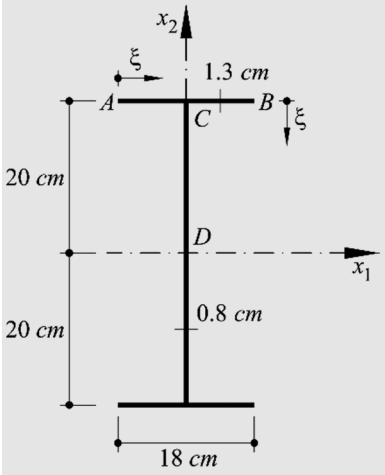
$$2\int_0^{h/2} \frac{S_1^{*2}(x_2)}{b(x_2)}\,dx_2 = 2\int_0^{h/2} \frac{1}{b}\left(\frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - x_2^2\right]\right)^2 dx_2$$

$$= \frac{b}{2}\int_0^{h/2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{h}{2}\right)^2 x_2^2 + x_2^4\right] dx_2$$

$$= \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^4 x_2 - \frac{2}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 x_2^3 + \frac{x_2^5}{5}\right]\Bigg|_0^{h/2} = \frac{b\,h^5}{120}$$

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{A}}{A} = \frac{I_1^2}{\underbrace{b\,h}_{A}\int_h \frac{S_1^{*2}(x_2)}{b(x_2)}dx_2} = \frac{\frac{b^2\,h^6}{144}}{b\,h\frac{b\,h^5}{120}} = \frac{5}{6}$$

Ejemplo 6-2: Obtener el Factor de Forma $\hat{\kappa}$ de la sección transversal delgada que se muestra en la figura,



$$A = (1.3\cdot 18)\cdot 2 + 0.8\cdot 40 = 78.8\,cm^2$$

$$I_1 = \left(\frac{0.8\cdot 40^3}{12}\right) + \left[2\cdot\left(1.3\cdot 18\cdot 20^2\right)\right] = 22987\,cm^4$$

Momentos estáticos,

$$\begin{cases} S_1^*(\xi)\Big|^{AB} = (1.3\,\xi)\cdot 20 = 26\,\xi \\ S_1^*(\xi)\Big|^{CD} = \left[(1.3\cdot 18\cdot 20)\right] + \left[(0.8\,\xi)\left(20 - \frac{\xi}{2}\right)\right] = \\ \qquad\qquad = 468 + 16\,\xi - 0.4\,\xi^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(S_1^*(\xi)\Big|^{AB}\right)^2 = 676\,\xi^2 \\ \left(S_1^*(\xi)\Big|^{CD}\right)^2 = 0.16\,\xi^4 - 12.8\,\xi^3 - 118.4\,\xi^2 + 14976\,\xi + 219024 \end{cases}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{4\int_0^{18/2} \frac{\left(S_1^*(\xi)\Big|^{AB}\right)^2}{I_1^2\, b(\xi)}\, d\xi + 2\int_0^{20} \frac{\left(S_1^*(\xi)\Big|^{CD}\right)^2}{I_1^2\, b(\xi)}\, d\xi}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{\frac{4}{I_1^2}\int_0^{9} \frac{676\,\xi^2}{1.3}\, d\xi + \frac{2}{I_1^2}\int_0^{20} \frac{0.16\,\xi^4 - 12.8\,\xi^3 - 118.4\,\xi^2 + 14976\,\xi + 219024}{0.8}\, d\xi}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{0.0009565 + 0.03146} = 30.848\, cm^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\kappa} = \frac{\hat{A}}{A} = \frac{30.848}{78.8} = 0.3914$$

Si se compara el área reducida con el área de la sección transversal del alma, se concluye que son muy similares para estas secciones delgadas. Por lo tanto, siguiendo la aproximación que se muestra en la Tabla 6.1, el factor de forma resulta,

$$A^{alma} = 0.8 \times 40 = 32\, cm^2 \qquad \rightarrow \qquad \hat{\kappa} \simeq \frac{A^{alma}}{A} = \frac{32}{78.8} = 0.406$$

Lo que implica que este cálculo simplificado introduce un error pequeño, del 3.73%, en el cálculo de la energía para esta sección.

6.3.3 Tensiones tangenciales por corte recto en secciones abiertas delgadas

Las secciones transversales de paredes delgadas son muy frecuentes en las estructuras por su alta rigidez y bajo peso.

Geométricamente se puede decir que se trata de una barra de pared delgada si una de las dimensiones de la sección transversal es mucho menor que la otras, es decir que el espesor t es mucho menor que el perímetro desarrollado s de la sección transversal (ver Figura 6.19), y a su vez esta dimensión s es también mucho menor que la longitud ℓ de la barra.

Los fundamentos básicos del comportamiento estructural de barras de paredes delgadas con fuerte influencia del esfuerzo de corte, fueron iniciados por Timoshenko y sus desarrollos posteriores se deben a Vlasov.

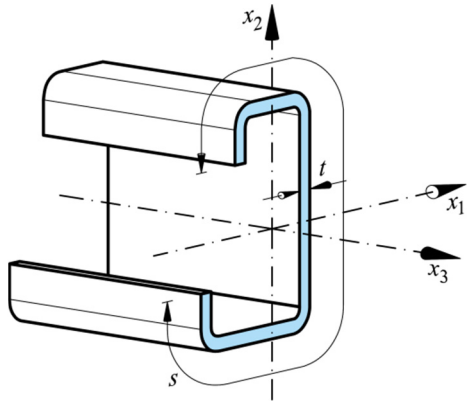


Figura 6.19 – Representación esquemática de una sección transversal de paredes delgadas.

La formulación básica del comportamiento a flexión y tracción axil, obtenidas anteriormente para secciones macizas, se puede extender sin mayores errores a secciones delgadas. En la Figura 6.20 se muestra, a modo de ejemplo, la distribución de tensiones normales por flexión y por axil de tracción en este tipo de secciones.

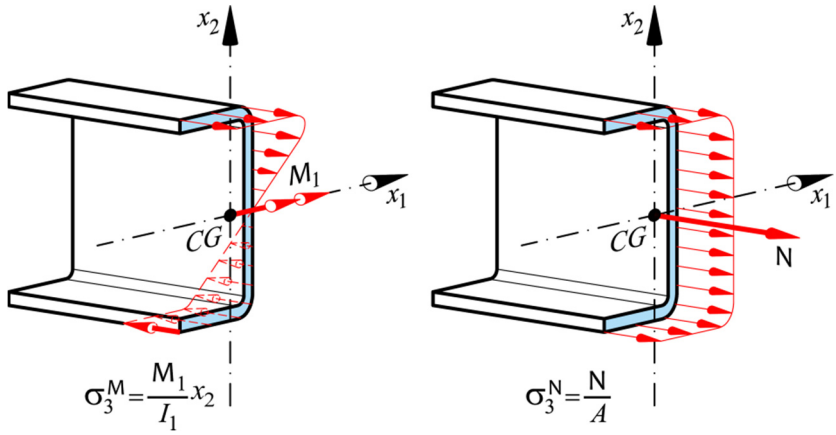


Figura 6.20 – Representación esquemática de la distribución de tensiones normales en secciones transversales de paredes delgadas.

Por el contrario, esta formulación no se puede extender a problemas de compresión axial en los cuales se manifiesta más fuertemente el fenómeno de inestabilidad global (pandeo) que en las secciones macizas. Esto se debe a que en las secciones de pared delgada el mencionado fenómeno suele ir acoplado a una inestabilidad local (abolladura) que, por sus alcances conceptuales, exceden del tratamiento que se hará en este capítulo. Por otro lado, conviene advertir que las semejanzas con el comportamiento de las sec-

ciones macizas difieren también en algunos casos por el no-cumplimiento del principio de Saint-Venant en los extremos de las secciones, ya que aparecen efectos locales de alabeos para cargas axiales cuya resultante pasa por el centroide de la sección (ver Figura 6.21).

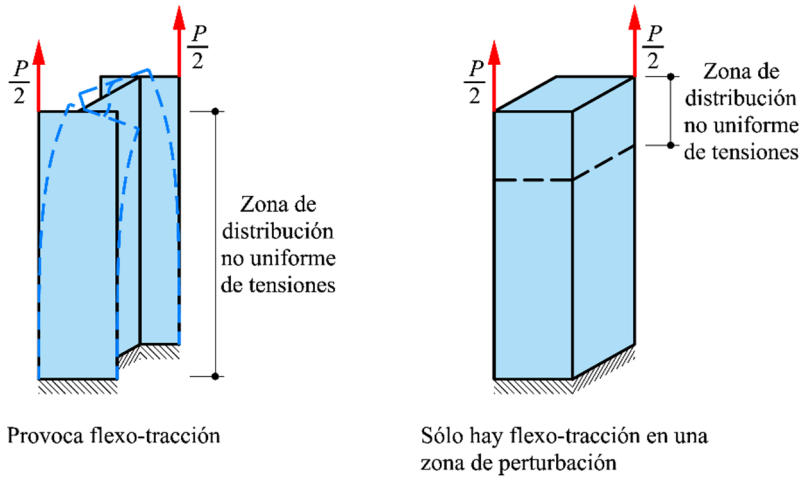


Figura 6.21 – Representación esquemática de la distribución de tensiones normales en secciones transversales de paredes delgadas.

6.3.3.1 Distribución y magnitud de las tensiones tangenciales en secciones abiertas de paredes delgadas

En una barra de sección transversal de paredes delgadas sometida a flexión más corte, sigue siendo dominante el efecto de la tensión normal o axial σ que es fundamental para determinar la estabilidad estructural de la barra (Figura 6.22 a). Sin embargo, y a diferencia de las secciones macizas, adquiere en este caso una gran importancia el efecto de las tensiones tangenciales. Estas tensiones se obtienen siguiendo la misma formulación que en las secciones macizas (fórmula de Collignon-Jourawski, Sección 6.3), con la hipótesis que estas tensiones tangenciales se desarrollan en un plano normal al contorno de la sección (sección *A-A*, Figura 6.22 c) y no paralelas a la capa neutra (eje principal x_1 en el caso de flexión recta).

Resulta conveniente expresar las tensiones tangenciales en función de la coordenada curvilínea s , que es un sistema de referencia local referido, a su vez, al sistema de referencia principal de inercia x_1 y x_2 (ver Figura 6.23). Siguiendo la misma deducción conceptual que para las secciones macizas (ecuación (6.12)), se puede obtener el estado

tensional $\tau(s)$ con su correspondiente *flujo de corte* $f(s)$ (Figura 6.24). El flujo de corte es el producto de dicha tensión tangencial por el espesor de la pared $t(s)$ como se muestra a continuación,

$$\tau_{s3}(s) = \tau_{3s}(s) = \tau(s) = \frac{Q_2\, S_1^*(s)}{I_1\, t(s)} \quad \Rightarrow \quad f(s) = \tau(s)\cdot t(s) = \frac{Q_2\, S_1^*(s)}{I_1} \qquad (6.27)$$

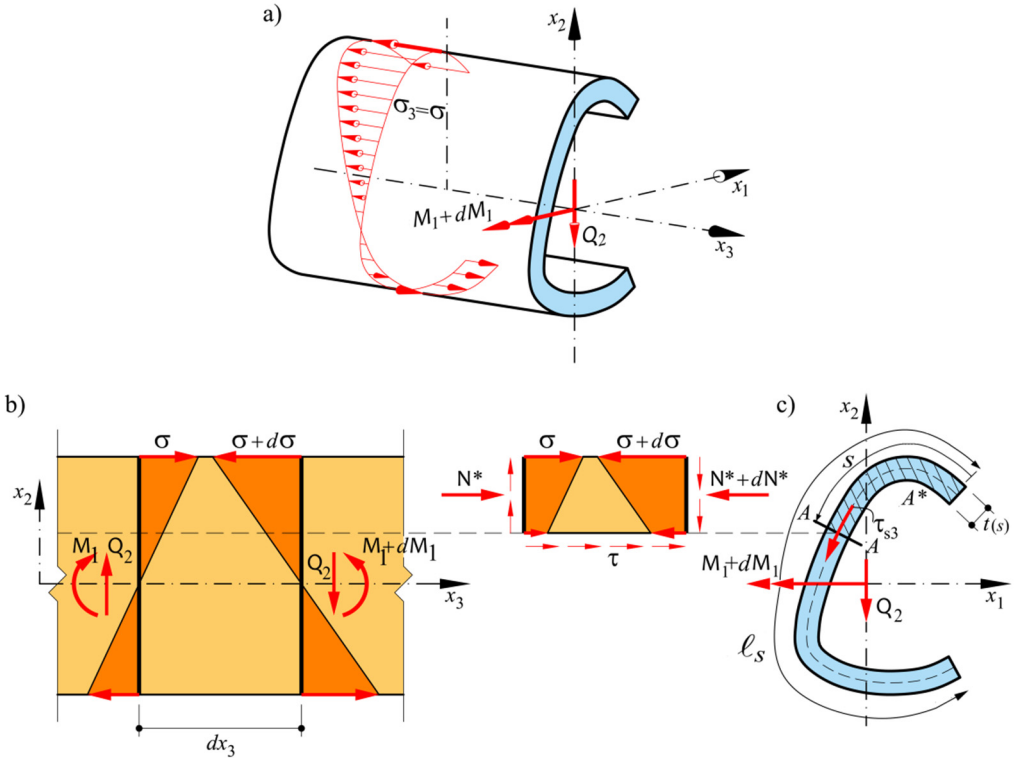


Figura 6.22 – a) Tensiones normales $\sigma_3 = \sigma$ debidas a $M_1 = M$; b) Equilibrio en un elemento diferencial de barra de sección delgada sometida flexión; c) Dirección de la tensión tangencial.

Integrando el flujo de tensiones $f(s)$ respecto a la coordenada s tangente al contorno de la sección, o la propia tensión tangencial, se obtiene la fuerza resultante V_s o $V = Q_2$, según la integral se lleve a cabo en una parte de la sección o en todo el desarrollo ℓ_s, respectivamente. Es decir,

$$V_s = \int_s f(s)\,ds = \int_s \tau(s)\overbrace{t(s)\,ds}^{dA} = \int_{A^*} \tau(s)\,dA$$

$$V = \int_{\ell_s} \overbrace{\frac{Q_2\,S_1^*(s)}{I_1\,t(s)}}^{\tau(s)} t(s)\,ds = \frac{Q_2}{I_1}\overbrace{\int_{\ell_s} S_1^*(s)\,ds}^{I_1} = Q_2 \tag{6.28}$$

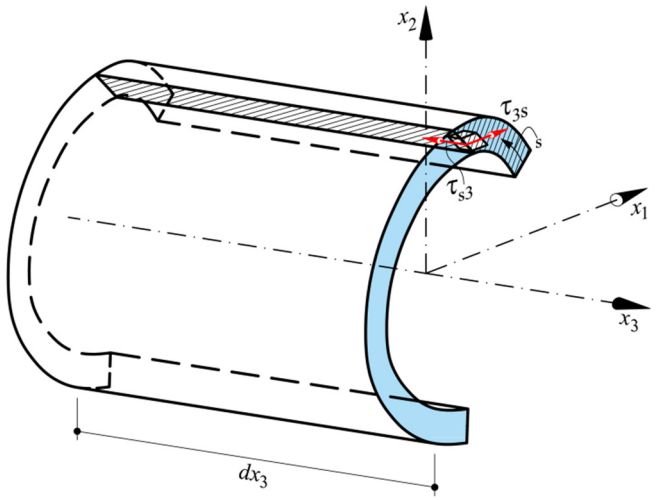


Figura 6.23 – Tensiones tangenciales y ejes locales en una sección transversal de paredes delgadas.

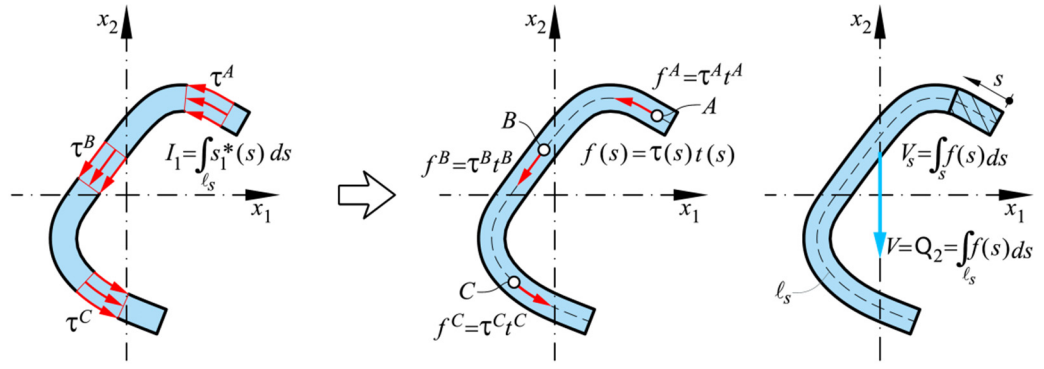


Figura 6.24 – Distribución de tensiones tangenciales, flujo de tensiones y esfuerzo de corte en una sección transversal de paredes delgadas.

6.3.3.2 Sección doble T delgada – Tensiones tangenciales por corte

A continuación, se presenta un análisis detallado del cálculo de las tensiones tangenciales $\tau(s)$ y flujo por corte $f(s)$ para la sección doble T de paredes delgadas (ver Figura 6.25) que, en ejemplos posteriores para otras formas de perfiles, se resumirá por razones de espacio.

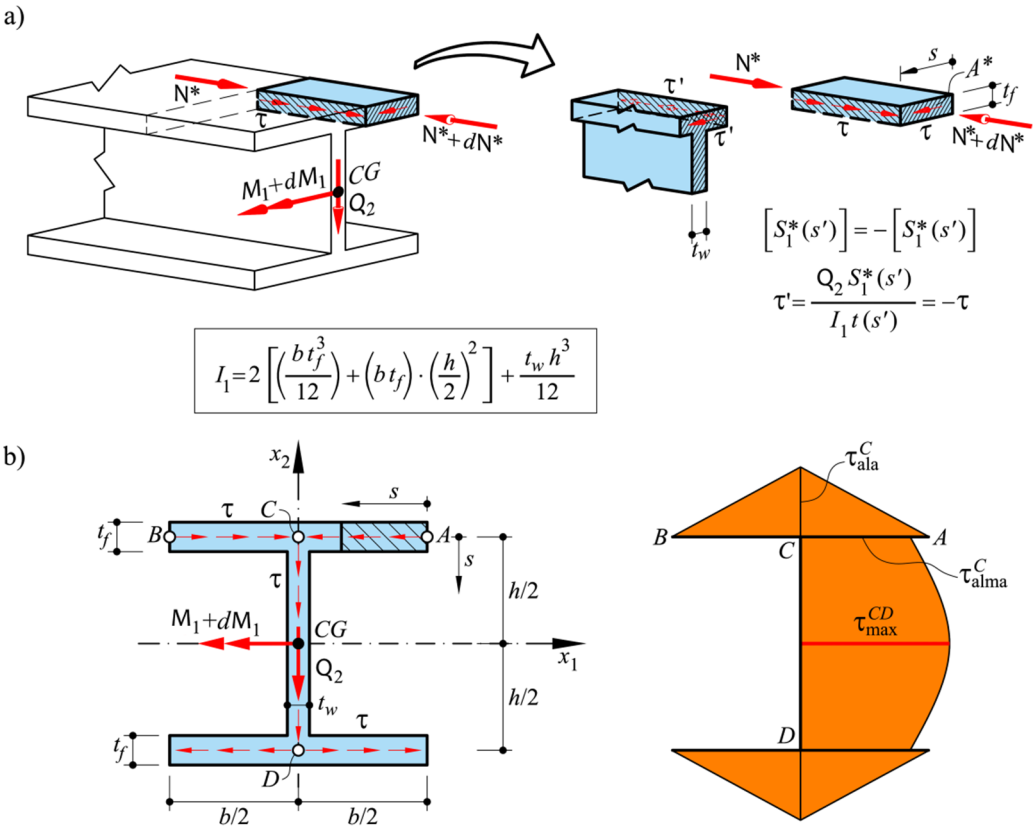


Figura 6.25 – Distribución de tensiones tangenciales, flujo de tensiones y esfuerzo de corte en una sección transversal doble T de paredes delgadas. a) Equilibrio interno de una parte de la sección cortada a una distancia s del origen de coordenadas; b) Dirección y magnitud de las tensiones tangenciales en la sección.

Como se puede ver en la expresión de Collignon-Jourawski, el problema de cálculo para obtener la *tensión tangencial* $\tau(s)$ o el *flujo de tensiones* $f(s)$, radica en la evaluación del momento estático $S_1^*(s)$. Esto es así porque tanto el corte Q_2 como el momento de inercia I_1 son constantes en la sección transversal,

$$f(s) = \overbrace{\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]}^{cte} S_1^*(s) \ , \quad \text{o} \qquad \tau(s) = \frac{f(s)}{t(s)} \tag{6.29}$$

El sentido que tiene el flujo de corte se puede obtener por distintos procedimientos, dentro de los cuales está el método de los cortes (Figura 6.25 a), o bien, teniendo en cuenta el signo del momento estático respecto del sistema de referencia adoptado.

El sentido y variación del flujo, así como de las tensiones tangenciales que se presentan a continuación, resultan del signo del momento estático en las coordenadas locales utilizadas.

- **Ala superior:**

Se evalúa a continuación el flujo $f^{AC}(s)$ y la tensión tangencial $\tau^{AC}(s)$ en el ala superior a partir de un eje de referencia local s , con $0 \le s \le b/2$, (ver Figura 6.26)

$$\begin{aligned} f^{AC}(s) &= \left[\frac{Q_2}{I_1}\right] S_1^*(s) \\ &= \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left[\left(s \cdot t_f\right)\frac{h}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} f^{AC}(s=0) = f^A = 0 \\ f^{AC}(s=\dfrac{b}{2}) = \left(f^C\right)^{der} = \left[\dfrac{Q_2}{I_1}\right]\dfrac{b\,h}{4}t_f \end{cases} \\ \tau^{AC}(s) &= \frac{f^{AC}(s)}{t_f} = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{\left(s \cdot t_f\right)}{t_f}\frac{h}{2} \\ &= \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{s\,h}{2} \Rightarrow \begin{cases} \tau^{AC}(s=0) = \tau^A = 0 \\ \tau^{AC}(s=\dfrac{b}{2}) = \left(\tau^C\right)^{der} = \left[\dfrac{Q_2}{I_1}\right]\dfrac{b\,h}{4} \end{cases} \end{aligned} \tag{6.30}$$

Si se repite el cálculo a partir de un eje de referencia local s', desde el otro extremo del ala superior, se obtienen las mismas magnitudes (y signo) para el flujo y las tensiones tangenciales que allí se desarrollan, pero respetando la dirección de la referencia local s' (signo eficaz), es decir en sentido contrario a s . De esta forma, en la confluencia de las alas (punto C), el flu-

jo total $f^C = \left(f^C\right)^{der} + \left(f^C\right)^{izq}$ y la tensión total $\tau^C = \left(\tau^C\right)^{der} + \left(\tau^C\right)^{izq}$, resultan,

$$
\begin{aligned}
f^C &= \left(f^C\right)^{der} + \left(f^C\right)^{izq} = 2\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{b\,h}{4}t_f = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{b\,h}{2}t_f \\
\tau^C &= \left(\tau^C\right)^{der} + \left(\tau^C\right)^{izq} = 2\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{b\,h}{4} = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{b\,h}{2}
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

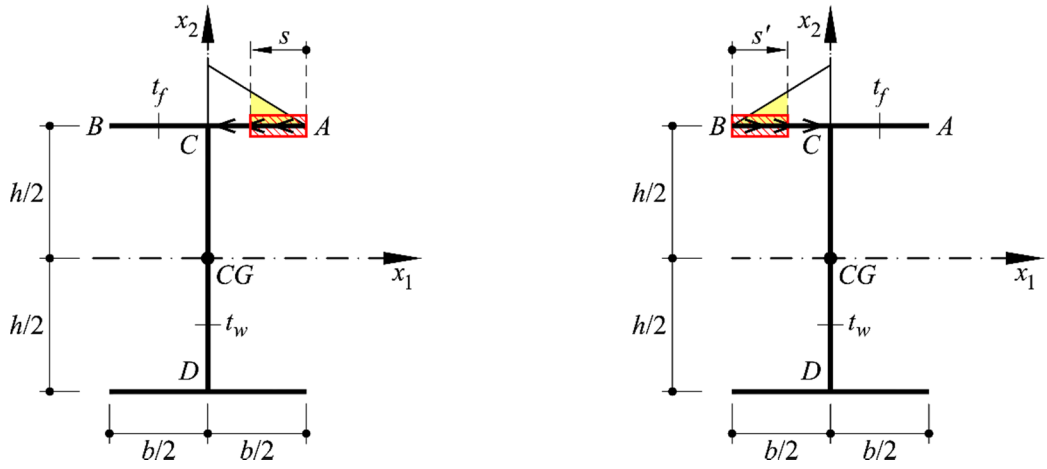


Figura 6.26 – Distribución de tensiones tangenciales, flujo de tensiones en el ala superior de la sección transversal doble T de paredes delgadas.

- **Alma:**

  Avanzando en el cálculo del flujo y la tensión sobre esta sección transversal de paredes delgadas, se procede ahora a poner el sistema de referencias local s en una nueva posición C (con $0 \le s \le h$), tal como se muestra en la Figura 6.27. En este caso se suma al flujo total del ala superior f^C el flujo del alma. Esto es equivalente a tener en cuenta el momento estático del ala superior más el del alma, de donde surge una ecuación cuadrática que alcanza su máximo a la altura del eje neutro que, como se ha estudiado en el capítulo de flexión, coincide en este caso con el eje principal de inercia x_1. Es claro que para $s = h$ (punto D) se recupera el flujo y la tensión tangencial que se tenía en $s = 0$.

$$f^{CD}=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]S_1^*(s)=f^C+\left[\frac{Q_2}{I_1}\right](s\,t_w)\left(\frac{h}{2}-\frac{s}{2}\right)=$$

$$=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left[\frac{b\,h}{2}t_f+\left(\frac{s\,h\,t_w}{2}-\frac{s^2\,t_w}{2}\right)\right]\Rightarrow\begin{cases}f^{CD}(s=0)=f^C=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left(\frac{b\,h}{2}t_f\right)\\ f^{CD}(s=\frac{h}{2})=f^{CD}_{\max}=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left(\frac{b\,h}{2}t_f+\frac{h^2\,t_w}{8}\right)\\ f^{CD}(s=h)=f^D=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left(\frac{b\,h}{2}t_f\right)\end{cases}\tag{6.32}$$

$$\tau^{CD}(s)=\frac{f^{CD}(s)}{t_w}=\left[\frac{b\,h}{2}\frac{t_f}{t_w}+\left(\frac{s\,h}{2}-\frac{s^2}{2}\right)\right]\quad\Rightarrow\begin{cases}\tau^{CD}(s=0)=\tau^C=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left(\frac{b\,h}{2}\frac{t_f}{t_w}\right)\\ \tau^{CD}(s=\frac{h}{2})=\tau^{CD}_{\max}=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left(\frac{b\,h}{2}\frac{t_f}{t_w}+\frac{h^2}{8}\right)\\ \tau^{CD}(s=h)=\tau^D=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left(\frac{b\,h}{2}\frac{t_f}{t_w}\right)\end{cases}$$

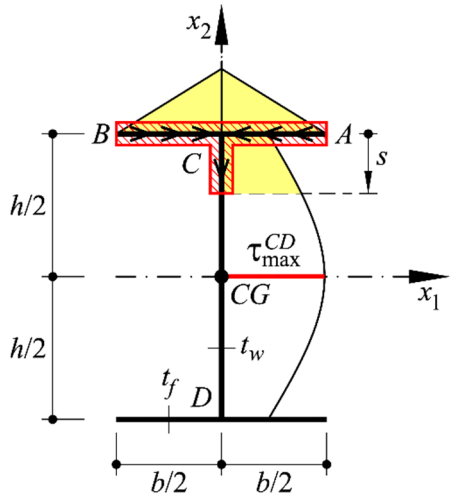


Figura 6.27 – Distribución de tensiones tangenciales, flujo de tensiones en el alma de la sección transversal doble T de paredes delgadas.

- **Ala inferior:**

  El flujo y la tensión tangencial en el ala inferior se pueden obtener por simetría con el ala superior, que equivale a utilizar nuevamente las expresio-

nes (6.30) con dos sistemas de referencias locales: s y s', tal como muestra la Figura 6.28, y que garantiza que el flujo y las tensiones tangenciales en los extremos de las alas inferiores de la sección sean nulo.

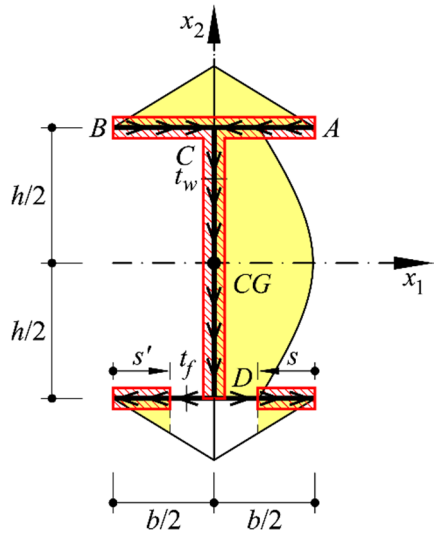


Figura 6.28 – Distribución de tensiones tangenciales, flujo de tensiones en el ala inferior de la sección transversal doble T de paredes delgadas.

Debe recordarse que todos los cálculos anteriores se realizaron sobre los ejes medios de la sección transversal, hipótesis válida sólo para secciones de paredes delgadas. Si los espesores de las paredes fuesen gruesos, se incurriría en un error al utilizar esta formulación y en tal caso debe ser analizada tal como se muestra en el siguiente apartado.

Por otro lado, es conveniente recordar que la sección transversal debe estar en equilibrio y por lo tanto las fuerzas sobre las alas y el alma, que resultan de la integración de los correspondientes flujos sobre el eje de la sección, deben cumplir la siguiente condición para asegurar que estos flujos sean resultantes del corte en la sección (ver Figura 6.29).

$$\begin{cases} \sum F_{x_1} = \sum V_f = 0 \quad \text{(No hay Corte en } x_1\text{)} \\ \sum F_{x_2} = V_w \equiv \mathsf{Q}_2 \\ \sum M_{CG} = 0 \end{cases} \tag{6.33}$$

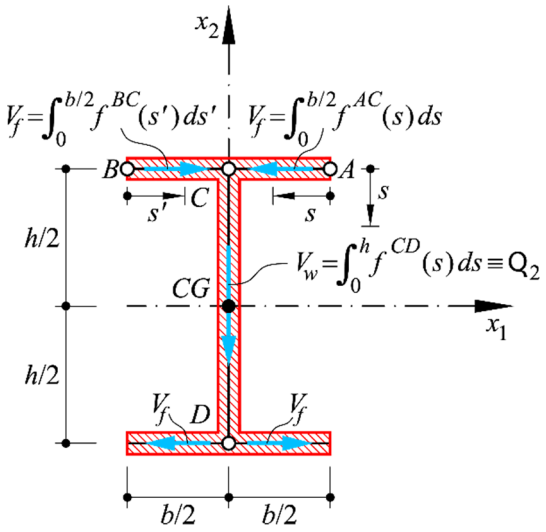


Figura 6.29 – Distribución y equilibrio de las fuerzas ocasionadas por el corte en la sección transversal doble T de paredes delgadas.

6.3.3.3 Sección doble T gruesa – Tensiones tangenciales por corte

El análisis que requiere este tipo de sección difiere conceptualmente de aquel que se llevó a cabo en el apartado anterior. El tratamiento es análogo al que se realiza para una sección maciza (sección 6.3.1), en el que el plano de corte se toma paralelo al eje principal x_1. Para ilustrar esto, se adopta una sección doble T (Figura 6.30), de altura total h_1 y base b pero, en este caso, sus paredes son gruesas. Esto es,

$$f(x_2) = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right] S_1^*(x_2) \quad \rightarrow \quad \tau(x_2) = \frac{f(x_2)}{b(x_2)} \tag{6.34}$$

- **Para un plano de corte a la altura x_2 comprendida dentro del ala superior:**

$$f^{ala}(x_2)=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]S_1^*(x_2)=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]\left[b\left(\frac{h_1}{2}-x_2\right)\left(\frac{h_1}{4}+\frac{x_2}{2}\right)\right] \qquad \boxed{h/2\le x_2\le h_1/2}$$

$$=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-x_2^2\right)\right]=\frac{\mathrm{Q}_2 b}{2I_1}\left(\frac{h_1^2}{4}-x_2^2\right)\Rightarrow\begin{cases} f(x_2=\dfrac{h_1}{2})=0 \\ f(x_2=\dfrac{h}{2})=\dfrac{\mathrm{Q}_2 b}{2I_1}\left(\dfrac{h_1^2}{4}-\dfrac{h^2}{4}\right)= \\ \qquad \dfrac{\mathrm{Q}_2 b}{2I_1}\underbrace{\left(\dfrac{h_1}{2}-\dfrac{h}{2}\right)}_{t_f}\left(\dfrac{h_1}{2}+\dfrac{h}{2}\right) \end{cases} \tag{6.35}$$

- **Para un plano de corte a la altura x_2 comprendida dentro del alma:**

$$f^{alma}(x_2)=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]S_1^*(x_2) \qquad \boxed{0\le x_2\le h/2}$$

$$=\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\left[\frac{b}{2}t_f\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h}{2}\right)+\frac{t_w}{2}\left(\frac{h}{2}-x_2\right)\left(\frac{h}{2}+x_2\right)\right]= \tag{6.36}$$

$$=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{2I_1}\right]\left[b\,t_f\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h}{2}\right)+t_w\left(\frac{h^2}{4}-x_2^2\right)\right]$$

Resultando, a partir de los flujos antes obtenidos, las siguientes tensiones tangenciales,

$$\tau^{ala}(x_2=\frac{h}{2})=\frac{f^{alma}(x_2=\frac{h}{2})}{b}=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{2I_1}\right]t_f\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h}{2}\right)$$

$$\tau^{alma}(x_2=\frac{h}{2})=\frac{f^{alma}(x_2=\frac{h}{2})}{t_w}=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{2I_1}\right]\left[b\frac{t_f}{t_w}\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h}{2}\right)\right] \tag{6.37}$$

$$\tau^{alma}(x_2=0)=\frac{f^{alma}(x_2=0)}{t_w}=\tau^{\max}=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{2I_1}\right]\left[b\frac{t_f}{t_w}\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h}{2}\right)+\frac{h^2}{4}\right]$$

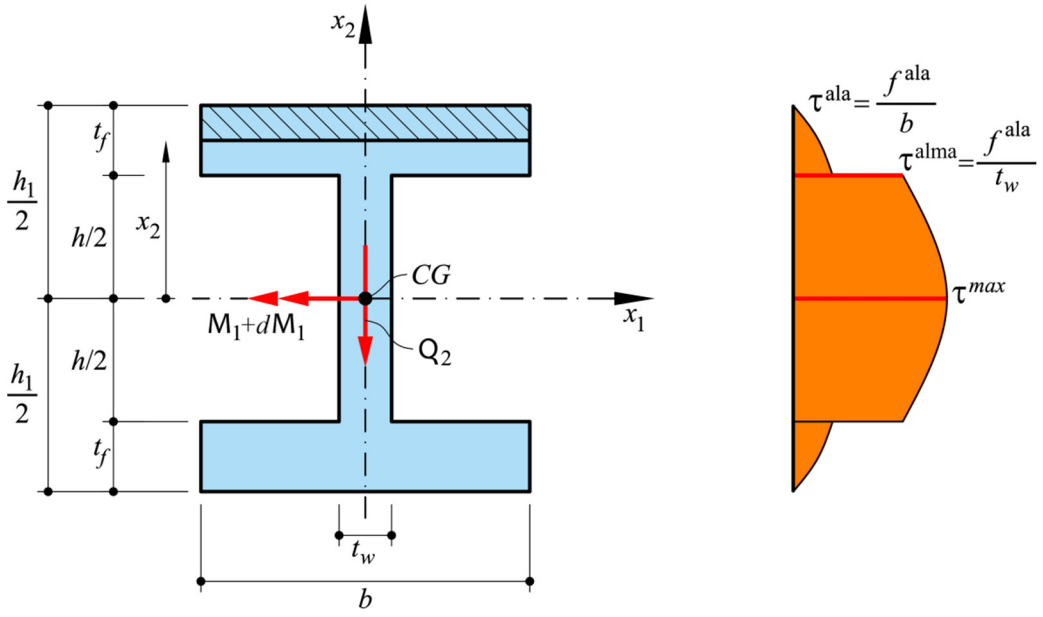


Figura 6.30 – Distribución de tensiones tangenciales, flujo de tensiones y esfuerzo de corte en una sección transversal doble T de paredes gruesas.

6.3.3.4 Sección U delgada – Tensiones tangenciales por corte

A continuación, se presentará un análisis detallado del cálculo de las tensiones tangenciales y flujo por corte para la sección U de paredes delgadas (ver Figura 6.31), siguiendo el mismo procedimiento de análisis basado en la expresión de Collignon-Jourawski descrito para la sección doble T delgada antes analizada.

$$f(s)=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]S_1^*(s) \quad \rightarrow \quad \tau(s)=\frac{f(s)}{t(s)} \tag{6.38}$$

Se recuerda nuevamente que el sentido que tiene el flujo de corte se puede obtener por el método de los cortes, o teniendo en cuenta el signo del momento estático respecto del sistema de referencia adoptado.

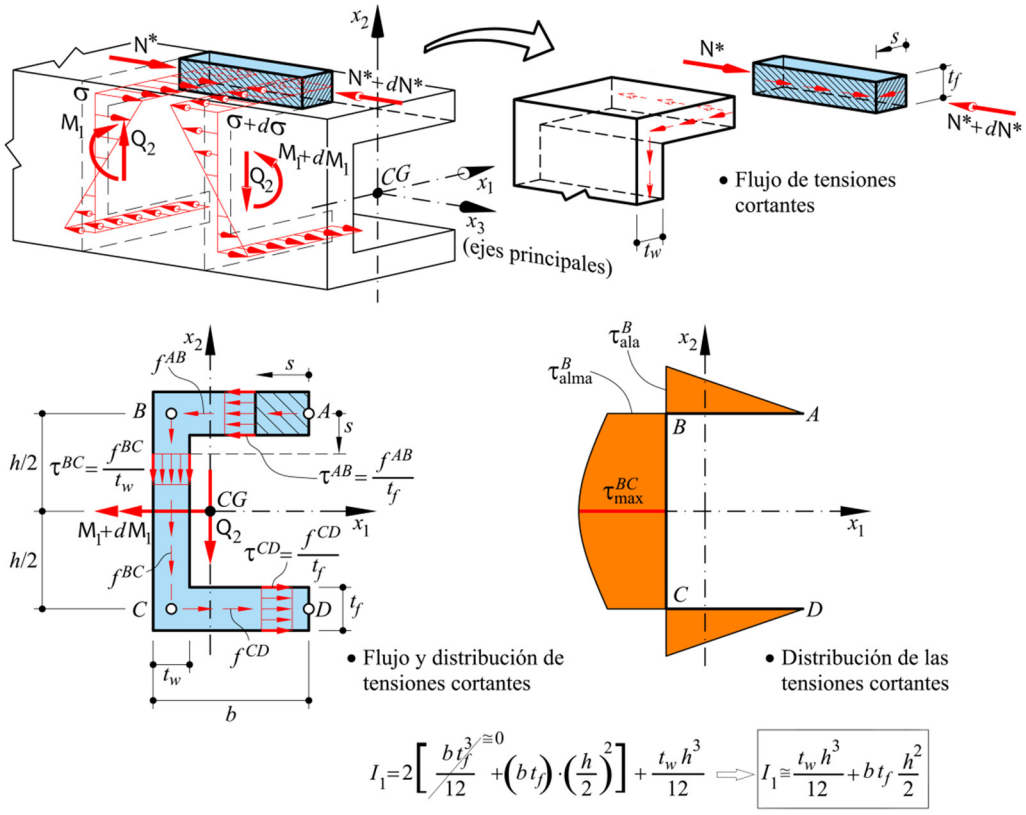


Figura 6.31 – Distribución de tensiones tangenciales, flujo de tensiones y esfuerzo de corte en una sección transversal U de paredes delgadas.

- **Ala superior:**

Se evalúa el flujo $f^{AB}(s)$ y la tensión tangencial $\tau^{AB}(s)$ en el ala superior a partir de un eje de referencia loca s, con $0 \le s \le b$ (ver Figura 6.32),

$$f^{AB}(s) = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right] S_1^*(s) = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left[(s\cdot t_f)\frac{h}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} f^{AB}(s=0) = f^A = 0 \\ f^{AB}(s=b) = f^B = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{bh}{2} t_f \end{cases}$$

$$V^{AB} = \int_0^b f^{AB}(s)\,ds = \frac{Q_2}{I_1}\frac{t_f h}{2}\int_0^b s\,ds = \frac{Q_2}{I_1}\frac{t_f h b^2}{4}$$

$$\tau^{AB}(s)=\frac{f^{AB}(s)}{t_f}=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{\left(s\cdot t_f\right)}{t_f}\frac{h}{2}=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{s\,h}{2}\Rightarrow\begin{cases}\tau^{AB}(s=0)=\tau^{A}=0\\ \tau^{AB}(s=b)=\tau^{B}=\left[\dfrac{Q_2}{I_1}\right]\dfrac{b\,h}{2}\end{cases}\qquad(6.39)$$

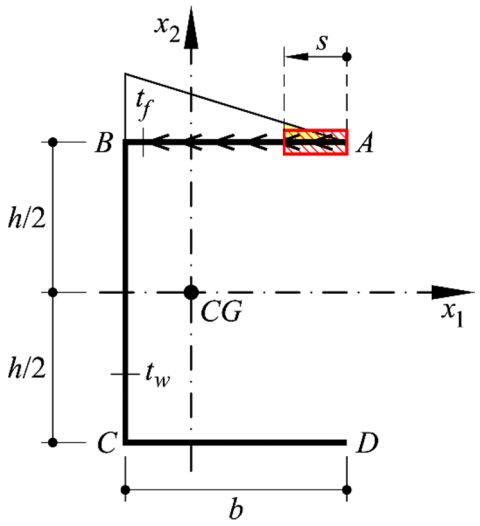


Figura 6.32 – Distribución de tensiones tangenciales, flujo de tensiones en el ala superior de la sección transversal U de paredes delgadas.

- **Alma:**

  Se procede ahora a poner el sistema de referencias local s en B, con $0\le s\le h$ tal como se muestra en la Figura 6.33. En este caso se suma al flujo del ala superior f^{B}, el flujo del alma $f^{BC}(s)$ que se calculará en este apartado. Esto es equivalente a tener en cuenta el momento estático del ala superior más el de la parte del alma definida por la coordenada local s, de donde surge una ecuación cuadrática con un máximo en el eje neutro que, como se ha estudiado en el capítulo de flexión, coincide en este caso, con el eje principal de inercia x_1, y que para $s=h$ en C recupera el flujo y la tensión tangencial que tenía en $s=0$.

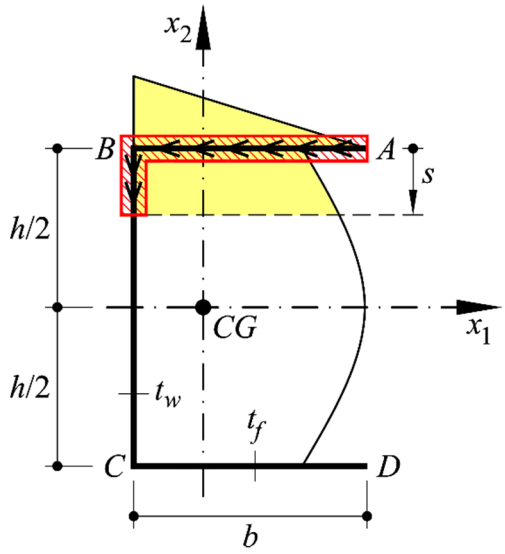


Figura 6.33 – Distribución de tensiones tangenciales, flujo de tensiones en el alma de la sección transversal U de paredes delgadas.

$$f^{BC}(s)=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]S_1^*(s)=f^B+\left[\frac{Q_2}{I_1}\right](s\,t_w)\left(\frac{h}{2}-\frac{s}{2}\right)=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left[\frac{b\,h}{2}t_f+\left(\frac{s\,h\,t_w}{2}-\frac{s^2t_w}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f^{BC}(s=0)=f^B=\left[\dfrac{Q_2}{I_1}\right]\left[\dfrac{b\,h}{2}t_f\right] \\ f^{BC}(s=\dfrac{h}{2})=f^{\max}=\left[\dfrac{Q_2}{I_1}\right]\left[\dfrac{b\,h}{2}t_f+\dfrac{h^2t_w}{8}\right] \\ f^{BC}(s=h)=f^C=\left[\dfrac{Q_2}{I_1}\right]\left[\dfrac{b\,h}{2}t_f\right] \end{cases} \tag{6.40}$$

$$V^{BC}=\int_0^h f^{BC}(s)\,ds=\frac{Q_2}{I_1}\left[\int_0^h\left(\frac{b\,h}{2}t_f\right)ds+\int_0^h\left(\frac{s\,h\,t_w}{2}-\frac{s^2t_w}{2}\right)ds\right]$$

$$=\frac{Q_2}{I_1}\left[\frac{b\,h^2}{2}t_f+\frac{h^3\,t_w}{12}\right]\equiv Q_2$$

$$\tau^{BC}(s)=\frac{f^{BC}(s)}{t_w}=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left[\frac{b\,h}{2}\frac{t_f}{t_w}+\left(\frac{s\,h}{2}-\frac{s^2}{2}\right)\right]$$

$$\tau^{BC}(s) \quad \Rightarrow \begin{cases} \tau^{BC}(s=0) = \tau^{B} = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left[\frac{b\,h}{2}\frac{t_f}{t_w}\right] \\ \tau^{BC}(s=\frac{h}{2}) = \tau^{BC}_{\max} = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left[\frac{b\,h}{2}\frac{t_f}{t_w} + \frac{h^2}{8}\right] \\ \tau^{BC}(s=h) = \tau^{C} = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left[\frac{b\,h}{2}\frac{t_f}{t_w}\right] \end{cases}$$

- **Ala inferior:**

El flujo y la tensión tangencial en el ala inferior se pueden obtener por simetría con el ala superior, que equivale a utilizar un sistema de referencias s, ecuación (6.39), o un sistema de referencias s' acumulando el flujo que proviene del ala. En ambos casos se garantiza que el flujo y las tensiones tangenciales en el extremo del ala inferior de la sección (en D) son nulos.

Sistema de referencias s (Figura 6.34 a) $(0 \le s \le b)$

$$f^{DC}(s) = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right] S_1^*(s) = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left[\left(s\,t_f\right)\left(-\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{DC}(s=0) = f^{D} = 0 \\ f^{DC}(s=b) = f^{C} = -\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{b\,h}{2}t_f \end{cases} \tag{6.41}$$

$$V^{DC} = \int_0^b f(s)ds = -\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{t_f h}{2}\int_0^b s\,ds = -\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{t_f h b^2}{4}$$

$$\tau^{DC}(s) = \frac{f^{DC}(s)}{t_f} = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{\left(s\,t_f\right)}{t_f}\left(-\frac{h}{2}\right) = -\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{s\,h}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau^{DC}(s=0) = \tau^{D} = 0 \\ \tau^{DC}(s=b) = \tau^{C} = -\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{b\,h}{2} \end{cases}$$

Verifica que el flujo en C es igual viniendo desde el alma que desde ala inferior.

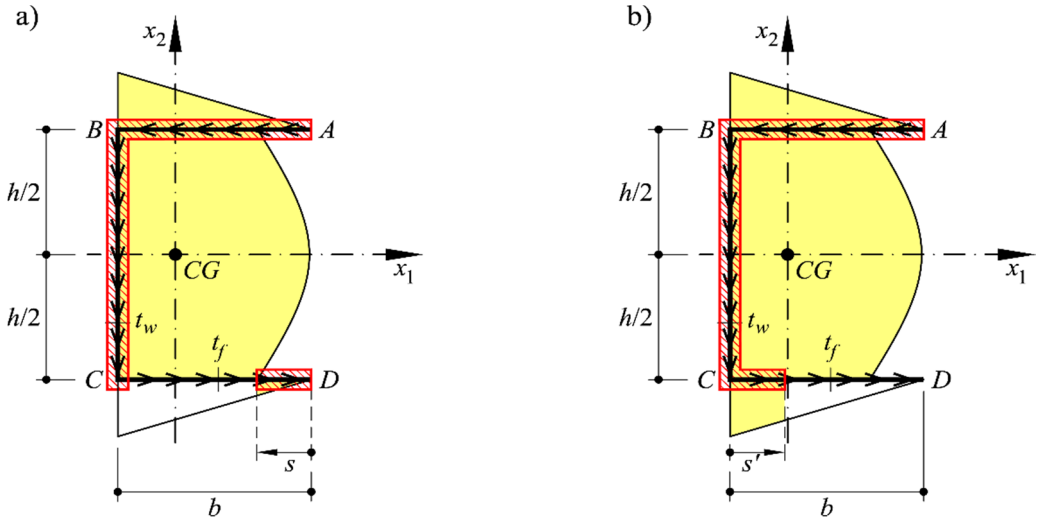


Figura 6.34 – Distribución de tensiones tangenciales, flujo de tensiones en el ala inferior de la sección transversal U de paredes delgadas: a) Sistema de referencia local s , b) Sistema de referencia local s' .

Sistema de referencias s' (Figura 6.34 b) $(0 \le s' \le b)$

$$f^{CD}(s') = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right] S_1^*(s') = f^C + \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left(s' t_f\right)\left(-\frac{h}{2}\right)$$

$$= \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left(\frac{bh}{2} t_f - \frac{hs'}{2} t_f\right) \quad \Rightarrow \begin{cases} f^{CD}(s'=0) = f^C = \left[\dfrac{Q_2}{I_1}\right]\left(\dfrac{bh}{2} t_f\right) \\ f^{CD}(s'=b) = f^D = 0 \end{cases}$$

$$V^{CD} = \int_0^b f^{CD}(s')\, ds'$$

$$= \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left(\int_0^b \frac{bh}{2} t_f \, ds' - \int_0^b \frac{hs'}{2} t_f \, ds'\right) = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right] \frac{t_f h b^2}{4}$$

$$\tau^{CD}(s') = \frac{f^{CD}(s')}{t_f} = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right] \frac{S_1^*(s')}{t_f} = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left(\frac{bh}{2} - \frac{hs'}{2}\right) \qquad (6.42)$$

$$\Rightarrow \tau \begin{cases} \tau^{CD}(s'=0) = \tau^C = \left[\dfrac{Q_2}{I_1}\right]\left(\dfrac{bh}{2}\right) \\ \tau^{CD}(s'=b) = \tau^D = 0 \end{cases}$$

Verifica que el flujo en el extremo del ala inferior es nulo.

Nuevamente, se debe recordar que todos los cálculos anteriores se han realizado sobre los ejes medios de la sección transversal, hipótesis válida sólo para secciones de paredes delgadas.

Ahora se estudian las fuerzas que aparecen en las alas y alma como consecuencia de la integración del flujo de corte.

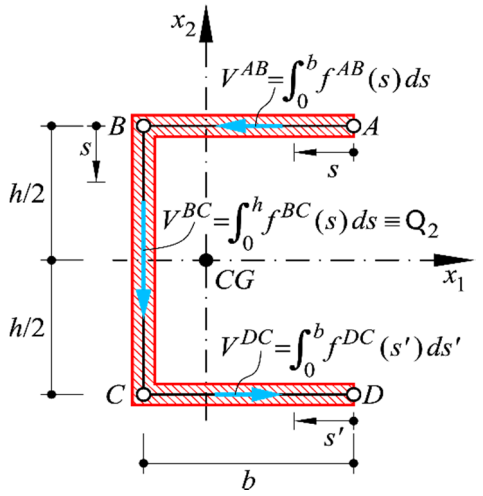


Figura 6.35 – Distribución y equilibrio de las fuerzas producidas por el corte en la sección transversal U de paredes delgadas.

$$\begin{cases} \sum F_{x_1} = V^{AB} + V^{CD} = 0 = Q_1 \quad \text{(No hay Corte en la dirección } x_1\text{)} \\ \sum F_{x_2} = V^{BC} \equiv Q_2 \\ \sum M_{CG} \neq 0 \end{cases} \tag{6.43}$$

En este caso particular, si se observa la ecuación (6.43) se puede concluir que la sección transversal no está en equilibrio porque aparece un momento debido a la acción de los flujos en las alas que producen torsión en la sección. Este problema se tratará a continuación (Sección 6.3.3.5) debido a que es necesario introducir el concepto de *centro de cortante*.

Caso particular de espesor contante en toda la sección: $t = t_f = t_w$

En muchas situaciones prácticas ocurre que los espesores del alma y de las alas son iguales, es decir que el espesor de la sección es constante $t = t_f = t_w$. En estos casos se obtienen expresiones más simples para el flujo y la tensión tangencial que son, simplemente, una simplificación de las expresiones anteriores.

El momento de inercia axial se reduce a la siguiente expresión,

$$I_1 = 2\left(\frac{b\,t\,h^2}{4}\right) + \frac{t\,h^3}{12} = \frac{t\,h^2}{12}\left(6b + h\right) \tag{6.44}$$

Así también, el flujo se reduce a la siguiente expresión,

- **Ala superior:** (A partir de las ecuaciones. (6.39))

$$\begin{aligned} f^{AB}(s) &= \left[\frac{\mathsf{Q}_2}{I_1}\right] S_1^*(s) = \left[\frac{\mathsf{Q}_2}{I_1}\right]\left[\left(s\,t\right)\frac{h}{2}\right] = \frac{6\,\mathsf{Q}_2}{h\left(6b+h\right)}\,s \\ V^{AB} &= \int_0^b f^{AB}(s)\,ds = \int_0^b \frac{6\,\mathsf{Q}_2}{h\left(6b+h\right)}\,s\,ds = \frac{3\,\mathsf{Q}_2 b^2}{h\left(6b+h\right)} \end{aligned} \tag{6.45}$$

- **Alma:** (A partir de las ecuaciones (6.40))

$$\begin{aligned} f^{BC}(s) &= \left[\frac{\mathsf{Q}_2}{I_1}\right] S_1^*(s) = \left[\frac{\mathsf{Q}_2}{I_1}\right]\left[\frac{b\,h}{2}t + \left(\frac{s\,h\,t}{2} - \frac{s^2\,t}{2}\right)\right] = \frac{6\mathsf{Q}_2}{h^2(6b+h)}\left(b\,h + s\,h - s^2\right) \\ f^{BC}(s=\frac{h}{2}) &= f^{BC}_{\max} = \frac{3}{2}\frac{\mathsf{Q}_2(4b+h)}{h(6b+h)}\;; \qquad f^{BC}(s=0) = f^{B} = \frac{6\mathsf{Q}_2 b}{h(6b+h)} \\ V^{BC} &= \int_0^h f(s)\,ds = \frac{6\mathsf{Q}_2}{h^2(6b+h)}\overbrace{\int_0^h \left(b\,h + s\,h - s^2\right)ds}^{b\,h^2+h^3/6} \equiv \mathsf{Q}_2 \end{aligned} \tag{6.46}$$

6.3.3.5 Centro de corte o Centro de torsión

En las secciones de paredes delgadas se puede observar que no todas cumplen con la condición de equilibrio seccional cuando actúa el corte. En algunas de ellas se desarrolla un momento torsor M_T que no se equilibra (ver ecuaciones (6.33) y (6.43)). Esto se

debe a que el esfuerzo de corte en la sección no está pasando por el centro geométrico (CG), o centro mecánico en las secciones compuestas (CM), en lugar de hacerlo por el centro de corte (CC).

Se define entones como centro de corte (CC) de una sección transversal al punto del plano por donde debería pasar la resultante de las fuerzas de corte Q para que en la sección transversal no haya torsión M_T (ver Figura 6.36). Es decir, en aquellas secciones donde la condición de equilibrio rotacional no se cumple $\sum M_{CG} \neq 0$, es porque el corte Q no pasa por el centro de corte CC de la sección transversal, y por lo tanto se produce una torsión que induce tensiones tangenciales que se deben superponer a las que resultan del propio esfuerzo de corte (ver Capítulo 7).

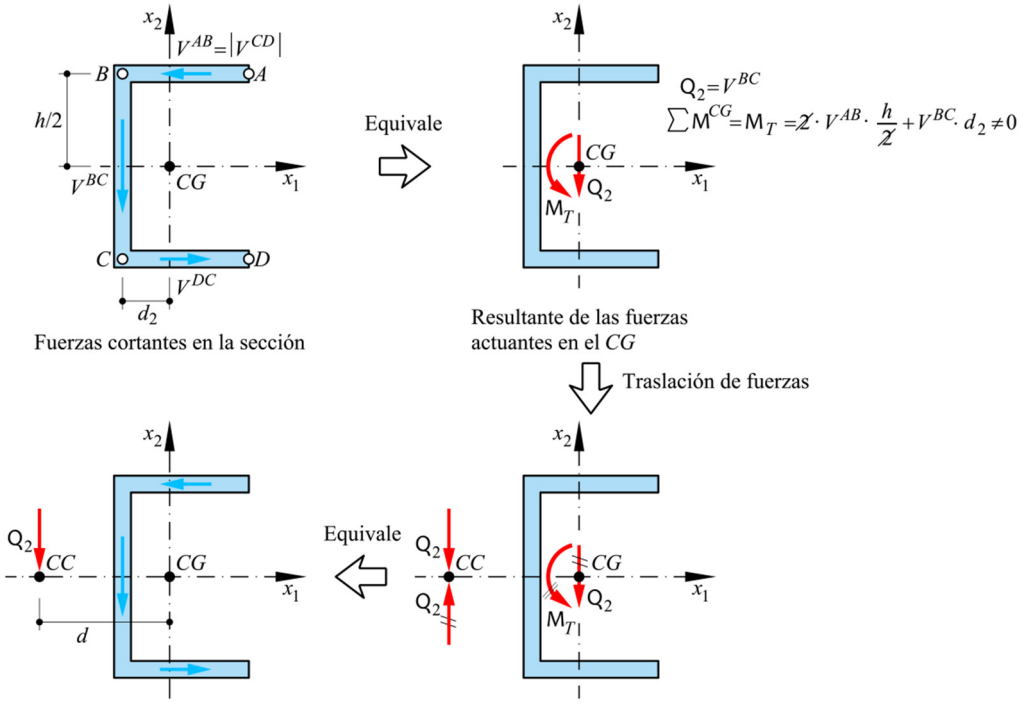


Figura 6.36 – Centro de corte (CC) en una sección transversal U de paredes delgadas.

Para ilustrar este concepto, se propone a continuación obtener el centro de corte CC de la sección transversal U de paredes delgada de espesor constante (caso particular analizado en las ecuaciones (6.44) a (6.46)) (ver Figura 6.37). Para ello se toma momento de todas las fuerzas obrantes en la sección respecto de un punto

cualquiera del plano, en este caso se ha escogido el punto $O \equiv C$, y debe resultar igual al momento producido por la resultante Q_2,

$$V^{AB}\, h = \mathrm{Q}_2\, d_1 \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{V^{AB} h}{\mathrm{Q}_2}$$
$$d_1 = \frac{3\,\mathrm{Q}_2 b^2}{h(6b+h)} \frac{h}{\mathrm{Q}_2} = \frac{3b^2}{(6b+h)} \tag{6.47}$$

Como se puede observar, la distancia d_1 (y por lo tanto d entre el CG y el CC) es independiente de la magnitud del cortante Q_2, esto se debe a que el centro de cortante es una propiedad geométrica de la sección transversal.

En este caso particular no ha sido necesario obtener la coordenada x_2 de CC, puesto que x_1 es un eje de simetría de la sección y por lo tanto el centro de cortante debe estar sobre este eje.

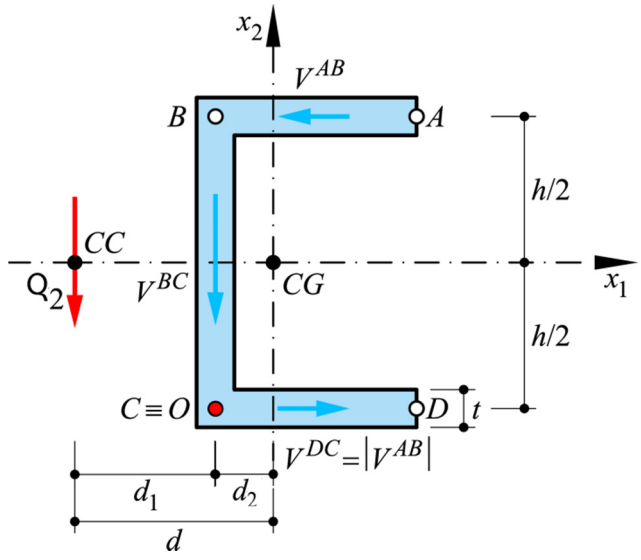


Figura 6.37 – Posición del centro de corte (CC) en una sección transversal U de paredes delgadas.

6.3.3.6 Sección L delgada – Tensiones tangenciales por corte

Siguiendo el mismo procedimiento antes realizado para secciones transversales doble T y U, se analiza a continuación una sección L de paredes delgadas. Se observa que este caso introduce una ligera complicación en el cálculo de los momentos estáticos como consecuencia de que los ejes principales de inercia no resultan paralelos a los lados de la sección transversal.

- **Características geométricas** (ver figura adjunta)**:**

  Área de la sección $\rightarrow \quad A = b_f\, t_f + b_w\, t_w$

El centro geométrico, referido al sistema de referencia $\overline{x} - \overline{y}$ coincidente con los ejes medios de la sección, resulta ubicado en

$$x_{CG} = \frac{b_w^2\, t_w}{2A}; \quad y_{CG} = \frac{b_f^2\, t_f}{2A}$$

Los momentos de inercia y el producto de inercia respecto del sistema cartesiano $x - y$ con origen en el centro geométrico (CG), paralelos a los lados de la sección (ver Figura 6.38a) resultan,

$$I_{xx} = \left[\frac{t_f\, b_f^3}{12} + \left(t_f\, b_f\right)\left(\frac{b_f}{2} - y_{CG}\right)^2\right] + \left[\frac{b_w \cancel{t_w^3}^{\cong 0}}{\cancel{12}} + \left(t_w\, b_w\right)\left(y_{CG}\right)^2\right]$$

$$I_{yy} = \left[\frac{t_w b_w^3}{12} + \left(t_w b_w\right)\left(\frac{b_w}{2} - x_{CG}\right)^2\right] + \left[\frac{b_f \cancel{t_f^3}^{\cong 0}}{\cancel{12}} + \left(t_f\, b_f\right)\left(x_{CG}\right)^2\right]$$

$$I_{xy} = \left[\left(t_f b_f\right)\left(\frac{b_f}{2} - y_{CG}\right)\left(x_{CG}\right)\right] + \left[\left(t_w b_w\right)\left(y_{CG}\right)\left(\frac{b_w}{2} - x_{CG}\right)\right]$$

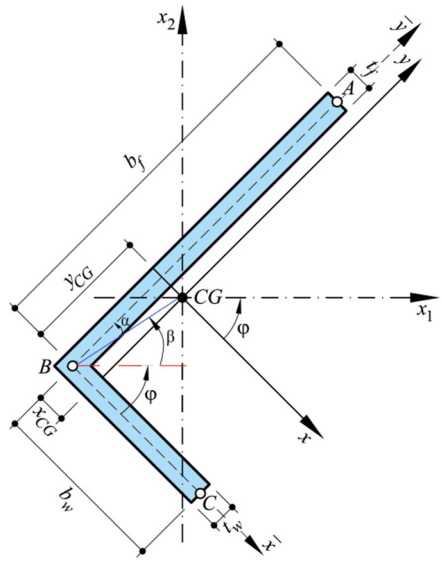
A partir de estas últimas expresiones se pueden obtener los momentos principales de inercia de la sección, así como la orientación de estos ejes principales,

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(I_{xx} - I_{yy}\right)^2}{4} + I_{xy}^2}\,; \quad \text{tg}(2\varphi) = -\frac{2I_{xy}}{\left(I_{xx} - I_{yy}\right)}$$

$$\beta = \text{arctg}\left(\frac{x_{CG}}{y_{CG}}\right)$$

$$\overline{h} = \sqrt{x_{CG}^2 + y_{CG}^2}$$

$$\alpha = 90° - \varphi - \beta$$



- **Cálculo de los momentos estáticos** (ver Figura 6.38)

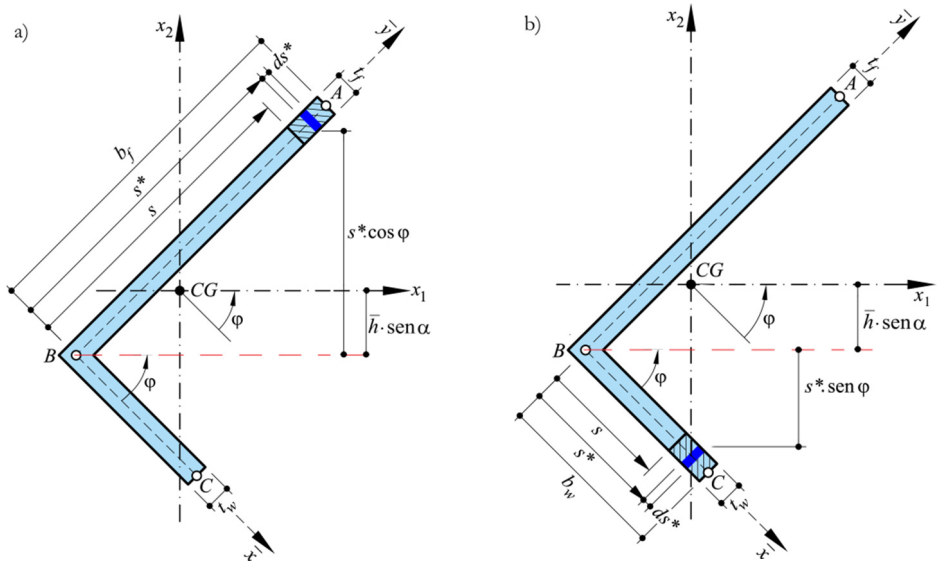


Figura 6.38 – Ejes locales para la determinación de los momentos estáticos: a) Ala superior BA ; b) Ala inferior BC.

El momento estático para el ala superior (tramo BA , Figura 6.38a) respecto al eje $\overline{x}$ está dado por

$$S_{\bar{x}}^{*}(s)=\int_{s}^{b_f} s^{*}\,dA^{*}=\int_{s}^{b_f} s^{*}\,\overbrace{t_f ds^{*}}^{dA^{*}}=\frac{t_f}{2}\left(b_f^2-s^2\right);\qquad 0\le s\le b_f$$

Este momento estático puede expresarse respecto del eje principal de inercia de la sección x_1 como

$$S_1^{*}(s)=\int_{s}^{b_f}\left(s^{*}\cos\varphi-\overline{h}\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)dA^{*}=\int_{s}^{b_f}\left(s^{*}\cos\varphi-\overline{h}\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)\overbrace{t_f ds^{*}}^{dA^{*}}$$

$$=\cos\varphi\overbrace{\int_{s}^{b_f} s^{*}t_f ds^{*}}^{S_{\bar{x}}^{*}(s)}-\overline{h}\,\mathrm{sen}\,\alpha\int_{s}^{b_f} t_f ds^{*}$$

$$\boxed{S_1^{*}(s)=S_{\bar{x}}^{*}(s)\cos\varphi-\left[\,t_f\left(b_f-s\right)\right]\left[\,\overline{h}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\right]\quad\forall\;\;0\le s\le b_f}$$

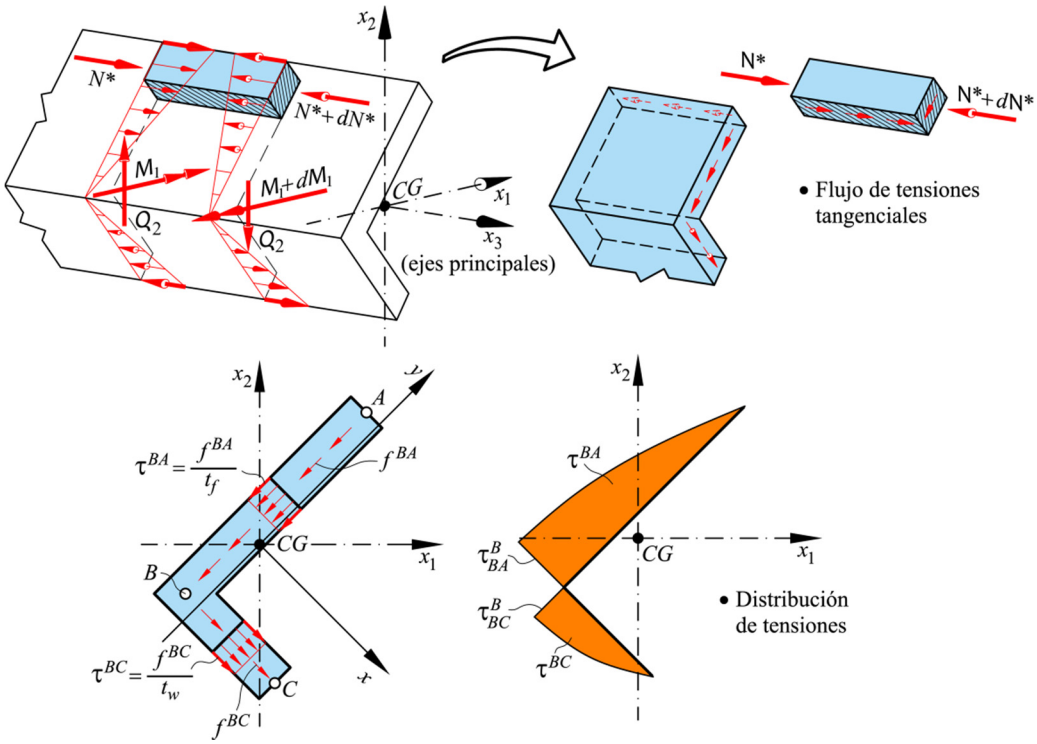


Figura 6.39 – Distribución de tensiones tangenciales, flujo de tensiones y esfuerzo de corte en una sección transversal L de paredes delgadas (alas desiguales).

De manera análoga puede obtenerse el momento estático para el ala inferior (tramo BC, Figura 6.38b), respecto al eje principal de inercia x_1,

$$S_{\bar{y}}^{*}(s)=\int_{s}^{b_w} s^{*}\, dA^{*}=\int_{s}^{b_w} s^{*}\, \overbrace{t_w ds^{*}}^{dA^{*}}=\frac{t_w}{2}\left(b_w^2-s^2\right);\qquad 0\le s\le b_w$$

$$S_1^{*}(s)=\int_{s}^{b_w}\left(s^{*}\operatorname{sen}\varphi+\bar{h}\operatorname{sen}\alpha\right)dA^{*}=\int_{s}^{b_w}\left(s^{*}\operatorname{sen}\varphi+\bar{h}\operatorname{sen}\alpha\right)\overbrace{t_w ds^{*}}^{dA^{*}}$$

$$=\operatorname{sen}\varphi\overbrace{\int_{s}^{b_w} s^{*}t_w ds^{*}}^{S_{\bar{y}}^{*}(s)}+\bar{h}\operatorname{sen}\alpha\int_{s}^{b_w} t_w ds^{*}$$

$$\boxed{S_1^{*}(s)=S_{\bar{y}}^{*}(s)\operatorname{sen}\varphi+\left[t_w\left(b_w-s\right)\right]\left[\bar{h}\operatorname{sen}\alpha\right]\qquad\forall\ 0\le s\le b_w}$$

Conocida todas las características geométricas de la sección, se puede ahora realizar el análisis tensional.

- **Cálculo del flujo y la tensión en el ala superior, tramo** BA **,** $0\le s\le b_f$:

  Se evalúa a continuación el flujo $f^{BA}(s)$ y la tensión tangencial $\tau^{BA}(s)$ en el ala superior a partir de un eje de referencia local s (ver Figura 6.38a),

$$f^{BA}(s)=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]S_1^{*}(s)=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left[\frac{t_f}{2}\left(b_f^2-s^2\right)\cos\varphi-\bar{h}\,t_f\left(b_f-s\right)\operatorname{sen}\alpha\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f^{BA}(s=0)=f^{B}=\left[\dfrac{Q_2}{I_1}\right]\dfrac{t_f b_f\left(\,b_f\cos\varphi-2\bar{h}\operatorname{sen}\alpha\right)}{2} \\ f^{BA}\left(s^{\max}=\bar{h}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\varphi}\right)=f_{\max}^{BA}=\left[\dfrac{Q_2}{I_1}\right]\dfrac{t_f\left(\,b_f\cos\varphi-\bar{h}\operatorname{sen}\alpha\right)^2}{2\cos\varphi} \\ f^{BA}(s=b_f)=f^{A}=0 \end{cases}$$

El valor de la coordenada local que hace máximo el flujo de corte se obtiene haciendo $\partial f^{BA}(s)/\partial s=0\ \rightarrow s^{\max}=\bar{h}\operatorname{sen}\alpha/\cos\varphi$.

$$V^{BA}=\int_0^{b_f} f^{BA}(s)ds=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\left[\frac{t_f}{2}\cos\varphi\int_0^{b_f}\left(b_f^2-s^2\right)ds-\bar{h}\,t_f\operatorname{sen}\alpha\int_0^{b_f}\left(b_f-s\right)ds\right]$$

$$=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{t_f b_f^2}{6}\left(2b_f\cos\varphi-3h\operatorname{sen}\alpha\right)$$

$$\tau^{BA}(s)=\frac{f^{BA}(s)}{t_f}=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]\left[\frac{\left(b_f^2-s^2\right)\cos\varphi}{2}-\overline{h}\left(b_f-s\right)\operatorname{sen}\alpha\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tau^{BA}(s=0)=\tau_{BA}^{B}=\left[\dfrac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]\dfrac{b_f\left(b_f\cos\varphi-2\overline{h}\operatorname{sen}\alpha\right)}{2}\\ \tau^{BA}(s=b_f)=\tau^{A}=0\end{cases}\qquad(6.48)$$

$$\tau^{BA}\left(s^{\max}=\overline{h}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\varphi}\right)=\tau_{\max}^{BA}=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]\frac{\left(b_f\cos\varphi-\overline{h}\operatorname{sen}\alpha\right)^2}{2\cos\varphi}$$

- **Cálculo del flujo y la tensión en el ala inferior, tramo** BC**,** $0\le s\le b_w$**:**

  Se evalúa a continuación el flujo $f^{BC}(s)$ y la tensión tangencial $\tau^{BC}(s)$ en el ala superior a partir de un eje de referencia local s (ver Figura 6.38b), procediendo de manera análoga al tramo *BA*.

$$f^{BC}(s)=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]S_1^*(s)=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]\left[\frac{t_w}{2}\left(b_w^2-s^2\right)\operatorname{sen}\varphi+\overline{h}\,t_w\left(b_w-s\right)\operatorname{sen}\alpha\right]$$

$$V^{BC}=\int_0^{b_w}f^{BC}(s)ds=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]\frac{t_w b_w^2}{6}\left(2b_w\operatorname{sen}\varphi+3h\operatorname{sen}\alpha\right)\qquad(6.49)$$

$$\tau^{BC}(s)=\frac{f^{BC}(s)}{t_w}=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]\left[\frac{\left(b_w^2-s^2\right)}{2}\operatorname{sen}\varphi+\overline{h}\left(b_w-s\right)\operatorname{sen}\alpha\right]$$

6.3.3.7 Sección L delgada de alas iguales – Tensiones tangenciales por corte

A continuación se realiza una simplificación del cálculo realizado en la sección 6.3.3.6 para el caso en que se trate de un perfil L delgado de **alas iguales**, es decir $t=t_w=t_f$ y $b=b_w=b_f$.

- **Características geométricas** (ver figura adjunta):

  Área de la sección $\rightarrow\quad A=2bt$

Las coordenadas del centro geométrico, referidas al sistema de referencia $\overline{x}-\overline{y}$ coincidente con los ejes medios de la sección, resultan

$$x_{CG}=y_{CG}=\frac{b^2 t}{2A}=\frac{b^{\not 2}\not t}{2\cdot 2\not b\not t}=\frac{b}{4}$$

Los momentos de inercia y el producto de inercia respecto del sistema cartesiano $x-y$ con origen en el centro geométrico (CG), paralelos a los lados de la sección resultan,

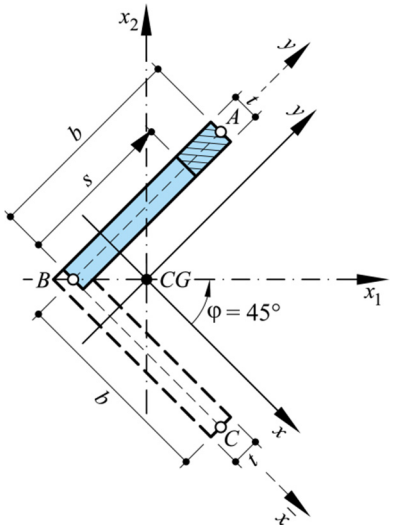
$$I_{xx}=\left[\frac{t\,b^3}{12}+(t\,b)\left(\frac{b}{2}-\overbrace{y_{CG}}^{b/4}\right)^2\right]+\left[\frac{b\not t^{\not 3}}{\not 12}^{\cong 0}+(t\,b)\left(\overbrace{y_{CG}}^{b/4}\right)^2\right]$$

$$I_{xx}=\left[\frac{t\,b^3}{12}+(t\,b)\left(\frac{b}{4}\right)^2\right]+\left[(t\,b)\left(\frac{b}{4}\right)^2\right]=\frac{t\,b^3}{12}+\frac{t\,b^3}{16}+\frac{t\,b^3}{16}$$

$$I_{xx}=I_{yy}=\frac{5}{24}t\,b^3$$

$$I_{xy}=\left[(t\,b)\left(\frac{b}{2}-\overbrace{y_{CG}}^{b/4}\right)\left(\overbrace{x_{CG}}^{b/4}\right)\right]+\left[(t\,b)(y_{CG})\left(\frac{b}{2}-x_{CG}\right)\right]$$

$$I_{xy}=\left[(t\,b)\left(\frac{b}{4}\right)\left(\frac{b}{4}\right)\right]+\left[(t\,b)\left(\frac{b}{4}\right)\left(\frac{b}{4}\right)\right]=\frac{t\,b^3}{8}$$



A partir de estas últimas expresiones se pueden obtener los momentos principales de inercia de la sección, así como la orientación de estos ejes principales,

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(I_{xx}-I_{yy}\right)^2}{4}+I_{xy}^2} = \frac{2\,I_{xx}}{2} \pm \sqrt{I_{xy}^2} = I_{xx} \pm I_{xy}$$

$$I_1 = \frac{5}{24}t\,b^3 + \frac{1}{8}t\,b^3 = \frac{1}{3}t\,b^3; \quad \operatorname{tg}(2\varphi) = -\frac{2I_{xy}}{\underbrace{\left(I_{xx}-I_{yy}\right)}_{=0}} \quad \rightarrow \quad \varphi = 45^o$$

- **Cálculo de los momentos estáticos en el ala superior:**

$$S_1^*(s) = \frac{t}{2}\left(b^2-s^2\right)\overbrace{\cos 45^o}^{1/\sqrt{2}} = \frac{t}{2\sqrt{2}}\left(b^2-s^2\right)$$

- **Cálculo flujo y tensión en el ala superior:**

$$f^{BA}(s) = \left[\frac{Q_2}{I_1}\right]S_1^*(s) = \left[\frac{3Q_2}{b^3\,t}\right]\left[\frac{t}{2}\frac{\left(b^2-s^2\right)}{\sqrt{2}}\right] \tag{6.50}$$

$$f^{BA}(s) = \frac{3Q_2}{b^3\,2\sqrt{2}}\left(b^2-s^2\right) \Rightarrow \begin{cases} f^{BA}(s=0) = f_{\max}^{BA} = f_B^{BA} = \dfrac{3Q_2}{b\,2\sqrt{2}} \\ f^{BA}(s=b) = f^A = 0 \end{cases}$$

$$V^{BA} = \int_0^b f^{BA}(s)\,ds = \frac{3Q_2}{b^3\,2\sqrt{2}}\int_0^b\left(b^2-s^2\right)ds = \frac{Q_2}{\sqrt{2}}$$

$$\tau^{BA}(s) = \frac{f^{BA}(s)}{t} = \frac{3Q_2}{b^3\,t\,2\sqrt{2}}\left(b^2-s^2\right) \Rightarrow \begin{cases} \tau^{BA}(s=0) = \tau_{\max}^{BA} = \tau_B^{BA} = \dfrac{3Q_2}{2\sqrt{2}\;bt} \\ \tau^{BA}(s=b) = \tau^A = 0 \end{cases}$$

Dada la simetría, en el ala inferior se obtienen los mismos valores de flujo y tensión tangencial.

- **Equilibrio de la sección y centro de esfuerzos cortantes CC:**

Considerando las fuerzas en las alas $V^{BA} = V^{BC} = V_f$, que resultan de la integral del flujo de fuerzas cortantes (ecuación (6.50)), se calcula el equilibrio de fuerzas en la sección transversal (ver Figura 6.40).

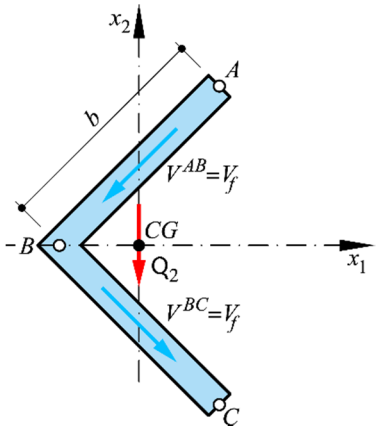
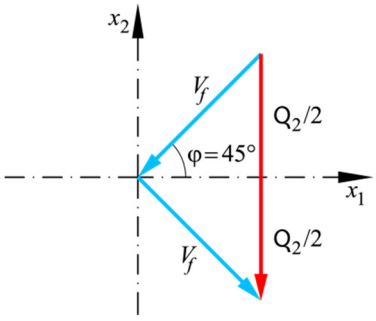


Figura 6.40 – Distribución y equilibrio de las fuerzas producidas por el corte en la sección transversal L de alas iguales y paredes delgadas.



$$\begin{cases} \sum F_{x_1} = V_f \dfrac{1}{\sqrt{2}} - V_f \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_{x_2} = -V_f \dfrac{1}{\sqrt{2}} - V_f \dfrac{1}{\sqrt{2}} \equiv -Q_2 \\ \sum M_{CG} \neq 0 \end{cases} \tag{6.51}$$

En este caso particular se puede ver que la sección transversal no está en equilibrio rotacional porque aparece un momento debido a la acción de los flujos en las alas que produce torsión de la sección respecto de CG.

Partiendo del supuesto que el corte pasa por el punto $CC \equiv B$ (ver Figura 6.41), y luego de tomar momento de todas las fuerzas actuantes en la sección respecto de ese punto, resulta que se verifica el equilibrio de momentos, y por lo tanto se concluye que $CC \equiv B$ es, en efecto, el centro de corte para esta sección. Esto es,

$$V_f \cdot 0 + V_f \cdot 0 = Q_2 \cdot 0 \tag{6.52}$$

Esta misma conclusión se tiene de la igualdad que resulta de tomar como centro de momentos el centro geométrico (CG) (ver Figura 6.41),

$$Q_2 \cdot d = 2V_f \cdot d \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

$$Q_2 \cdot d = \cancel{2}\,\frac{Q_2}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot d \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \tag{6.53}$$

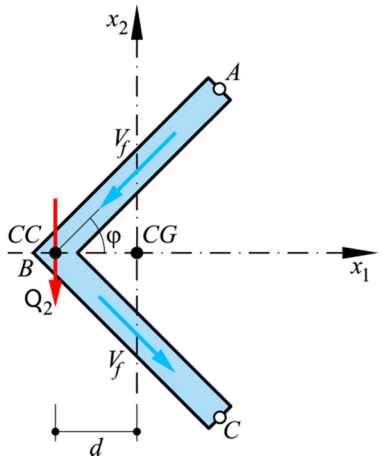


Figura 6.41 – Posición del centro de cortante en la sección transversal L de alas iguales y paredes delgadas.

6.3.3.8 Centro de corte en perfiles de alas paralelas – Problema simplificado

En el caso que se quiera estudiar una sección de paredes delgadas con una configuración dominante de alas paralelas como la que se muestra, por ejemplo, en la Figura 6.42, el procedimiento para encontrar el centro de corte (CC) se simplifica considerablemente. Para ilustrar esta afirmación se muestra a continuación el cálculo de las tensiones tangenciales, su distribución y la posición del centro de corte (CC) en la sección doble T de alas desiguales representada en la Figura 6.42. Se supone la acción de un corte vertical que pasa por el centro de corte, evitando así la torsión. La parte del esfuerzo de corte tomado por el alma es despreciable, en tanto cada ala (designadas como: I y II) absorbe una parte del corte total. Esta suposición conduce a la hipótesis que ambas alas sufren la misma curvatura durante el corte por flexión,

$$\frac{1}{\rho} \simeq \frac{1}{\rho_I} \simeq \frac{1}{\rho_{II}} \simeq \frac{M_1}{E\,I_1} \tag{6.54}$$

En tal caso, los flujos máximos por corte en las alas I y II, y sus correspondientes tensiones tangenciales resultan,

$$f^{I}_{\max}=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]\left(S^{*}_{1}\right)^{I}_{\max}\ \Rightarrow\ \tau^{I}_{\max}=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]\frac{\left(S^{*}_{1}\right)^{I}_{\max}}{t_I}\ ;\left(S^{*}_{1}\right)^{I}_{\max}=\left(\frac{b_I}{2}t_I\right)\frac{b_I}{4}=\frac{b_I^2}{8}t_I$$

$$f^{II}_{\max}=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]\left(S^{*}_{1}\right)^{II}_{\max}\ \Rightarrow\ \tau^{II}_{\max}=\left[\frac{\mathrm{Q}_2}{I_1}\right]\frac{\left(S^{*}_{1}\right)^{II}_{\max}}{t_{II}}\ ;\left(S^{*}_{1}\right)^{II}_{\max}=\left(\frac{b_{II}}{2}t_{II}\right)\frac{b_{II}}{4}=\frac{b_{II}^2}{8}t_{II}$$

Resultando: (6.55)

$$\tau^{I}_{\max}=\frac{\mathrm{Q}_2 b_I^2}{8I_1};\qquad \tau^{II}_{\max}=\frac{\mathrm{Q}_2 b_{II}^2}{8I_1}$$

Como se ve en las expresiones anteriores, cada ala absorbe una parte del corte en función de sus características geométricas y de la condición de compatibilidad de curvatura única (ecuación (6.54)).

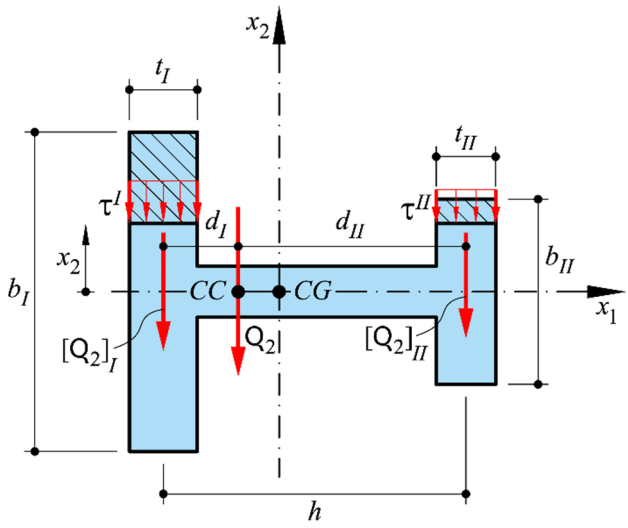


Figura 6.42 – Sección transversal de paredes delgadas con alas paralelas.

Esto mismo se puede ver si se considera la sección compuesta por dos rectángulos que sufren la misma curvatura. En tal caso, la parte del corte $\left[\mathrm{Q}_2\right]_i,\left(i=I,II\right)$ que absorbe cada ala resulta (ecuación (6.13)),

$$\tau^i_{\max} \simeq \left[\tau^i_{\max}\right]_{\text{Rectángulo}} = \frac{3}{2}\frac{[Q_2]_i}{b_i t_i} \quad \Rightarrow \quad [Q_2]_i = \frac{2}{3} b_i t_i \, \tau^i_{\max}$$

$$\begin{aligned} [Q_2]_I &= \frac{2}{3} b_I t_I \, \frac{Q_2 b_I^2}{8 I_1} = \frac{Q_2 b_I^3 t_I}{12 I_1} = Q_2 \frac{(I_1)_I}{I_1} \\ [Q_2]_{II} &= \frac{2}{3} b_{II} t_{II} \, \frac{Q_2 b_{II}^2}{8 I_1} = \frac{Q_2 b_{II}^3 t_{II}}{12 I_1} = Q_2 \frac{(I_1)_{II}}{I_1} \end{aligned} \tag{6.56}$$

En estas ecuaciones se puede observar que se produce una distribución del corte en las alas en proporción a su inercia. De esta forma, la posición del centro de corte CC resulta de la siguiente ecuación de equilibrio de momentos,

$$[Q_2]_I \, d_I = [Q_2]_{II} \, d_{II}$$

Resultando,

$$\begin{cases} d_I = \dfrac{[Q_2]_{II}}{[Q_2]_I} d_{II} \\ d_{II} = h - d_I \end{cases} \Rightarrow d_I = \frac{(I_1)_{II}}{(I_1)_I} \overbrace{(h - d_I)}^{d_{II}} \Rightarrow d_I = \frac{(I_1)_{II}}{(I_1)_I + (I_1)_{II}} h \tag{6.57}$$

$$d_{II} = \frac{(I_1)_I}{(I_1)_I + (I_1)_{II}} h$$

Obsérvese, como ya se ha mencionado, que el centro de corte CC es una propiedad geométrica de la sección, y por lo tanto es siempre independiente de la magnitud del esfuerzo de corte.

6.3.3.9 Sección anular delgada abierta – Tensiones tangenciales por corte y centro de corte

A continuación, se analiza el cálculo de las tensiones tangenciales y el centro de corte para una sección transversal anular abierta de paredes delgadas sometida a un esfuerzo de corte vertical descendente. Se considera que el radio medio de la sección es R y que el espesor t es constante, tal como se muestra en la Figura 6.43.

- **Características geométricas** (ver Figura 6.43)**:**

$$A = (2\pi R) t$$

$$I_1 = \int_A x_2^2 dA = \int_s x_2^2 \overbrace{t\,ds}^{dA} = \int_\varphi x_2^2\, t\,(\overbrace{R\,d\varphi}^{ds}); \qquad \text{con: } x_2 = R\sin\varphi \;\text{ y }\; dA = t\,R\,d\varphi$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} R^3 t \sin^2\varphi\, d\varphi = R^3 t \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right)\Bigg|_0^{2\pi} = R^3\, t\,\pi$$

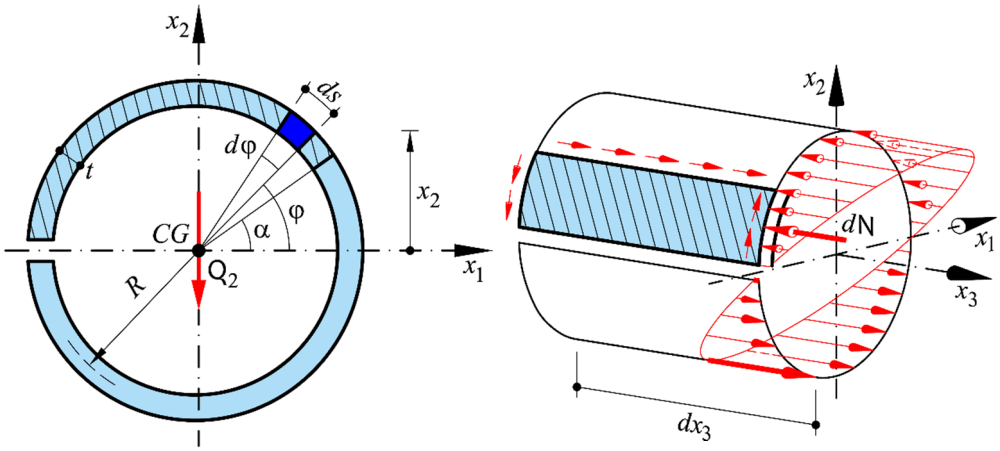


Figura 6.43 – Sección transversal anular abierta de pared delgada.

- **Cálculo de los momentos estáticos** (ver Figura 6.43):

  El momento estático de la zona rayada está dado por

$$S_1^*(\alpha) = \int_s x_2\, dA^* = \int_\alpha^\pi R^2 t \,\text{sen}\,\varphi\, d\varphi = R^2 t \left(-\cos\varphi\right)\Big|_\alpha^\pi = R^2 t \left(1 + \cos\alpha\right)$$

Según estas expresiones, el flujo de corte y la distribución de tensiones tangenciales serán (ver Figura 6.44),

$$f(\alpha) = \left[\frac{Q_2}{I_1} \right] S_1^*(\alpha) = \frac{Q_2}{R^3 t\,\pi} R^2 t (1 + \cos\alpha)$$

$$f(\alpha)=\frac{Q_2}{R\,\pi}(1+\cos\alpha)\Rightarrow\begin{cases}f^{\max}=f(\alpha=0)=2\dfrac{Q_2}{R\,\pi}\\ f(\alpha=\pi)=0\\ f(\alpha=\pi/2)=\dfrac{Q_2}{R\,\pi}\end{cases}$$

$$\tau(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{t}=\left[\frac{Q_2}{I_1}\right]\frac{S_1^*(\alpha)}{t}=\frac{Q_2}{t\,R\,\pi}(1+\cos\alpha)\Rightarrow\begin{cases}\tau^{\max}=\tau(\alpha=0)=\dfrac{2Q_2}{tR\,\pi}\\ \tau(\alpha=\pi)=0\\ \tau(\alpha=\pi/2)=\dfrac{Q_2}{tR\,\pi}\end{cases}\qquad(6.58)$$

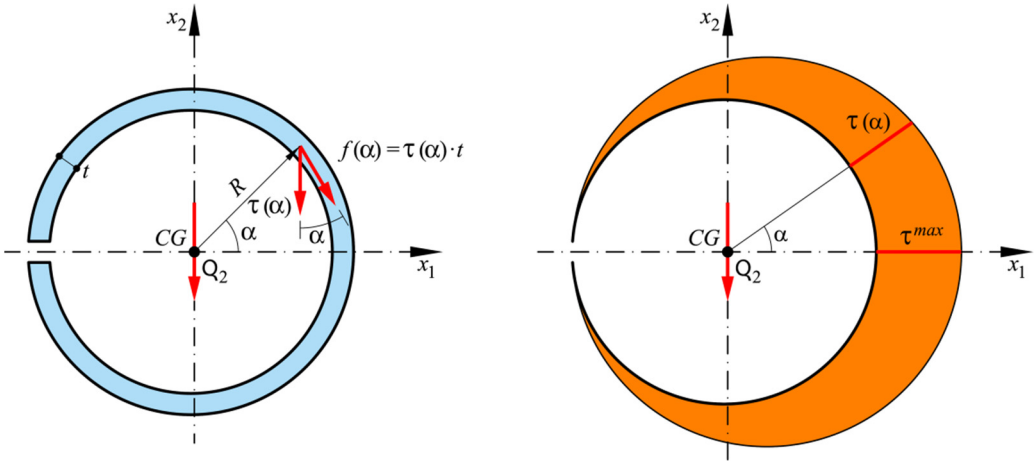


Figura 6.44 – Flujo y tensión tangencial en una sección transversal anular abierta de pared delgada.

Las resultantes, vertical y horizontal, producidas por el flujo por cortante resultan, respectivamente,

$$V_{x_2}=\int_s f(\alpha)\cos\alpha\,ds=\int_0^{2\pi}f(\alpha)\cos\alpha\,\overbrace{(Rd\alpha)}^{ds}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\overbrace{\frac{Q_2}{R\,\pi}(1+\cos\alpha)}^{f(\varphi)}\cos\alpha\,(R\,d\alpha)=Q_2$$

$$V_{x_1} = \int_s f(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha\, ds = \int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha\,(R d\alpha) = \\ = \int_0^{2\pi} \frac{Q_2}{\cancel{R}\,\pi}(1+\cos\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha\,(\cancel{R} d\alpha) = 0 \tag{6.59}$$

Mientras que el momento producido respecto del centro geométrico resulta,

$$M_{CG} = \int_s f(\alpha)\, R\, ds = \int_0^{2\pi} f(\alpha)\, R^2 d\alpha = \\ = \int_0^{2\pi} \frac{Q_2}{\cancel{R}\,\pi}(1+\cos\alpha) R^{\cancel{2}} d\alpha = \frac{Q_2 R}{\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos\alpha)\, d\alpha = 2\,Q_2 R \tag{6.60}$$

De donde resulta la posición del centro de cortantes (ver Figura 6.45),

$$M_{CG} = Q_2 d \;\Rightarrow\; d = \frac{M_{CG}}{Q_2} = \frac{2Q_2 R}{Q_2} = 2R \tag{6.61}$$

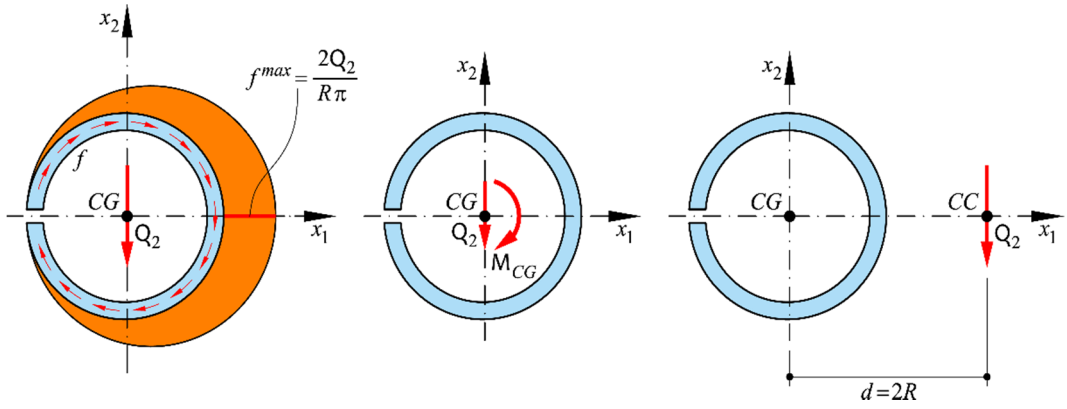


Figura 6.45 – Posición del centro de cortantes (CC) en una sección transversal anular abierta de pared delgada.

6.3.3.10 Sección anular delgada cerrada – Tensiones tangenciales por corte y centro de corte

Hasta ahora se han tratado problemas de secciones transversales delgadas abiertas, donde la sección tenía alabeo libre. Es decir, que entre los labios de una sección abierta

delgada sometida a un esfuerzo de corte Q_2, tal como la que se muestra en la Figura 6.46, se produce un deslizamiento relativo libre que se designa como v^Q.

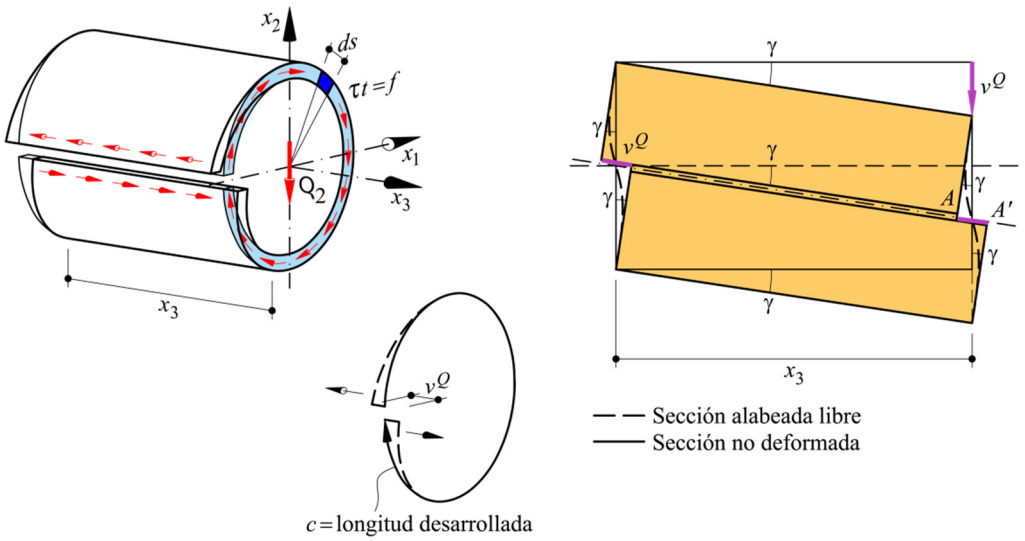


Figura 6.46 – Sección transversal anular de pared delgada. Condición de compatibilidad.

La magnitud del mencionado desplazamiento libre se puede obtener analizando la configuración geométrica de la pieza deformada mostrada en la Figura 6.46, como se indica a continuación,

$$dv^Q \cong \gamma\, ds \;\Rightarrow\; v^Q \cong \int_c \gamma\, ds = \gamma\, c$$

$$\text{y también: } v^Q \cong \gamma\, x_3 \Rightarrow dv^Q \cong \gamma\, dx_3$$

donde c es la longitud desarrollada del perímetro medio de la sección.

$$\text{teniendo en cuenta que} \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \tag{6.62}$$

$$\text{resulta } v^Q = \int_{x_3} \frac{\tau(x_3)}{G} dx_3 = \int_c \frac{\tau(s)}{G} ds = \int_c \frac{f(s)}{t\,G} ds$$

Luego, para conseguir un alabeo restringido, $v^Q = 0$, (condición de compatibilidad entre los labios de la sección transversal), se debe introducir un sistema de fuerzas nulo que obligue a que la posición de los puntos *A* y *A'* coincidan (ver Figura 6.47).

De esta forma, el flujo de corte final en la sección anular cerrada $f^* = f + \overline{f}$, resulta de la superposición del flujo de corte f que corresponden a la sección abierta (ver apartado 6.3.3.9) y el flujo de corte $\overline{f}$ que corresponde a la sección abierta sometida a la condición de cierre o compatibilidad $v^Q = 0$ (ver Figura 6.47).

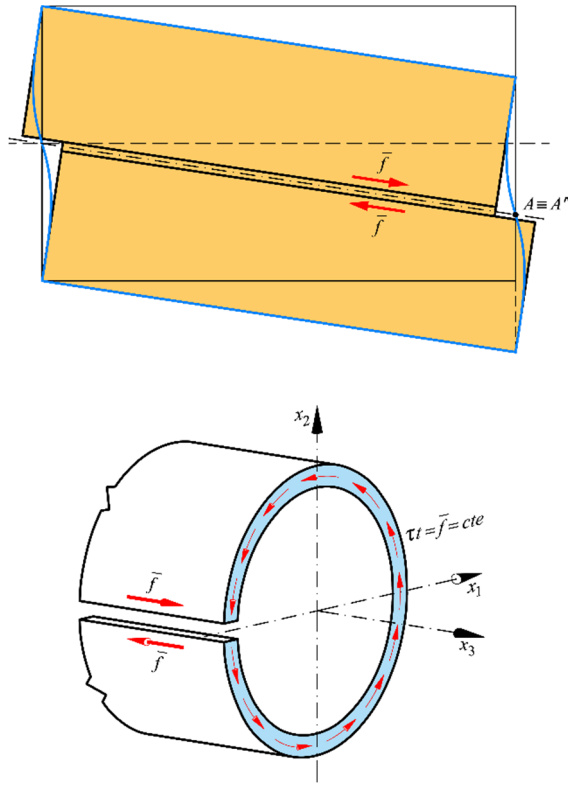


Figura 6.47 – Alabeo en la sección transversal anular cerrada de pared delgada producido por la restricción del desplazamiento v^Q (condición de compatibilidad).

Es decir, que para que el alabeo sea restringido, se debe cumplir la condición de compatibilidad que exige,

$$v^Q = 0 = \int_c \frac{f^*(s)}{tG} ds = \int_c \frac{f(s)}{tG} ds + \int_c \frac{\overline{f}}{tG} ds$$

$$0=\int_c \frac{f(s)}{t(s)G}ds+\bar{f}\int_c \frac{1}{t(s)G}ds \Rightarrow \quad \bar{f}=-\frac{\int_c \frac{f(s)}{t(s)}ds}{\int_c \frac{ds}{t(s)}} \tag{6.63}$$

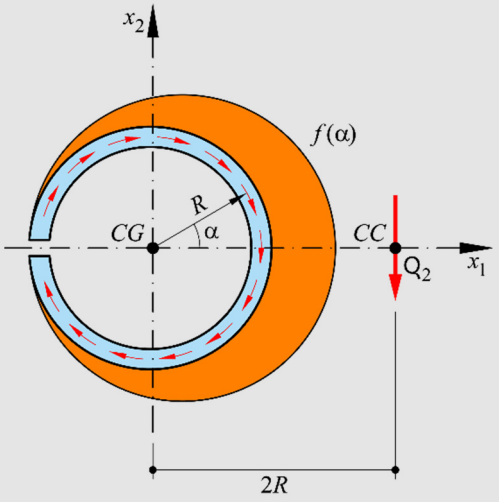
$$\text{Para } t=cte \quad \Rightarrow \qquad \bar{f}=-\frac{\int_c f(s)\,ds}{c}$$

Siendo $\bar{f}$ un flujo de corte constante en la sección, que garantiza el alabeo restringido que tiene una sección anular cerrada. De aquí, el flujo final y la correspondiente tensión tangencial resultan, respectivamente,

$$f^*=f+\bar{f} \quad \Rightarrow \quad \tau^*=\tau+\bar{\tau} \tag{6.64}$$

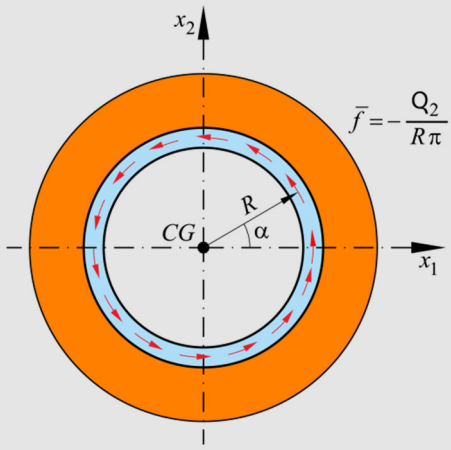
Ejemplo 6-3: Obtener la distribución del flujo y de la tensión tangencial debida a la acción de un esfuerzo corte descendente en la dirección principal x_2, en una sección anular cerrada delgada de espesor $t=cte$ y radio medio R.

Flujo en la sección abierta sometida al corte Q_2



$$f(\alpha)=\frac{Q_2}{R\pi}(1+\cos\alpha)$$

Flujo en la sección cerrada sometida a la condición de alabeo restringido $v^Q=0$

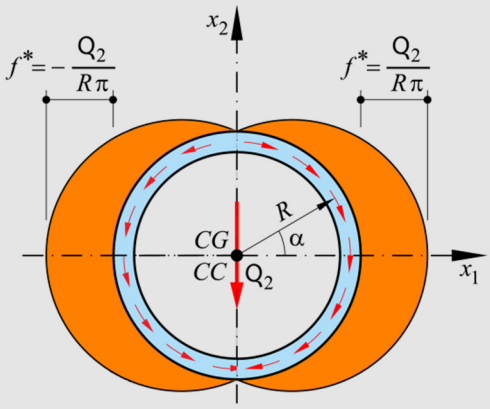


$$\bar{f} = -\frac{\int_c f(s)\,ds}{c} = -\frac{\int_0^{2\pi} f(\alpha) R\,d\alpha}{c}$$

$$= -\frac{Q_2}{R\pi}\frac{\int_0^{2\pi}(1+\cos\alpha)\cancel{R}\,d\alpha}{2\pi\cancel{R}} = -\frac{Q_2}{R\pi}\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}}$$

$$\bar{f} = -\frac{Q_2}{R\pi}$$

De esta forma, el flujo de corte final en la sección resulta,



Secció cerrada

$$f^* = f + \bar{f} = \frac{Q_2}{R\pi}\left[(1+\cos\alpha) - 1\right]$$

$$f^* = \frac{Q_2}{R\pi}\cos\alpha$$

6.3.3.11 Secciones delgadas cerradas y simétricas – Caso particular

Si las secciones delgadas están cerradas y, además, tienen un eje de simetría paralelo al plano de carga (por ejemplo, la sección anular estudiada en el apartado anterior), se puede simplificar el cálculo del flujo de corte/tensiones tangenciales y resolver sólo dos secciones transversales abiertas simétricas. Esto es posible porque siempre, sobre el eje de simetría, se anulan el flujo de cortante y las tensiones tangenciales (ver Figura 6.48), razón por la cual se puede comenzar el cálculo del momento estático a partir de este eje de simetría.

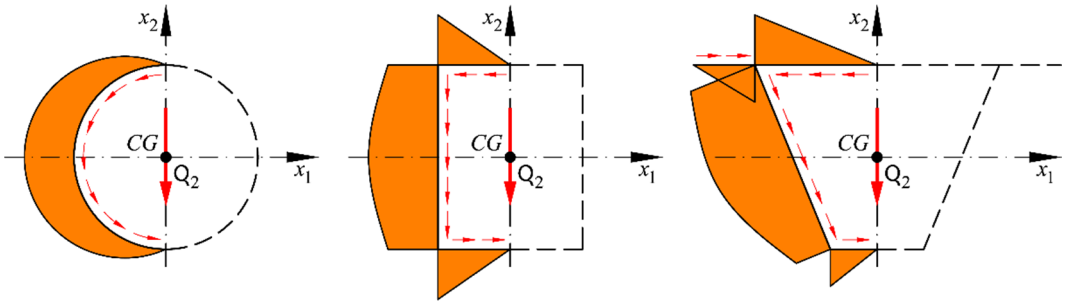


Figura 6.48 – Distribución del flujo de corte/ tensiones tangenciales en secciones de paredes delgadas cerradas simétricas.

Es importante observar que cada sub-sección mantiene su propio centro de corte *CC*, y al componerlas resulta la posición del centro de corte sobre el eje de simetría de la sección completa en coincidencia con el *CG*.

6.3.3.12 Cálculo de los momentos estáticos respecto de ejes cualesquiera. Forma simple de cálculo del flujo de corte y tensiones tangenciales para ejes principales no paralelos a los lados de la sección

En los apartados anteriores se puede ver que resulta complicado obtener el flujo por corte y sus correspondientes tensiones tangenciales para secciones transversales delgadas en aquellos casos en que los lados de la sección transversal no son paralelos a los ejes principales. Para simplificar el cálculo de los momentos estático respecto de cualquier sistema de referencia, se muestra a continuación un procedimiento que permite evaluar los mismos respecto de un sistema de referencia que resulte más cómodo para los cálculos (por ejemplo el sistema $x-y$) y luego se realiza un cambio de base para trasladar los momentos estáticos al sistema referencial basado en ejes principales x_1-x_2.

Para esto se considera, en primer lugar, el cambio de la base ortogonal (x,y) cualquiera a una base ortogonal principal (x_1,x_2), rotada un ángulo φ respecto de la primera (ver Apéndice, Propiedades geométricas de las secciones transversales), como se ilustra en la Figura 6.49. El cambio de base para una matriz columna, o tensor de primer orden, está dado por,

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{x^p} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\varphi \\ -\text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}}_{x} \qquad (6.65)$$

$$\boldsymbol{x}^p = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad ; \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x}^p$$

donde $\boldsymbol{A}$ es la matriz ortonormal de cambio de base, es decir que se verifica $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$.

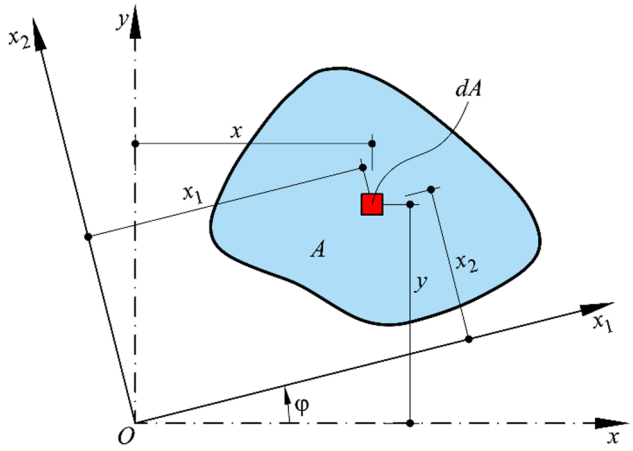


Figura 6.49 – Cambio de base de un sistema ortogonal (x, y) a otra base ortogonal (x_1, x_2), rotada un ángulo φ.

Escribiendo ahora la definición de los momentos estáticos en la nueva base (x_1, x_2) e introduciendo el cambio de base dado por la ecuación (6.65), se pueden obtener los momentos estáticos en la nueva base. Esto es,

$$\boldsymbol{S}^* = \int_{A^*} \boldsymbol{x}^p \, dA^* = \int_{A^*} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \, dA^*$$

$$\begin{Bmatrix} S_2^* \\ S_1^* \end{Bmatrix} = \left\{ \int_{A^*} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} dA^* \right\} = \int_{A^*} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\varphi \\ -\text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} dA^* \qquad (6.66)$$

$$\begin{Bmatrix} S_2^* \\ S_1^* \end{Bmatrix} = \int_{A^*} \begin{Bmatrix} x\cos\varphi + y\,\text{sen}\varphi \\ -x\,\text{sen}\varphi + y\cos\varphi \end{Bmatrix} dA^*$$

La ecuación (6.66) se puede escribir en forma canónica como,

$$\begin{cases} S_2^* = \int_{A^*} x_1\, dA^* = \int_{A^*} (\, x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\varphi\,)\, dA^* \\ S_1^* = \int_{A^*} x_2\, dA^* = \int_{A^*} (\, -x\,\mathrm{sen}\varphi + y\cos\varphi\,)\, dA^* \end{cases} \tag{6.67}$$

Reordenando términos, las ecuaciones (6.67) pueden reescribirse de la siguiente manera,

$$\begin{cases} S_2^* = \overbrace{\left(\int_{A^*} x\, dA^*\right)}^{S_y^*}\cos\varphi + \overbrace{\left(\int_{A^*} y\, dA^*\right)}^{S_x^*}\mathrm{sen}\varphi \\ S_1^* = \underbrace{\left(-\int_{A^*} x\, dA^*\right)}_{-S_y^*}\mathrm{sen}\varphi + \underbrace{\left(\int_{A^*} y\, dA^*\right)}_{S_x^*}\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_2^* = S_y^*\cos\varphi + S_x^*\mathrm{sen}\varphi \\ S_1^* = -S_y^*\mathrm{sen}\varphi + S_x^*\cos\varphi \end{cases} \xrightarrow{\text{Reordenado}} \begin{Bmatrix} S_1^* \\ S_2^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\mathrm{sen}\varphi \\ \mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x^* \\ S_y^* \end{Bmatrix} \tag{6.68}$$

6.4 Corte por flexión recta en secciones compuestas/mixtas – Fórmula general del corte o fórmula de Collignon-Jourawski

A modo de ampliar el concepto de corte por flexión presentado en secciones simples constituidas por un material homogéneo (apartado 6.3), en esta sección se extiende la formulación de Collignon-Jourawski a problemas de barras de sección compuesta por materiales con compatibilidad de deformaciones entre ellos, sometidas a corte por flexión. Casos comunes de estas estructuras se encuentran en el hormigón armado, hormigón pretensado con adherencia, secciones mixtas de acero-hormigón, materiales compuestos laminados, etc.

Se supone una barra que cumple la hipótesis cinemática de Bernoulli, que está sometida a corte por flexión y que está compuesta por n_j materiales sujetos a mo-

vimientos compatibles entre sí. Esta barra tendrá n_i materiales distintos por encima del plano de deslizamiento de corte y n_k materiales en el propio plano de corte (ver Figura 6.50).

En forma análoga a lo que se ha presentado en el apartado 6.3 para una barra de un solo material, el cambio que sufre el momento flector $\mathsf{M}_1(x_3)$ a lo largo de un elemento diferencial de barra de longitud dx_3, produce una fuerza axial desequilibrada dN^* entre dos secciones transversales contiguas, que sólo es reequilibrada por el esfuerzo de corte $dQ_3 = \tau_{23}(x_2)\big(b(x_2)\,dx_3\big)$ que resulta de integrar las tensiones tangenciales que actúan a cada altura x_2 del eje de la viga. Siguiendo un procedimiento análogo al mostrado en la sección 6.3 , se obtiene la fuerza normal resultante en el área A^*, comprendida entre las ordenadas x_2 y $x_2^{\max}$ (ver Figura 6.50), integrando las tensiones normales $\sigma_3^i(x_1,x_2,x_3) = \sigma^i(x_1,x_2,x_3)$ en el área A^*, de la siguiente manera,

$$
\begin{aligned}
N^*(x_3) &= \sum_{i=1}^{n_i} \int_{A_i^*} \sigma^i(x_1,x_2,x_3)\,dA^* = \sum_{i=1}^{n_i} \int_{A_i^*} \frac{\mathsf{M}_1(x_3)\cdot E_i}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j\,(I_1)_j}\, x_2^{i*}\,dA^* \\
N^*(x_3) &= \frac{\mathsf{M}_1(x_3)}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j\,(I_1)_j} \sum_{i=1}^{n_i} \int_{A_i^*} E_i x_2^{i*}\,dA^* = \frac{\mathsf{M}_1(x_3)}{\sum_{j=1}^{n_j} E_j\,(I_1)_j} \sum_{i=1}^{n_i} E_i\left(S_1^*(x_2)\right)_i = \frac{\mathsf{M}_1(x_3)}{\overline{I}_1}\,\overline{S}_1^*(x_2)
\end{aligned}
\tag{6.69}
$$

donde $\overline{I}_1$ es el momento de inercia mecánico de la sección transversal y $\overline{S}_1^*(x_2)$ el momento estático mecánico de la parte de la sección por encima de la capa x_2, ambos respecto del eje principal x_1 que pasa por el centro mecánico CM de la sección.

En forma análoga, para la sección transversal contigua, se tiene,

$$
N^*(x_3) + dN^* = \frac{\mathsf{M}_1(x_3) + d\mathsf{M}_1}{\overline{I}_1}\,\overline{S}_1^*(x_2) \tag{6.70}
$$

Por diferencia entre las ecuaciones (6.70) y (6.69) resulta la expresión de la fuerza axial necesaria para equilibrar la sección transversal,

$$dN^* = \frac{d\mathsf{M}_1}{\overline{I}_1}\overline{S}_1^*(x_2) \tag{6.71}$$

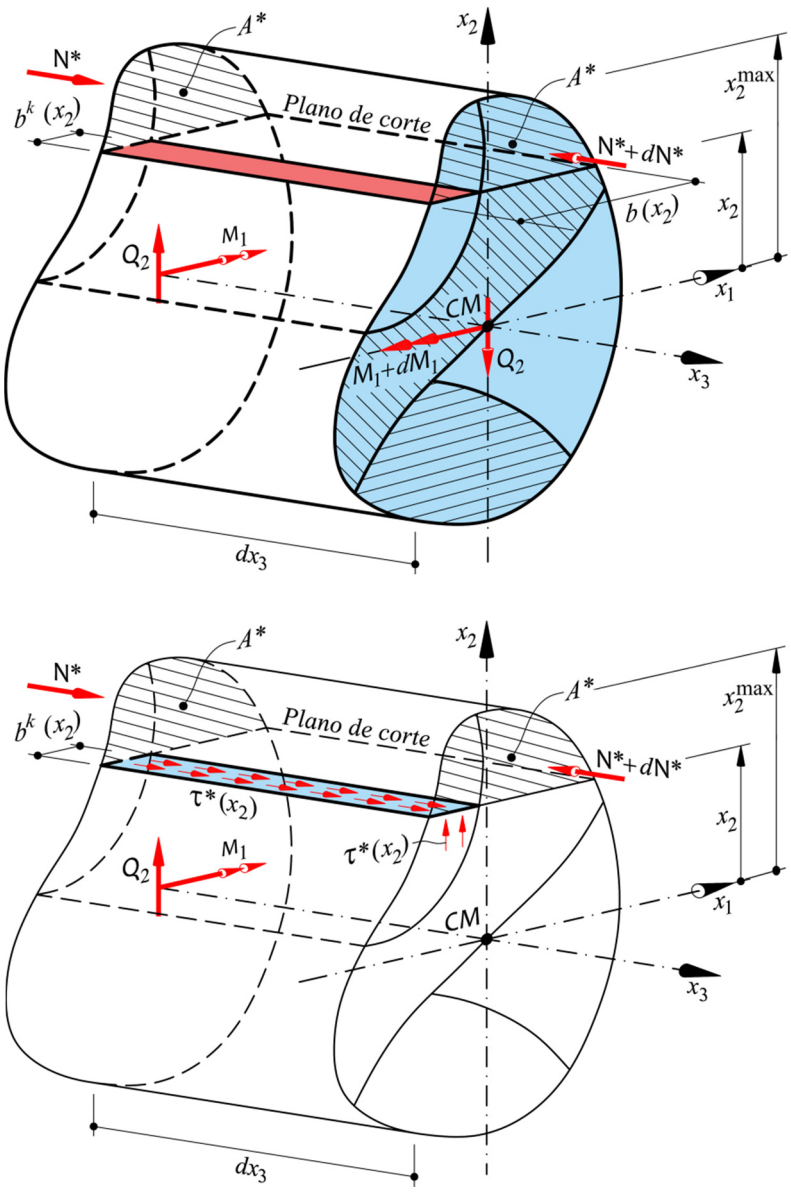


Figura 6.50 – Equilibrio y distribución de tensiones tangenciales en un elemento diferencial de una barra compuesta sometida a flexión.

Si se admite que n_k es el número de materiales seccionados por una capa situada a la altura x_2 desde el eje de la pieza que da lugar a un esfuerzo cortante dQ_3 y que, por reciprocidad de tensiones, aparece alojado en la sección transversal dQ_2, se obtiene,

$$\begin{aligned} dN^* &= \sum_{k=1}^{n_k} \tau_{23}^k(x_2)\left(b^k(x_2)\,dx_3\right) = \frac{d\mathsf{M}_1}{\overline{I}_1}\overline{S}_1^*(x_2) \\ \frac{dN^*}{dx_3} &= \sum_{k=1}^{n_k} \tau_{23}^k(x_2)\left(b^k(x_2)\right) = \frac{d\mathsf{M}_1}{dx_3}\frac{1}{\overline{I}_1}\overline{S}_1^*(x_2) \end{aligned} \tag{6.72}$$

De donde resulta,

$$\sum_{k=1}^{n_k} \tau_{23}^k(x_2)b^k(x_2) = \sum_{k=1}^{n_k} \tau_{32}^k(x_2)b^k(x_2) = \sum_{k=1}^{n_k} \tau^k(x_2)b^k(x_2) = \frac{\mathsf{Q}_2\overline{S}_1^*(x_2)}{\overline{I}_1} = C(x_2) \tag{6.73}$$

Siendo esta expresión la denominada fórmula de Collignon-Jourawski extendida a secciones compuestas, que permite obtener las tensiones tangenciales en todos los materiales que colaboran en una sección transversal a una altura x_2 desde el eje de la pieza. Debido a que se considera la hipótesis de compatibilidad de deformaciones entre estos materiales, la distorsión γ de los k materiales que coexisten en una misma capa situada a una altura x_2, se puede escribir como,

$$\gamma(x_2) = \frac{\tau^1(x_2)}{G^1} = \cdots = \frac{\tau^k(x_2)}{G^k} \tag{6.74}$$

Tal que para un material k cualquiera la tensión resulta,

$$\tau^k(x_2) = G^k\gamma(x_2) \tag{6.75}$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (6.73) se tiene el ángulo de distorsión $\gamma(x_2)$ a cada altura x_2 y para cada fibra de la sección transversal,

$$\gamma(x_2)\sum_{k=1}^{n_k} G^k b^k(x_2) = C(x_2)$$

$$\gamma(x_2) = \frac{C(x_2)}{\sum_{k=1}^{n_k} G^k b^k(x_2)} = \frac{Q_2 \overline{S}_1^*(x_2)}{\overline{I}_1 \sum_{k=1}^{n_k} G^k b^k(x_2)} \tag{6.76}$$

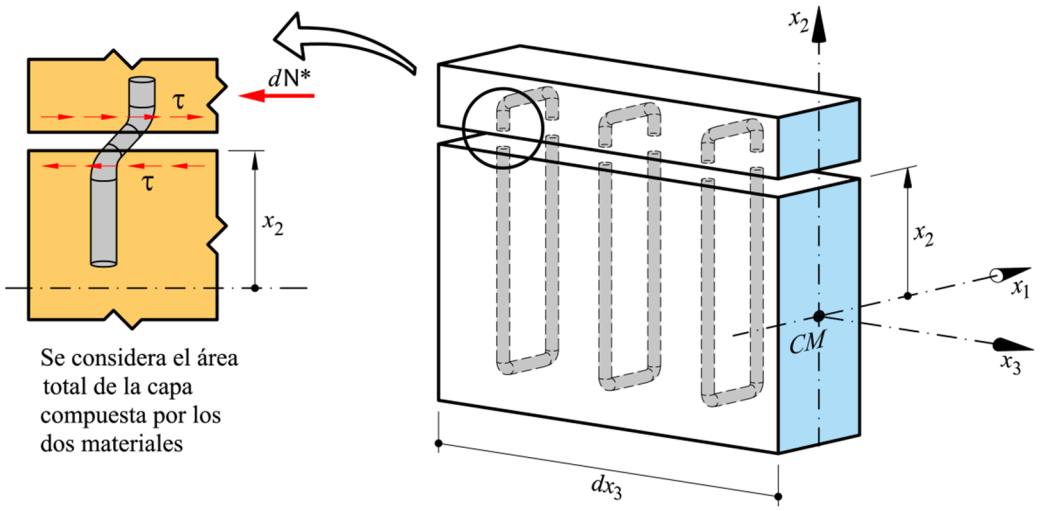


Figura 6.51 – Compuesto formado por estribos (cercos) y hormigón. Capa compuesta considerada en la ecuación (6.77) a la altura x_2.

A partir de las ecuaciones (6.75) y (6.76) resulta la tensión para un material l cualquiera de la misma capa,

$$\tau^l(x_2) = G^l\,\gamma(x_2) = G^l \frac{Q_2\,\overline{S}_1^*(x_2)}{\overline{I}_1\left(\sum_{k=1}^{n_k} G^k b^k(x_2)\right)}$$

$$\tau^l(x_2) = G^l\,\gamma(x_2) = \frac{Q_2 G^l \sum_{i=1}^{n_i} E_i \left(S_1^*(x_2)\right)_i}{\left(\sum_{j=1}^{n_j} E_j (I_1)_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n_k} G^k b^k(x_2)\right)} \tag{6.77}$$

Esta última expresión es también válida para un compuesto formado por estribos (cercos) y hormigón colaborando juntos a una altura x_2 (ver Figura 6.51). Obsérvese que la ecuación (6.77) se reduce a la expresión básica para una sección homogénea (ver ecuación (6.12)) cuando la capa x_2 corta un único material l . Esto es,

$$\tau^l(x_2) = \frac{\mathrm{Q}_2 \cancel{G^l} \cancel{E_l} \sum_{i=1}^{n_i} \left(S_1^*(x_2)\right)_i}{\left(\cancel{E_l} \sum_{j=1}^{n_j} (I_1)_j\right)\left(\cancel{G^l} \sum_{k=1}^{n_k} b^k(x_2)\right)} \quad \Rightarrow \quad \tau^l(x_2) = \frac{\mathrm{Q}_2 S_1^*(x_2)}{I_1 b(x_2)} \tag{6.78}$$

- **Cálculo del Área Reducida en secciones transversales compuestas**

El cálculo del Área Reducida $\hat{A}$ en secciones de material compuesto permite simplificar el cálculo de estructuras a través del concepto de *rigidez reducida al corte* $\hat{A}_C G_C$. Esta área reducida se basa en la igualación de la condición de energía mostrada en el apartado (6.3.2.1). Primeramente, se obtiene el módulo de elasticidad transversal mecánico de la sección compuesta homogeneizada G_C por el método de los promedios,

$$\hat{A}_C G_C = \sum_{j=1}^{n_j} \hat{A}_j G_j \quad \Rightarrow \quad G_C = \frac{\sum_{j=1}^{n_j} \hat{A}_j G_j}{\underbrace{\sum_{j=1}^{n_j} \hat{A}_j}_{\hat{A}_C}} \tag{6.79}$$

A través del método de homogeneización de los promedios se escribe la distorsión media γ^m en la sección transversal compuesta (ver Figura 6.18 y ec. (6.21)), a partir de la energía acumulada en la sección,

$$\gamma^m = \frac{1}{\mathrm{Q}_2} \int_A \tau(x_2)\,\gamma(x_2)\,dA = \frac{1}{\mathrm{Q}_2\, G_C} \int_A \tau^2(x_2)\,dA = \frac{1}{\mathrm{Q}_2\, G_C} \int_h \tau^2(x_2)\, b(x_2)\,dx_2 \tag{6.80}$$

Teniendo en cuenta que la sección está compuesta en cada capa por distintos materiales, se reescribe la ecuación anterior como,

$$\gamma^m = \frac{1}{\mathrm{Q}_2\, G_C}\int_h \sum_{l=1}^{n_k}\left[\tau^l(x_2)\right]^2 b^l(x_2)dx_2 =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Q}_2\, G_C}\int_h \sum_{l=1}^{n_k}\left[\frac{\mathrm{Q}_2 G^l \sum_{i=1}^{n_i} E_i\left(S_1^*(x_2)\right)_i}{\left(\sum_{j=1}^{n_j} E_j\left(I_1\right)_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n_k} G^k\, b^k(x_2)\right)}\right]^2 b^l(x_2)dx_2 \tag{6.81}$$

Considerando ahora la distorsión media γ^m en función de la rigidez reducida $\hat{A}_C\, G_C$, e igualándola con la expresión anterior (6.81) que resulta de la energía acumulada en la sección transversal compuesta, se obtiene la expresión del área reducida,

$$\gamma^m = \frac{\mathrm{Q}_2}{\hat{A}_C\, G_C} \;\Rightarrow\; \hat{A}_C = \frac{\mathrm{Q}_2}{\gamma^m\, G_C} = \frac{1}{\int_h \sum_{l=1}^{n_k}\left[\frac{G^l \sum_{i=1}^{n_i} E_i\left(S_1^*(x_2)\right)_i}{\left(\sum_{j=1}^{n_j} E_j\left(I_1\right)_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n_k} G^k \cdot b^k(x_2)\right)}\right]^2 b^l(x_2)dx_2} \tag{6.82}$$

Si se incorpora el concepto del factor de forma $\hat{\kappa} = \hat{A}_C / A_C$ presentado en el apartado (6.3.2.1), a partir del área reducida se puede obtener la rigidez reducida $\hat{A}_C G_C$ como,

$$\hat{A}_C G_C = \sum_{j=1}^{n_j} \hat{A}_j G_j = \sum_{j=1}^{n_j} \hat{\kappa}_j A_j G_j \tag{6.83}$$

6.5 Corte por flexión esviada u oblicua – Fórmula general del corte o fórmula de Collignon-Jourawski

6.5.1 Corte oblicuo o esviado en secciones transversales macizas simétricas

A continuación, se presenta la expresión que relaciona la tensión tangencial en una sección transversal maciza y simétrica, de una barra, con el corte que la produce mediante un planteo aproximado. Aceptando estas restricciones, la expresión del corte oblicuo (esviado) surge de la superposición de los efectos producidos por la acción de los cortes rectos en los ejes principales de inercia de la sección. El tratamiento exacto del problema debe hacerse siguiendo los métodos de la Teoría de la Elasticidad[2] y, por lo tanto, excede los alcances de este texto.

En la Figura 6.52 se muestra la forma en que se equilibra la sección transversal maciza y simétrica cuando es sometida a una flexión esviada u oblicua variable que da lugar a un esfuerzo de corte esviado. Este esfuerzo de corte puede ser descompuesto en las direcciones de los ejes centroidales principales de inercia. El esfuerzo de corte $\mathsf{Q}(x_3)$ actúa siempre ortogonal al momento $\mathsf{M}(x_3)$ y, por lo tanto, lo hace según el ángulo β que es el complemento del ángulo α en el que actúa el momento flector.

Siguiendo los mismos pasos que para el corte recto desarrollado en el apartado 6.3 , se presenta a continuación la extensión conceptual para tratar el corte esviado. El cambio que sufre el momento flector $\mathsf{M}(x_3)$ a lo largo de un elemento diferencial de barra de longitud dx_3 produce una fuerza normal desequilibrada dN^* entre dos secciones transversales contiguas. La rebanada de barra se reequilibra por el esfuerzo de corte $d\mathsf{Q}$ que resulta de integrar las tensiones tangenciales que actúan en el punto de confluencia de coordenadas (x_1, x_2). Así, las fuerzas axiales desequilibradas dN_1^* y dN_2^* se obtienen integrando, respectivamente, las tensiones normales obrantes en las áreas A_1^* (entre x_2 y $x_2^{\max}$) y A_2^* (entre x_1 y $x_1^{\max}$), resultando,

[2] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier. Theory of Elasticity. Mcgraw Hill Education (India) Private Limited; 3 edition (2010).

$$
\begin{cases}
N_1^* = \int_{A_1^*} \sigma_3^{M_1} dA_1 = \int_{x_2}^{x_2^{max}} \dfrac{M_1}{I_1} x_2^* \, dA_1 = \dfrac{M_1}{I_1} S_1^*(x_2) \\
\qquad \Rightarrow \; dN_1^* = \dfrac{dM_1}{I_1} S_1^*(x_2) = \tau_2(x_2) b_1(x_2) dx_3 \\
\qquad \Rightarrow \; \tau_2(x_2) = \dfrac{dM_1}{dx_3} \dfrac{S_1^*(x_2)}{I_1 \, b_1(x_2)} = \dfrac{Q_2 \, S_1^*(x_2)}{I_1 \, b_1(x_2)} \\
N_2^* = \int_{A_2^*} \sigma_3^{M_2} dA_2 = \int_{x_1}^{x_1^{max}} \dfrac{M_2}{I_2} x_1^* \, dA_2 = \dfrac{M_2}{I_2} S_2^*(x_1) \\
\qquad \Rightarrow \; dN_2^* = -\dfrac{dM_2}{I_2} S_2^*(x_1) = \tau_1(x_1) b_2(x_1) dx_3 \\
\qquad \Rightarrow \; \tau_1(x_1) = -\dfrac{dM_2}{dx_3} \dfrac{S_2^*(x_1)}{I_2 \, b_2(x_1)} = \dfrac{Q_1 \, S_2^*(x_1)}{I_2 \, b_2(x_1)}
\end{cases}
\tag{6.84}
$$

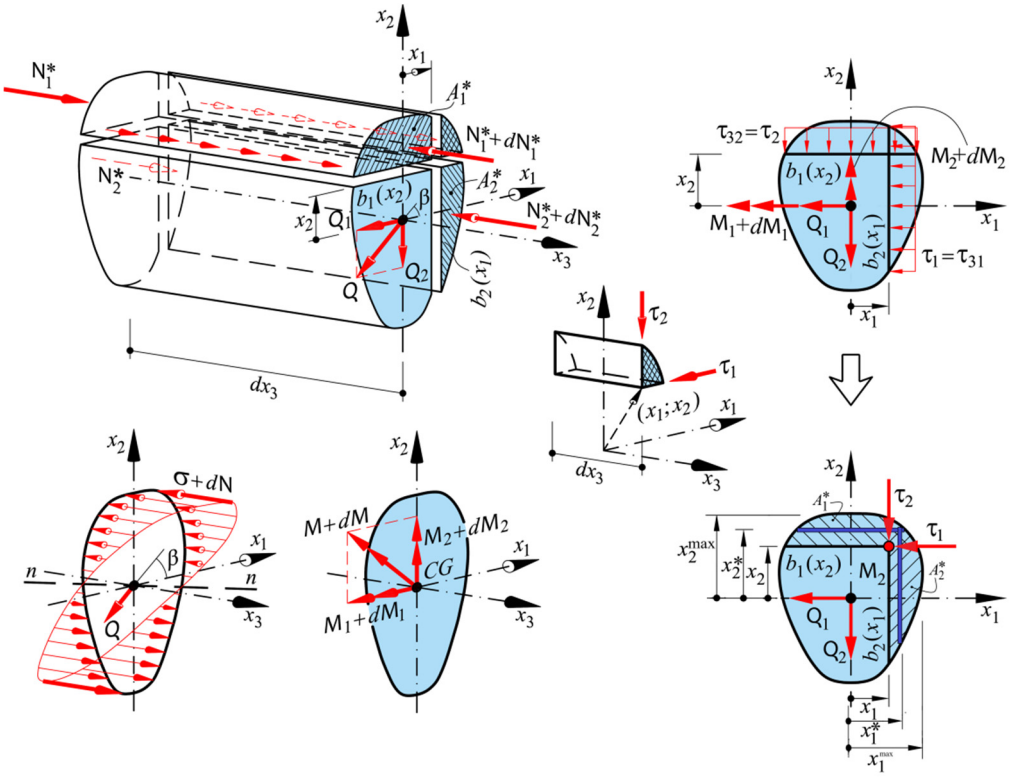
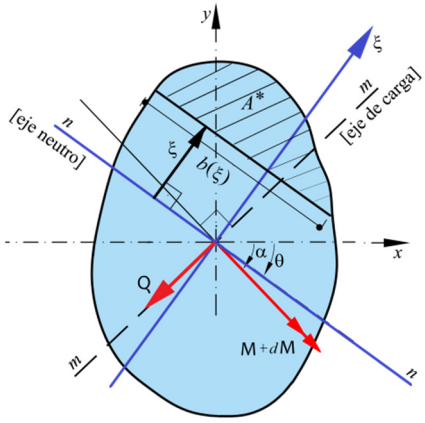


Figura 6.52 – Equilibrio de una sección transversal maciza y simétrica sometida a una flexión esviada variable que da lugar a un esfuerzo de corte esviado.

La fuerza $dN^* = dN_1^* + dN_2^*$ (ver Figura 6.52) debe ser equilibrada por la resultante de la composición de las tensiones $\tau_1(x_1)$ y $\tau_2(x_2)$.

Una forma más precisa de resolver este problema, desde la Resistencia de Materiales, sería el estudio directo del corte por flexión esviada siguiendo lo estudiado en la sección 5.3.2. De esta manera, a partir de la ec. (5.73) se puede demostrar que la tensión tangencial a una distancia ξ del eje neutro resulta



$$\tau(\xi) = \frac{Q \cdot S_{nn}^*}{b(\xi)\left(\dfrac{I_{nn}}{\cos(\alpha - \theta)}\right)} \tag{6.85}$$

6.5.2 Corte esviado u oblicuo en secciones transversales delgadas

En este apartado se deducen las expresiones del corte por flexión esviada en secciones transversales de paredes delgadas, de manera análoga al procedimiento seguido en problemas de corte recto.

A diferencia de las barras macizas, las tensiones tangenciales (o el flujo de corte) se obtienen cortando la sección delgada con un plano normal al contorno, y no paralelo a los ejes principales (ver Figura 6.53).

$$\begin{aligned}
dN^* &= \frac{dM_1}{I_1} S_1^*(x_2) - \frac{dM_2}{I_2} S_2^*(x_1) = \tau(x_1, x_2)\,\delta\, dx_3 \\
\tau(x_1, x_2) &= \frac{dM_1}{dx_3}\frac{S_1^*(x_2)}{I_1 t} - \frac{dM_2}{dx_3}\frac{S_2^*(x_1)}{I_2 t} \\
\tau(x_1, x_2) &= \frac{Q_2 S_1^*(x_2)}{I_1 t} + \frac{Q_1 S_2^*(x_1)}{I_2 t} \\
\tau(x_1, x_2) &= Q\left[\frac{S_1^*(x_2)}{I_1 t}\cos\beta + \frac{S_2^*(x_1)}{I_2 t}\sin\beta\right]
\end{aligned} \tag{6.86}$$

Como se ha visto, al trabajar en ejes principales (x_1, x_2), el problema de corte esviado se descompone en dos problemas de corte desacoplado según cada eje principal. Esto permite calcular el centro de corte en cada uno de dichos problemas y luego obtener el centro de corte de la sección por composición de ambos problemas desacoplados.

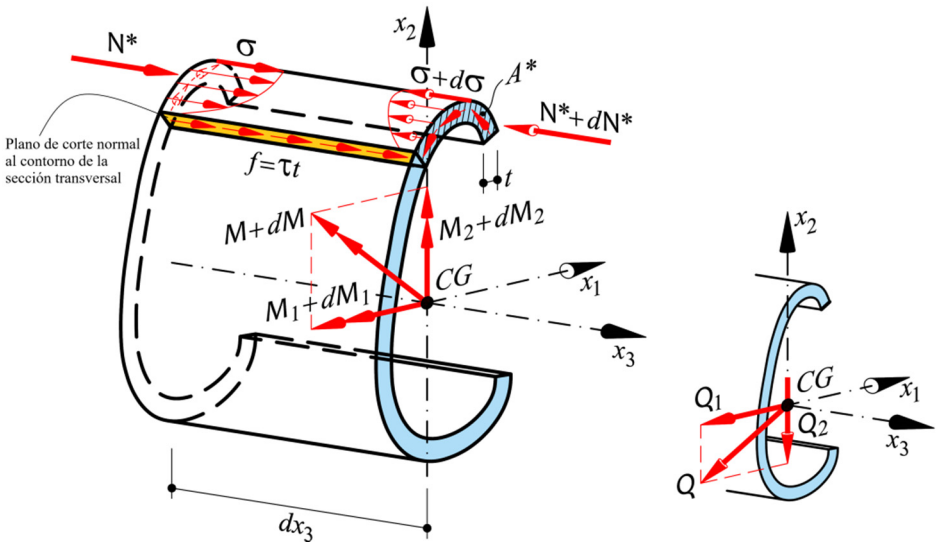


Figura 6.53 – Equilibrio de una sección transversal delgada sometida a una flexión esviada variable que da lugar a un esfuerzo de corte esviado.

6.5.3 Forma general del corte esviado u oblicuo en secciones transversales de paredes delgadas para sistemas de ejes centroidales no-principales

En ciertos casos es conveniente calcular el flujo de corte o las tensiones tangenciales en un sistema de referencias centroidales no-principal, esto siempre que se pueda encontrar un sistema de referencia cómodo para el cálculo de los momentos estáticos. Para estos casos se describe a continuación la forma generalizada de tratar el corte por flexión en ejes no-principales. Esto conduce a unas expresiones algebraicas más complejas que cuando se trabaja en ejes principales, pero en ciertos casos se simplifica la forma de operar.

Se tiene que la tensión normal a la sección transversal que resulta de un problema de flexión esviada para ejes no-principales vale (ver apartados 5.3.3 y 5.5.3)

$$\sigma(x,y)=\frac{I_{yy}\mathrm{M}_x+I_{xy}\mathrm{M}_y}{I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2}\,y-\frac{I_{xx}\mathrm{M}_y+I_{xy}\mathrm{M}_x}{I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2}\,x \tag{6.87}$$

que reordenando los términos se puede escribir

$$\sigma(x,y)=\frac{\mathrm{M}_x(I_{yy}\,y-I_{xy}\,x)}{I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2}-\frac{\mathrm{M}_y(I_{xx}\,x-I_{yx}\,y)}{I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2} \tag{6.88}$$

Con esta tensión normal evaluada en dos secciones transversales contiguas, distanciadas un dx_3, se calcula el desequilibrio en la barra, y de aquí resulta la tensión tangencial que restituye dicho equilibrio. Esto es,

$$N^*=\int_{A^*}\sigma\,dA^*=\int_{A^*}\frac{\mathrm{M}_x(I_{yy}\,y-I_{xy}\,x)}{I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2}\,dA-\int_{A^*}\frac{\mathrm{M}_y(I_{xx}\,x-I_{yx}\,y)}{I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2}\,dA \tag{6.89}$$

de aquí resulta que la fuerza no equilibrada vale,

$$dN^*=\frac{d\mathrm{M}_x}{I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2}\int_{A^*}(I_{yy}\,y-I_{xy}\,x)\,dA-\frac{d\mathrm{M}_y}{I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2}\int_{A^*}(I_{xx}\,x-I_{yx}\,y)dA \tag{6.90}$$

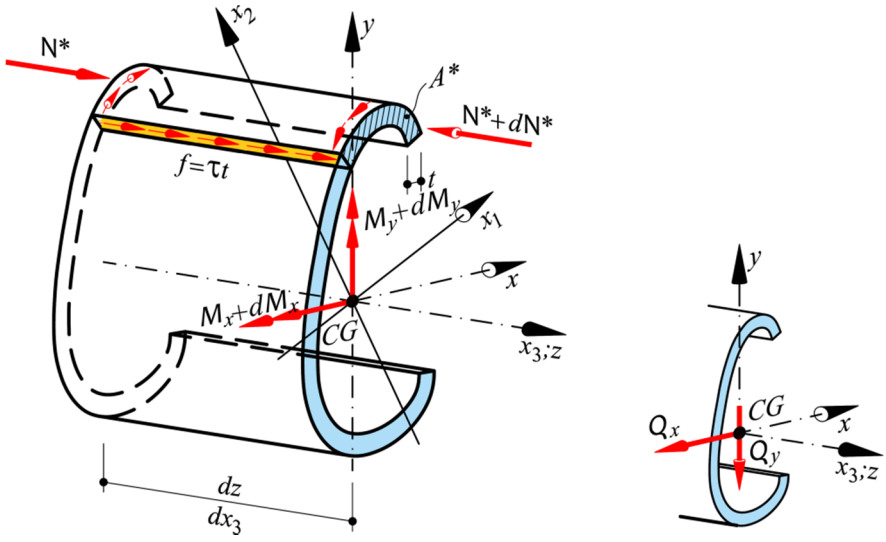


Figura 6.54 – Equilibrio de una sección transversal delgada sometida a una flexión esviada variable que da lugar a un esfuerzo de corte esviado – Sistema de referencia no principal.

Teniendo en cuenta que

$$dN^* = \tau(x,y)\,t\,dz \tag{6.91}$$

Se obtiene la tensión tangencial,

$$\tau(x,y) = \frac{Q_y}{t(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}\left[I_{yy}\int_{A^*} y dA - I_{xy}\int_{A^*} x dA\right] + \frac{Q_x}{t(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}\left[I_{xx}\int_{A^*} x dA - I_{xy}\int_{A^*} y dA\right]$$

$$\tau(x,y) = \frac{Q_y}{t(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}\left[I_{yy}S_x^* - I_{xy}S_y^*\right] + \frac{Q_x}{t(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}\left[I_{xx}S_y^* - I_{xy}S_x^*\right] \tag{6.92}$$

Obsérvese que cuando los ejes x e y son principales, es decir $x \equiv x_1$ e $y \equiv x_2$, resulta $I_{xy} = 0$, recuperándose la forma de la ecuación (6.86).

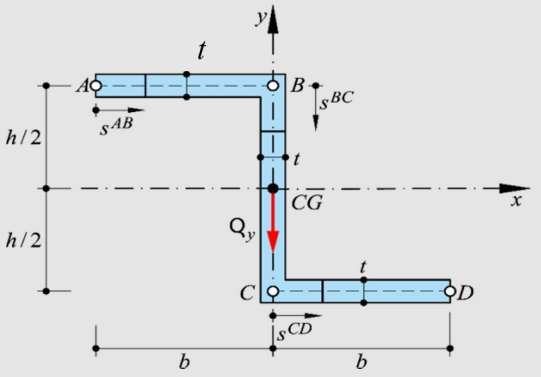
De esta forma es también más fácil la determinación del centro de corte.

Ejemplo 6-4: Calcular la distribución de tensiones tangenciales producida por un corte vertical descendente Q_y en la sección de paredes delgadas de la figura.

$$I_{xx} \cong \frac{h^3 t}{12} + \frac{b\,h^2 t}{2}$$

$$I_{yy} \cong \frac{2b^3\,t}{3}$$

$$I_{xy} \cong -\frac{b^2 h t}{2}$$



La distribución de las tensiones tangenciales se calcula teniendo en cuenta que actúa un corte vertical $-Q_y$ y un corte horizontal nulo $Q_x = 0$, resultando,

$$\tau = \frac{-Q_y}{t(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}\left[I_{yy}S_x^* - I_{xy}S_y^*\right] + \cancel{\frac{Q_x}{t(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}\left[I_{xx}S_y^* - I_{xy}S_x^*\right]}$$

Con, $I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 = \left(\frac{h^3 t}{12} + \frac{b\,h^2 t}{2}\right)\cdot\left(\frac{2b^3\,t}{3}\right) - \left(\frac{2b^3\,t}{3}\right)^2 = \frac{b^3 h^2 t^2}{36}(2h + 3b)$

- Cálculo de la tensión y el flujo en el ala superior

$$S_x^*(s^{AB}) = \left(t\, s^{AB}\right)\frac{h}{2}; \qquad S_y^*(s^{AB}) = \left(t\, s^{AB}\right)\left(-b + \frac{s^{AB}}{2}\right) = -t\, s^{AB}\, b + \frac{t\left(s^{AB}\right)^2}{2}$$

$$I_{yy}\, S_x^* = \left(\frac{2b^3\, t}{3}\right)\left(t\, s^{AB}\right)\frac{h}{2} = \frac{b^3\, t^2\, h\, s^{AB}}{3}$$

$$I_{xy}\, S_y^* = \left(-\frac{b^2 h t}{2}\right)\left(-t\, s^{AB}\, b + \frac{t\left(s^{AB}\right)^2}{2}\right) = \frac{b^2\, t^2\, h}{4}\left(-\left(s^{AB}\right)^2 + 2b\, s^{AB}\right)$$

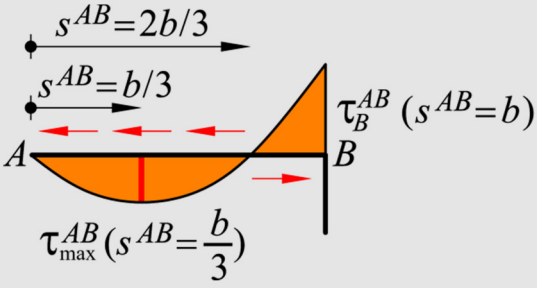
Sustituyendo en la expresión de la tensión tangencial, resulta

$$\boxed{\tau(s^{AB}) = \frac{3\mathrm{Q}_y\left(2b\, s^{AB} - 3\left(s^{AB}\right)^2\right)}{b\, h\, t\left(2h + 3b\right)}} \rightarrow \begin{cases} \tau_A = \tau(s^{AB} = 0) = 0 \\ \tau(s^{AB} = \dfrac{b}{2}) = \dfrac{3\mathrm{Q}_y\, b}{8t\, h^2 + 12t\, b\, h} \\ \tau_B = \tau(s^{AB} = b) = -\dfrac{3\mathrm{Q}_y\, b}{2t\, h^2 + 3t\, b\, h} \end{cases}$$

Los ceros de esta función son: $\tau(s^{AB}) = 0 \Rightarrow s^{AB} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2}{3}b \end{cases}$

El máximo y su posición es:

$$\frac{d\,\tau(s^{AB})}{ds^{AB}} = 0 \Rightarrow s^{AB} = \frac{b}{3} \Rightarrow \tau(s^{AB})\Big|^{\max} = \tau(s^{AB} = \frac{b}{3}) = \frac{\mathrm{Q}_y\, b}{2h^2\, t + 3b\, h\, t}$$



$$V^{AB} = \int_0^b \tau^{AB}(s^{AB})\, t\, ds = 0$$



La fuerza V^{AB} transmitida por el ala superior es nula, y resulta de la siguiente integración de las tensiones tangenciales

$$V^{AB} = \frac{3\,Q_y}{b\,h\,t\,(2h+3b)} \int_0^b \left(2\,b\,s^{AB} - 3\left(s^{AB}\right)^2\right) \cdot t \; ds^{AB} = 0$$

- Cálculo de la tensión y el flujo en el alma

$$S_x^*(s^{BC}) = (b\,t)\frac{h}{2} + \left(s^{BC}\,t\right)\left(\frac{h}{2} - \frac{s^{BC}}{2}\right) = b\,t\,\frac{h}{2} + t\,s^{BC}\,\frac{h}{2} - \frac{t\left(s^{BC}\right)^2}{2}$$

$$S_y^*(s^{BC}) = (b\,t)\left(-\frac{b}{2}\right) + \left(t\,s^{BC}\right)\cdot 0 = -\frac{b^2\,t}{2}$$

$$I_{yy}\,S_x^* = \left(\frac{2\,b^3\,t}{3}\right)\left(b\,t\,\frac{h}{2} + t\,s^{BC}\,\frac{h}{2} - \frac{t\left(s^{BC}\right)^2}{2}\right) = \frac{b^3\,t^2\left(h\,s^{BC} - \left(s^{BC}\right)^2 + b\,h\right)}{3}$$

$$I_{xy}\,S_y^* = \left(-\frac{b^2\,h\,t}{2}\right)\left(-\frac{b^2\,t}{2}\right) = \frac{b^4\,t^2\,h}{4}$$

Sustituyendo en la expresión de la tensión tangencial, resulta

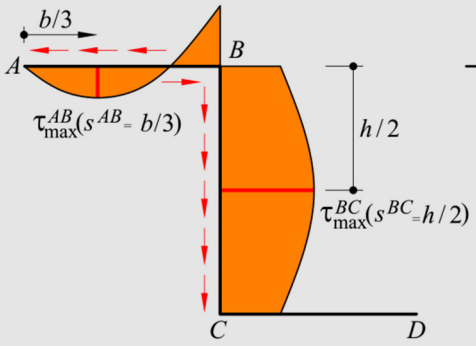
$$\boxed{\tau(s^{BC}) = -\frac{3\,Q_y\left(4\,h\,s^{BC} - 4\left(s^{BC}\right)^2 + b\,h\right)}{h^2\left(2\,h\,t + 3\,b\,t\right)}} \rightarrow \begin{cases} \tau_B = \tau(s^{BC}=0) = -\dfrac{3\,Q_y\,b}{2\,t\,h^2 + 3\,t\,b\,h} \\ \tau_{CG} = \tau(s^{BC}=\dfrac{h}{2}) = -\dfrac{3\,Q_y\,(b+h)}{2\,t\,h^2 + 3\,t\,b\,h} \\ \tau_C = \tau(s^{BC}=h) = -\dfrac{3\,Q_y\,b}{2\,t\,h^2 + 3\,t\,b\,h} \end{cases}$$

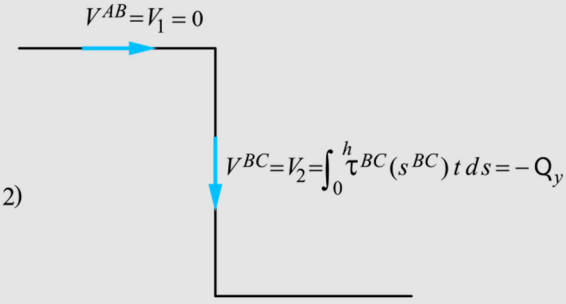
El máximo y su posición es:

$$\frac{d\,\tau(s^{BC})}{ds^{BC}} = 0 \Rightarrow s^{BC} = \frac{h}{2} \Rightarrow \tau(s^{BC})\Big|^{\max} = \tau(s^{BC}=\frac{h}{2}) = -\frac{3Q_y\,(b+h)}{2h^2\,t + 3\,b\,h\,t}$$

La fuerza V^{BC} transmitida por el alma, resulta de la siguiente integración de las tensiones tangenciales

$$V^{BC} = -\frac{3Q_y}{h^2\left(2th+3tb\right)}\int_0^h \left(4hs^{BC} - 4\left(s^{BC}\right)^2 + bh\right)\cdot t\ ds^{BC} = -Q_y$$





- Cálculo de la tensión y el flujo en el ala inferior

$$S_x^*(s^{CD}) = (tb)\frac{h}{2} + (th)0 + \left(ts^{CD}\right)\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{bth}{2} - \frac{hts^{CD}}{2}$$

$$S_y^*(s^{CD}) = (tb)\left(-\frac{b}{2}\right) + (th)0 + \left(s^{CD}t\right)\frac{s^{CD}}{2} = -\frac{b^2t}{2} + \frac{t\left(s^{CD}\right)^2}{2}$$

$$I_{yy}S_x^* = \left(\frac{2b^3t}{3}\right)\left(\frac{bth}{2} - \frac{hts^{CD}}{2}\right) = \frac{b^4t^2h}{3} - \frac{b^3t^2hs^{CD}}{3}$$

$$I_{xy}S_y^* = \left(-\frac{b^2ht}{2}\right)\left(-\frac{b^2t}{2} + \frac{t\left(s^{CD}\right)^2}{2}\right) = \frac{b^4t^2h}{4} - \frac{b^2t^2h\left(s^{CD}\right)^2}{4}$$

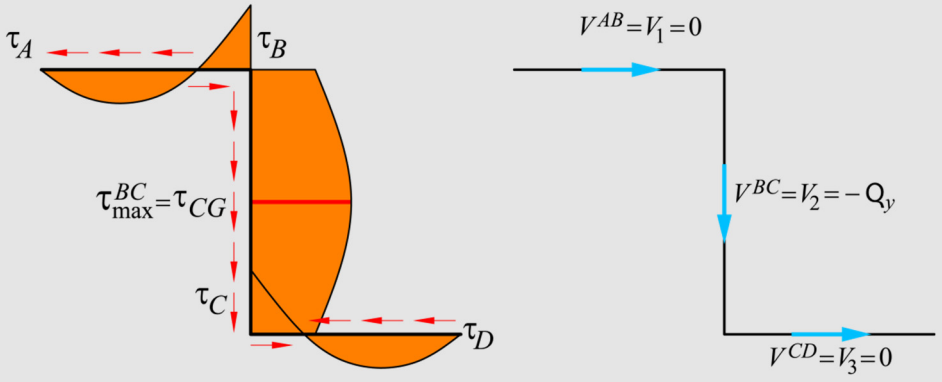
Sustituyendo en la expresión de la tensión tangencial, resulta

$$\boxed{\tau(s^{CD}) = -\frac{3Q_y\left(b^2 - 4bs^{CD} + 3\left(s^{CD}\right)^2\right)}{bht\left(2h+3b\right)}} \rightarrow \begin{cases} \tau_C = \tau(s^{CD}=0) = -\dfrac{3Q_y\,b}{2th^2+3tbh} \\ \tau(s^{CD}=\dfrac{b}{2}) = \dfrac{3Q_y\,b}{8th^2+12tbh} \\ \tau_D = \tau(s^{CD}=b) = 0 \end{cases}$$

Los ceros de esta función son: $\tau(s^{CD}) = 0 \Rightarrow s^{CD} = \begin{cases} \dfrac{b}{3} \\ b \end{cases}$

El máximo y su posición es:

$$\frac{d\,\tau(s^{CD})}{ds} = 0 \Rightarrow s^{CD} = \frac{2b}{3} \Rightarrow \tau(s^{CD})\Big|^{\max} = \tau(s^{CD} = \frac{2b}{3}) = \frac{Q_y\, b}{2h^2\, t + 3\,b\,h\,t}$$



La fuerza V^{CD} transmitida por el ala inferior es nula, y resulta de la siguiente integración de las tensiones tangenciales

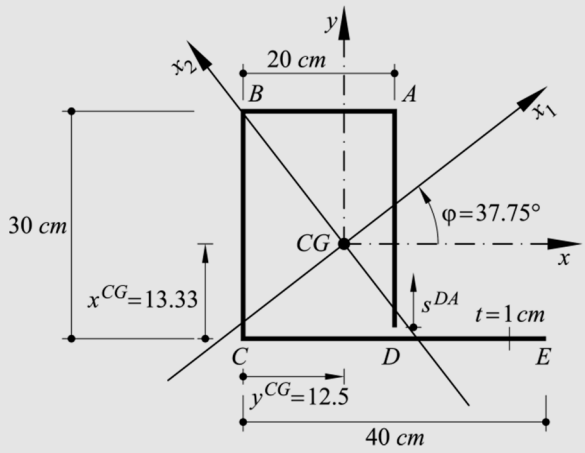
$$V^{CD} = -\frac{3\,Q_y}{b\,h\,t\,(2h+3b)} \int_0^b \left(b^2 - 4\,b\,s^{CD} + 3\left(s^{CD}\right)^2 \right) \cdot t \; ds^{CD} = 0$$

- Verificación del equilibrio

La resultante de las fuerzas traslacionales y rotacionales que se desarrollan debido a las tensiones tangenciales, confirman que la única fuerza actuante en la sección es el cortante vertical,

$$\begin{cases} \sum F_V = V^{BC} = -Q_y \\ \sum F_H = V^{AB} + V^{CD} = 0 \\ \sum M_{CG} = V^{AB}\,\dfrac{h}{2} - V^{CD}\,\dfrac{h}{2} = 0 \end{cases}$$

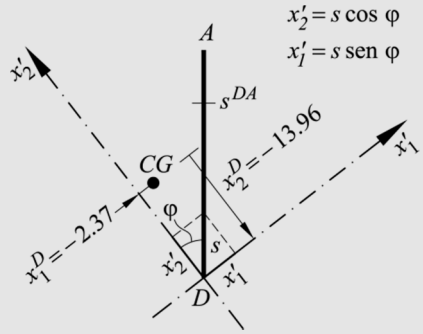
Ejemplo 6-5: Calcular la distribución de tensiones tangenciales producida por un corte vertical descendente $Q_y = Q$, que actúa en el centro de cortante, en la sección de paredes delgadas abierta de la figura.



- Cálculo de los momentos estáticos de la sección abierta

Tramo DA

$$\begin{cases} x_2' = s\cos\varphi \\ x_1' = s\,\text{sen}\,\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = x_2' + x_2^D = s\cos\varphi - 13.96 \\ x_1 = x_1' + x_1^D = s\,\text{sen}\,\varphi - 2.37 \end{cases}$$



$$S_1^* = \int_{DA} x_2 dA = \int_{DA} x_2\, t\, ds\,; \qquad x_2 = s\cos\varphi - 13.96$$

$$S_1^*(s) = \int_0^{s^{DA}} \left(s\cos\varphi - 13.96\right) t\, ds = t\left(\int_0^{s^{DA}} s\cos\varphi\, ds - \int_0^{s^{DA}} 13.96\, ds \right)$$

$$\boxed{S_1^*(s^{DA}) = t\left[\frac{\left(s^{DA}\right)^2}{2}\cos\varphi - 13.96\, s^{DA}\right];\quad 0 \le s^{DA} \le 30}$$

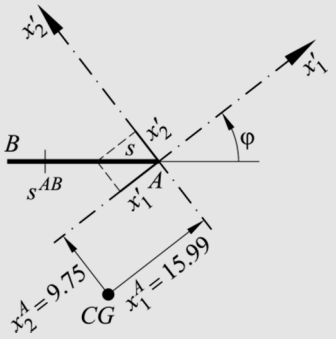
$$S_2^* = \int_{DA} x_1 dA = \int_{DA} x_1\, t\, ds; \qquad x_1 = s\,\text{sen}\,\varphi - 2.37$$

$$S_2^*(s^{DA}) = \int_0^{s^{DA}} \left(s\,\text{sen}\,\varphi - 2.37\right) t\, ds = t\left(\int_0^{s^{DA}} s\,\text{sen}\,\varphi\, ds - \int_0^{s^{DA}} 2.37\, ds\right)$$

$$\boxed{S_2^*(s^{DA}) = t\left[\frac{\left(s^{DA}\right)^2}{2}\text{sen}\,\varphi - 2.37\, s^{DA}\right];\quad 0 \le s^{DA} \le 30}$$

Tramo AB

$$\begin{cases} x_1' = -s\cos\varphi \\ x_2' = s\,\text{sen}\,\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + x_1^A = -s\cos\varphi + 15.99 \\ x_2 = x_2' + x_2^A = s\,\text{sen}\,\varphi + 9.75 \end{cases}$$



$$S_1^* = \left[S_1^*\left(s^{DA} = 30\right)\right]^{DA} + \int_{AB} x_2 dA = \left[S_1^*\left(30\right)\right]^{DA} + \int_0^{s^{AB}} x_2\, t\, ds; \qquad x_2 = s\,\text{sen}\,\varphi + 9.75$$

$$S_1^* = \left[S_1^*\left(30\right)\right]^{DA} + t\int_0^{s^{AB}} \left(s\,\text{sen}\,\varphi + 9.75\right) ds$$

$$\boxed{S_1^*\left(s^{AB}\right) = \left[S_1^*\left(30\right)\right]^{DA} + t\left[\frac{\left(s^{AB}\right)^2}{2}\text{sen}\,\varphi + 9.75\, s^{AB}\right];\quad 0 \le s^{AB} \le 20}$$

$$S_2^* = \left[S_2^* \left(s^{DA} = 30 \right) \right]^{DA} + \int_{AB} x_1 dA = \left[S_2^* (30) \right]^{DA} + \int_0^{s^{AB}} x_1 \, t \, ds; \quad x_1 = -s\cos\varphi + 15.99$$

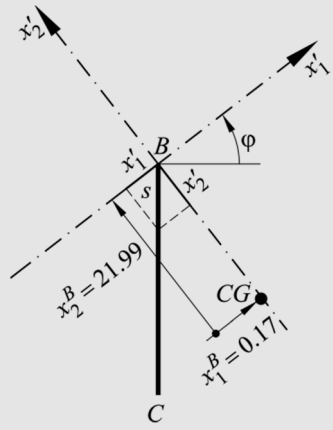
$$S_2^* = \left[S_2^* (30) \right]^{DA} + t \int_0^{s^{AB}} \left(-s\cos\varphi + 15.99 \right) ds$$

$$\boxed{S_2^* \left(s^{AB} \right) = \left[S_2^* (30) \right]^{DA} + t \left[-\frac{\left(s^{AB} \right)^2}{2} \cos\varphi + 15.99 \, s^{AB} \right]}; \quad 0 \le s^{AB} \le 20$$

Tramo BC

$$\begin{cases} x_1' = -s\,\text{sen}\,\varphi \\ x_2' = -s\cos\varphi \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + x_1^B = -s\,\text{sen}\,\varphi + 0.17 \\ x_2 = x_2' + x_2^B = -s\cos\varphi + 21.99 \end{cases}$$

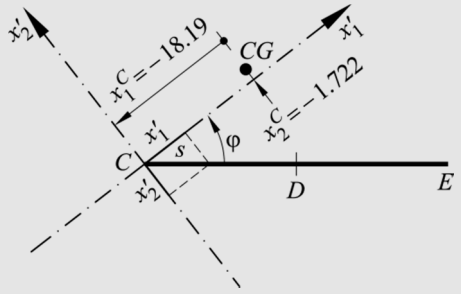


$$\boxed{S_1^* \left(s^{BC} \right) = \left[S_1^* \left(s^{AB} = 20 \right) \right]^{AB} + t \left[-\frac{\left(s^{BC} \right)^2}{2} \cos\varphi + 21.99 \, s^{BC} \right]}; \quad 0 \le s^{BC} \le 30$$

$$\boxed{S_2^* \left(s^{BC} \right) = \left[S_2^* \left(s^{AB} = 20 \right) \right]^{AB} + t \left[-\frac{\left(s^{BC} \right)^2}{2} \text{sen}\,\varphi + 0.17 \, s^{BC} \right]}$$

Tramo CE

$$\begin{cases} x_1' = s\cos\varphi \\ x_2' = -s\,\text{sen}\,\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + x_1^C = s\cos\varphi - 18.19 \\ x_2 = x_2' + x_2^C = -s\,\text{sen}\,\varphi - 1.722 \end{cases}$$



$$S_1^*\left(s^{CE}\right)=\left[S_1^*\left(s^{BC}=30\right)\right]^{BC}+t\left[-\frac{\left(s^{CE}\right)^2}{2}\operatorname{sen}\varphi-1.722\,s^{CE}\right];\quad 0\le s^{CE}\le 40$$

$$S_2^*\left(s^{CE}\right)=\left[S_2^*\left(s^{BC}=30\right)\right]^{BC}+t\left[\frac{\left(s^{CE}\right)^2}{2}\cos\varphi-18.19\,s^{CE}\right]$$

- Cálculo de los flujos de la sección abierta

$$f(s)=\underbrace{\frac{\mathrm{Q}_2\,S_1^*}{I_1}}_{f_2}+\underbrace{\frac{\mathrm{Q}_1\,S_2^*}{I_2}}_{f_1};\qquad \begin{cases}\mathrm{Q}_2=\mathrm{Q}\cos\varphi\\ \mathrm{Q}_1=\mathrm{Q}\operatorname{sen}\varphi\end{cases}$$

Flujo f_2

Para DA: $0\le s^{DA}\le 30$

$$\frac{f_2^{DA}\,I_1}{\mathrm{Q}_2}=\frac{f_2^{DA}\,I_1}{\mathrm{Q}\cos\varphi}=t\left[\frac{\left(s^{DA}\right)^2}{2}\cos\varphi-13.96\,s^{DA}\right]$$

$$f_2^{DA}(s^{DA})=\frac{t\,\mathrm{Q}}{I_{11}}\left[\frac{\left(s^{DA}\right)^2}{2}\cos^2\varphi-13.96\,s^{DA}\cos\varphi\right]$$

$$f_2^{DA}(s^{DA})=\frac{1\cdot\mathrm{Q}}{21127.49}\left[\frac{\left(s^{DA}\right)^2}{2}\cos^2\left(37.75^{\circ}\right)-13.96\,s^{DA}\cos\left(37.75^{\circ}\right)\right]$$

$$f_2^{DA}(s^{DA}) = \mathrm{Q}\left[\frac{\left(s^{DA}\right)^2}{67587.4} - \frac{s^{DA}}{1914.06}\right] \Rightarrow \begin{cases} f_2^{D}(s^{DA}=0) = 0 \\ f_2^{A}(s^{DA}=30) = -\dfrac{\mathrm{Q}}{424.2} \end{cases}$$

Para AB: $0 \le s^{AB} \le 20$

$$f_2^{AB}(s^{AB}) = f_2^{A}(s^{DA}=30) + \frac{t\,\mathrm{Q}}{I_1}\left[\frac{\left(s^{AB}\right)^2}{2}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi + 9.75\,s^{AB}\cos\varphi\right]$$

$$f_2^{AB}(s^{AB}) = -\frac{\mathrm{Q}}{424.2} + \frac{1\cdot\mathrm{Q}}{21127.49}\left[\frac{\left(s^{AB}\right)^2}{2}\cos\left(37.75^{\mathrm{o}}\right)\mathrm{sen}\left(37.75^{\mathrm{o}}\right) + 9.75\,s^{AB}\cos\left(37.75^{\mathrm{o}}\right)\right]$$

$$f_2^{AB}(s^{AB}) = \mathrm{Q}\left(-\frac{1}{424.2} + \frac{\left(s^{AB}\right)^2}{87290.4} + \frac{s^{AB}}{2740.5}\right) \rightarrow \begin{cases} f_2^{A}(s^{AB}=0) = -\dfrac{\mathrm{Q}}{424.2} \\ f_2^{B}(s^{AB}=20) = \dfrac{\mathrm{Q}}{105.0} \end{cases}$$

Para BC: $0 \le s^{BC} \le 30$

$$f_2^{BC}(s^{BC}) = f_2^{B}(s^{AB}=20) + \frac{t\,\mathrm{Q}}{I_1}\left[-\frac{\left(s^{BC}\right)^2}{2}\cos^2\varphi + 21.99\,s^{BC}\cos\varphi\right]$$

$$f_2^{BC}(s^{BC}) = \frac{\mathrm{Q}}{105} + \frac{1\cdot\mathrm{Q}}{21127.49}\left[-\frac{\left(s^{BC}\right)^2}{2}\cos^2\varphi + 21.99\,s^{BC}\cos\varphi\right]$$

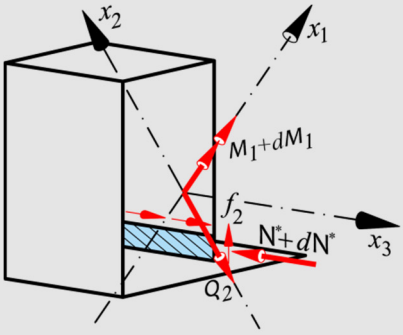
$$f_2^{BC}(s^{BC}) = \mathrm{Q}\left(\frac{1}{105} - \frac{\left(s^{BC}\right)^2}{67587.4} + \frac{s^{BC}}{1215}\right) \rightarrow \begin{cases} f_2^{B}(s^{BC}=0) = \dfrac{\mathrm{Q}}{105} \\ f_2^{C}(s^{BC}=30) = \dfrac{\mathrm{Q}}{47.84} \end{cases}$$

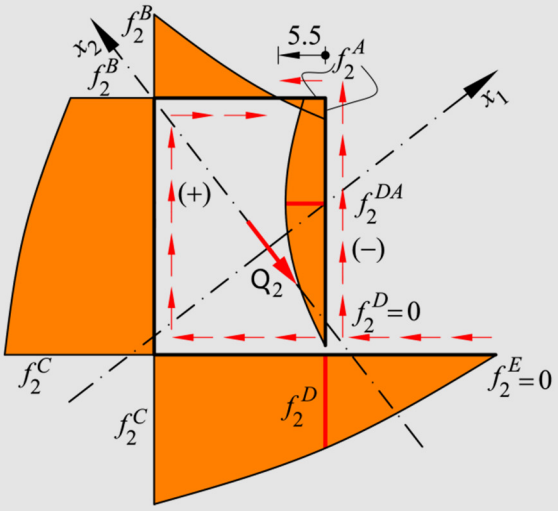
Para CE: $0 \le s^{CE} \le 40$

$$f_2^{CE}(s^{CE}) = f_2^{C}(s^{BC}=30) + \frac{t\,\mathrm{Q}}{I_1}\left[-\frac{\left(s^{CE}\right)^2}{2}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi - 1.722\,s^{CE}\cos\varphi\right]$$

$$f_2^{CE}(s^{CE}) = \frac{Q}{47.84} + \frac{1\cdot Q}{21127.49}\left[-\frac{\left(s^{CE}\right)^2}{2}\cos(37.75^o)\,\mathrm{sen}(37.75^o) - 1.722\,s^{CE}\cos(37.75^o)\right]$$

$$f_2^{CE}(s^{CE}) = Q\left(\frac{1}{47.84} - \frac{\left(s^{CE}\right)^2}{87290.4} - \frac{s^{CE}}{15517.03}\right) \rightarrow \begin{cases} f_2^C(s^{CE}=0) = \dfrac{Q}{47.84} \\ f_2^D(s^{CE}=20) = \dfrac{Q}{66.53} \\ f_2^E(s^{CE}=40) \approx 0 \end{cases}$$





Flujo f_1

Para DA: $0 \le s^{DA} \le 30$

$$\frac{f_1^{DA} I_2}{Q_1} = \frac{f_1^{DA} I_2}{Q\,\mathrm{sen}\,\varphi} = t\left[\frac{\left(s^{DA}\right)^2}{2}\mathrm{sen}\,\varphi - 2.37\,s^{DA}\right]$$

$$f_1^{DA}(s^{DA}) = \frac{t\,Q}{I_2}\left[\frac{\left(s^{DA}\right)^2}{2}\mathrm{sen}^2\varphi - 2.37\,s^{DA}\mathrm{sen}\,\varphi\right]$$

$$f_1^{DA}(s^{DA}) = \frac{1\cdot \mathrm{Q}}{10799.21}\left[\frac{\left(s^{DA}\right)^2}{2}\operatorname{sen}^2\left(37.75^{\mathrm{o}}\right) - 2.37\, s^{DA}\operatorname{sen}\left(37.75^{\mathrm{o}}\right)\right]$$

$$f_1^{DA}(s^{DA}) = \mathrm{Q}\left[\frac{\left(s^{DA}\right)^2}{57624.9} - \frac{s^{DA}}{7442.8}\right] \rightarrow \begin{cases} f_1^{D}\left(s^{DA}=0\right)=0 \\ f_1^{A}\left(s^{DA}=30\right)=\dfrac{\mathrm{Q}}{86.30} \end{cases}$$

Para AB: $0 \le s^{AB} \le 20$

$$f_1^{AB}(s^{AB}) = f_1^{A}\left(s^{DA}=30\right) + \frac{\mathrm{Q}t}{I_2}\left[-\frac{\left(s^{AB}\right)^2}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + 15.99\, s^{AB}\operatorname{sen}\varphi\right]$$

$$f_1^{AB}(s^{AB}) = \mathrm{Q}\left[\frac{1}{86.30} - \frac{\left(s^{AB}\right)^2}{44618} + \frac{s^{AB}}{1103}\right] \rightarrow \begin{cases} f_1^{A}\left(s^{AB}=0\right)=\dfrac{\mathrm{Q}}{86.30} \\ f_1^{B}\left(s^{AB}=20\right)=\dfrac{\mathrm{Q}}{48.18} \end{cases}$$

Para BC: $0 \le s^{BC} \le 30$

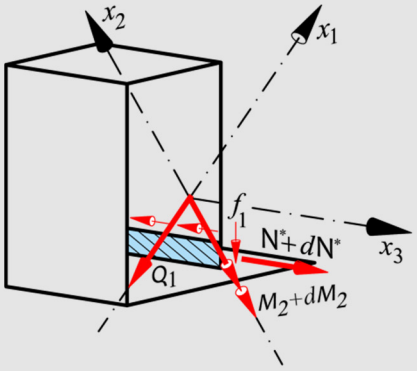
$$f_1^{BC} = f_1^{B} + \frac{\mathrm{Q}t}{I_2}\left[-\frac{\left(s^{BC}\right)^2}{2}\operatorname{sen}^2\varphi + 0.17\, s^{BC}\operatorname{sen}\varphi\right]$$

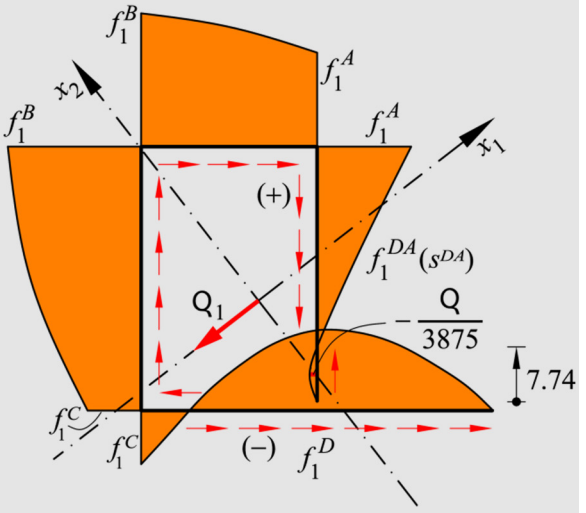
$$f_1^{BC}(s^{BC}) = \mathrm{Q}\left[\frac{1}{48.18} - \frac{\left(s^{BC}\right)^2}{57624.9} + \frac{s^{BC}}{103761}\right] \rightarrow \begin{cases} f_1^{B}\left(s^{BC}=0\right)=\dfrac{\mathrm{Q}}{48.18} \\ f_1^{C}\left(s^{BC}=30\right)=\dfrac{\mathrm{Q}}{184.28} \end{cases}$$

Para CE: $0 \le s^{CE} \le 40$

$$f_1^{CE} = f_1^{C} + \frac{\mathrm{Q}t}{I_2}\left[\frac{\left(s^{CE}\right)^2}{2}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - 18.19\, s^{CE}\operatorname{sen}\varphi\right]$$

$$f_1^{CE}(s^{CE}) = \mathrm{Q}\left[\frac{1}{184.28} + \frac{\left(s^{CE}\right)^2}{44618} - \frac{s^{CE}}{969.73}\right] \rightarrow \begin{cases} f_1^C\left(s^{CE}=0\right) = \dfrac{\mathrm{Q}}{184.28} \\ f_1^D\left(s^{CE}=20\right) = \dfrac{\mathrm{Q}}{-160.44} \\ f_1^E\left(s^{CE}=40\right) \approx 0 \end{cases}$$





- Flujo total

$$f(s) = f_1(s) + f_2(s)$$

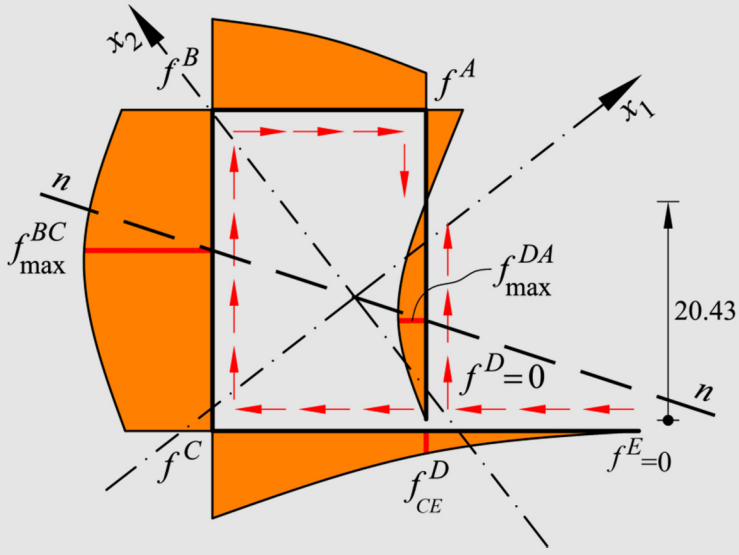
Para DA:

$$f^{DA}(s^{DA}) = f_1^{DA} + f_2^{DA} = \mathrm{Q}\left[\frac{\left(s^{DA}\right)^2}{31104.9} - \frac{s^{DA}}{1522}\right] \rightarrow \begin{cases} f^D\left(s^{DA}=0\right) = 0 \\ f^A\left(s^{DA}=30\right) = \dfrac{\mathrm{Q}}{108.4} \end{cases}$$

$$f^{DA}\left(s^{DA}=0\right) = 0 \quad \rightarrow \quad s^{DA} = 0; \quad s^{DA} = 20.43$$

$$\frac{df^{DA}}{ds^{DA}} = 0 = \frac{2s^{DA}}{31104.9} - \frac{1}{1522} \rightarrow \begin{cases} \left(s^{DA}_{\max}\right) = 10.22 \\ f^{DA}_{\max}\left(s^{DA}_{\max} = 10.22\right) = -\dfrac{Q}{297.9} \end{cases}$$

Para AB: $f^{AB}(s^{AB}) = Q\left[\dfrac{1}{108.3} - \dfrac{\left(s^{AB}\right)^2}{91270} + \dfrac{s^{AB}}{786.4}\right] \rightarrow \begin{cases} f^{A}\left(s^{AB} = 0\right) = \dfrac{Q}{108.4} \\ f^{B}\left(s^{AB} = 20\right) = \dfrac{Q}{33.02} \end{cases}$



Para BC:

$$f^{BC}(s^{BC}) = Q\left[\frac{1}{33.02} - \frac{\left(s^{BC}\right)^2}{31104.9} + \frac{s^{BC}}{1200.9}\right] \rightarrow \begin{cases} f^{B}\left(s^{BC} = 0\right) = \dfrac{Q}{33.02} \\ f^{C}\left(s^{BC} = 30\right) = \dfrac{Q}{37.97} \end{cases}$$

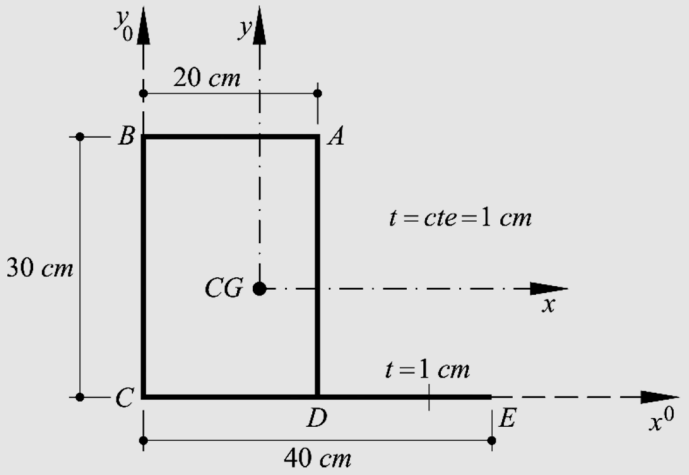
$$\frac{df^{BC}}{ds^{BC}} = 0 = -\frac{2s^{BC}}{31104.9} + \frac{1}{1200.9} \rightarrow \begin{cases} s^{BC}_{\max} = 12.95 \\ f^{BC}_{\max}\left(s^{BC}_{\max} = 12.95\right) = \dfrac{Q}{28.02} \end{cases}$$

Para CE:

$$f^{CE}(s^{CE}) = \mathrm{Q}\left[\frac{1}{37.98} + \frac{\left(s^{CE}\right)^2}{91270.3} - \frac{s^{CE}}{912.69}\right] \rightarrow \begin{cases} f^{C}\left(s^{CE}=0\right) = \dfrac{\mathrm{Q}}{37.97} \\ f^{D}\left(s^{CE}=20\right) = \dfrac{\mathrm{Q}}{113.64} \\ f^{E}\left(s^{CE}=40\right) \approx 0 \end{cases}$$

$f^{CE}(s) = 0 \rightarrow s^{CE} = 59.84;\ \ s^{CE} = 40.15 \Rightarrow$ El flujo no se anula en el tramo CE.

Ejemplo 6-6: Calcular la distribución de tensiones tangenciales producida por un corte vertical descendente $\mathrm{Q}_y = \mathrm{Q}$, que actúa en el centro de cortante, en la sección de paredes delgadas cerrada de la figura.



- Cálculo del flujo de cortante en la sección cerrada

$\overline{f} = -\dfrac{\int_{s^*} \dfrac{f(s)}{t} ds}{\int_{s^*} \dfrac{ds}{t}} = -\dfrac{\int_{s^*} f(s)\, ds}{\int_{s^*} ds}$, donde se utiliza s^* para definir la curva cerrada

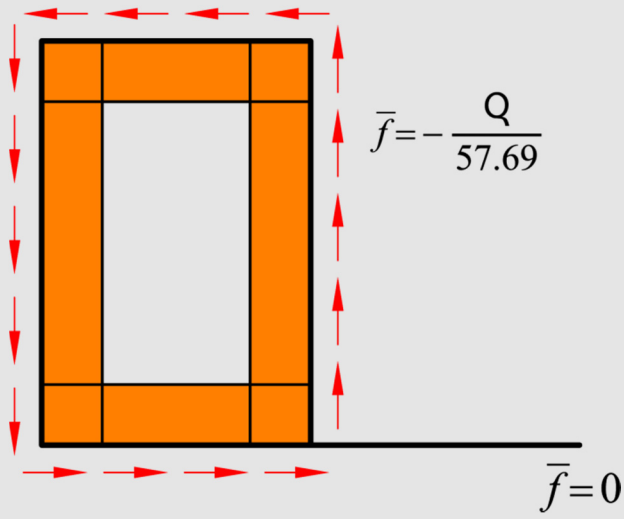
$$\int_{s^*} f(s)\, ds = \int_0^{30} f^{DA}(s)\, ds + \int_0^{20} f^{AB}(s)\, ds + \int_0^{30} f^{BC}(s)\, ds + \int_0^{20} f^{CE}(s)\, ds$$

$$\int_{s^*} f(s)\,ds = Q\left\{\left[\frac{\left(s^{DA}\right)^3}{3\cdot 31104.9}-\frac{\left(s^{DA}\right)^2}{2\cdot 1522}\right]_0^{30}+\left[-\frac{\left(s^{AB}\right)^3}{3\cdot 91270}+\frac{\left(s^{AB}\right)^2}{2\cdot 786.4}+\frac{s^{AB}}{108.30}\right]_0^{20}+\right.$$

$$+\left[-\frac{\left(s^{BC}\right)^3}{3\cdot 31104.9}+\frac{\left(s^{BC}\right)^2}{2\cdot 1200.9}+\frac{s^{BC}}{33.02}\right]_0^{30}+\left[\frac{\left(s^{CE}\right)^3}{3\cdot 91270.3}-\frac{\left(s^{CE}\right)^2}{2\cdot 912.69}+\frac{s^{CE}}{37.98}\right]_0^{20}$$

$$= Q\cdot 1.733$$

$$\int_{s^*} ds = 30+20+30+20 = 100 \quad \rightarrow \quad \bar{f} = -\frac{Q\cdot 1.733}{100} = -\frac{Q}{57.69}$$



$$\boxed{f^{final}(s) = f(s) + \bar{f}}$$

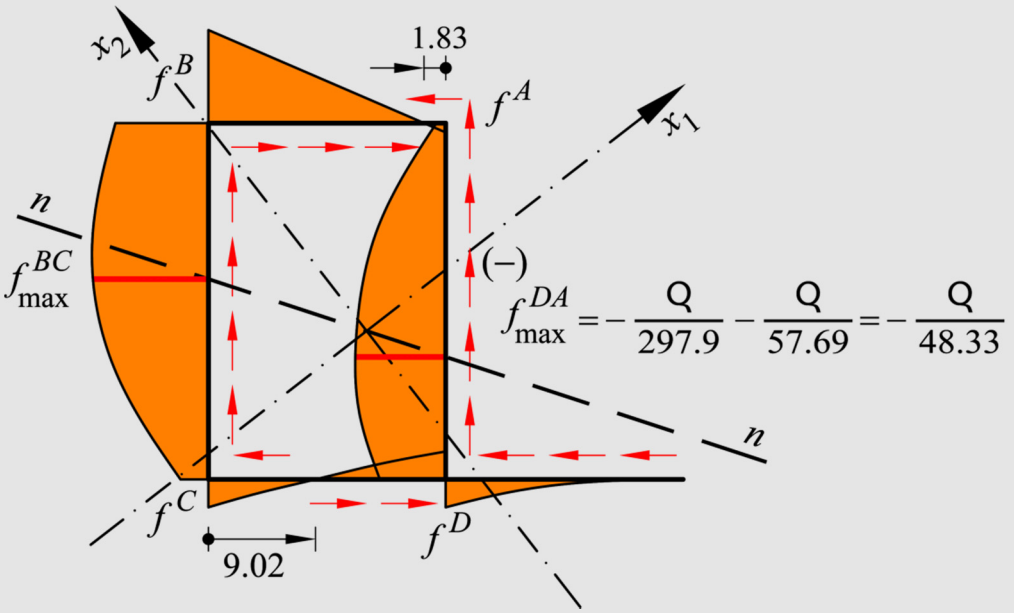
Para DA: $f^D = -\frac{Q}{57.69}$; $\quad f^A = \frac{Q}{108.3} - \frac{Q}{57.69} = -\frac{Q}{123.33}$

Para AB: $f^B = \frac{Q}{33.02} - \frac{Q}{57.69} = \frac{Q}{77.21}$

Para BC: $f^C = \frac{Q}{37.97} - \frac{Q}{57.69} = \frac{Q}{111.06}$

Para CE: $\left(f^{D}\right)^{izq}=\frac{Q}{113.62}-\frac{Q}{57.69}=-\frac{Q}{117.19};\quad \left(f^{D}\right)^{der}=\frac{Q}{113.62}$

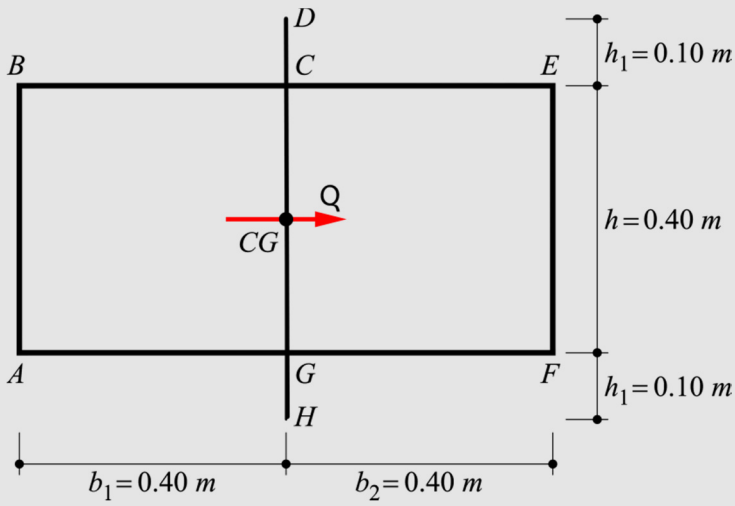
Diagrama final de flujo de cortante (tensiones tangenciales)



$$f^{AB}=Q\left[-\frac{1}{57.69}+\frac{1}{108.3}-\frac{\left(s^{AB}\right)^{2}}{91270.3}+\frac{s^{AB}}{786.4}\right]\rightarrow f^{AB}\left(s^{AB}\right)=0\quad\rightarrow s^{AB}=1.83$$

$$f^{CE}\left(s\right)=Q\left[-\frac{1}{57.69}+\frac{1}{37.98}+\frac{\left(s^{CE}\right)^{2}}{91270.3}.\frac{s^{CE}}{912.69}\right]\rightarrow f^{CE}\left(s^{CE}\right)=0\rightarrow s^{CE}=9.02$$

Ejemplo 6-7: Obtener la expresión analítica y la representación gráfica de la distribución de tensiones tangenciales para la sección de la figura de espesor constante $t=0.05\,m$, cuando está sometida a un cortante horizontal $Q=300\,kN$.



- Características geométricas

$$A = \left(0.4 + 0.4 + 0.8 + 0.8 + 0.4 + 0.1 + 0.1\right) \cdot 0.05 = 0.15\, m^2$$

$$I_2 \simeq \left[2 \cdot \left(0.4 \cdot 0.05\right) \cdot 0.4^2\right] + 2 \cdot \left(\frac{0.05 \cdot 0.8^3}{12}\right) = 0.011\, m^4$$

- Cálculo de las tensiones tangenciales

Lado $E'E$ (parte simétrica)**:**

$$\tau^{E'E}\left(s\right) = \frac{Q S_2^*\left(s\right)}{I_2\, t} = \frac{300 \cdot \left(s \cdot 0.05\right) \cdot 0.40}{0.011 \cdot 0.05} = 10909.09 \cdot s$$

$$\tau^E = 2181.8\, kN/m^2$$

Lado EB **y** FA **:**

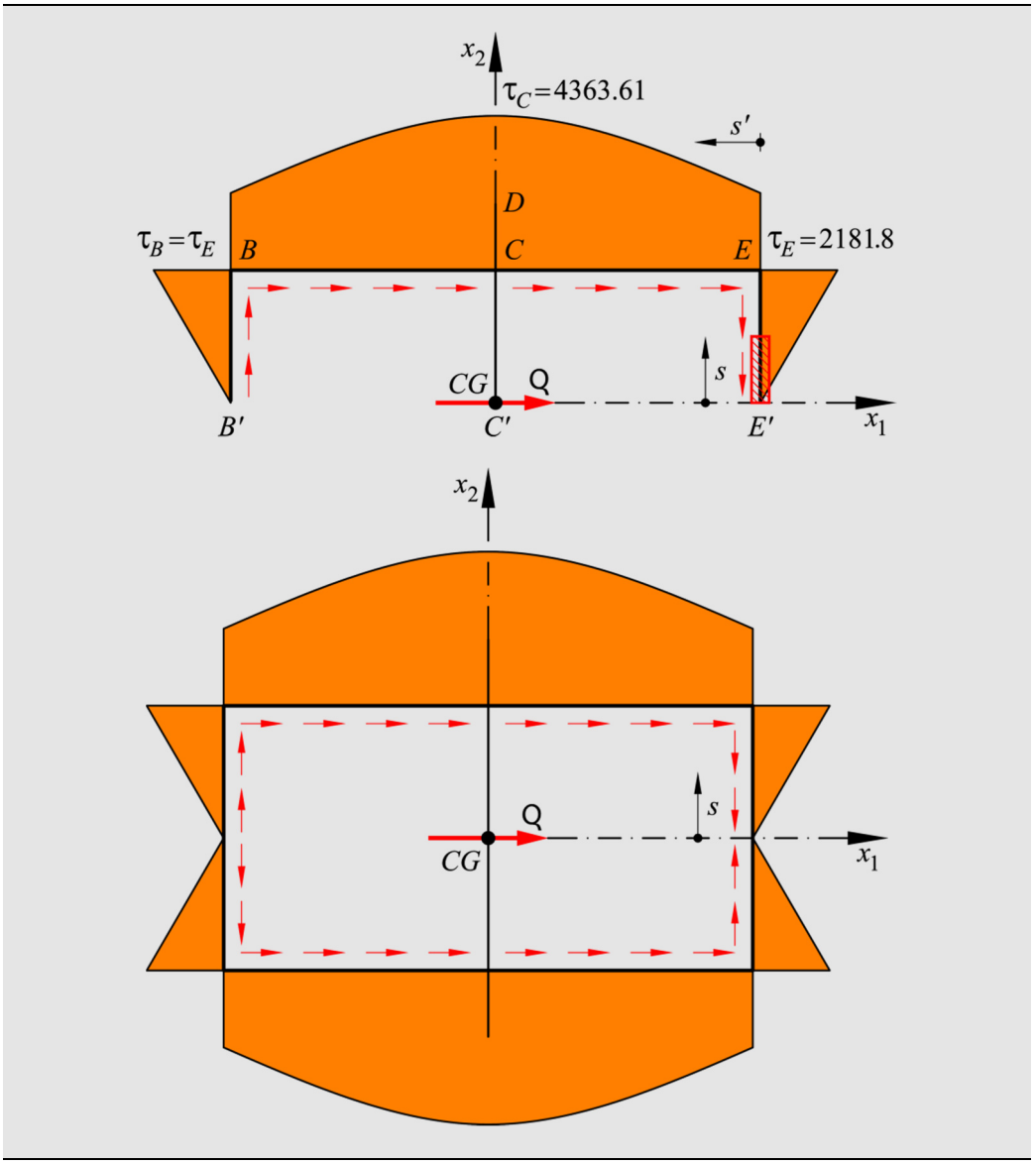
$$\tau^{EB}\left(s'\right) = 2181.8 + \frac{300 \cdot \left(s' \cdot 0.05\right)}{0.011 \cdot 0.05} \cdot \left(0.40 - \frac{s'}{2}\right)$$

$$= 2181.8 + 10909.09 \cdot s' - 13636.36 \cdot \left(s'\right)^2$$

$$\rightarrow \quad \tau^C = 4363.61\, kN/m^2$$

Lado $C'CD$ **:**

$\tau\left(s\right) = 0$, por tener momento estático nulo

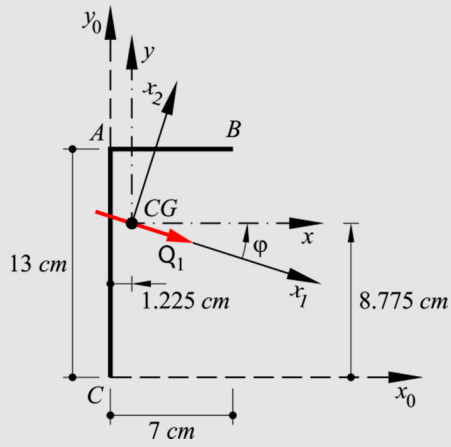


Ejemplo 6-8: La sección que se representa en la figura, de espesor constante $t = 1.5\,cm$, está sometida a un esfuerzo de corte $\mathrm{Q} = 100\,kN$ en la dirección positiva del eje principal x_1. Determinar:

1. La magnitud de la tensión en el punto A.

2. El sentido del flujo de tensiones en la sección.

3. La posición del centro de corte.



Área $A = 30\,cm^2$

Centro geométrico

$$x_0^{CG} = 1.225\,cm; \quad y_0^{CG} = 8.775\,cm$$

Momentos de Inercia $\begin{cases} I_{xx} = 562.98\,cm^4 \\ I_{yy} = 126.48\,cm^4 \\ I_{xy} = 155.268\,cm^4 \end{cases}$

Nota: $f(s) = \tau(s)t(s) = \dfrac{Q_1}{I_2} S_2^*(s) + \dfrac{Q_2}{I_1} S_1^*(s)$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\,\varphi \\ -\text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}; \qquad \begin{Bmatrix} S_1^*(s) \\ S_2^*(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\text{sen}\,\varphi \\ \text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x^*(s) \\ S_y^*(s) \end{Bmatrix}$$

- Características geométricas

$$I_1; I_2 = \frac{562.98 + 126.48}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{562.98 - 126.48}{2}\right)^2 + 155.268^2} = \begin{cases} I_1 = 612.57\,cm^4 \\ I_2 = 76.88\,cm^4 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\text{tg}^{-1}\left(-\frac{2 \cdot 155.268}{562.98 - 126.48}\right) = -17.714^\circ$$

- Tensión en el punto A

$$\tau^A = \frac{Q_1 S_2^*\big|_A}{I_2\, t}$$

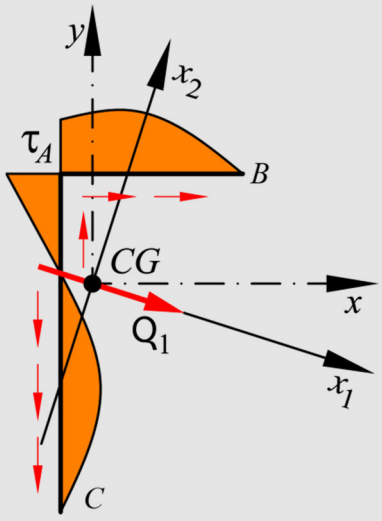
$$\begin{cases} S_x^*\big|_A = (7 \cdot 1.5) \cdot (13 - 8.775) = 44.36\,cm^3 \\ S_y^*\big|_A = (7 \cdot 1.5) \cdot \left(\dfrac{7}{2} - 1.225\right) = 23.88\,cm^3 \end{cases}$$

$$S_2^*\Big|_A = S_x^*\Big|_A \operatorname{sen}\varphi + S_y^*\Big|_A \cos\varphi = 44.36\cdot\operatorname{sen}\left(-17.714^o\right) + 23.88\cdot\cos\left(-17.714^o\right)$$

$$S_2^*\Big|_A = 9.2513\,cm^3$$

$$\tau^A = \frac{Q_1\, S_2^*\Big|_A}{I_2\, t} = \frac{100\cdot 9.2513}{76.88\cdot 1.5} = 8.022\,\frac{kN}{cm^2} = 80220\,\frac{kN}{m^2}$$

- Sentido del flujo en la sección

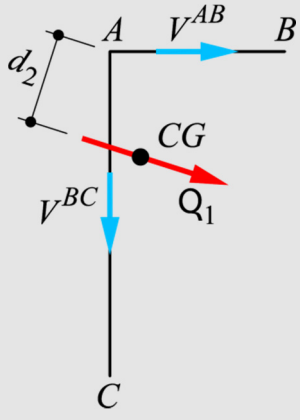


- Centro de corte

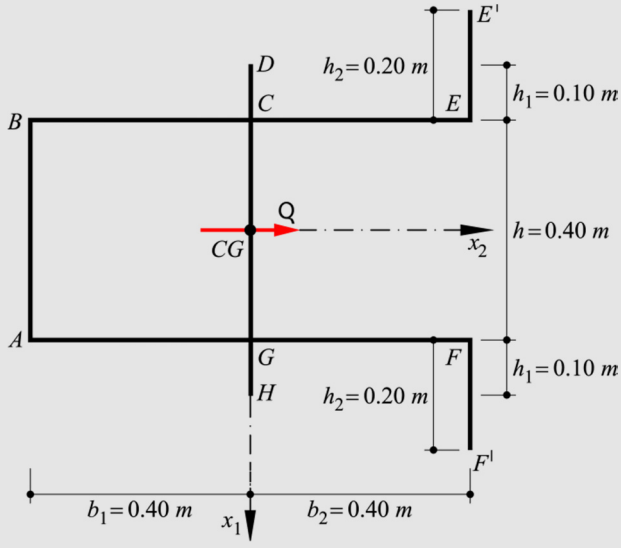
Momento interior = Momento exterior

$$V^{AB}\cdot 0 = V^{BC}\cdot 0 = Q_1\cdot d_2 \quad \rightarrow \quad d_2 = 0$$

El Centro de Corte CC coincide con A



Ejemplo 6-9: Obtener la expresión analítica y la representación gráfica de la distribución de tensiones tangenciales para la sección de la figura de espesor constante $t = 0.05\,m$, cuando está sometida a un cortante horizontal $Q_2 = Q = 300\,kN$.



- Características geométricas

$$A = \left(0.4 + 0.4 + 0.8 + 0.8 + 0.4 + 0.1 + 0.1\right) \cdot 0.05 = 0.15\,m^2$$

$$I_1 \simeq \left[2 \cdot \left(0.4 \cdot 0.05\right) \cdot 0.4^2\right] + 2 \cdot \left(\frac{0.05 \cdot 0.8^3}{12}\right) = 0.011\,m^4$$

- Cálculo de las tensiones tangenciales

Lado EE' **-** FF' (parte simétrica)**:**

$$\tau^{EE'}\left(s^{EE'}\right) = \frac{Q S_1^*\left(s^{EE'}\right)}{I_1\, t} = \frac{300 \cdot \left(s^{EE'} \cdot 0.05\right) \cdot 0.40}{0.011 \cdot 0.05} = 10909.09 \cdot s^{EE'}$$

$$\rightarrow \quad \tau^{E} = 2181.8\,kN/m^2$$

Lado EB **y** FA **:**

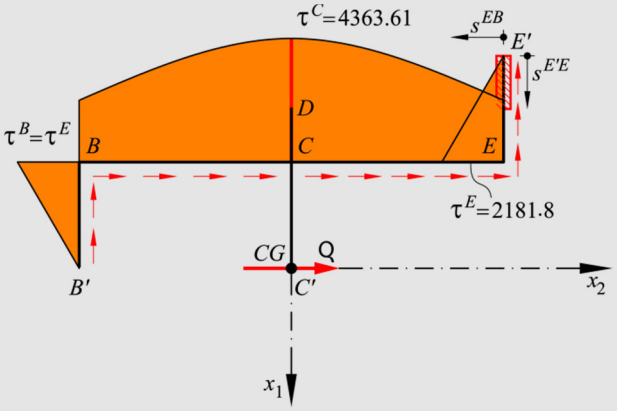
$$\tau^{EB}\left(s^{EB}\right)=2181.8+\frac{300\cdot\left(s^{EB}\cdot 0.05\right)}{0.011\cdot 0.05}\cdot\left(0.4-\frac{s^{EB}}{2}\right)$$

$$=2181.8+10909.09\cdot s^{EB}-13636.36\cdot\left(s^{EB}\right)^2$$

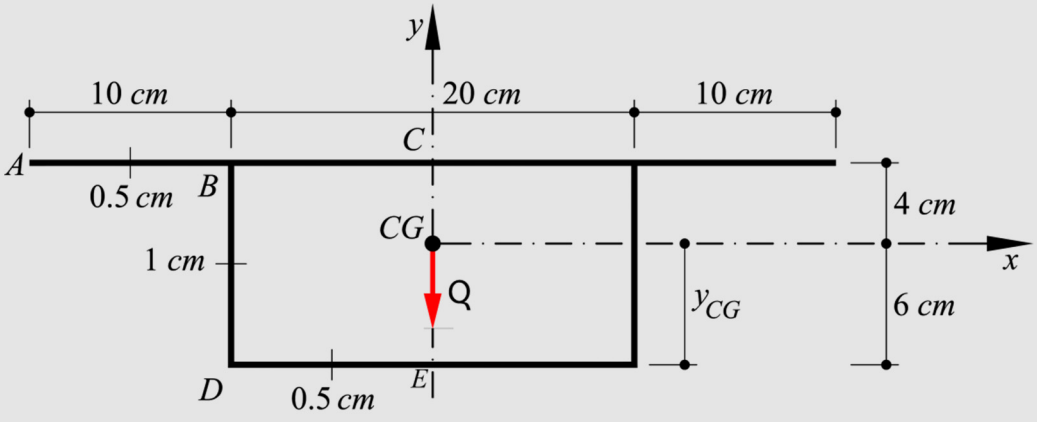
$$\rightarrow\quad \tau^{C}=4363.61 kN/m^2$$

Lado $C'CD$**:**

$\tau(s)=0$, por tener momento estático nulo



Ejemplo 6-10: Dada la sección transversal que se muestra en la figura, sometida a un esfuerzo cortante vertical descendente, obtener la expresión analítica y la representación gráfica de la distribución de tensiones tangenciales en la sección.



- Características geométricas

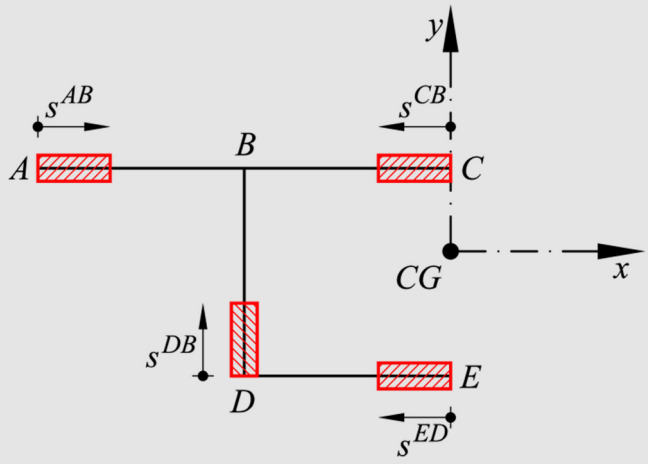
$$A = 40\cdot 0.5 + 20\cdot 1 + 20\cdot 0.5 = 50\,cm^2$$

$$y^{CG} = \frac{(40\cdot 0.5)\cdot 10 + (20\cdot 10\cdot 1)\cdot 5}{A} = 6\,cm$$

$$I_{xx} = 2\cdot\left[\frac{1\cdot 10^3}{12} + (1\cdot 10)\cdot(5-6)^2\right] + (40\cdot 0.5)\cdot 4^2 + (20\cdot 0.5)\cdot(-6)^2$$

$$= 186.66 + 320 + 360 = 866.66\,cm^4$$

Los momentos estáticos se obtienen empleando las coordenadas locales que se muestran en la figura:



$$S_x^*(s)\Big|_A^B = (s^{AB}\cdot 0.5)\cdot 4 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} S_x^*\big|_A = 0 \\ S_x^*\big|_B = 20\,cm^3 \end{cases}$$

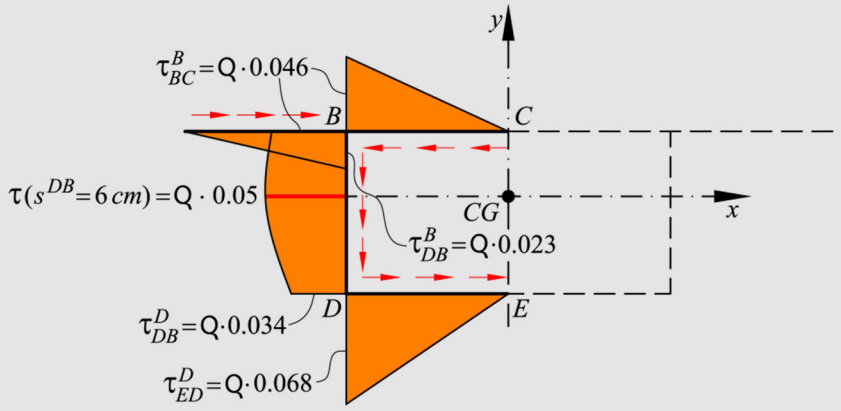
$$S_x^*(s)\Big|_C^B = (s^{BC}\cdot 0.5)\cdot 4 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} S_x^*\big|_C = 0 \\ S_x^*\big|_B = 20\,cm^3 \end{cases}$$

$$S_x^*(s)\Big|_E^D = (s^{ED}\cdot 0.5)\cdot(-6) \quad\rightarrow\quad \begin{cases} S_x^*\big|_E = 0 \\ S_x^*\big|_D = -30\,cm^3 \end{cases}$$

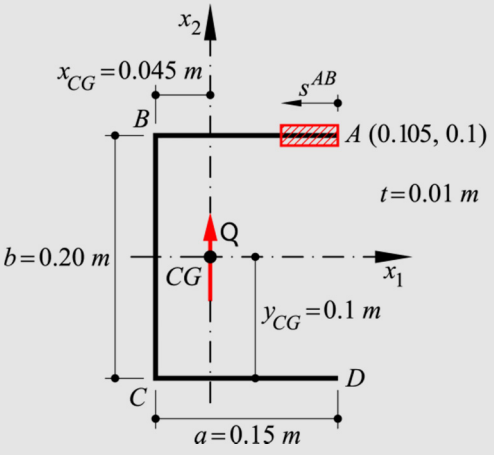
$$S_x^*(s)\Big|_D^B = -30 + \left[\left(1\cdot s^{DB}\right)\left(\frac{s^{DB}}{2} - 6\right)\right] = -30 - 6\cdot s^{DB} + \frac{\left(s^{DB}\right)^2}{2} \rightarrow \begin{cases} S_x^*\big|_D = -30\,cm^3 \\ S_x^*\big|_{DB/2} = -48\,cm^3 \\ S_x^*\big|_B = -40\,cm^3 \end{cases}$$

- Distribución de tensiones tangenciales

$$\tau = \frac{Q\,S_x^*(s)}{I_{xx}\,t}$$



Ejemplo 6-11: Dada la sección transversal que se muestra en la figura, determinar analíticamente la posición del centro de corte.



$$A = 0.005\,m^2$$

$$x_{CG} = 0.045\,m;\ y_{CG} = 0.1\,m$$

$$I_1 = 3.669\cdot 10^{-5}\,m^4;\ I_2 = 1.239\cdot 10^{-5}\,m^4$$

$$\varphi = 0^o$$

$$Q_1 = 0;\ Q_2 = Q$$

- Momentos estáticos para el lado AB

$$S_1^*(s)\Big|_A^B = \left(s^{AB}\cdot 0.01\right)\cdot x_2^A \quad \rightarrow \quad \begin{cases} S_1^*\left(s^{AB}=0\right)=0 \\ S_1^*\left(s^{AB}=\dfrac{0.15}{2}\right)=7.5\cdot 10^{-5} \\ S_1^*\left(s^{AB}=0.15\right)=1.5\cdot 10^{-4} \end{cases}$$

$$S_2^*(s)\Big|_A^B = \left(s^{AB}\cdot 0.01\right)\cdot\left(x_1^A-\frac{s^{AB}}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} S_2^*\left(s^{AB}=0\right)=0 \\ S_2^*\left(s^{AB}=\dfrac{0.15}{2}\right)=5.063\cdot 10^{-5} \\ S_2^*\left(s^{AB}=0.15\right)=4.5\cdot 10^{-5} \end{cases}$$

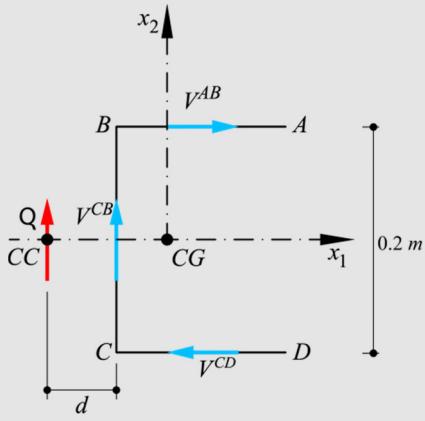
- Distribución de tensiones en el lado AB

$$f^{AB}(s)=\frac{\cancel{Q_1}^{=0}}{I_2}S_2^*(s)+\frac{Q_2}{I_1}S_1^*(s)=\frac{Q}{3.669\cdot 10^{-5}}\left(0.01\cdot s^{AB}\right)\cdot 0.1$$

$$f^{AB}\left(s^{AB}\right)=\left(27.255\cdot s^{AB}\right)\cdot Q$$

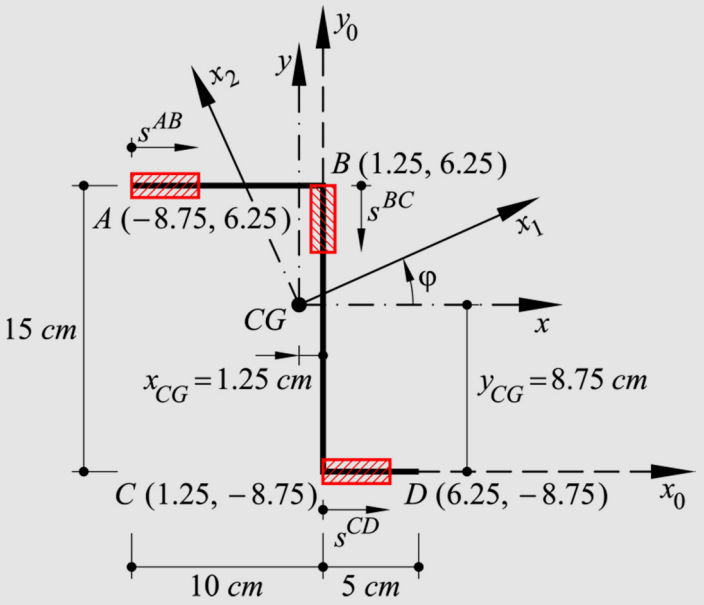
$$V^{AB}=\int_0^{0.15}\left(Q\cdot 27.255\cdot s^{AB}\right)ds^{AB}=0.3066\cdot Q$$

- Equilibrio rotacional respecto del punto "C" , $d=\dfrac{V_{AB}\cdot 0.2}{Q}=0.06132$



Ejemplo 6-12: Determinar la distribución de tensiones tangenciales cuando en la sección de la figura actúa un esfuerzo cortante Q vertical, aplicado en el centro de corte de la sección (no hay torsión). El espesor de las paredes es constante $t = 0.5\,cm$

$$A = 15\,cm^2 \;;\; x_{CG} = -1.25\,cm;\; y_{CG} = 8.75\,cm \begin{cases} I_{xx} = 539.219\,cm^4 \\ I_{yy} = 164.219\,cm^4 \\ I_{xy} = -210.938\,cm^4 \end{cases}$$



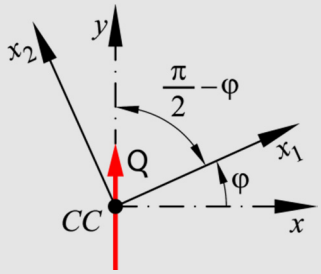
Nota: $f(s) = \tau(s)\,t(s) = \frac{Q_1}{I_2} S_2^*(s) + \frac{Q_2}{I_1} S_1^*(s)$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\,\varphi \\ -\text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}; \qquad \begin{Bmatrix} S_1^*(s) \\ S_2^*(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \text{-sen}\,\varphi \\ \text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x^*(s) \\ S_y^*(s) \end{Bmatrix}$$

- Ejes principales de inercia

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \begin{cases} I_1 = 633.944\,cm^4 \\ I_2 = 69.494\,cm^4 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{2I_{xy}}{I_{xx}-I_{yy}}\right) = 24.183^{\circ}$$



Entonces resulta,

$$Q_1 = Q\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right); \quad Q_2 = Q\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

- Tensiones tangenciales para el lado AB

$$\begin{cases} x_1\left(s^{AB}\right) = \left(x_A + \dfrac{s^{AB}}{2}\right)\cos\varphi + y_A\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ x_2\left(s^{AB}\right) = -\left(x_A + \dfrac{s^{AB}}{2}\right)\mathrm{sen}\,\varphi + y_A\cos\varphi \end{cases}$$

$$S_1^*(s)\Big|_A^B = \left(s^{AB}\cdot 0.5\right)\cdot x_2\left(s^{AB}\right) \rightarrow \begin{cases} S_1^*\left(s^{AB}=0\right)=0 \\ S_1^*\left(s^{AB}=5\right)=20.655 \\ S_1^*\left(s^{AB}=10\right)=36.189 \end{cases}$$

$$S_2^*(s)\Big|_A^B = \left(s^{AB}\cdot 0.5\right)\cdot x_1\left(s^{AB}\right) \rightarrow \begin{cases} S_2^*\left(s^{AB}=0\right)=0 \\ S_2^*\left(s^{AB}=5\right)=-7.853 \\ S_2^*\left(s^{AB}=10\right)=-4.303 \end{cases}$$

$$f^{AB}(s) = \tau\ (s)\ t = \frac{Q_1}{I_2}S_2^*(s) + \frac{Q_2}{I_1}S_1^*(s)$$

$$f^{AB}(0)=0; \quad f^{AB}(5) = -0.017\cdot Q; \quad f^{AB}(10) = 0.027\cdot Q$$

- Tensiones tangenciales para el lado BC

$$\begin{cases} x_1\left(s^{BC}\right) = x_B\cos\varphi + \left(y_B - \dfrac{s^{BC}}{2}\right)\mathrm{sen}\,\varphi \\ x_2\left(s^{BC}\right) = -x_B\,\mathrm{sen}\,\varphi + \left(y_B - \dfrac{s^{BC}}{2}\right)\cos\varphi \end{cases}$$

$$S_1^*(s)\Big|_B^C = \left(s^{BC}\cdot 0.5\right)\cdot x_2(s) + S_1^*\left(s^{AB}=10\right) \rightarrow \begin{cases} S_1^*\left(s^{BC}=0\right)=36.189 \\ S_1^*\left(s^{BC}=7.5\right)=42.821 \\ S_1^*\left(s^{BC}=15\right)=23.793 \end{cases}$$

$$S_2^*(s)\Big|_B^C = \left(s^{BC}\cdot 0.5\right)\cdot x_1(s) + S_2^*\left(s^{AB}=10\right) \rightarrow \begin{cases} S_2^*\left(s^{BC}=0\right)=-4.303 \\ S_2^*\left(s^{BC}=7.5\right)=3.814 \\ S_2^*\left(s^{BC}=15\right)=0.409 \end{cases}$$

$$f^{BC}(s)=\tau^{BC}(s)\ t=\frac{Q_1}{I_2}S_2^*(s)+\frac{Q_2}{I_1}S_1^*(s)$$

$$f^{BC}(0)=0.027\cdot Q;\quad f^{BC}(7.5)=0.084\cdot Q;\quad f^{BC}(15)=0.037\cdot Q$$

- Tensiones tangenciales para el lado CD

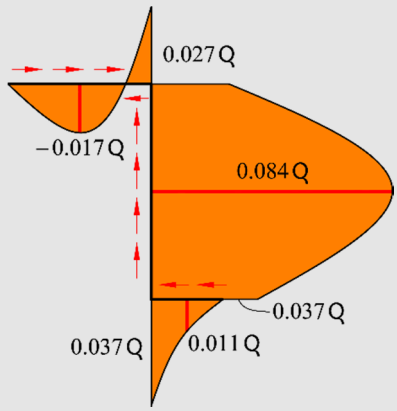
$$\begin{cases} x_1\left(s^{CD}\right)=\left(x_{CG}-\dfrac{s^{CD}}{2}\right)\cos\varphi+y_{CG}\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ x_2\left(s^{CD}\right)=-\left(x_{CG}-\dfrac{s^{CD}}{2}\right)\mathrm{sen}\,\varphi+y_{CG}\cos\varphi \end{cases}$$

$$S_1^*(s)\Big|_C^D = \left[\left(s^{CD}\cdot 0.5\right)\cdot x_2\left(s^{CD}\right)\right]+S_1^*\left(s^{BC}=15\right) \rightarrow \begin{cases} S_1^*\left(s^{CD}=0\right)=23.796 \\ S_1^*\left(s^{CD}=2.5\right)=12.538 \\ S_1^*\left(s^{CD}=5\right)=0 \end{cases}$$

$$S_2^*(s)\Big|_B^C = \left(s^{BC}\cdot 0.5\right)\cdot x_1\left(s^{CD}\right)+S_2^*\left(s^{BC}=15\right) \rightarrow \begin{cases} S_2^*\left(s^{CD}=0\right)=0.409 \\ S_2^*\left(s^{CD}=2.5\right)=-1.221 \\ S_2^*\left(s^{CD}=5\right)=0 \end{cases}$$

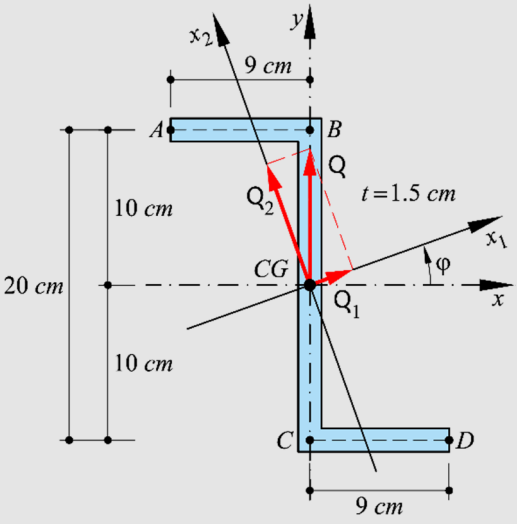
$$f^{CD}(s)=\tau^{CD}(s)\ t=\frac{Q_1}{I_2}S_2^*(s)+\frac{Q_2}{I_1}S_1^*(s)$$

$$f^{CD}(0)=0.037\cdot Q;\quad f^{CD}(2.5)=0.011\cdot Q;\quad f^{CD}(5)=0$$



Ejemplo 6-13: Dada la sección transversal de la figura, sometida a un esfuerzo cortante Q vertical ascendente, obtener:

1. Las tensiones tangenciales en toda la sección y la representación de su distribución.
2. El máximo esfuerzo cortante Q que puede soportar la sección, sabiendo que la máxima tensión tangencial no debe ser superior a $\tau^{max} = 200 MN/m^2$



Espesor de paredes $t = 1.5\,cm$

$A = 57\,cm^2$

$$\begin{cases} I_{xx} = 3705.0\,cm^4 \\ I_{yy} = 734.0\,cm^4 \\ I_{xy} = -1215.0\,cm^4 \end{cases}$$

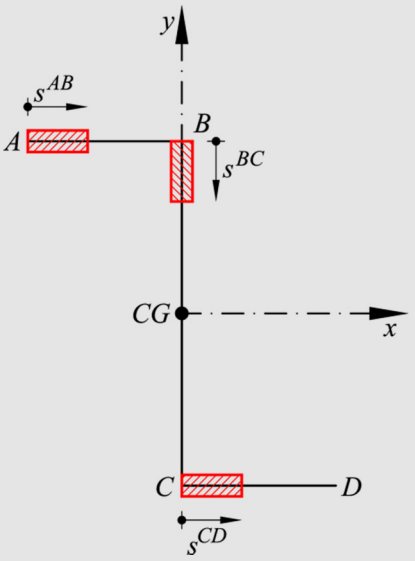
$$\begin{cases} I_1 = 4139.0\,cm^4 \\ I_2 = 301.0\,cm^4 \\ \varphi = 19.642^o \end{cases}$$

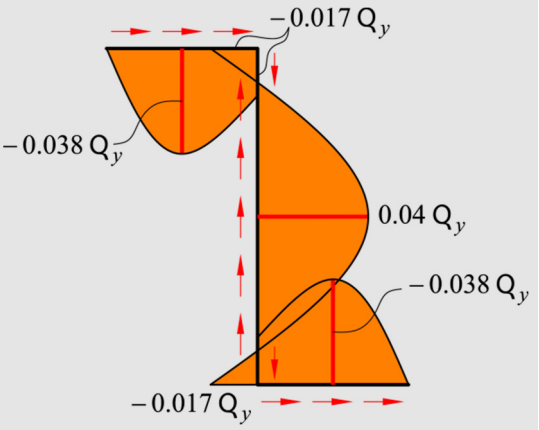
Nota: $f(s) = \tau(s)t(s) = \dfrac{Q_1}{I_2} S_2^*(s) + \dfrac{Q_2}{I_1} S_1^*(s)$

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) & \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \\ -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x = 0 \\ Q_y = Q \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} Q_1 = 0.942 \cdot Q_y \\ Q_2 = 0.336 \cdot Q_y \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\,\varphi \\ -\text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} S_1^*(s) \\ S_2^*(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\text{sen}\,\varphi \\ \text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x^*(s) \\ S_y^*(s) \end{Bmatrix}$$

- Ejes locales y Distribución de las tensiones tangenciales





- Máximo corte Q para que $\tau^{max} = 200MN/m^2 = 0.02MN/cm^2$

$$\tau^{max} = \frac{f^{max}}{t} = \frac{0.06 \cdot Q_y}{1.5} \rightarrow Q_y = \frac{\tau^{max} \cdot 1.5}{0.06} = \frac{0.02 \cdot 1.5}{0.06} = 0.5MN \qquad \boxed{Q = Q_y = 0.5MN}$$

- Momentos estáticos y tensiones tangenciales

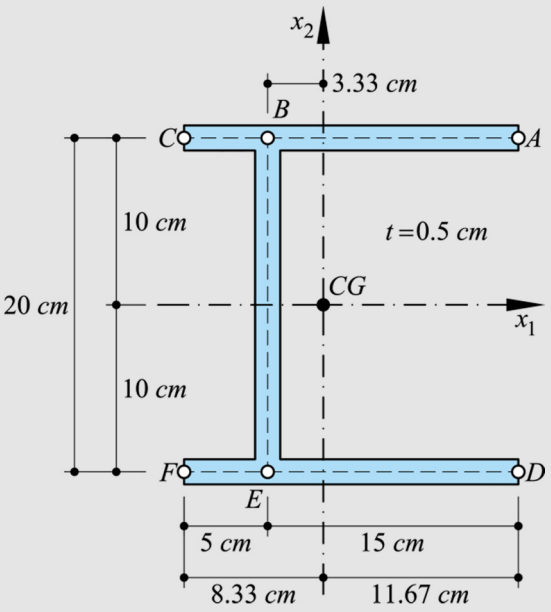
Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-13.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Punto**	$S_x^*\left[cm^3\right]$	$S_y^*\left[cm^3\right]$	$S_1^*\left[cm^3\right]$	$S_2^*\left[cm^3\right]$	$\frac{f(s)}{Q_y}$	$\frac{\tau}{Q_y}$
2	A	0	0	0.000	0.000	0.000	0.000
3	AB/2	67.5	-45.5625	78.888	-20.222	-0.057	-0.038
4	B	135	-60.75	147.565	-11.836	-0.025	-0.017
5	BC/2	210	-60.75	218.201	13.375	0.060	0.040
6	C	135	-60.75	147.565	-11.836	-0.025	-0.017
7	CD/2	67.5	-45.5625	78.888	-20.222	-0.057	-0.038
8	D	0	0	0.000	0.000	0.000	0.000
9							
10			grados	radianes			
11	**ángulos**	φ	19.64	0.34281757			
12		$\pi/2-\varphi$	70.36	1.22797876			
13	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	4139.00	cm^4			
14		I_2	301.00	cm^4			

Ejemplo 6-14: Dada la sección transversal de la figura, sometida a un esfuerzo cortante $Q = 10\,kN$, vertical ascendente, obtener:

1. Las tensiones tangenciales en toda la sección y la representación de su distribución.

2. La posición del centro de corte sobre el eje x_1.



Espesor de paredes $t = 0.5\,cm$

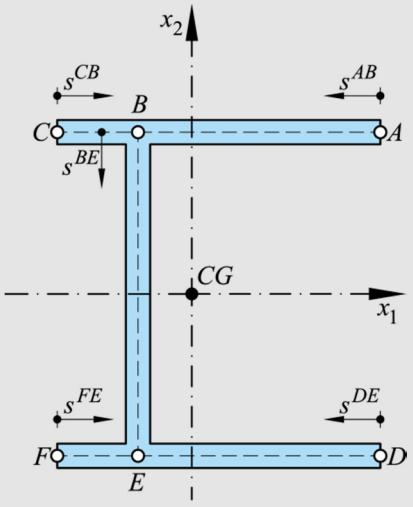
Cálculo del área y momento de inercia

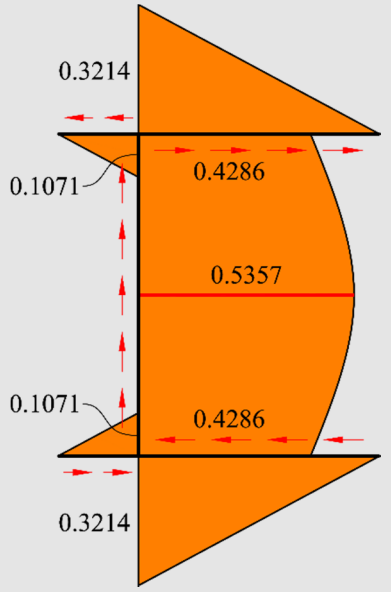
$$A = (2 \cdot 20 + 20) \cdot 0.5 = 30\,cm^2$$

$$I_1 = 2 \cdot (20 \cdot 0.5) \cdot 10^2 + \frac{0.5 \cdot 20^3}{12}$$

$$I_1 = 2333.33\,cm^4$$

- Ejes locales y distribución del flujo de corte





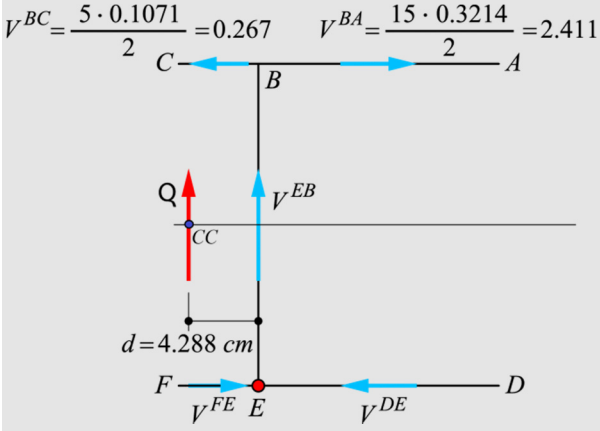
- Momentos estáticos y tensiones tangenciales

$$f(s) = \frac{Q_1^{=0}}{I_2} S_2^*(s) + \frac{Q_2}{I_1} S_1^*(s) = \frac{Q_2}{I_1} S_1^*(s)$$

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-14.

	A	B	C	D	E
1	Punto		$S_1^*\left[cm^3\right]$	$f(s)\left[\frac{kN}{cm}\right]$	
2	A		0.000	0.0000	
3	C		0.000	0.0000	
4	B	Tramo AB	75.000	0.3214	
5		Tramo CB	25.000	0.1071	
6		Tramo BE	100.000	0.4286	
7	BE/2		125.000	0.5357	
8	E	Tramo BE	100.000	0.4286	
9		Tramo FE	25.000	0.1071	
10		Tramo DE	75.000	0.3214	
11	F		0.000	0.0000	
12	D		0.000	0.0000	
13					
14		**Momento Principal de Inercia**	I_1	2333.33	cm^4
15		**Esfeurzo de Corte**	Q_2	10.00	kN

- Centro de corte



$$Q\cdot d=-V^{BC}\cdot 20+V^{BA}\cdot 20$$

$$d=\frac{-0.267\cdot 20+2.411\cdot 20}{10}$$

$$\boxed{d=4.288cm}$$

- Verificación

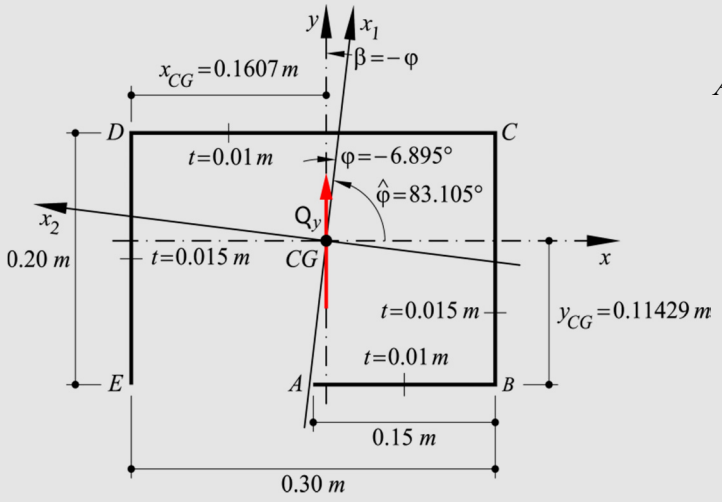
$$Q_2 = V^{EB} = \frac{20}{6}\left(f_B + 4 f_{\left(\frac{BE}{2}\right)} + f_E \right) = \frac{20}{6}\left(0.4285 + 4 \cdot 0.535 + 0.4285\right) = 10\,kN$$

$$Q_1 = -V^{BC} + V^{BA} + V^{FE} - V^{DE} = 0$$

Ejemplo 6-15: Dada la sección transversal de la figura, sometida a un esfuerzo cortante vertical ascendente $Q_y = 200\,kN$, obtener:

1. La distribución de tensiones tangenciales producida por el cortante vertical, aplicado en el centro geométrico, tal como indica la figura.

2. La posición del centro de esfuerzos cortantes.



$$A = 0.011\,m^2$$

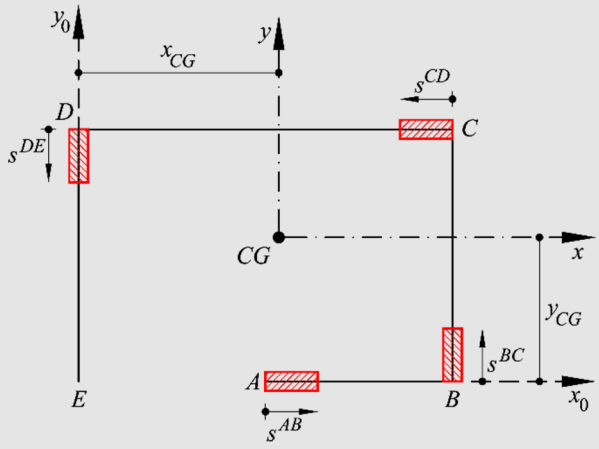
$$\begin{cases} I_{xx} = 0.6289 \cdot 10^{-4}\,m^4 \\ I_{yy} = 1.6766 \cdot 10^{-4}\,m^4 \\ I_{xy} = -0.1286 \cdot 10^{-4}\,m^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 1.6921 \cdot 10^{-4}\,m^4 \\ I_2 = 0.6134 \cdot 10^{-4}\,m^4 \\ \varphi = -6.895^{\circ} \quad (\text{entre } x_1, y) \end{cases}$$

De la figura $\hat{\varphi} = 90^{\circ} - \varphi = 83.105^{\circ}$ y $\beta = -\varphi = 6.895^{\circ}$; entonces

$$f(s) = Q\left[\frac{S_1^*(s)}{I_1} \operatorname{sen}\beta + \frac{S_2^*(s)}{I_2} \cos\beta \right] \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} S_1^*(s) \\ S_2^*(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\hat{\varphi} & -\operatorname{sen}\hat{\varphi} \\ \operatorname{sen}\hat{\varphi} & \cos\hat{\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x^*(s) \\ S_y^*(s) \end{Bmatrix}$$

- Ejes locales



- Momentos estáticos en la base (x, y)

Tramo $\overline{AB}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\big|_A^B = \left(s^{AB} t_{AB}\right)\left(y_A^0 - y_{CG}\right) \\ S_y^*(s)\big|_A^B = \left(s^{AB} t_{AB}\right)\left[\left(x_A^0 - \dfrac{s}{2}\right) - x_{CG}\right] \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\big|_B^C = S_x^*(B)\big|_A^B + \left(s^{BC} t_{BC}\right)\left[\left(y_B^0 + \dfrac{s}{2}\right) - y_{CG}\right] \\ S_y^*(s)\big|_B^C = S_y^*(B)\big|_A^B + \left(s^{BC} t_{BC}\right)\left(x_B^0 - x_{CG}\right) \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\big|_C^D = S_x^*(C)\big|_B^C + \left(s^{CD} t_{CD}\right)\left(y_C^0 - y_{CG}\right) \\ S_y^*(s)\big|_C^D = S_y^*(C)\big|_B^C + \left(s^{CD} t_{CD}\right)\left[\left(x_C^0 - \dfrac{s}{2}\right) - x_{CG}\right] \end{cases}$$

Tramo $\overline{DE}$

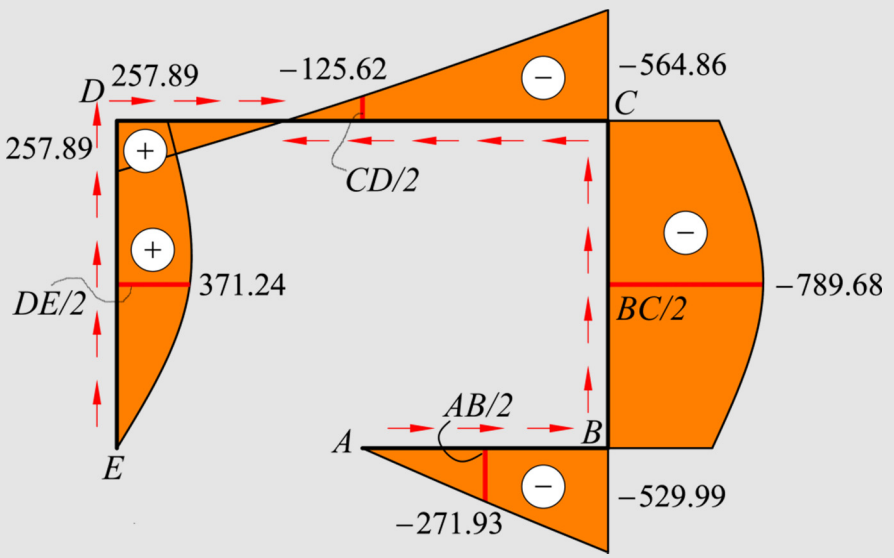
$$\begin{cases} S_x^*(s)\big|_D^E = S_x^*(D)\big|_C^D + \left(s^{DE} t_{DE}\right)\left[\left(y_D^0 - \dfrac{s}{2}\right) - y_{CG}\right] \\ S_y^*(s)\big|_D^E = S_y^*(D)\big|_C^D + \left(s^{DE} t_{DE}\right)\left(x_D^0 - x_{CG}\right) \end{cases}$$

- Flujo de Corte

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-15.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Punto**	$s[m]$	$t[m]$	$x^0[m]$	$y^0[m]$	$S_x^*[m^3]$	$S_y^*[m^3]$	$S_1^*[m^3]$	$S_2^*[m^3]$	$f(s)[kN/m]$
2	A	0.000	0.010	0.150	0.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000
3	AB/2	0.075	0.010			-8.571E-05	2.009E-05	-3.023E-05	-8.268E-05	-271.928
4	B	0.150	0.010	0.300	0.000	-1.714E-04	9.643E-05	-1.163E-04	-1.586E-04	-529.922
5	BC/2	0.100	0.015			-2.679E-04	3.054E-04	-3.353E-04	-2.293E-04	-789.683
6	C	0.200	0.015	0.300	0.200	-2.143E-04	5.143E-04	-5.363E-04	-1.510E-04	-564.861
7	CD/2	0.150	0.010			-8.571E-05	6.107E-04	-6.166E-04	-1.178E-05	-125.615
8	D	0.300	0.010	0.000	0.200	4.286E-05	4.821E-04	-4.735E-04	1.004E-04	257.892
9	DE/2	0.100	0.015			9.643E-05	2.411E-04	-2.278E-04	1.247E-04	371.238
10	E	0.200	0.015	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000
11										
12			grados	radianes						
13	**ángulos**	$\hat{\varphi}$	83.105	1.4505		$x_{CG}[m]$	0.1607			
14		β	6.895	0.1203		$y_{CG}[m]$	0.1143			
15	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	1.6921E-04	m^4		$Q[kN]$	200.0000			
16		I_2	6.1340E-05	m^4						

- Distribución del flujo de corte



- Verificación del equilibrio (aplicando Simpson)

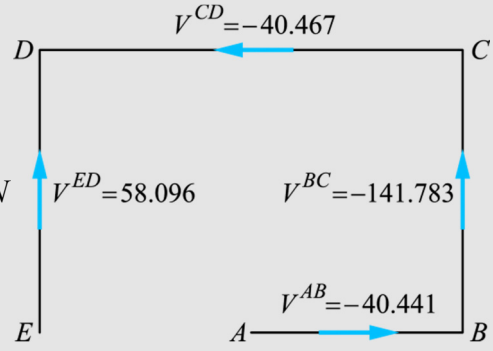
$$V^{AB} = \frac{0.15}{6}\left(0 - 4\cdot 271.9 - 529.9\right) = -40.441$$

$$V^{BC} = \frac{0.20}{6}\left(-529.9 - 4\cdot 789.6 - 564.85\right) = -141.783$$

$$V^{CD} = \frac{0.30}{6}\left(-564.85 - 4\cdot 125.6 + 257.9\right) = -40.467$$

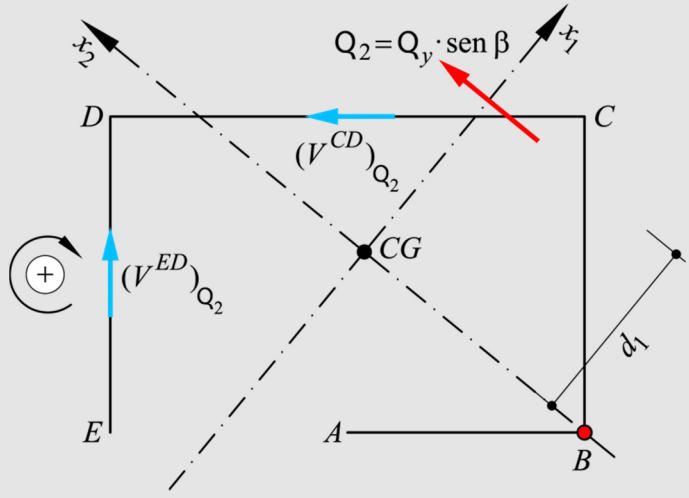
$$V^{ED} = \frac{0.20}{6}\left(257.9 + 4\cdot 371.2 + 0\right) = 58.096$$

$$\begin{cases} Q_y = -V^{BC} + V^{ED} = \\ \quad = -\left(-141.783\right) + 58.096 = 199.879\, kN \\ 0 = V^{AB} - V^{CD} = \\ \quad = 40.441 - 40.467 = 0.027\, kN \approx 0 \end{cases}$$



2. Cálculo del centro de corte

- Cálculo sobre la distancia x_1 (d_1)



Tomando momento respecto a "B"

$$d_1 = \frac{\left(-V^{CD}\right)_{Q_2}\cdot 0.2 + \left(V^{ED}\right)_{Q_2}\cdot 0.3}{-Q_2}$$

$$= \frac{-\left(\int_C^D \frac{S_1^*(s)}{I_1}\cancel{Q\operatorname{sen}\beta}\,ds\right)\cdot 0.2 + \left(\int_E^D \frac{S_1^*(s)}{I_1}\cancel{Q\operatorname{sen}\beta}\,ds\right)\cdot 0.3}{-\cancel{Q\operatorname{sen}\beta}}$$

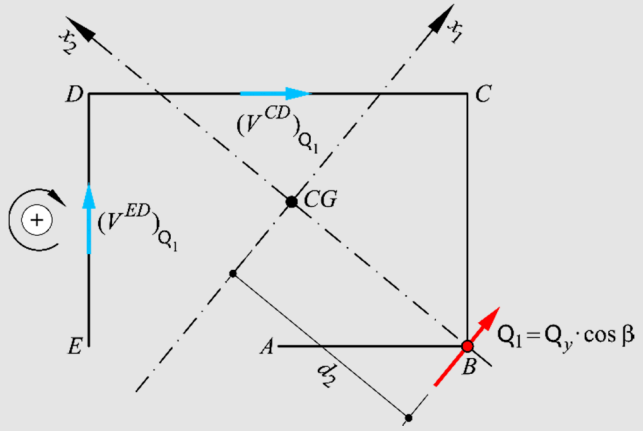
$$d_1 = \frac{1}{I_1}\left[\left(\int_C^D S_1^*(s)\,ds\right)\cdot 0.2 - \left(\int_E^D S_1^*(s)\,ds\right)\cdot 0.3\right]$$

$$= \frac{1}{I_1}\left(\left|\frac{0.3}{6}\left(-5.363\cdot 10^{-4} - 4\cdot 6.166\cdot 10^{-4} - 4.735\cdot 10^{-4}\right)\cdot 0.20\right|\right.$$

$$\left. -\left|\frac{0.2}{6}\left(-4.735\cdot 10^{-4} - 4\cdot 2.278\cdot 10^{-4} + 0\right)\cdot 0.30\right|\right)$$

$$\boxed{d_1 = 0.124}$$

- Cálculo de la distancia sobre el eje x_2 (d_2)



Tomando momento respecto a "B"

$$d_2 = \frac{\left(V^{CD}\right)_{Q_2}\cdot 0.2 + \left(V^{ED}\right)_{Q_2}\cdot 0.3}{-Q_2}$$

$$d_2 = \frac{1}{I_2}\left[\left(-\int_C^D S_2^*(s)\,ds\right)\cdot 0.2 - \left(\int_E^D S_2^*(s)\,ds\right)\cdot 0.3\right]$$

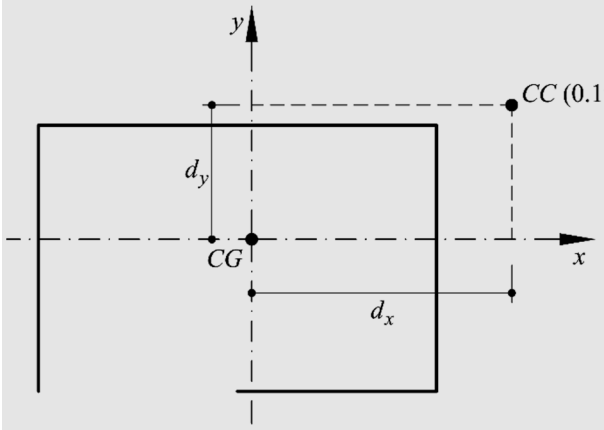
$$= \frac{1}{I_2}\left(-\left|\frac{0.3}{6}\left(-1.51\cdot 10^{-4} - 4\cdot 1.177\cdot 10^{-5} - 1.004\cdot 10^{-4}\right)\cdot 0.20\right|\right.$$

$$\left.-\left|\frac{0.2}{6}\left(1.004\cdot 10^{-4} + 4\cdot 1.247\cdot 10^{-4} + 0\right)\cdot 0.30\right|\right)$$

$$\boxed{d_2 = -0.183}$$

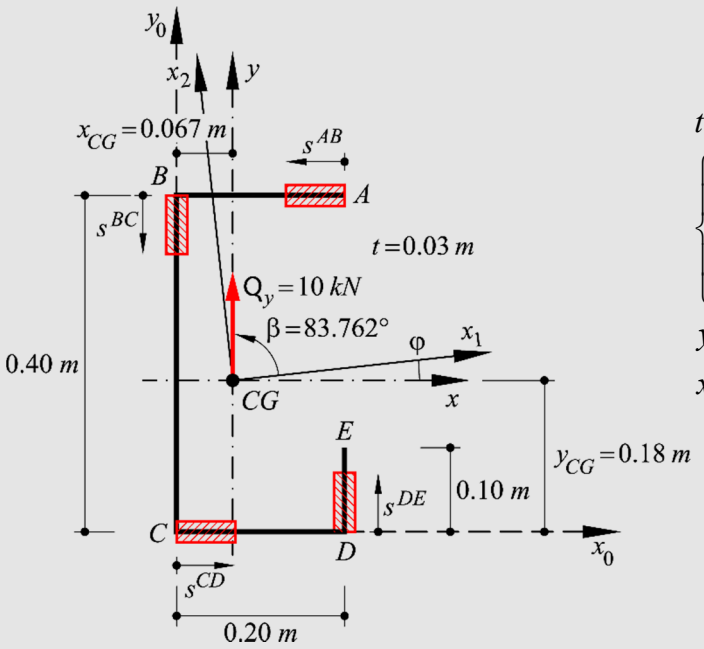
- Cambio de base de las coordenadas del centro de corte

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\hat{\varphi} & -\text{sen}\,\hat{\varphi} \\ \text{sen}\,\hat{\varphi} & \cos\hat{\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(83.105^o) & -\text{sen}(83.105^o) \\ \text{sen}(83.105^o) & \cos(83.105^o) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.124 \\ -0.183 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.196\,m \\ 0.101\,m \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 6-16: Dada la sección transversal de la figura, sometida a un esfuerzo cortante vertical ascendente $Q_y = 10\,kN$, obtener la distribución de tensiones tangenciales.



$$t=0.03\,m$$

$$\begin{cases} I_1 = 7.099\cdot 10^{-4}\ m^4 \\ I_2 = 1.546\cdot 10^{-4}\ m^4 \\ \varphi = 6.238° \end{cases}$$

$$y_{CG}=0.1833\,m$$

$$x_{CG}=0.0667\,m$$

$$f(s)=Q\left[\frac{S_1^*(s)}{I_1}\operatorname{sen}\beta+\frac{S_2^*(s)}{I_2}\cos\beta\right]$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} S_1^*(s) \\ S_2^*(s) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} S_x^*(s) \\ S_y^*(s) \end{Bmatrix}$$

- Momentos estáticos en la base (x,y)

Tramo $\overline{AB}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\Big|_A^B=\left(s^{AB}t\right)\left(y_A^0-y_{CG}\right) \\ S_y^*(s)\Big|_A^B=\left(s^{AB}t\right)\left[\left(x_A^0-\dfrac{s^{AB}}{2}\right)-x_{CG}\right] \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\Big|_B^C=S_x^*(B)\Big|_A^B+\left(s^{BC}t\right)\left[\left(y_B^0-\dfrac{s^{BC}}{2}\right)-y_{CG}\right] \\ S_y^*(s)\Big|_B^C=S_y^*(B)\Big|_A^B+\left(s^{BC}t\right)\left(x_B^0-x_{CG}\right) \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\Big|_C^D = S_x^*(C)\Big|_B^C + \left(s^{CD}t\right)\left(y_C^0 - y_{CG}\right) \\ S_y^*(s)\Big|_C^D = S_y^*(C)\Big|_B^C + \left(s^{CD}t\right)\left[\left(x_C^0 + \dfrac{s^{CD}}{2}\right) - x_{CG}\right] \end{cases}$$

Tramo $\overline{DE}$

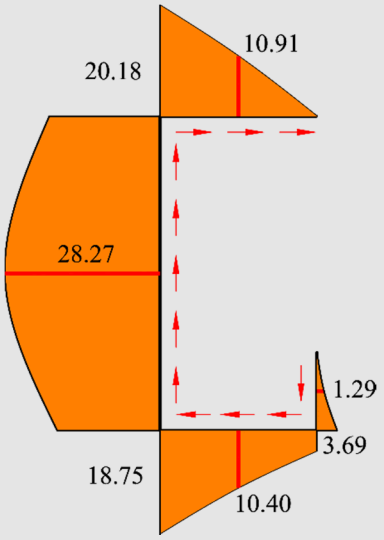
$$\begin{cases} S_x^*(s)\Big|_D^E = S_x^*(D)\Big|_C^D + \left(s^{DE}t\right)\left[\left(y_D^0 + \dfrac{s^{DE}}{2}\right) - y_{CG}\right] \\ S_y^*(s)\Big|_D^E = S_y^*(D)\Big|_C^D + \left(s^{DE}t\right)\left(x_D^0 - x_{CG}\right) \end{cases}$$

- Flujo de Corte

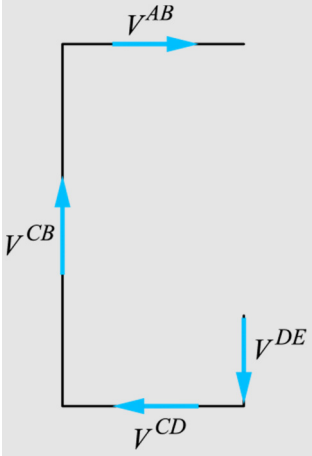
Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-16.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Tramo**	**Punto**	$s[m]$	$t[m]$	$x^0[m]$	$y^0[m]$	$S_x^*[m^3]$	$S_y^*[m^3]$	$S_1^*[m^3]$	$S_2^*[m^3]$	$f(s)[kN/m]$
2		A	0.000	0.030	0.200	0.400	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000
3	AB	AB/2	0.100	0.030			6.500E-04	2.500E-04	6.190E-04	3.191E-04	10.911
4		B	0.200	0.030			1.300E-03	2.000E-04	1.271E-03	3.401E-04	20.182
5		B	0.000	0.030	0.000	0.400	1.300E-03	2.000E-04	1.271E-03	3.401E-04	20.182
6	BC	BC/2	0.200	0.030			2.000E-03	-2.000E-04	2.010E-03	1.850E-05	28.275
7		C	0.400	0.030			1.500E-03	-6.000E-04	1.556E-03	-4.335E-04	18.747
8		C	0.000	0.030	0.000	0.000	1.500E-03	-6.000E-04	1.556E-03	-4.335E-04	18.747
9	CD	CD/2	0.100	0.030			9.500E-04	-6.500E-04	1.015E-03	-5.429E-04	10.397
10		D	0.200	0.030			4.000E-04	-4.000E-04	4.411E-04	-3.542E-04	3.687
11		D	0.000	0.030	0.200	0.000	4.000E-04	-4.000E-04	4.411E-04	-3.542E-04	3.687
12	DE	DE/2	0.050	0.030			1.625E-04	-2.000E-04	1.833E-04	-1.812E-04	1.293
13		E	0.100	0.030			9.000E-10	-9.000E-11	9.045E-10	8.326E-12	0.000
14											
15				grados	radianes						
16		**ángulos**	φ	6.238	0.1089		$x_{CG}[m]$	0.0667			
17			β	83.762	1.4619		$y_{CG}[m]$	0.1833			
18		**Momentos Principales de Inercia**	I_1	7.0990E-04	m^4		$Q[kN]$	10.0000			
19			I_2	1.5460E-04	m^4						

- Distribución del flujo de corte



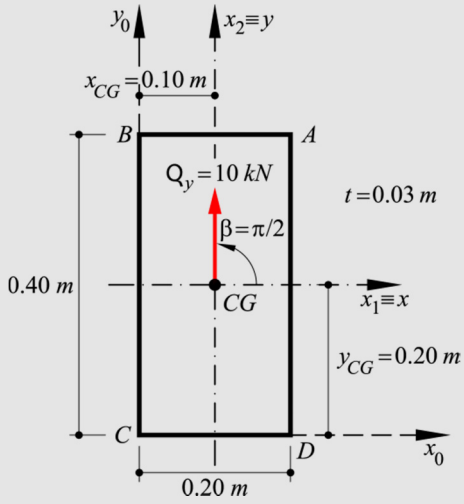
- Verificación del equilibrio (aplicando Simpson)



$$V^{ij} = \frac{l_{ij}}{6}\left(f_i + 4\frac{f_{ij}}{2} + f_j \right)$$

$$\begin{cases} \sum F_x = V^{AB} - V^{CD} = 2.1275 - 2.1341 = -6.6 \cdot 10^{-3}\ N \\ \sum F_y = V^{CB} - V^{DE} = 10.135 - 0.0147 = 9.987\ N \end{cases}$$

Ejemplo 6-17: Dada la sección transversal de la figura, sometida a un esfuerzo cortante vertical ascendente $Q_y = 10\,kN$, obtener la distribución de tensiones tangenciales.



$$t = 0.03\,m$$

$$\begin{cases} I_1 = 8.009 \cdot 10^{-4}\ m^4 \\ I_2 = 2.818 \cdot 10^{-4}\ m^4 \\ \varphi = 0^o \end{cases}$$

$$y_{CG} = 0.1833\,m$$
$$x_{CG} = 0.0667\,m$$

$$f(s) = \tau(s)t = Q\left[\frac{S_1^*(s)}{I_1}\operatorname{sen}\beta + \frac{S_2^*(s)}{I_2}\cos\beta\right] = Q\left[\frac{S_1^*(s)}{I_1}\operatorname{sen}90^o + \cancel{\frac{S_2^*(s)}{I_2}\cos 90^o}\right]$$

$$= Q\left[\frac{S_1^*(s)}{I_1}\right]$$

- Momentos estáticos del cuarto de sección simétrico

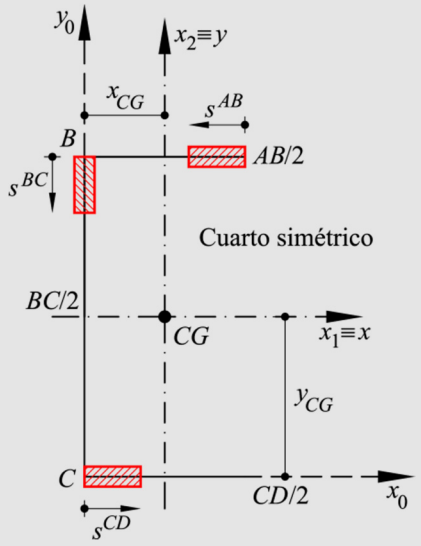
Por simetría se supone nulo el momento estático en $AB/2$ y en $CD/2$. También, por simetría los momentos estático en B y en C son iguales.

Tramo $\overline{\frac{AB}{2}; B}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\Big|_{AB/2}^{B} = \left(s^{AB}t\right)\left(y_0^{AB/2} - y_{CG}\right) \\ S_y^*(s)\Big|_{AB/2}^{B} = \left(s^{AB}t\right)\left[\left(x_0^{AB/2} - \frac{s^{AB}}{2}\right) - x_{CG}\right] \end{cases}$$

Tramo $\overline{B; \frac{BC}{2}}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\Big|_{B}^{BC/2} = S_x^*(B)\Big|_{AB/2}^{B} + \left(s^{BC}t\right)\left[\left(y_0^{B} - \frac{s^{BC}}{2}\right) - y_{CG}\right] \\ S_y^*(s)\Big|_{B}^{BC/2} = S_y^*(B)\Big|_{AB/2}^{B} + \left(s^{BC}t\right)\left(x_0^{B} - x_{CG}\right) \end{cases}$$

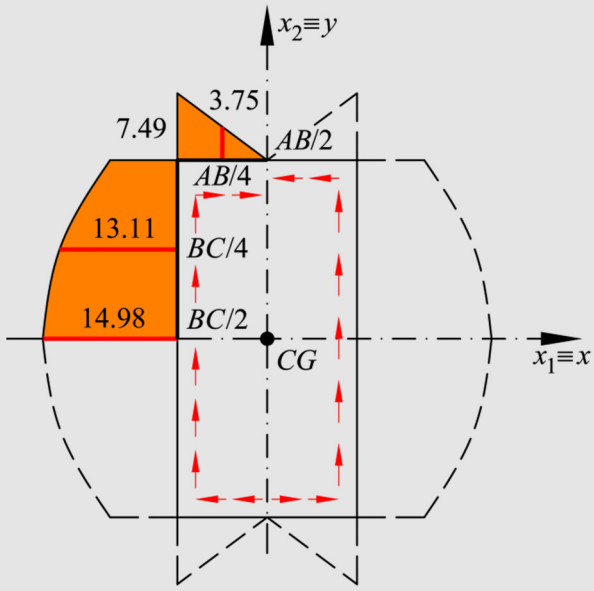


- Flujo de Corte

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-17.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Tramo**	**Punto**	$s\,[m]$	$t\,[m]$	$x^0\,[m]$	$y^0\,[m]$	$S_x^* = S_1^*\,[m^3]$	$S_y^* = S_2^*\,[m^3]$	$f(s)\,[kN/m]$
2	AB/2;B	AB/2	0.000	0.030	0.100	0.400	0.00	0.00	0.000
3		AB/4	0.050	0.030			3.000E-04	-3.750E-05	3.746
4		B	0.100	0.030			6.000E-04	-1.500E-04	7.492
5	B;BC/2	B	0.000	0.030	0.000	0.400	6.000E-04	-1.500E-04	7.492
6		BC/4	0.100	0.030			1.050E-03	-4.500E-04	13.110
7		BC/2	0.200	0.030			1.200E-03	-7.500E-04	14.983
8									
9									
10		**Momentos Principales de Inercia** $I_1\,[m^4]$	8.0090E-04			$x_{CG}\,[m]$	0.1000		
11		$I_2\,[m^4]$	2.8180E-04			$y_{CG}\,[m]$	0.2000		
12						$Q\,[kN]$	10.0000		

- Distribución del flujo de corte



- Verificación del equilibrio (aplicando Simpson)

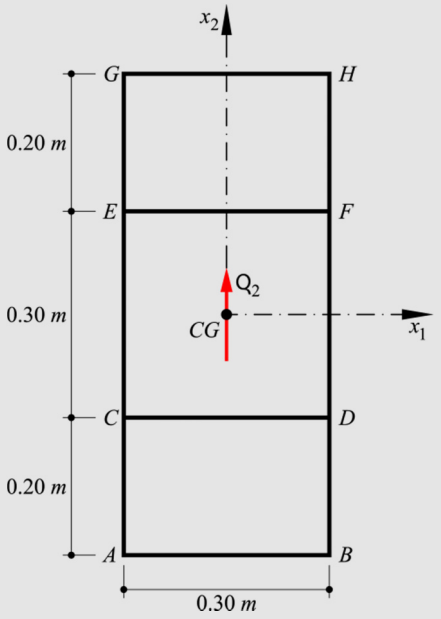
$$V^{ij} = \frac{l_{ij}}{6}\left(f_i + 4\frac{f_{ij}}{2} + f_j \right)$$

$$\begin{cases} \sum F_x = V^{AB/2} \cdot 2 - V_{AB/2} \cdot 2 = 0 \\ \sum F_y = 4 \cdot V^{CB/2;B} = 0.988\, N \end{cases}$$

Ejemplo 6-18: En la sección transversal de la figura, todas las paredes tienen el mismo espesor ($t = 0.012\, m$). Determinar:

1. La distribución de tensiones tangenciales (o flujo) cuando actúa un cortante vertical ascendente $\mathrm{Q} = 500\, kN$.

2. Utilizando las tensiones o flujo obtenido en el apartado anterior, verificar que Q es el único esfuerzo resultante en la sección transversal.



Espesor de paredes $t = 0.012\,m$

$A = 0.0312\,m^2$

$$\begin{cases} I_1 = 1.730 \cdot 10^{-3}\ m^4 \\ I_2 = 0.738 \cdot 10^{-3}\ m^4 \end{cases}$$

$$f(s) = \tau(s)t(s) = \frac{\cancel{Q_1}^{=0}}{I_2} S_2^*(s) + \frac{Q_2}{I_1} S_1^*(s) = \frac{Q_2}{I_1} S_1^*(s)$$

- Ejes locales

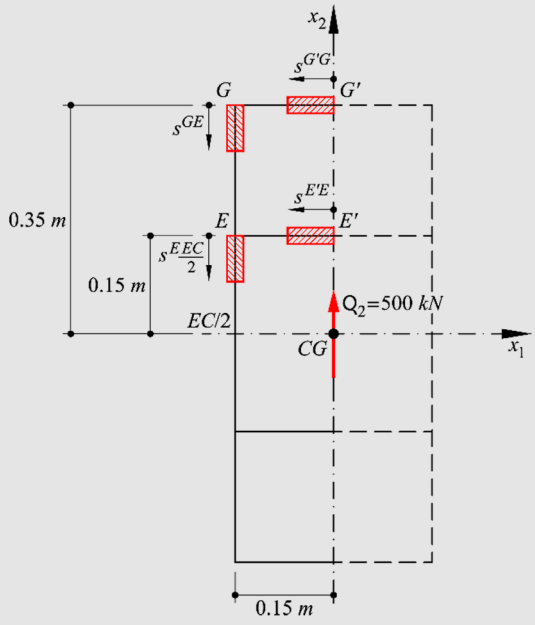
- Cálculo de momentos estáticos (considerando la simetría)

Tramo $\overline{G'G}$ $\quad \left\{ S_1^*(s)\Big|_{G'}^{G} = \left(s^{G'G} t\right) \cdot 0.35 \right.$

Tramo $\overline{GE}$ $\quad \left\{ S_1^*(s)\Big|_{G}^{E} = S_1^*(G)\Big|_{G'}^{G} + \left(s^{GE} t\right) \cdot \left(0.35 - \frac{s^{GE}}{2}\right) \right.$

Tramo $\overline{E'E}$ $\quad \left\{ S_1^*(s)\Big|_{E'}^{E} = 0 + \left(s^{E'E} t\right) \cdot 0.15 \right.$

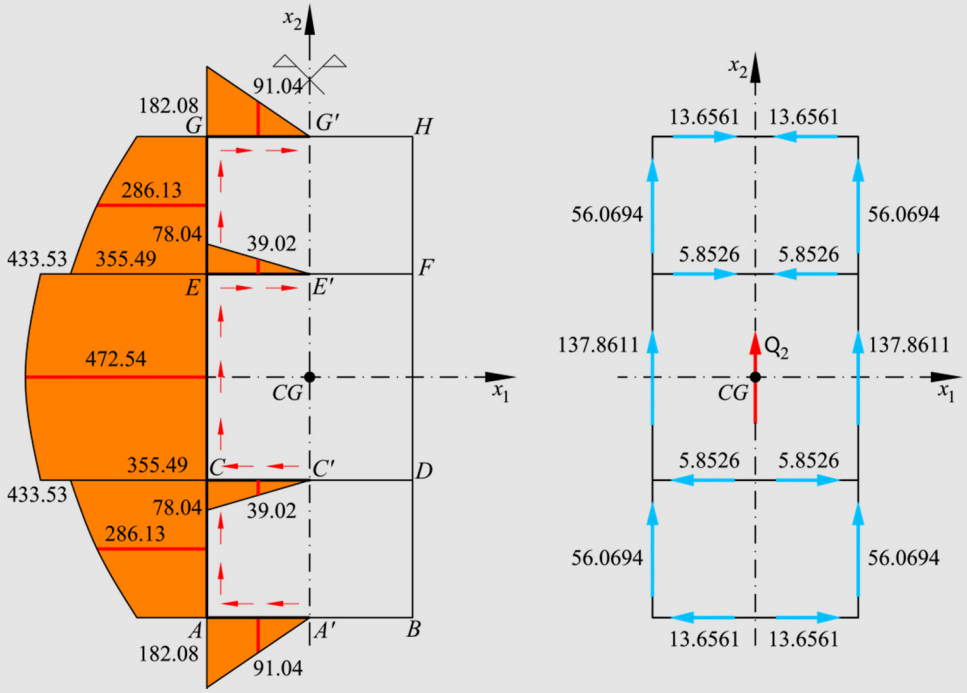
Tramo $\overline{E;\frac{EC}{2}}$ $\quad \left\{ S_1^*(s)\Big|_{E}^{\frac{EC}{2}} = S_1^*(E)\Big|_{G}^{E} + S_1^*(E)\Big|_{E'}^{E} + \left(s^{E;\frac{EC}{2}} t\right) \cdot \left(0.15 - \frac{s^{E;\frac{EC}{2}}}{2}\right) \right.$



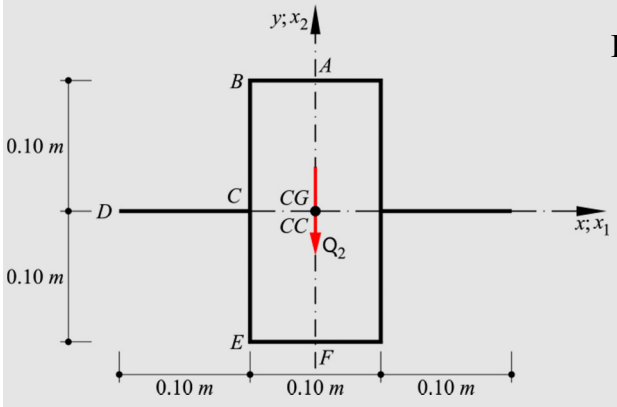
Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-18.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Tramo**	**Punto**	$s\,[m]$	$t\,[m]$	$S_x^* = S_1^*\,[m^3]$	$f(s)\,[kN/m]$	$V\,[kN]$
2	G'G	G'	0.000	0.012	0.00	0.000	13.65607
3		G'G/2	0.075	0.012	3.1500E-04	9.1040E+01	
4		G	0.150	0.012	6.3000E-04	1.8208E+02	
5	GE	G	0.000	0.012	6.3000E-04	1.8208E+02	56.06936
6		GE/2	0.100	0.012	9.9000E-04	2.8613E+02	
7		E	0.200	0.012	1.2300E-03	3.5549E+02	
8	E'E	E'	0.000	0.012	0.0000E+00	0.0000E+00	5.85260
9		E'E/2	0.075	0.012	1.3500E-04	3.9017E+01	
10		E	0.150	0.012	2.7000E-04	7.8035E+01	
11	E;EC/2	E	0.000	0.012	1.5000E-03	4.3353E+02	137.86127
12		EC/2	0.150	0.012	1.6350E-03	4.7254E+02	
13		C	0.300	0.012	1.5000E-03	4.3353E+02	
14							
15							
16		**Momentos Principales de Inercia**	$I_1\,[m^4]$	1.7300E-03		$Q\,[kN]$	500.0000
17			$I_2\,[m^4]$	7.3800E-04			

- Distribución del flujo cortante y esfuerzos resultantes



Ejemplo 6-19: Dada la sección transversal de la figura, sometida al esfuerzo cortante $Q = Q_2$ que se indica, obtener la distribución de tensiones tangenciales y su trazado.



Espesor de paredes $t = 0.002\,m$

La sección es simétrica respecto de los ejes x_1 y x_2 y su centro geométrico (CG) coincide con el centro de corte (CC) , y se ubican como se muestra en la figura.

Los flujos de cortante están dados por:

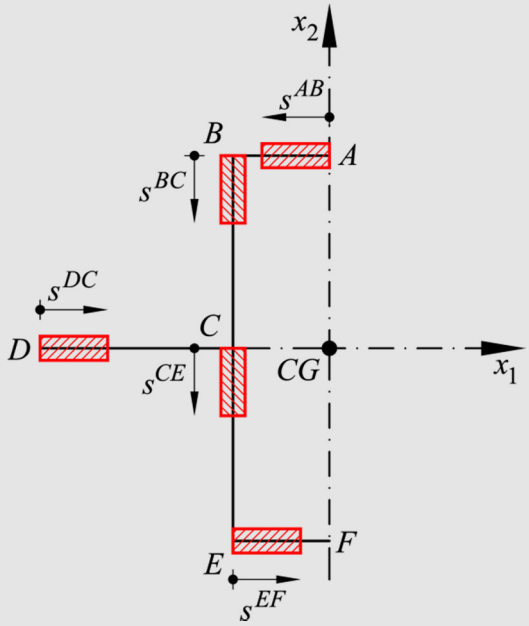
$$f(s)=\frac{\cancel{Q_1}^{=0}}{I_2}S_2^*(s)+\frac{Q_2}{I_1}S_1^*(s)=\frac{Q_2}{I_1}S_1^*(s)$$

- Cálculo del momento de inercia principal I_1

$$I_1=2\cdot\left(\frac{0.1\cdot 0.002^3}{12}+(0.1\cdot 0.002)\cdot 0.1^2\right)+2\cdot\left(\frac{0.1\cdot 0.002^3}{12}+(0.1\cdot 0.002)\cdot 0^2\right)$$
$$+2\cdot\left(\frac{0.002\cdot 0.2^3}{12}+(0.2\cdot 0.002)\cdot 0^2\right)$$

$$\boxed{I_1=6.667\cdot 10^{-6}\,m^4}$$

- Ejes locales



- Momentos estáticos

Tramo $\overline{AB}$ $\left\{S_x^*(s)\right|_A^B = \left(s^{AB}t\right)\cdot 0.1$

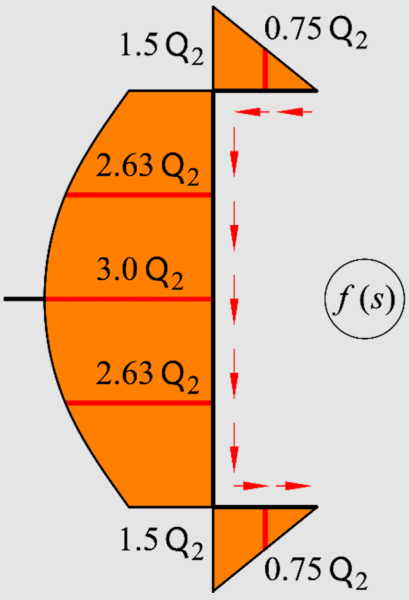
Tramo $\overline{BC}$ $\left\{S_x^*(s)\right|_B^C = S_x^*(B)\Big|_A^B + \left(s^{BC}t\right)\left(0.1 - \frac{s^{BC}}{2}\right)$

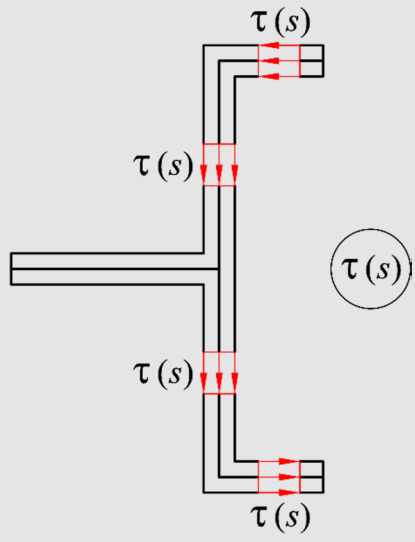
Tramo $\overline{CD}$ $\left\{S_x^*(s)\right|_D^C = \left(s^{DC}t\right)\cdot 0$

Tramo $\overline{CE}$ $\left\{S_x^*(s)\right|_C^E = S_x^*(C)\Big|_D^C + S_x^*(C)\Big|_B^C + \left(s^{CE}t\right)\left(-\frac{s^{CE}}{2}\right)$

Tramo $\overline{EF}$ $\left\{S_x^*(s)\right|_E^F = S_x^*(E)\Big|_C^E + \left(s^{EF}t\right)(-0.1)$

-Cálculo del flujo y de la tensión tangencial en la sección





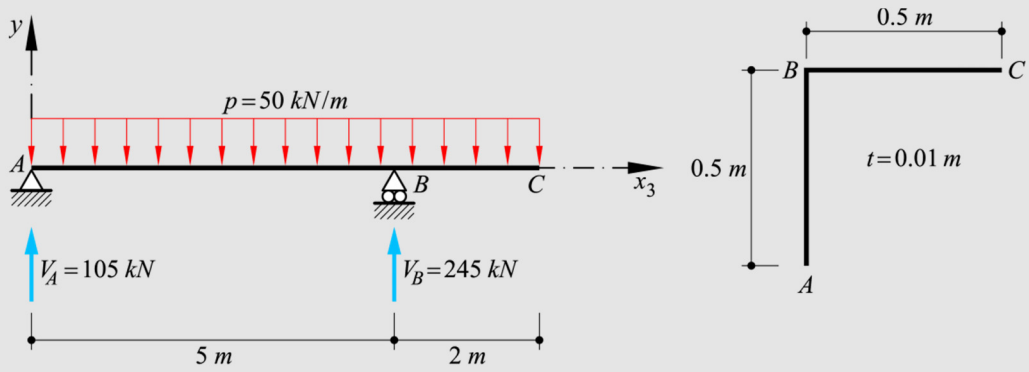
Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-19.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Tramo**	**Punto**	$s[m]$	$t[m]$	$S_1^*\left[m^3\right]$	$\frac{f(s)}{Q_2}\left[\frac{1}{m}\right]$	$\frac{V}{Q_2}$	$\frac{\tau(s)}{Q_2}\left[\frac{1}{m^2}\right]$
2	AB	A	0.000	0.002	0.00	0.0000	0.03750	0.00
3		AB/2	0.025	0.002	5.0000E-06	0.7500		375.00
4		B	0.050	0.002	1.0000E-05	1.5000		750.00
5	BC	B	0.000	0.002	1.0000E-05	1.5000	0.25000	750.00
6		BC/2	0.050	0.002	1.7500E-05	2.6250		1312.50
7		C	0.100	0.002	2.0000E-05	3.0000		1500.00
8	DC	D	0.000	0.002	0.0000E+00	0.0000	0.00000	0.00
9		DC/2	0.050	0.002	0.0000E+00	0.0000		0.00
10		C	0.100	0.002	0.0000E+00	0.0000		0.00
11	CE	C	0.000	0.002	2.0000E-05	3.0000	0.25000	1500.00
12		CE/2	0.050	0.002	1.7500E-05	2.6250		1312.50
13		E	0.100	0.002	1.0000E-05	1.5000		750.00
14	EF	E	0.000	0.002	1.0000E-05	1.5000	0.03750	750.00
15		EF/2	0.025	0.002	5.0000E-06	0.7500		375.00
16		F	0.050	0.002	0.0000E+00	0.0000		0.00
17								
18								
19		**Momentos Principales de Inercia**	$I_1\left[m^4\right]$	6.6667E-06				
20								

- Verificación del equilibrio

$$\begin{cases} \sum F_{x_2} = 0 = 2\left(V^{BC}/Q_2 + V^{CE}/Q_2\right) - 1/Q_2 = 2\left(0.25/Q_2 + 0.25/Q_2\right) - 1/Q_2 \\ \sum F_{x_1} = 0 = 2\left(V^{AB}/Q_2 + V^{EF}/Q_2\right) = 2\left(0.0375/Q_2 - 0.0375/Q_2\right) \end{cases}$$

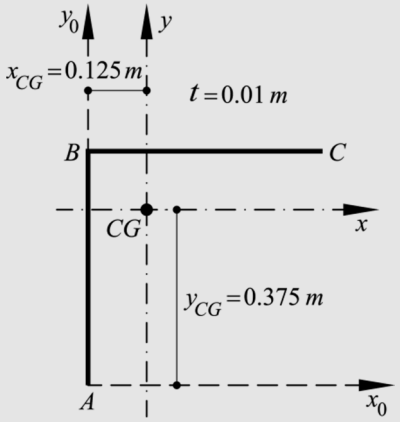
Ejemplo 6-20: La viga de la figura está sometida a una carga uniformemente repartida $p = 50\,kN/m$. La sección transversal de la viga es un perfil angular de alas iguales como el que se muestra en la figura. Determinar las tensiones tangenciales en la sección de la viga sometida a máximo corte.



-Características geométricas de la sección

$$A=(0.5+0.5)\cdot 0.01=0.01 m^2$$

$$\begin{cases} y_{CG}=\dfrac{(0.5\cdot 0.01)\cdot 0.5+(0.5\cdot 0.01)\cdot 0.5/2}{0.01}=0.375 m \\ x_{CG}=\dfrac{(0.5\cdot 0.01)\cdot 0+(0.5\cdot 0.01)\cdot 0.5/2}{0.01}=0.125 m \end{cases}$$

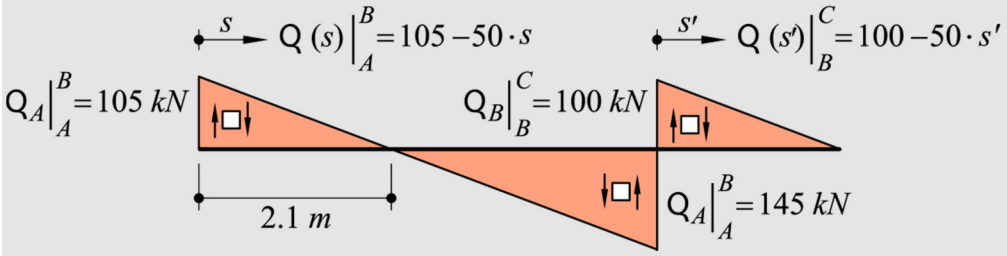


Reacciones de vínculo

$$\sum F_y = 0 = V_A + V_B - 50\cdot 7$$
$$\sum M^A = 0 = -V_B\cdot 5 + 50\cdot 7\cdot 7/2$$

a) Corte máximo

$$Q^{\max} = Q_B\Big|_A^B = 145 kN$$



b) Tensiones tangenciales para el corte máximo

- Momentos de inercia en la base (x, y) respecto al centro geométrico

$$I_{xx} = \left(\frac{0.5 \cdot 0.01^3}{12}\right) + (0.5 \cdot 0.01) \cdot (0.5 - 0.375)^2 + \left(\frac{0.5^3 \cdot 0.01}{12}\right) + (0.5 \cdot 0.01) \cdot \left(\frac{0.5}{2} - 0.375\right)^2$$

$$I_{xx} = 2.605 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$I_{yy} = \left(\frac{0.5^3 \cdot 0.01}{12}\right) + (0.5 \cdot 0.01) \cdot \left(\frac{0.5}{2} - 0.125\right)^2 + \left(\frac{0.5 \cdot 0.01^3}{12}\right) + (0.5 \cdot 0.01) \cdot (0 - 0.125)^2$$

$$I_{yy} = 2.605 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$I_{xy} = (0.5 \cdot 0.01) \cdot (0.5 - 0.375) \cdot \left(\frac{0.5}{2} - 0.125\right) + (0.5 \cdot 0.01) \cdot \left(\frac{0.5}{2} - 0.375\right) \cdot (0 - 0.125)$$

$$I_{xy} = 1.563 \cdot 10^{-4} m^4$$

- Momentos principales de inercia respecto al centro geométrico

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{2.605 \cdot 10^{-4} + 2.605 \cdot 10^{-4}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2.605 \cdot 10^{-4} - 2.605 \cdot 10^{-4}}{2}\right)^2 + \left(1.563 \cdot 10^{-4}\right)^2}$$

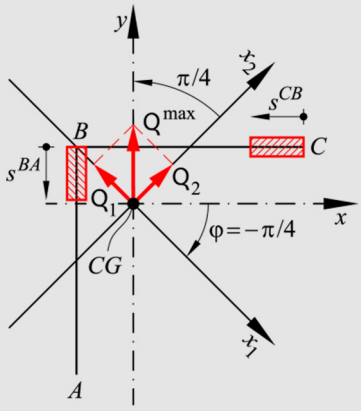
$$\begin{cases} I_1 = 4.167 \cdot 10^{-4} m^4 \\ I_2 = 1.042 \cdot 10^{-4} m^4 \end{cases} \quad ; \qquad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{2 I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}}\right) = -45° = -\frac{\pi}{4}$$

- Direcciones principales, ejes locales y cambio de base

$$Q^{max} = 145\,kN$$

$$Q_2 = Q^{max}\cos\beta = 145\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 102.53\,kN$$

$$Q_1 = Q^{max}\,\mathrm{sen}\,\beta = 145\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -102.53\,kN$$



$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ -\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} S_1^*(s) \\ S_2^*(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x^*(s) \\ S_y^*(s) \end{Bmatrix}$$

- Momentos estáticos en la base (x, y)

Tramo $\overline{CB}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\Big|_C^B = \left(s^{CB}t\right)\cdot 0.125 \\ S_y^*(s)\Big|_C^B = \left(s^{CB}t\right)\left(0.375 - \dfrac{s^{CB}}{2}\right) \end{cases}$$

Tramo $\overline{BA}$

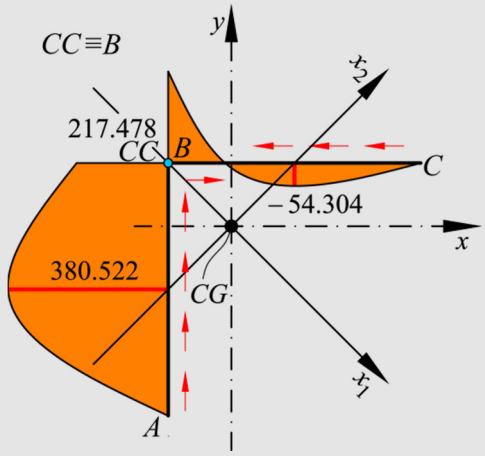
$$\begin{cases} S_x^*(s)\Big|_B^A = S_x^*(B)\Big|_C^B + \left(s^{BA}t\right)\left(0.125 - \dfrac{s^{BA}}{2}\right) \\ S_y^*(s)\Big|_B^A = S_y^*(B)\Big|_C^B + \left(s^{BA}t\right)(-0.125) \end{cases}$$

- Flujo de Corte

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-20.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Tramo**	**Punto**	$s\,[m]$	$t\,[m]$	$S_x^*\,[m^3]$	$S_y^*\,[m^3]$	$S_1^*\,[m^3]$	$S_2^*\,[m^3]$	$f(s)\,[kN/m]$
2	CB	C	0.000	0.010	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000
3		CB/2	0.250	0.010	3.125E-04	6.250E-04	6.629E-04	2.210E-04	-54.304
4		C	0.500	0.010	6.250E-04	6.250E-04	8.839E-04	0.000E+00	217.478
5	BA	B	0.000	0.010	6.250E-04	6.250E-04	8.839E-04	0.000E+00	217.478
6		BA/2	0.250	0.010	6.250E-04	3.125E-04	6.629E-04	-2.210E-04	380.522
7		A	0.500	0.010	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000
8									
9				grados	radianes				
10		**ángulos**	φ	-45.000	-0.7854		$Q\,[kN]$	145.0000	
11			β	45.000	0.7854		$Q_1\,[kN]$	-102.5305	
12		**Momentos Principales**	I_1	4.1671E-04	m^4		$Q_2\,[kN]$	102.5305	
13			I_2	1.0421E-04	m^4				

- Distribución del flujo de corte



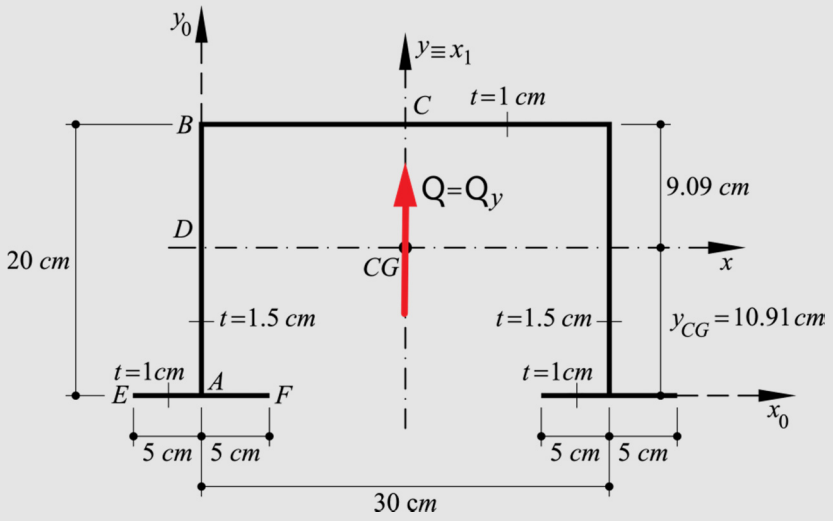
- Verificación del equilibrio (aplicando Simpson)

$$\sum F_H = \frac{0.5}{6}\left(0 - 4\cdot(-54.138) + 217.482\right) = 0.018 \approx 0$$

$$\sum F_V = \frac{0.50}{6}\left(217.482 + 4\cdot(380.541) + 0\right) = 144.97\,kN$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{el Centro de cortante } (CC) \text{ coincide con el punto } B$$

Ejemplo 6-21: Determinar la magnitud y distribución de las tensiones tangenciales producidas por el esfuerzo de corte vertical ascendente de $200\,kN$ aplicado en el centro geométrico de la sección mostrada en la figura.



- Características geométricas de la sección

$$A=(10\cdot 1+20\cdot 1.5)\cdot 2+30\cdot 1=110\,cm^2$$

$$x_{CG}=\frac{\left[(20\cdot 1.5)\cdot 10\right]\cdot 2+(30\cdot 1)\cdot 20}{110}=10.91\,cm$$

$$I_{xx}=2\cdot\left[(10\cdot 1)\cdot 10.91^2+\left(\frac{1.5\cdot 20^3}{12}+20\cdot 1.5\cdot(10-10.91)^2\right)\right]+30\cdot 1\cdot 9.09^2$$

$$I_{xx}=6909\,cm^4$$

- Momentos estáticos en la mitad simétrica

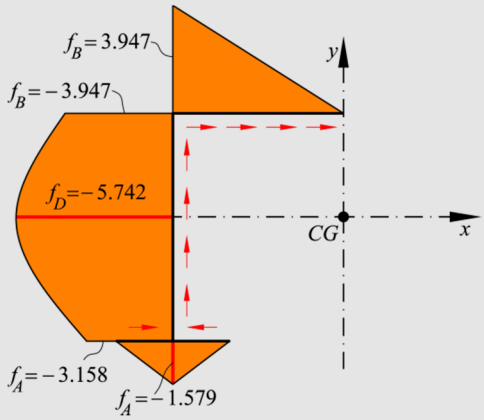
Tramo $\overline{EA}$ $\quad \left\{S_x^*(s)\right|_E^A=\left(s^{EA}t_{EA}\right)\cdot(-10.91)$

Tramo $\overline{FA}$ $\quad \left\{S_x^*(s)\right|_F^A=\left(s^{FA}t_{FA}\right)(-10.91)$

Tramo $\overline{AB}$ $\quad \left\{S_x^*(s)\right|_A^B=S_x^*(A)\Big|_E^A+S_x^*(A)\Big|_F^A+\left(s^{AB}t_{AB}\right)\cdot\left(\frac{s^{AB}}{2}-10.91\right)$

Tramo $\overline{BC}$ $\left\{S_x^*(s)\Big|_B^C = S_x^*(B)\Big|_A^B + \left(s^{BC} t_{BC}\right)\cdot(-9.09)\right.$

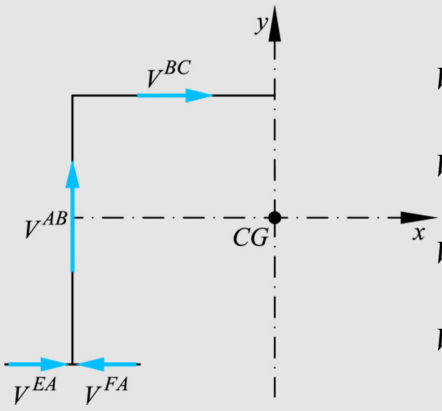
- Flujo de Corte (parte simétrica)



Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-21.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Tramo**	**Punto**	$s\,[cm]$	$t\,[cm]$	$S_x^*\,[cm^3]$	$f(s)\,[kN/cm]$	$\tau = \frac{f}{t}\,[kN/cm^2]$
2	EA	E	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
3		EA/2	2.500	1.000	-27.273	-0.789	-0.789
4		A	5.000	1.000	-54.545	-1.579	-1.579
5	FA	F	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
6		FA/2	2.500	1.000	-27.273	-0.789	-0.789
7		A	5.000	1.000	-54.545	-1.579	-1.579
8	AB	A	0.000	1.500	-109.091	-3.158	-2.105
9		D	10.910	1.500	-198.347	-5.742	-3.828
10		B	20.000	1.500	-136.364	-3.947	-2.632
11	BC	B	0.000	1.000	-136.364	-3.947	-3.947
12		BC/2	7.500	1.000	-68.182	-1.974	-1.974
13		C	15.000	1.000	0.000	0.000	0.000
14							
15		**Momentos Principales de Inercia**	$I_{xx}\,[cm^4]$	6909.000			
16							
17			$Q\,[kN]$	200.0000			

- Verificación del equilibrio (aplicando Simpson)



$$V^{AB} = \frac{20}{6}\left(-3.158 - 4\cdot 5.742 - 3.947\right) = -100.2\,kN$$

$$V^{EA} = \frac{-1.579\cdot 5}{2} = -3.94\,kN$$

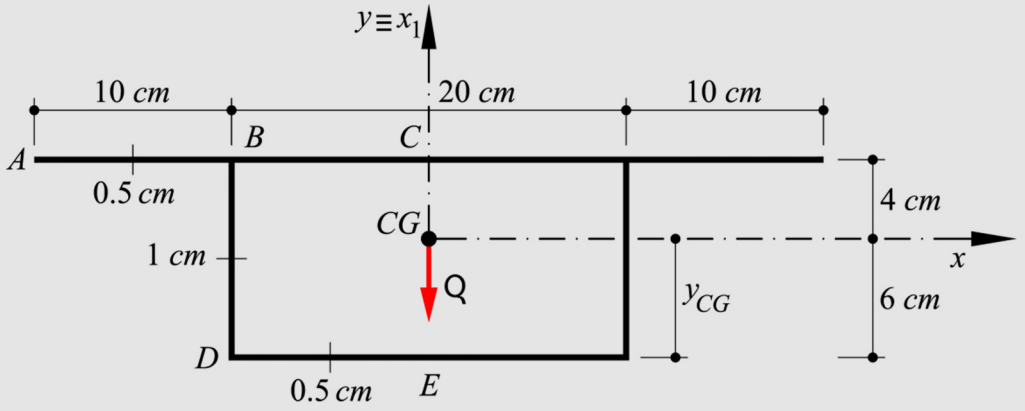
$$V^{FA} = \frac{-1.579\cdot 5}{2} = -3.94\,kN$$

$$V^{BC} = \frac{-3.947\cdot 15}{2} = -29.602\,kN$$

$$\sum F_H = \underbrace{\left(3.94 - 3.94\right)}_{\text{parte simétrica}} - \underbrace{\left(3.94 - 3.94\right)}_{\text{parte simétrica}} + 29.602 - \underbrace{29.602}_{\text{parte simétrica}} = 0$$

$$\sum F_V = 100.2 + \underbrace{100.2}_{\text{parte simétrica}} = 200.4\,kN \approx \mathrm{Q}$$

Ejemplo 6-22: Dada la sección transversal que se representa en la figura, sometida a un esfuerzo vertical descendente, se pide obtener la magnitud y distribución de las tensiones tangenciales en toda la sección.



- Características geométricas

$$A = 40\cdot 0.5 + 20\cdot 1 + 20\cdot 0.5 = 50\,cm^2$$

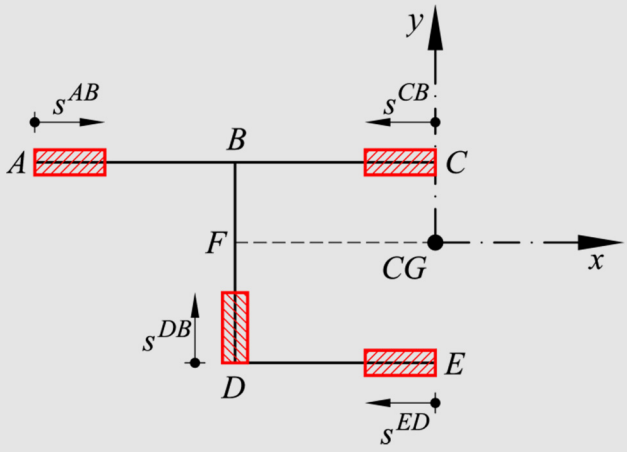
$$y_{CG} = \frac{(40\cdot 0.5)\cdot 10 + (2\cdot 10\cdot 1)\cdot 5}{50} = 6\,cm$$

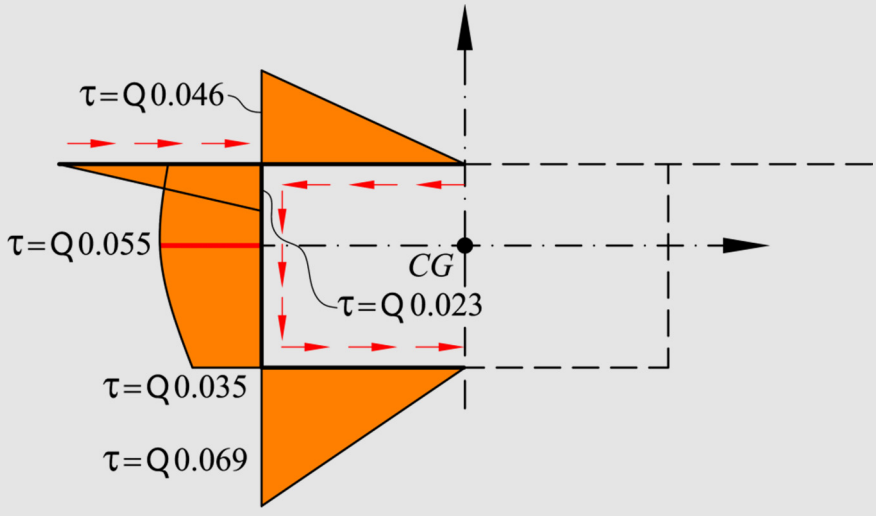
$$I_{xx} = 2\cdot\left[\frac{1\cdot 10^3}{12} + (1\cdot 10)\cdot(5-6)^2\right] + (40\cdot 0.5)\cdot 4^2 + (20\cdot 0.5)\cdot(-6)^2$$

$$= 186.67 + 320 + 360$$

$$I_{xx} = 866.67\,cm^4$$

- Ejes locales y distribución de las tensiones tangenciales





- Momentos estáticos (mitad simétrica)

Tramo $\overline{AB}$ $\left\{S_x^*(s)\right|_A^B = \left(s^{AB} t_{AB}\right)\cdot 4$

Tramo $\overline{CB}$ $\left\{S_x^*(s)\right|_C^B = \left(s^{CB} t_{CB}\right)\cdot 4$

Tramo $\overline{ED}$ $\left\{S_x^*(s)\right|_E^D = \left(s^{ED} t_{ED}\right)\cdot(-6)$

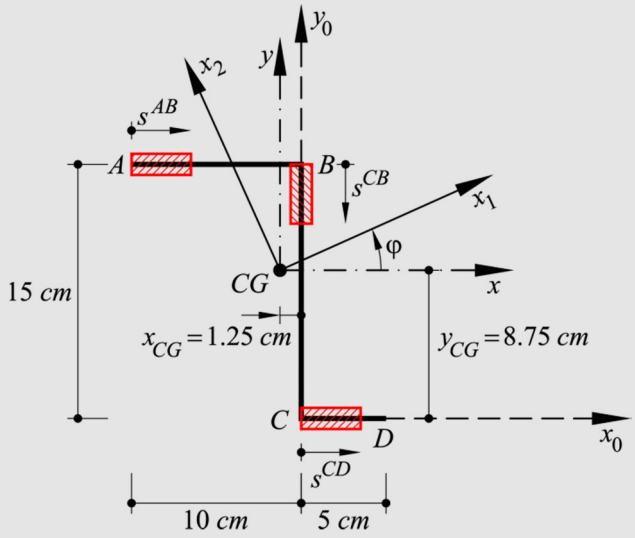
Tramo $\overline{DB}$ $\left\{S_x^*(s)\right|_D^B = S_x^*(D)\Big|_D^E + \left(s^{DB} t\right)\left(\frac{s^{DB}}{2} - 6\right)$

- Flujo de Corte

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-22.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Tramo**	**Punto**	$s\,[cm]$	$t\,[cm]$	$S_x^*\,[cm^3]$	$\frac{f(s)}{Q}\,[1/cm]$	$\frac{\tau}{Q} = \frac{f}{Q\cdot t}\,[1/cm^2]$
2	AB	A	0.000	0.500	0.000	0.000	0.000
3		AB/2	5.000	0.500	10.000	0.012	0.023
4		B	10.000	0.500	20.000	0.023	0.046
5	CB	C	0.000	0.500	0.000	0.000	0.000
6		CB/2	5.000	0.500	10.000	0.012	0.023
7		C	10.000	0.500	20.000	0.023	0.046
8	ED	E	0.000	0.500	0.000	0.000	0.000
9		ED/2	5.000	0.500	-15.000	-0.017	-0.035
10		D	10.000	0.500	-30.000	-0.035	-0.069
11	DB	D	0.000	1.000	-30.000	-0.035	-0.035
12		F	5.000	1.000	-47.500	-0.055	-0.055
13		B	10.000	1.000	-40.000	-0.046	-0.046
14							
15		**Momentos Principales de Inercia**	$I_{xx}\,[cm^4]$	866.667			
16							

Ejemplo 6-23: Determinar la distribución de tensiones tangenciales cuando en la sección de la figura actúa un esfuerzo cortante $Q = 100kN$ vertical ascendente, aplicado en su centro de esfuerzos cortantes (no hay torsión).



$$t = 0.5\,cm$$

$$A = 15\,cm^2$$

$$\begin{cases} I_{xx} = 539.219\,cm^4 \\ I_{yy} = 164.219\,cm^4 \\ I_{xy} = -210.938\,cm^4 \end{cases}$$

$$y_{CG} = 8.75\,cm$$

$$x_{CG} = -1.25\,cm$$

$$f(s) = \tau(s)t = \frac{S_1^*(s)}{I_1}\mathrm{Q}_2 + \frac{S_2^*(s)}{I_2}\mathrm{Q}_1$$

$$\begin{cases} \mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) \\ \mathrm{Q}_2 = \mathrm{Q}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \mathrm{sen}\,\varphi \\ -\mathrm{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} S_1^*(s) \\ S_2^*(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\mathrm{sen}\,\varphi \\ \mathrm{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x^*(s) \\ S_y^*(s) \end{Bmatrix}$$

- Cálculo de los momentos principales y direcciones principales de inercia.

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{539.219 + 164.219}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{539.219 - 164.219}{2}\right)^2 + (-210.938)^2}$$

$$I_{1,2} = \begin{cases} I_1 = 633.944\,cm^4 \\ I_2 = 69.494\,cm^4 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(-\frac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(-\frac{2\cdot(-210.938)}{539.219 - 164.219}\right) \rightarrow \varphi = 24.183^{\circ}$$

- Momentos estáticos en la base (x, y)

Tramo $\overline{AB}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\Big|_A^B = \left(s^{AB}t\right)\cdot 6.25 \\ S_y^*(s)\Big|_A^B = \left(s^{AB}t\right)\left(-8.75+\dfrac{s^{AB}}{2}\right) \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\Big|_B^C = S_x^*(B)\Big|_A^B + \left(s^{BC}t\right)\left(6.25-\dfrac{s^{BC}}{2}\right) \\ S_y^*(s)\Big|_B^C = S_y^*(B)\Big|_A^B + \left(s^{BC}t\right)\cdot 1.25 \end{cases}$$

Tramo $\overline{CD}$

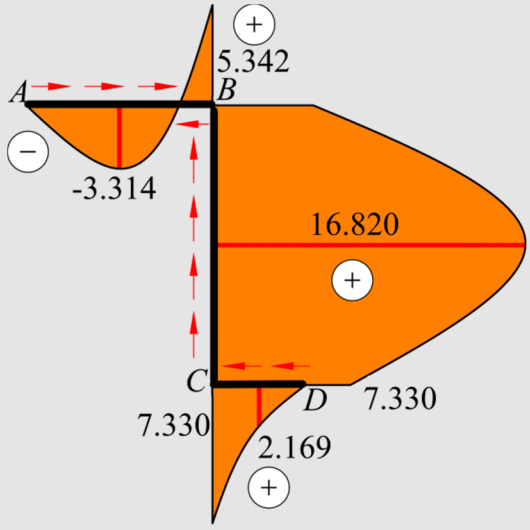
$$\begin{cases} S_x^*(s)\Big|_C^D = S_x^*(C)\Big|_B^C + \left(s^{CD}t\right)(-8.75) \\ S_y^*(s)\Big|_C^D = S_y^*(C)\Big|_B^C + \left(s^{CD}t\right)\left(1.25+\dfrac{s^{CD}}{2}\right) \end{cases}$$

- Flujo de Corte

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-23.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Tramo**	**Punto**	$s[cm]$	$t[cm]$	$S_x^*[cm^3]$	$S_y^*[cm^3]$	$S_1^*[cm^3]$	$S_2^*[cm^3]$	$f(s)[kN/cm]$	$\tau(s)[kN/cm^2]$
2	AB	A	0.000	0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3		AB/2	5.000	0.500	15.625	-15.625	20.655	-7.853	-1.657	-3.314
4		B	10.000	0.500	31.250	-18.750	36.189	-4.303	2.671	5.342
5	BC	B	0.000	0.500	31.250	-18.750	36.189	-4.303	2.671	5.342
6		BC/2	7.500	0.500	40.625	-14.063	42.821	3.814	8.410	16.820
7		C	15.000	0.500	21.875	-9.375	23.796	0.409	3.665	7.330
8	CD	C	0.000	0.500	21.875	-9.375	23.796	0.409	3.665	7.330
9		CD/2	2.500	0.500	10.938	-6.250	12.538	-1.221	1.084	2.169
10		D	5.000	0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
11										
12				grados	radianes					
13		**ángulos**	φ	24.183	0.4221		Q_1	40.9652		
14			β	65.817	1.1487		Q_2	91.2242		
15		**Momentos Principales de Inercia**	$I_1[cm^4]$	6.3394E+02						
16			$I_2[cm^4]$	6.9494E+01						

- Distribución del flujo de corte y magnitud de tensiones tangenciales



Ejemplo 6-24: La sección transversal que se representa en la figura, está sometida a una carga de compresión de $150\,kN$ aplicada en el punto "A" y a un esfuerzo de corte ascendente de $50\,kN$ aplicado en el centro de corte. Obtener:

1. La distribución de tensiones normales en la sección.
2. la ecuación de la línea neutra y su representación gráfica.
3. La distribución de tensiones tangenciales en la sección.

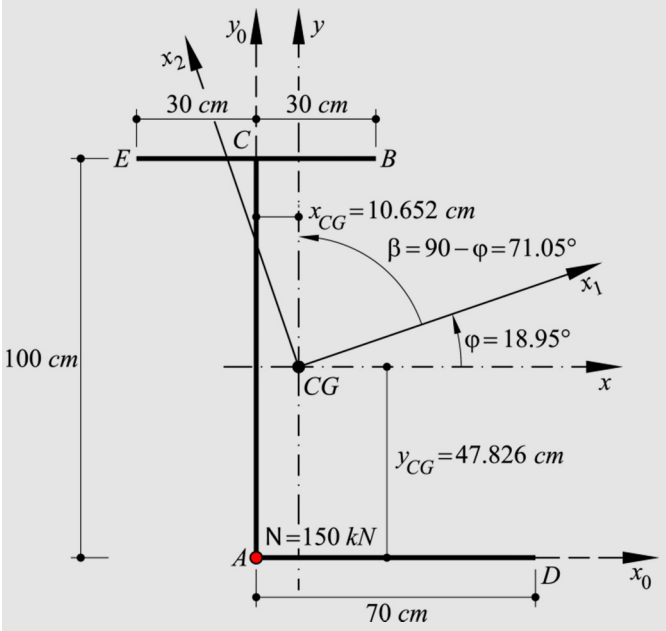
- Características geométricas

Los radios de giro respecto de los ejes principales de inercia de la sección están dados por:

$$i_1^2 = \frac{I_1}{A} = \frac{4.47 \cdot 10^{-3}}{0.023} = 0.19456\,m^2 \; ; \qquad i_2^2 = \frac{I_2}{A} = \frac{6.60 \cdot 10^{-4}}{0.023} = 0.0287\,m^2$$

- Ecuaciones de cambio de base

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\,\varphi \\ -\text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} S_1^*(s) \\ S_2^*(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\text{sen}\,\varphi \\ \text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x^*(s) \\ S_y^*(s) \end{Bmatrix}$$



$$t = 0.01\,m$$

$$A = 0.023\,m^2$$

$$\begin{cases} I_1 = 4.47 \cdot 10^{-3}\ m^4 \\ I_2 = 6.60 \cdot 10^{-4}\ m^4 \end{cases}$$

$$y_{CG} = 0.47826\,m$$

$$x_{CG} = 0.10652\,m$$

- Ecuaciones fundamentales

Se emplearán las siguientes ecuaciones, vistas en los correspondientes capítulos, que se repiten a continuación para facilitar el desarrollo de este ejemplo.

Para las tensiones normales:

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{\mathrm{N}}{A}\left(1 + \{e_1 \quad e_2\}\begin{bmatrix} i_2^2 & \\ & i_1^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}\right) = \frac{\mathrm{N}}{A}\left(1 + \frac{e_1}{i_2^2}x_1 + \frac{e_1}{i_1^2}x_2\right)$$

Para las tensiones tangenciales:

$$f(s) = \tau(s)t = \mathrm{Q}\left(\frac{S_1^*(s)}{I_1}\operatorname{sen}\beta + \frac{S_2^*(s)}{I_2}\cos\beta\right)$$

- Excentricidades en las bases (x, y); (x_1, x_2)

$$\mathbf{e}_{xy} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 - x_{CG} \\ 0 - y_{CG} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.10652 \\ -0.47826 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{12} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(18.95^\circ) & \operatorname{sen}(18.95^\circ) \\ -\operatorname{sen}(18.95^\circ) & \cos(18.95^\circ) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.25606 \\ -0.41775 \end{Bmatrix}$$

1. Cálculo de las tensiones normales σ en ejes principales (x_1, x_2)

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-24 a).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Punto**	$x_0[m]$	$y_0[m]$	$x[m]$	$y[m]$	$x_1[m]$	$x_2[m]$	$\sigma[kN/m^2]$
2	A	0.00000	0.00000	-0.10652	-0.47826	-0.25606	-0.41775	-2.7271E+04
3	B	0.30000	1.00000	0.19348	0.52174	0.35243	0.43063	2.0015E+04
4	C	0.00000	1.00000	-0.10652	0.52174	0.06868	0.52805	4.8692E+03
5	D	0.70000	0.00000	0.59348	-0.47826	0.40600	-0.64507	8.0692E+03
6	E	-0.30000	1.00000	-0.40652	0.52174	-0.21506	0.62548	-1.0276E+04
8			grados	radianes		N[kN]	-150	
9	**ángulo**	φ	18.950	0.3307		$e_1[m]$	-0.25606	
10		$x_{CG}[m]$	0.10652			$e_2[m]$	-0.41775	
11		$y_{CG}[m]$	0.47826			$i_1^2[m^2]$	0.19456	
12	**Área**	$A[m^2]$	0.02300			$i_2^2[m^2]$	0.02870	

2. Ecuación del eje neutro

En la base (x_1, x_2)

$$\sigma(x_1,x_2)=\frac{N}{A}\left(1+\frac{e_1}{i_2^2}x_1+\frac{e_1}{i_1^2}x_2\right)=0 \quad \rightarrow \quad 1-8.92231\cdot x_1-2.14709\cdot x_2=0$$

$$\boxed{x_2=0.4657-4.15553\cdot x_1}$$

En la base (x, y)

Sustituyendo $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(18.95^o) & \text{sen}(18.95^o) \\ -\text{sen}(18.95^o) & \cos(18.95^o) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ en la ecuación del eje neutro, se obtiene:

$$\boxed{0=1-7.74143\cdot x-4.92832\cdot y}$$

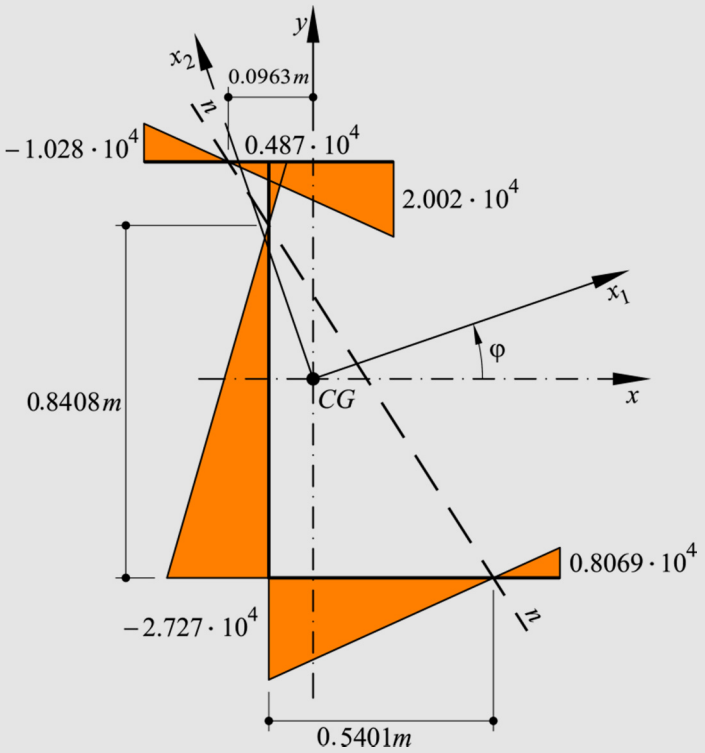
Utilizando esta ecuación se obtiene la intersección de la línea neutra con los lados de la sección en la base (x, y) y en la base (x_0, y_0),

Lado $\overline{CA}$ $\begin{cases} x = -0.10652\,m \;\rightarrow\; y = 0.37023\,m \\ x_0 = 0\,m \;\rightarrow\; y_0 = y + y_{CG} = 0.84849\,m \end{cases}$

Lado $\overline{AD}$ $\begin{cases} y = -0.47826\,m \;\rightarrow\; x = 0.43364\,m \\ x_0 = x + x_{CG} = 0.54017\,m \;\rightarrow\; y_0 = 0 \end{cases}$

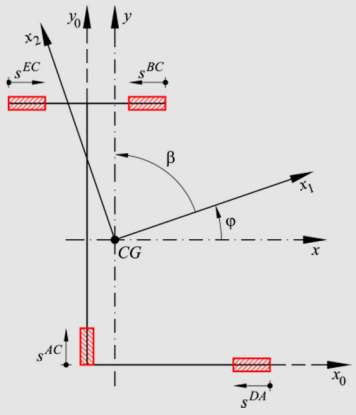
Lado $\overline{EC}$ $\begin{cases} y = 0.5515\,m \;\rightarrow\; x = -0.20282\,m \\ x_0 = x + x_{CG} = -0.0963\,m \;\rightarrow\; y_0 = 1\,m \end{cases}$

- Representación de las tensiones normales en la sección



3. Cálculo de las tensiones tangenciales, debidas a Q aplicada en el centro de cortante

- Ejes locales



- Momentos estáticos en la base (x, y)

Tramo $\overline{DA}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\big|_D^A = \left(s^{DA}t\right)\cdot\left(y_0^D - y_{CG}\right) \\ S_y^*(s)\big|_D^A = \left(s^{DA}t\right)\left(x_0^D - \dfrac{s^{DA}}{2} - x_{CG}\right) \end{cases}$$

Tramo $\overline{AC}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\big|_A^C = S_x^*\big|_D^A + \left(s^{AC}t\right)\left(y_0^A + \dfrac{s^{AC}}{2} - y_{CG}\right) \\ S_y^*(s)\big|_A^C = S_y^*\big|_D^A + \left(s^{AC}t\right)\left(x_0^A - x_{CG}\right) \end{cases}$$

Tramo $\overline{BC}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\big|_B^C = \left(s^{BC}t\right)\left(y_0^B - y_{CG}\right) \\ S_y^*(s)\big|_B^C = \left(s^{BC}t\right)\left(x_0^B - \dfrac{s^{BC}}{2} - x_{CG}\right) \end{cases}$$

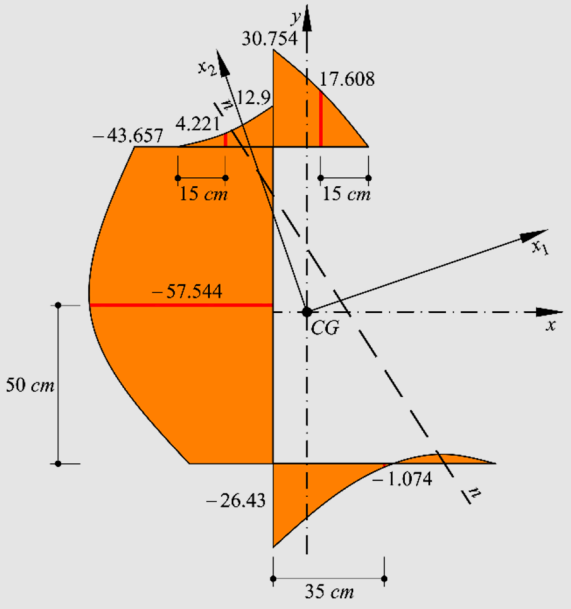
Tramo $\overline{EC}$

$$\begin{cases} S_x^*(s)\big|_E^C = \left(s^{EC}t\right)\left(y_0^E - y_{CG}\right) \\ S_y^*(s)\big|_E^C = \left(s^{EC}t\right)\left(x_0^E + \dfrac{s^{EC}}{2} - x_{CG}\right) \end{cases}$$

- Flujo de Corte

Ver Tabla con el detalle de las operaciones en Anexo Capítulo 6. Ejemplo 6-24 b).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Tramo**	**Punto**	$s[m]$	$t[m]$	$x_0[m]$	$y_0[m]$	$S_x^*[m^3]$	$S_y^*[m^3]$	$S_1^*[m^3]$	$S_2^*[m^3]$	$f(s)[kN/m]$
2	DA	D	0.000	0.010	0.700	0.000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000
3		DA/2	0.350	0.010	0.350	0.000	-0.0016739	0.0014647	-0.0020588	0.0008417	-1.0738
4		A	0.700	0.010	0.000	0.000	-0.0033478	0.0017044	-0.0037199	0.0005248	-26.4428
5	AC	A	0.000	0.010	0.000	0.000	-0.0033478	0.0017044	-0.0037199	0.0005248	-26.4428
6		AC/2	0.500	0.010	0.000	0.500	-0.0044891	0.0011718	-0.0046263	-0.0003496	-57.5438
7		C	1.000	0.010	0.000	1.000	-0.0031304	0.0006392	-0.0031683	-0.0004121	-43.6565
8	BC	B	0.000	0.010	0.300	1.000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000
9		BC/2	0.150	0.010	0.150	1.000	0.0007826	0.0001777	0.0006825	0.0004222	17.6080
10		C	0.300	0.010	0.000	1.000	0.0015652	0.0001304	0.0014380	0.0006317	30.7536
11	EC	E	0.000	0.010	-0.300	1.000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000
12		EC/2	0.150	0.010	-0.150	1.000	0.0007826	-0.0004973	0.0009017	-0.0002162	4.2209
13		C	0.300	0.010	0.000	1.000	0.0015652	-0.0007696	0.0017303	-0.0002196	12.9041
14											
15				grados	radianes						
16		**ángulos**	φ	18.950	0.3307		$Q[kN]$	50.00			
17			β	71.050	1.2401		$x_{CG}[m]$	0.10652			
18		**Momentos Principales de Inercia**	$I_1[m^4]$	4.4700E-03			$y_{CG}[m]$	0.47826			
19			$I_2[m^4]$	6.6000E-04							



6.6 Resumen de la formulación básica obtenida en el capítulo

	Corte recto en secciones macizas	
Fórmula de Collignon-Jourawski	$\tau(x_2)=\dfrac{d\mathrm{M}_1}{dx_3}\dfrac{S_1^*(x_2)}{I_1 b(x_2)}=\dfrac{\mathrm{Q}_2 S_1^*(x_2)}{I_1 b(x_2)}$	(6.12)
Coeficiente de uniformidad de corte κ	$\tau^{\max}=\dfrac{\mathrm{Q}_2}{\kappa A}=\dfrac{\mathrm{Q}_2}{\bar{A}}$	(6.14)
Estado combinado de tensiones normales y de corte	$\sigma_I=\dfrac{\sigma}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}=\dfrac{1}{2}\left(\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)$	Secc. 6.3.1.3
Energía de deformación por corte	$W=\int_\ell \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{Q}_2^2}{\hat{A}G}\,dx_3 \;\Rightarrow\; W=\int_\ell \dfrac{1}{2}\mathrm{Q}_2\,\gamma^m\,dx_3=\int_\ell \dfrac{1}{2}\mathrm{Q}_2\,dv^Q$	(6.22)
Área reducida – Factor de forma de las secciones	$\hat{A}=\left[\int_h \dfrac{S_1^{*2}(x_2)}{I_1^2 b(x_2)}dx_2\right]^{-1}=\dfrac{I_1^2}{\int_h \dfrac{S_1^{*2}(x_2)}{b(x_2)}dx_2};$ $\hat{\kappa}=\dfrac{\hat{A}}{A}$	(6.25) (6.26)
Fórmula de Collignon-Jourawski para secciones compuestas	$\tau^l(x_2)=\dfrac{\mathrm{Q}_2 G^l\sum_{i=1}^{n_i}E_i\left(S_1^*(x_2)\right)_i}{\left(\sum_{j=1}^{n_j}E_j\left(I_1\right)_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n_k}G^k b^k(x_2)\right)}$	(6.78)
	Corte recto en secciones delgadas	
Fórmula de Collignon-Jourawski	$\tau(s)=\dfrac{\mathrm{Q}_2 S_1^*(s)}{I_1 t(s)}\;\Rightarrow\; f(s)=\tau(s)\cdot t(s)=\dfrac{\mathrm{Q}_2 S_1^*(s)}{I_1}$	(6.27)
Posición del centro de corte	$d_1=\dfrac{V^{AB}h}{\mathrm{Q}_2}$	(6.47)

Flujo en secciones cerradas	$$f'(s) = f(s) + \overline{f} = \frac{Q_2 S_1^*(s)}{I_1} + - \frac{\int_c \frac{f(s)}{t(s)} ds}{\int_c \frac{ds}{t(s)}}$$	(6.63) (6.64)
Cambio de base de momentos estáticos	$$\begin{Bmatrix} S_1^* \\ S_2^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\text{sen}\varphi \\ \text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x^* \\ S_y^* \end{Bmatrix}$$	(6.68)
	Corte esviado en secciones macizas	
Fórmula de Collignon-Jourawski	$$\tau(\xi) = \frac{Q \cdot S_{nn}^*}{b(\xi)\left(\frac{I_{nn}}{\cos(\alpha - \theta)}\right)}$$	(6.85)
	Corte esviado en secciones delgadas	
Fórmula de Collignon-Jourawski	$$\tau(x_1, x_2) = \frac{dM_1}{dx_3}\frac{S_1^*(x_2)}{I_1 t} - \frac{dM_2}{dx_3}\frac{S_2^*(x_1)}{I_2 t}$$ $$\tau(x_1, x_2) = \frac{Q_2 S_1^*(x_2)}{I_1 t} + \frac{Q_1 S_2^*(x_1)}{I_2 t}$$	(6.86)

ANEXO – Capítulo 6

Tablas Complementarias: Ejemplos de Corte

En este Anexo se presentan las Tablas Complementarias con el detalle de las operaciones realizadas en cada celda de las tablas que se utilizan para obtener los resultados que se muestran en los ejemplos del Capítulo 6 de este libro.

Para mayor claridad se ordenan y designan a las diferentes tablas con el número del ejemplo al que se hace referencia en el Capítulo 6.

Ejemplo 6-13

	A	B	C	D	E	F	G
2	A	=0	=0	=B2*COS($D$11)-C2*SIN($D$11)	=B2*SIN($D$11))+C2*COS($D$11)	=0.336/$C$13*D2+0.942/$C$14*E2	=F2/1.5
3	AB/2	=(1.5*9/2)*10	=(1.5*9/2)*(-9+9/4)	=B3*COS($D$11)-C3*SIN($D$11)	=B3*SIN($D$11))+C3*COS($D$11)	=0.336/$C$13*D3+0.942/$C$14*E3	=F3/1.5
4	B	=(1.5*9)*10	=(1.5*9)*(-9+9/2)	=B4*COS($D$11)-C4*SIN($D$11)	=B4*SIN($D$11))+C4*COS($D$11)	=0.336/$C$13*D4+0.942/$C$14*E4	=F4/1.5
5	BC/2	=135+(1.5*10)*(10-10/2)	=-60.75+(1.5*10)*0	=B5*COS($D$11)-C5*SIN($D$11)	=B5*SIN($D$11))+C5*COS($D$11)	=0.336/$C$13*D5+0.942/$C$14*E5	=F5/1.5
6	C	=135+(1.5*20)*(10-20/2)	=-60.75+(1.5*20)*0	=B6*COS($D$11)-C6*SIN($D$11)	=B6*SIN($D$11))+C6*COS($D$11)	=0.336/$C$13*D6+0.942/$C$14*E6	=F6/1.5
7	CD/2	=135+(1.5*9/2)*(-10)	=-60.75+(1.5*9/2)*9/4	=B7*COS($D$11)-C7*SIN($D$11)	=B7*SIN($D$11))+C7*COS($D$11)	=0.336/$C$13*D7+0.942/$C$14*E7	=F7/1.5
8	D	=135+(1.5*9)*(-10)	=-60.75+(1.5*9)*9/2	=B8*COS($D$11)-C8*SIN($D$11)	=B8*SIN($D$11))+C8*COS($D$11)	=0.336/$C$13*D8+0.942/$C$14*E8	=F8/1.5
9							
10			grados	radianes			
11	**ángulos**	φ	19.642	=C11*PI()/180			
12		$\pi/2-\varphi$	=90-C11	=C12*PI()/180			
13	**Momentos Principales de Inercia**	I_1	4139	cm^4			
14		I_2	301	cm^4			

Ejemplo 6-14

	A	B	C	D	E
1	Punto		$S_1^*\left[cm^3\right]$	$f(s)=\frac{Q_2}{I_1}S_1^*(s)$	
2		A	0	=$D$15*C2/$D$14	
3		C	0	=$D$15*C3/$D$14	
4	B	Tramo AB	=(0.5*15)*(10)	=$D$15*C4/$D$14	
5		Tramo CB	=(0.5*5)*(10)	=$D$15*C5/$D$14	
6		Tramo BE	=75+25	=$D$15*C6/$D$14	
7		BE/2	=100+(0.5*10)*(10-10/2)	=$D$15*C7/$D$14	
8	E	Tramo BE	=100+(5*20)*(10-10)	=$D$15*C8/$D$14	
9		Tramo FE	=-((0.5*5)*(-10))	=$D$15*C9/$D$14	
10		Tramo DE	=-((0.5*15)*(-10))	=$D$15*C10/$D$14	
11		F	=0	=$D$15*C11/$D$14	
12		D	=0	=$D$15*C12/$D$14	
13					
14		**Momento Principal de Inercia**	I_1	2333.33	cm^4
15		**Esfeurzo de Corte**	Q_2	10	kN

Ejemplo 6-15

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Punto	$s\,[m]$	$r\,[m]$	$x^0\,[m]$	$y^0\,[m]$	S_x^*	$S_{y'}^*$	$S_1^* = S_x^*\cos\hat{\varphi} - S_y^*\operatorname{sen}\hat{\varphi}$	$S_2^* = S_x^*\operatorname{sen}\hat{\varphi} + S_y^*\cos\hat{\varphi}$	$f(s) = Q\left[\frac{s^3}{7}\operatorname{sen}\beta + \frac{s^4}{7}\cos\beta\right]$
2	A	0	0.01	0.15	0	=B2*C2*(E2-G14)	=B2*C2*(D2+B2/2-G13)	=F2*COS($D$13)-G2*SIN($D$13)	=F2*SIN($D$13)+G2*COS($D$13)	=200*(H2/$C$15*SIN($D$14)+I2/$C$16*COS($D$14))
3	AB/2	0.075	0.01			=B3*C3*(E2-G14)	=B3*C3*(D2+B3/2-G13)	=F3*COS($D$13)-G3*SIN($D$13)	=F3*SIN($D$13)+G3*COS($D$13)	=200*(H3/$C$15*SIN($D$14)+I3/$C$16*COS($D$14))
4	B	0.15	0.01	0.3	0	=B4*C4*(E2-G14)	=B4*C4*(D2+B4/2-G13)	=F4*COS($D$13)-G4*SIN($D$13)	=F4*SIN($D$13)+G4*COS($D$13)	=200*(H4/$C$15*SIN($D$14)+I4/$C$16*COS($D$14))
5	BC/2	0.1	0.015			=F4+B5*C5*(E4+B5/2-G14)	=G4+B5*C5*(D4-G13)	=F5*COS($D$13)-G5*SIN($D$13)	=F5*SIN($D$13)+G5*COS($D$13)	=200*(H5/$C$15*SIN($D$14)+I5/$C$16*COS($D$14))
6	C	0.2	0.015	0.3	0.2	=F4+B6*C6*(E4+B6/2-G14)	=G4+B6*C6*(D4-G13)	=F6*COS($D$13)-G6*SIN($D$13)	=F6*SIN($D$13)+G6*COS($D$13)	=200*(H6/$C$15*SIN($D$14)+I6/$C$16*COS($D$14))
7	CD/2	0.15	0.01			=F6+B7*C7*(E6-G14)	=G6+B7*C7*(D6-B7/2-G13)	=F7*COS($D$13)-G7*SIN($D$13)	=F7*SIN($D$13)+G7*COS($D$13)	=200*(H7/$C$15*SIN($D$14)+I7/$C$16*COS($D$14))
8	D	0.3	0.01	0	0.2	=F6+B8*C8*(E6-G14)	=G6+B8*C8*(D6-B8/2-G13)	=F8*COS($D$13)-G8*SIN($D$13)	=F8*SIN($D$13)+G8*COS($D$13)	=200*(H8/$C$15*SIN($D$14)+I8/$C$16*COS($D$14))
9	DE/2	0.1	0.015			=F8+B9*C9*(E8-B9/2-G14)	=G8+B9*C9*(D8-G13)	=F9*COS($D$13)-G9*SIN($D$13)	=F9*SIN($D$13)+G9*COS($D$13)	=200*(H9/$C$15*SIN($D$14)+I9/$C$16*COS($D$14))
10	E	0.2	0.015	0	0	=F8+B10*C10*(E8-B10/2-G14)	=G8+B10*C10*(D8-G13)	=F10*COS($D$13)-G10*SIN($D$13)	=F10*(SIN($D$13))+G10*COS($D$13)	=200*(H10/$C$15*SIN($D$14)+I10/$C$16*COS($D$14))
11										
12			grados	radianes						
13	ángulos	$\hat{\varphi}$	83.105	=C13*PI()/180		$x_{CG}\,[m]$	0.1607			
14		β	6.895	=C14*PI()/180		$y_{CG}\,[m]$	0.11429			
15	Momentos Principales de Inercia	I_1	0.00016921 m^4			$Q\,[kN]$	200			
16		I_2	0.00006134 m^4							

Ejemplo 6-16

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Tramo	Punto	$s\,[m]$	$t\,[m]$	$x^o\,[m]$	$y^o\,[m]$	$S_z^o\,[m^3]$	$S_y^o\,[m^3]$	$S_y^i\,[m^3]$	$S_z^i\,[m^3]$	$f'(s)=Q\left[\frac{S_z^i(s)}{I_{11}}\text{ sen }\beta+\frac{S_z^i(s)}{I_{22}}\cos\beta\right]$
2		A	0	0.03	0.2	0.4	=C2*D2*(F2-H17)	=C2*D2*(E2-C2/2-H16)	=G2*COS($E$16)-H2*SENO($E$16)	=G2*SENO($E$16)+H2*COS($E$16)	=10^(I2/$D$18*SENO($E$17)+J2/$D$19*COS($E$17))
3	AB	AB/2	0.1	0.03			=C3*D3*(F2-H17)	=C3*D3*(E2-C3/2-H16)	=G3*COS($E$16)-H3*SENO($E$16)	=G3*SENO($E$16)+H3*COS($E$16)	=10^(I3/$D$18*SENO($E$17)+J3/$D$19*COS($E$17))
4		B	0.2	0.03			=C4*D4*(F2-H17)	=C4*D4*(E2-C4/2-H16)	=G4*COS($E$16)-H4*SENO($E$16)	=G4*SENO($E$16)+H4*COS($E$16)	=10^(I4/$D$18*SENO($E$17)+J4/$D$19*COS($E$17))
5		B	0	0.03	0	0.4	=G4+C5*D5*(F5-C5/2-H17)	=H4+C5*D5*(E5-H16)	=G5*COS($E$16)-H5*SENO($E$16)	=G5*SENO($E$16)+H5*COS($E$16)	=10^(I5/$D$18*SENO($E$17)+J5/$D$19*COS($E$17))
6	BC	BC/2	0.2	0.03			=G4+C6*D6*(F5-C6/2-H17)	=H4+C6*D6*(E5-H16)	=G6*COS($E$16)-H6*SENO($E$16)	=G6*SENO($E$16)+H6*COS($E$16)	=10^(I6/$D$18*SENO($E$17)+J6/$D$19*COS($E$17))
7		C	0.4	0.03			=G4+C7*D7*(F5-C7/2-H17)	=H4+C7*D7*(E5-H16)	=G7*COS($E$16)-H7*SENO($E$16)	=G7*SENO($E$16)+H7*COS($E$16)	=10^(I7/$D$18*SENO($E$17)+J7/$D$19*COS($E$17))
8		C	0	0.03	0	0	=G7+C8*D8*(F8-H17)	=H7+C8*D8*(E8-C8/2-H16)	=G8*COS($E$16)-H8*SENO($E$16)	=G8*SENO($E$16)+H8*COS($E$16)	=10^(I8/$D$18*SENO($E$17)+J8/$D$19*COS($E$17))
9	CD	CD/2	0.1	0.03			=G7+C9*D9*(F8-H17)	=H7+C9*D9*(E8+C9/2-H16)	=G9*COS($E$16)-H9*SENO($E$16)	=G9*SENO($E$16)+H9*COS($E$16)	=10^(I9/$D$18*SENO($E$17)+J9/$D$19*COS($E$17))
10		D	0.2	0.03			=G7+C10*D10*(F8-H17)	=H7+C10*D10*(E8+C10/2-H16)	=G10*COS($E$16)-H10*SENO($E$16)	=G10*SENO($E$16)+H10*COS($E$16)	=10^(I10/$D$18*SENO($E$17)+J10/$D$19*COS($E$17))
11		D	0	0.03	0.2	0	=G10+C11*D11*(F11+C11/2-H17)	=H10+C11*D11*(E11-H16)	=G11*COS($E$16)-H11*SENO($E$16)	=G11*SENO($E$16)+H11*COS($E$16)	=10^(I11/$D$18*SENO($E$17)+J11/$D$19*COS($E$17))
12	DE	DE/2	0.05	0.03			=G10+C12*D12*(F11+C12/2-H17)	=H11+C12*D12*(E11-H16)	=G12*COS($E$16)-H12*SENO($E$16)	=G12*SENO($E$16)+H12*COS($E$16)	=10^(I12/$D$18*SENO($E$17)+J12/$D$19*COS($E$17))
13		E	0.1	0.03			=G10+C13*D13*(F11+C13/2-H17)	=H10+C13*D13*(E11-H16)	=G13*COS($E$16)-H13*SENO($E$16)	=G13*SENO($E$16)+H13*COS($E$16)	=10^(I13/$D$18*SENO($E$17)+J13/$D$19*COS($E$17))
14											
15					grados	radianes					
16		ángulos	φ		6.238	=D16*PI()/180	$x_{CG}\,[m]$	0.06666667			
17			β		83.762	=D17*PI()/180	$y_{CG}\,[m]$	0.1833333			
18		Momentos Principales de Inercia	I_{11}		0.0007093	m^4	$Q\,[kN]$	10			
19			I_{22}		0.0001544	m^4					

Ejemplo 6-17

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Tramo	Punto	$s\,[m]$	$t\,[m]$	$x^0\,[m]$	$y^0\,[m]$	$S_x^* = S_1^*\,[m^3]$	$S_y^* = S_2^*\,[m^3]$	$f(s) = Q\left(\frac{S_1^*}{I_{11}}\right)$
2	AB/2;B	AB/2	0	0.03	0.1	0.4	=C2*D2*(F2-G11)	=C2*D2*(E2-C2/2-G10)	=$G$12*(G2/$D$10)
3		AB/4	0.05	0.03			=C3*D3*(F2-G11)	=C3*D3*(E2-C3/2-G10)	=$G$12*(G3/$D$10)
4		B	0.1	0.03			=C4*D4*(F2-G11)	=C4*D4*(E2-C4/2-G10)	=$G$12*(G4/$D$10)
5	B;BC/2	B	0	0.03	0	0.4	=G4+C5*D5*(F5-C5/2-G11)	=H4+C5*D5*(E5-G10)	=$G$12*(G5/$D$10)
6		BC/4	0.1	0.03			=G4+C6*D6*(F5-C6/2-G11)	=H4+C6*D6*(E5-G10)	=$G$12*(G6/$D$10)
7		BC/2	0.2	0.03			=G4+C7*D7*(F5-C7/2-G11)	=H4+C7*D7*(E5-G10)	=$G$12*(G7/$D$10)
8									
9									
10		Momentos Principales de Inercia	$I_{11}\,[m^4]$	0.0008009			$x_{CG}\,[m]$	0.1	
11			$I_{22}\,[m^4]$	0.0002818			$y_{CG}\,[m]$	0.2	
12							$Q\,[kN]$	10	

Ejemplo 6-18

	A	B	C	D	E	F	G
1	Tramo	Punto	$s\,[m]$	$t\,[m]$	$S_x^* = S_1^*\,[m^3]$	$f(s) = Q_2 \frac{S_1^*}{I_{11}}$	$V = \frac{\ell}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
2	G'G	G'	0	0.012	=C2*D2*0.35	=$G$16*E2/$D$16	
3		G'G/2	=0.15/2	0.012	=C3*D3*0.35	=$G$16*E3/$D$16	
4		G	0.15	0.012	=C4*D4*0.35	=$G$16*E4/$D$16	=C4/6*(F2+4*F3+F4)
5	GE	G	0	0.012	=E4+C5*D5*(0.35-C5/2)	=$G$16*E5/$D$16	
6		GE/2	=0.2/2	0.012	=E4+C6*D6*(0.35-C6/2)	=$G$16*E6/$D$16	
7		E	0.2	0.012	=E4+C7*D7*(0.35-C7/2)	=$G$16*E7/$D$16	=C7/6*(F5+4*F6+F7)
8	E'E	E'	0	0.012	=0+C8*D8*0.15	=$G$16*E8/$D$16	
9		E'E/2	=0.15/2	0.012	=0+C9*D9*0.15	=$G$16*E9/$D$16	
10		E	0.15	0.012	=0+C10*D10*0.15	=$G$16*E10/$D$16	=C10/6*(F8+4*F9+F10)
11	E'EC/2	E	0	0.012	=E7+E10+C11*D11*(0.15-C11/2)	=$G$16*E11/$D$16	
12		EC/2	0.15	0.012	=E7+E10+C12*D12*(0.15-C12/2)	=$G$16*E12/$D$16	
13		C	0.3	0.012	=E7+E10+C13*D13*(0.15-C13/2)	=$G$16*E13/$D$16	=C13/6*(F11+4*F12+F13)
14							
15							
16		Momentos Principales de Inercia	$I_{11}\,[m^4]$	0.00173		$Q\,[kN]$	500
17			$I_{22}\,[m^4]$	0.000738			

Ejemplo 6-19

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Tramo	Punto	$s[m]$	$t[m]$	$S_1^*\left[m^3\right]$	$\frac{f(s)}{Q_2}=\frac{S_1^*(s)}{I_{11}}$	$\frac{V}{Q_2}=\frac{1}{Q_2}\frac{\ell_{ij}}{6}\left(f_i+4f_{ij/2}+f_j\right)$	$\frac{\tau(s)}{Q_2}$
2	AB	A	0	0.002	=C2*D2*0.1	=E2/$D$19		=F2/D2
3		AB/2	=0.05/2	0.002	=C3*D3*0.1	=E3/$D$19		=F3/D3
4		B	0.05	0.002	=C4*D4*0.1	=E4/$D$19	=C4/6*(F2+4*F3+F4)	=F4/D4
5	BC	B	0	0.002	=E4+C5*D5*(0.1-C5/2)	=E5/$D$19		=F5/D5
6		BC/2	=0.1/2	0.002	=E4+C6*D6*(0.1-C6/2)	=E6/$D$19		=F6/D6
7		C	0.1	0.002	=E4+C7*D7*(0.1-C7/2)	=E7/$D$19	=C7/6*(F5+4*F6+F7)	=F7/D7
8	DC	D	0	0.002	=C8*D8*0	=E8/$D$19		=F8/D8
9		DC/2	=0.1/2	0.002	=C9*D9*0	=E9/$D$19		=F9/D9
10		C	0.1	0.002	=C10*D10*0	=E10/$D$19	=C10/6*(F8+4*F9+F10)	=F10/D10
11	CE	C	0	0.002	=E7+E10+C11*D11*(-C11/2)	=E11/$D$19		=F11/D11
12		CE/2	=0.1/2	0.002	=E7+E10+C12*D12*(-C12/2)	=E12/$D$19		=F12/D12
13		E	0.1	0.002	=E7+E10+C13*D13*(-C13/2)	=E13/$D$19	=C13/6*(F11+4*F12+F13)	=F13/D13
14	EF	E	0	0.002	=E13+C14*D14*(-0.1)	=E14/$D$19		=F14/D14
15		EF/2	=0.05/2	0.002	=E13+C15*D15*(-0.1)	=E15/$D$19		=F15/D15
16		F	0.05	0.002	=E13+C16*D16*(-0.1)	=E16/$D$19	=C16/6*(F14+4*F15+F16)	=F16/D16
17								
18								
19		Momentos Principales de Inercia	$I_{11}\left[m^4\right]$	0.000006666				
20								

Ejemplo 6-20

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Tramo	Punto	$s[m]$	$t[m]$	$S_x^*\left[m^3\right]$	$S_y^*\left[m^3\right]$	$S_1^*\left[m^3\right]$	$S_2^*\left[m^3\right]$	$f(s)=\frac{S_1^*}{I_{11}}Q_2+\frac{S_2^*}{I_{22}}Q_1$
2	CB	C	0	0.01	=C2*D2*0.125	=C2*D2*(0.375-C2/2)	=E2*COS($E$10)-F2*SENO($E$10)	=E2*(SENO($E$10))+F2*COS($E$10)	=G2/$D$12*H12+H2/$D$13*H11
3		CB/2	0.25	0.01	=C3*D3*0.125	=C3*D3*(0.375-C3/2)	=E3*COS($E$10)-F3*SENO($E$10)	=E3*(SENO($E$10))+F3*COS($E$10)	=G3/$D$12*H12+H3/$D$13*H11
4		C	0.5	0.01	=C4*D4*0.125	=C4*D4*(0.375-C4/2)	=E4*COS($E$10)-F4*SENO($E$10)	=E4*(SENO($E$10))+F4*COS($E$10)	=G4/$D$12*H12+H4/$D$13*H11
5	BA	B	0	0.01	=E4+C5*D5*(0.125-C5/2)	=F4+C5*D5*(-0.125)	=E5*COS($E$10)-F5*SENO($E$10)	=E5*(SENO($E$10))+F5*COS($E$10)	=G5/$D$12*H12+H5/$D$13*H11
6		BA/2	0.25	0.01	=E4+C6*D6*(0.125-C6/2)	=F4+C6*D6*(-0.125)	=E6*COS($E$10)-F6*SENO($E$10)	=E6*(SENO($E$10))+F6*COS($E$10)	=G6/$D$12*H12+H6/$D$13*H11
7		A	0.5	0.01	=E4+C7*D7*(0.125-C7/2)	=F4+C7*D7*(-0.125)	=E7*COS($E$10)-F7*SENO($E$10)	=E7*(SENO($E$10))+F7*COS($E$10)	=G7/$D$12*H12+H7/$D$13*H11
8									
9				grados	radianes				
10		ángulos	φ	-45	=D10*PI()/180		$Q\left[kN\right]$	145	
11			β	45	=D11*PI()/180		$Q_1\left[kN\right]$	=-H10*SENO(E11)	
12		Momentos Principales de Inercia	I_{11}	0.00041670	m^4		$Q_2\left[kN\right]$	=H10*COS(E11)	
13			I_{22}	0.00010420	m^4				

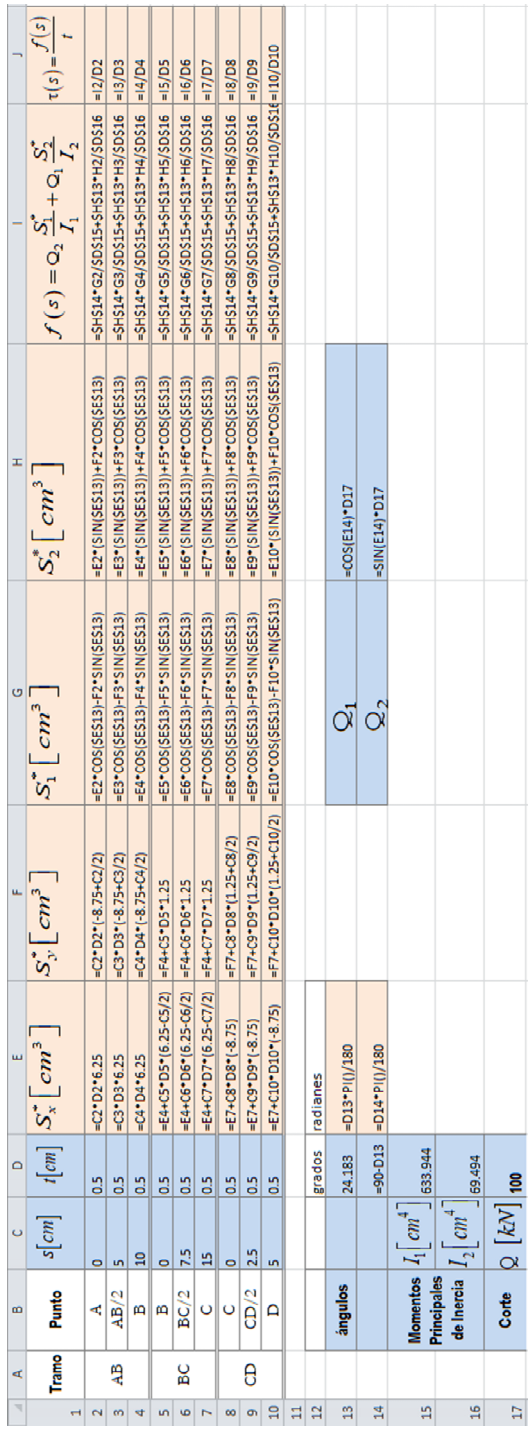
Ejemplo 6-21

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Tramo**	**Punto**	$s\,[cm]$	$t\,[cm]$	$S_x^*\,[cm^3]$	$f(s)=Q\frac{S_x^*}{I_{xx}}$	$\tau=\frac{f}{t}$
2	EA	E	0	1	=C2*D2*(-10.90909)	=E2/$D$15*$D$17	=F2/D2
3		EA/2	2.5	1	=C3*D3*(-10.90909)	=E3/$D$15*$D$17	=F3/D3
4		A	5	1	=C4*D4*(-10.90909)	=E4/$D$15*$D$17	=F4/D4
5	FA	F	0	1	=C5*D5*(-10.90909)	=E5/$D$15*$D$17	=F5/D5
6		FA/2	2.5	1	=C6*D6*(-10.90909)	=E6/$D$15*$D$17	=F6/D6
7		A	5	1	=C7*D7*(-10.90909)	=E7/$D$15*$D$17	=F7/D7
8	AB	A	0	1.5	=E7+E4+C8*D8*(-C8/2)	=E8/$D$15*$D$17	=F8/D8
9		D	10.91	1.5	=E7+E4+C9*D9*(C9/2-10.90909)	=E9/$D$15*$D$17	=F9/D9
10		B	20	1.5	=E7+E4+C10*D10*(C10/2-10.90909)	=E10/$D$15*$D$17	=F10/D10
11	BC	B	0	1	=E10+C11*D11*(9.0909)	=E11/$D$15*$D$17	=F11/D11
12		BC/2	7.5	1	=E10+C12*D12*(9.0909)	=E12/$D$15*$D$17	=F12/D12
13		C	15	1	=E10+C13*D13*(9.0909)	=E13/$D$15*$D$17	=F13/D13
14							
15		**Momentos Principales de Inercia**	$I_{xx}\,[cm^4]$	6909			
16							
17			$Q\,[kN]$	200			

Ejemplo 6-22

	A	B	C	D	E	F	G
1	Tramo	Punto	$s\,[cm]$	$t\,[cm]$	$S_x^*\,[cm^3]$	$\frac{f(s)}{Q} = \frac{S_x^*}{I_{xx}}$	$\frac{\tau}{Q} = \frac{f}{Q \cdot t}$
2	AB	A	0	0.5	=C2*D2*4	=E2/$D$15	=F2/D2
3		AB/2	5	0.5	=C3*D3*4	=E3/$D$15	=F3/D3
4		B	10	0.5	=C4*D4*4	=E4/$D$15	=F4/D4
5	CB	C	0	0.5	=C5*D5*4	=E5/$D$15	=F5/D5
6		CB/2	5	0.5	=C6*D6*4	=E6/$D$15	=F6/D6
7		C	10	0.5	=C7*D7*4	=E7/$D$15	=F7/D7
8	ED	E	0	0.5	=C8*D8*(-6)	=E8/$D$15	=F8/D8
9		ED/2	5	0.5	=C9*D9*(-6)	=E9/$D$15	=F9/D9
10		D	10	0.5	=C10*D10*(-6)	=E10/$D$15	=F10/D10
11	DB	D	0	1	=E10+C11*D11*(C11/2-6)	=E11/$D$15	=F11/D11
12		F	5	1	=E10+C12*D12*(C12/2-6)	=E12/$D$15	=F12/D12
13		B	10	1	=E10+C13*D13*(C13/2-6)	=E13/$D$15	=F13/D13
14							
15	**Momentos Principales de Inercia**		$I_{xx}\,[cm^4]$	866.666666			
16							

Ejemplo 6-23



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Tramo	Punto	$s\,[cm]$	$t\,[cm]$	$S_x^*\,[cm^3]$	$S_y^*\,[cm^3]$	$S_1^*\,[cm^3]$	$S_2^*\,[cm^3]$	$f(s)=Q_2\frac{S_1^*}{I_1}+Q_1\frac{S_2^*}{I_2}$	$\tau(s)=\frac{f(s)}{t}$
2	AB	A	0	0.5	=C2*D2*6.25	=C2*D2*(-8.75+C2/2)	=E2*COS($E$13)-F2*SIN($E$13)	=E2*(SIN($E$13))+F2*COS($E$13)	=$H$14*G2/$D$15+$H$13*H2/$D$16	=I2/D2
3		AB/2	5	0.5	=C3*D3*6.25	=C3*D3*(-8.75+C3/2)	=E3*COS($E$13)-F3*SIN($E$13)	=E3*(SIN($E$13))+F3*COS($E$13)	=$H$14*G3/$D$15+$H$13*H3/$D$16	=I3/D3
4		B	10	0.5	=C4*D4*6.25	=C4*D4*(-8.75+C4/2)	=E4*COS($E$13)-F4*SIN($E$13)	=E4*(SIN($E$13))+F4*COS($E$13)	=$H$14*G4/$D$15+$H$13*H4/$D$16	=I4/D4
5	BC	B	0	0.5	=E4+C5*D5*(6.25-C5/2)	=F4+C5*D5*1.25	=E5*COS($E$13)-F5*SIN($E$13)	=E5*(SIN($E$13))+F5*COS($E$13)	=$H$14*G5/$D$15+$H$13*H5/$D$16	=I5/D5
6		BC/2	7.5	0.5	=E4+C6*D6*(6.25-C6/2)	=F4+C6*D6*1.25	=E6*COS($E$13)-F6*SIN($E$13)	=E6*(SIN($E$13))+F6*COS($E$13)	=$H$14*G6/$D$15+$H$13*H6/$D$16	=I6/D6
7		C	15	0.5	=E4+C7*D7*(6.25-C7/2)	=F4+C7*D7*1.25	=E7*COS($E$13)-F7*SIN($E$13)	=E7*(SIN($E$13))+F7*COS($E$13)	=$H$14*G7/$D$15+$H$13*H7/$D$16	=I7/D7
8	CD	C	0	0.5	=E7+C8*D8*(-8.75)	=F7+C8*D8*(1.25+C8/2)	=E8*COS($E$13)-F8*SIN($E$13)	=E8*(SIN($E$13))+F8*COS($E$13)	=$H$14*G8/$D$15+$H$13*H8/$D$16	=I8/D8
9		CD/2	2.5	0.5	=E7+C9*D9*(-8.75)	=F7+C9*D9*(1.25+C9/2)	=E9*COS($E$13)-F9*SIN($E$13)	=E9*(SIN($E$13))+F9*COS($E$13)	=$H$14*G9/$D$15+$H$13*H9/$D$16	=I9/D9
10		D	5	0.5	=E7+C10*D10*(-8.75)	=F7+C10*D10*(1.25+C10/2)	=E10*COS($E$13)-F10*SIN($E$13)	=E10*(SIN($E$13))+F10*COS($E$13)	=$H$14*G10/$D$15+$H$13*H10/$D$16	=I10/D10
11										
12				grados	radianes					
13		ángulos		24.183	=D13*PI()/180		Q_1	=COS(E14)*D17		
14				=90-D13	=D14*PI()/180		Q_2	=SIN(E14)*D17		
15		Momentos Principales de Inercia	$I_1\,[cm^4]$	633.944						
16			$I_2\,[cm^4]$	69.494						
17		Corte	$Q\,[kN]$	100						

Ejemplo 6-24 a)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Punto	$x_0\,[m]$	$y_0\,[m]$	$x\,[m]$	$y\,[m]$	$x_1 = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi$	$x_2 = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$	$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_1}{i_2^2}x_1 + \frac{e_2}{i_1^2}x_2\right)$
2	A	0	0	=B2-$C$10	=C2-$C$11	=D2*COS($D$9)+E2*SIN($D$9)	=-D2*SIN($D$9)+E2*COS($D$9)	=$G$8/$C$12*(1+$G$9/$G$12*F2+$G$10/$G$11*G2)
3	B	0.3	1	=B3-$C$10	=C3-$C$11	=D3*COS($D$9)+E3*SIN($D$9)	=-D3*SIN($D$9)+E3*COS($D$9)	=$G$8/$C$12*(1+$G$9/$G$12*F3+$G$10/$G$11*G3)
4	C	0	1	=B4-$C$10	=C4-$C$11	=D4*COS($D$9)+E4*SIN($D$9)	=-D4*SIN($D$9)+E4*COS($D$9)	=$G$8/$C$12*(1+$G$9/$G$12*F4+$G$10/$G$11*G4)
5	D	0.7	0	=B5-$C$10	=C5-$C$11	=D5*COS($D$9)+E5*SIN($D$9)	=-D5*SIN($D$9)+E5*COS($D$9)	=$G$8/$C$12*(1+$G$9/$G$12*F5+$G$10/$G$11*G5)
6	E	-0.3	1	=B6-$C$10	=C6-$C$11	=D6*COS($D$9)+E6*SIN($D$9)	=-D6*SIN($D$9)+E6*COS($D$9)	=$G$8/$C$12*(1+$G$9/$G$12*F6+$G$10/$G$11*G6)
7								
8			grados	radianes		$N\,[kN]$	-150	
9	ángulo		18.95	=C9*PI()/180		$e_1\,[m]$	-0.25606	
10		$x_{CG}\,[m]$	0.10652			$e_2\,[m]$	-0.41775	
11		$y_{CG}\,[m]$	0.47826			$i_1^2\,[m^2]$	0.19456	
12	Área	$A\,[m^2]$	0.023			$i_2^2\,[m^2]$	0.0287	

Ejemplo 6-24 b)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Tramo	Punto	$s\,[m]$	$t\,[m]$	$x_0\,[m]$	$y_0\,[m]$	$S_x^*\left[m^3\right]$	$S_y^*\left[m^3\right]$	$S_1^*\left[m^3\right]$	$S_2^*\left[m^3\right]$	$\mathcal{J}(s)=Q\left(\frac{S_1^*}{I_1}\operatorname{sen}\beta+\frac{S_2^*}{I_2}\cos\beta\right)$
2		D	0	0.01	0.7	0	=C2*D2^3/12+E2^2*C2*F2-$H$18*$H$17)	=C2*D2*(E2+C2/2-$H$18)^2+D2^3*C2/12-$H$17)	=G2*COS($E$16)-H2*SIN($E$16)	=G2*(SIN($E$16))+H2*COS($E$16)	=$H$16*(I2/$D$19*SIN($E$17)+J2/$D$19*COS($E$17))
3	DA	DA/2	0.35	0.01	0.35	0	=C3*D3^3/12+E3^2*C3*F3-$H$18*$H$17)	=C3*D3*(E3+C3/2-$H$18)^2+D3^3*C3/12-$H$17)	=G3*COS($E$16)-H3*SIN($E$16)	=G3*(SIN($E$16))+H3*COS($E$16)	=$H$16*(I3/$D$19*SIN($E$17)+J3/$D$19*COS($E$17))
4		A	0.7	0.01	0	0	=C4*D4^3/12+E4^2*C4*F4-$H$18*$H$17)	=C4*D4*(E4+C4/2-$H$18)^2+D4^3*C4/12-$H$17)	=G4*COS($E$16)-H4*SIN($E$16)	=G4*(SIN($E$16))+H4*COS($E$16)	=$H$16*(I4/$D$19*SIN($E$17)+J4/$D$19*COS($E$17))
5		A	0	0.01	0	0	=G4+C5^3/12+E5^2*C5-$H$18)	=H4+C5*D5^3/12+E5^2*C5-$H$18)	=G5*COS($E$16)-H5*SIN($E$16)	=G5*(SIN($E$16))+H5*COS($E$16)	=$H$16*(I5/$D$19*SIN($E$17)+J5/$D$19*COS($E$17))
6	AC	AC/2	0.5	0.01	0	0.5	=G4+C6^3/12+F6^2*C6-$H$18)	=H4+C6*D6^3/12+E6^2*C6-$H$18)	=G6*COS($E$16)-H6*SIN($E$16)	=G6*(SIN($E$16))+H6*COS($E$16)	=$H$16*(I6/$D$19*SIN($E$17)+J6/$D$19*COS($E$17))
7		C	1	0.01	0	1	=G4+C7^3/12+F7^2*C7-$H$18)	=H4+C7*D7^3/12+E7^2*C7-$H$18)	=G7*COS($E$16)-H7*SIN($E$16)	=G7*(SIN($E$16))+H7*COS($E$16)	=$H$16*(I7/$D$19*SIN($E$17)+J7/$D$19*COS($E$17))
8		B	0	0.01	0.3	1	=C8^D8^3/12+E8^2*C8-$H$18)	=C8*D8*(E8+C8/2-$H$18)^2+D8^3*C8/12-$H$17)	=G8*COS($E$16)-H8*SIN($E$16)	=G8*(SIN($E$16))+H8*COS($E$16)	=$H$16*(I8/$D$19*SIN($E$17)+J8/$D$19*COS($E$17))
9	BC	BC/2	0.15	0.01	0.15	1	=C9^D9^3/12+F9^2*C9-$H$18)	=C9*D9^3/12+E9^2*C9-$H$18)	=G9*COS($E$16)-H9*SIN($E$16)	=G9*(SIN($E$16))+H9*COS($E$16)	=$H$16*(I9/$D$19*SIN($E$17)+J9/$D$19*COS($E$17))
10		C	0.3	0.01	0	1	=C10^D10^3/12+F10^2*C10-$H$18)	=C10*D10^3/12+E10^2*C10-$H$18)	=G10*COS($E$16)-H10*SIN($E$16)	=G10*(SIN($E$16))+H10*COS($E$16)	=$H$16*(I10/$D$19*SIN($E$17)+J10/$D$19*COS($E$17))
11	EC	E	0	0.01	-0.3	1	=C11^D11^3/12+F11^2*C11-$H$18)	=C11*D11^3/12+E11^2*C11-$H$18)	=G11*COS($E$16)-H11*SIN($E$16)	=G11*(SIN($E$16))+H11*COS($E$16)	=$H$16*(I11/$D$19*SIN($E$17)+J11/$D$19*COS($E$17))
12		EC/2	0.15	0.01	-0.15	1	=C12^D12^3/12+F12^2*C12-$H$18)	=C12*D12^3/12+E12^2*C12-$H$18)	=G12*COS($E$16)-H12*SIN($E$16)	=G12*(SIN($E$16))+H12*COS($E$16)	=$H$16*(I12/$D$19*SIN($E$17)+J12/$D$19*COS($E$17))
13		C	0.3	0.01	0	1	=C13^D13^3/12+F13^2*C13-$H$18)	=C13*D13^3/12+E13^2*C13-$H$18)	=G13*COS($E$16)-H13*SIN($E$16)	=G13*(SIN($E$16))+H13*COS($E$16)	=$H$16*(I13/$D$19*SIN($E$17)+J13/$D$19*COS($E$17))
14											
15				grados	radianes						
16		ángulos	φ	18.95	=D16*PI()/180		$Q\,[kN]$	50			
17			β	=90-18.95	=D17*PI()/180		$x_{cg}\,[m]$	0.10652			
18		Momentos Principales de Inercia	$I_1\,[m^4]$	0.00447			$y_{cg}\,[m]$	0.47826			
19			$I_2\,[m^4]$	0.00066							

Capítulo 7

Momento Torsor
Torsión Uniforme

7.1 Introducción al problema de torsión

Una pieza prismática está sometida a torsión, cuando al reducir el sistema de fuerzas exteriores al centro geométrico de una sección transversal cualquiera de la pieza (o al centro mecánico en el caso de secciones mixtas), resulta un momento torsor M_T. Si sólo actúa este momento torsor en la sección transversal de la pieza – libre de flexión, cortante y normal –, se dice que el problema es de torsión pura[1].

7.1.1 Ley de distribución del esfuerzo de torsión en una barra

El cálculo y distribución del esfuerzo de torsión en una barra recta –ley de momentos torsores– constituye un problema que en muchos casos es hiperestático. Una forma simple de calcular la distribución de este esfuerzo es mediante un símil entre el esfuerzo de torsión y el esfuerzo cortante producido por una carga ficticia de magnitud equivalente al módulo del momento torsor (ver Tabla 7.1).

---

[1] J. M. Gere. *Timoshenko - Resistencia de materiales*. Editorial Internacional Thomson Editores Spain Paraninfo. Madrid, 2002.

Esta forma simple de proceder, mediante una analogía entre la ley del cortante y la ley del torsor, permite calcular la ley de distribución del momento torsor en una barra y será utilizada como complemento de las leyes de esfuerzo ya estudiadas en el Capítulo 3 (Estructuras isostáticas: Leyes de esfuerzo).

La relación entre el momento torsor y el giro relativo –*ángulo de torsión específico*– entre dos secciones transversales adyacentes fue estudiado por primera vez por Coulomb en el año 1784, pero su análisis sólo se centró en barras cilíndricas. Fue luego, en 1855, cuando Saint Venant extendió la formulación de torsión a barras de secciones transversales cualesquiera (rectangular, elíptica, etc.), siempre que se cumpla la condición de *torsión uniforme* a lo largo del eje de la barra. Esta última teoría permite predecir la relación entre la *tensión tangencial* τ, la *distorsión angular* γ, el *momento torsor* M_T y el ángulo *de torsión específica* θ para secciones de forma cualesquiera.

La teoría de Coulomb se basa en que las secciones transversales no se alabean (situación de cumplimiento estricto en barras cilíndricas), mientras que la de Saint Venant ha sido establecida bajo el supuesto de que las secciones se alabean, pero todas uniformemente y libremente. El alabeo en las secciones no-circulares/anulares ocurre como consecuencia de los fuertes gradientes de tensión que hacen que la sección pierda la planaridad. Si el alabeo relativo entre todas las secciones a lo largo del eje de la pieza es constante, podría utilizarse la teoría de Saint Venant sin grandes errores en una gran cantidad de problemas de la ingeniería. El cumplimiento de esta hipótesis se consigue cuando la torsión es uniforme a lo largo del eje longitudinal de la barra. En el caso que esto no se cumpla y ocurra un momento torsor variable a lo largo de la pieza o se tengan secciones transversales restringidas de alabearse, será necesario abordar el estudio del problema mediante una teoría general establecida a partir de la Teoría de la Elasticidad[2], pero que excede del tratamiento de la resistencia de materiales que aquí se está haciendo.

Para comenzar el estudio del comportamiento a torsión de las barras, primeramente se tratará la torsión en piezas cilíndricas y luego se presentará la generalización de Saint Venant para piezas sometidas a *torsión uniforme* (sin alabeo relativo entre secciones de la misma pieza).

---

[2] S. P Timoshenko, and J. N Goodier. *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, 1970

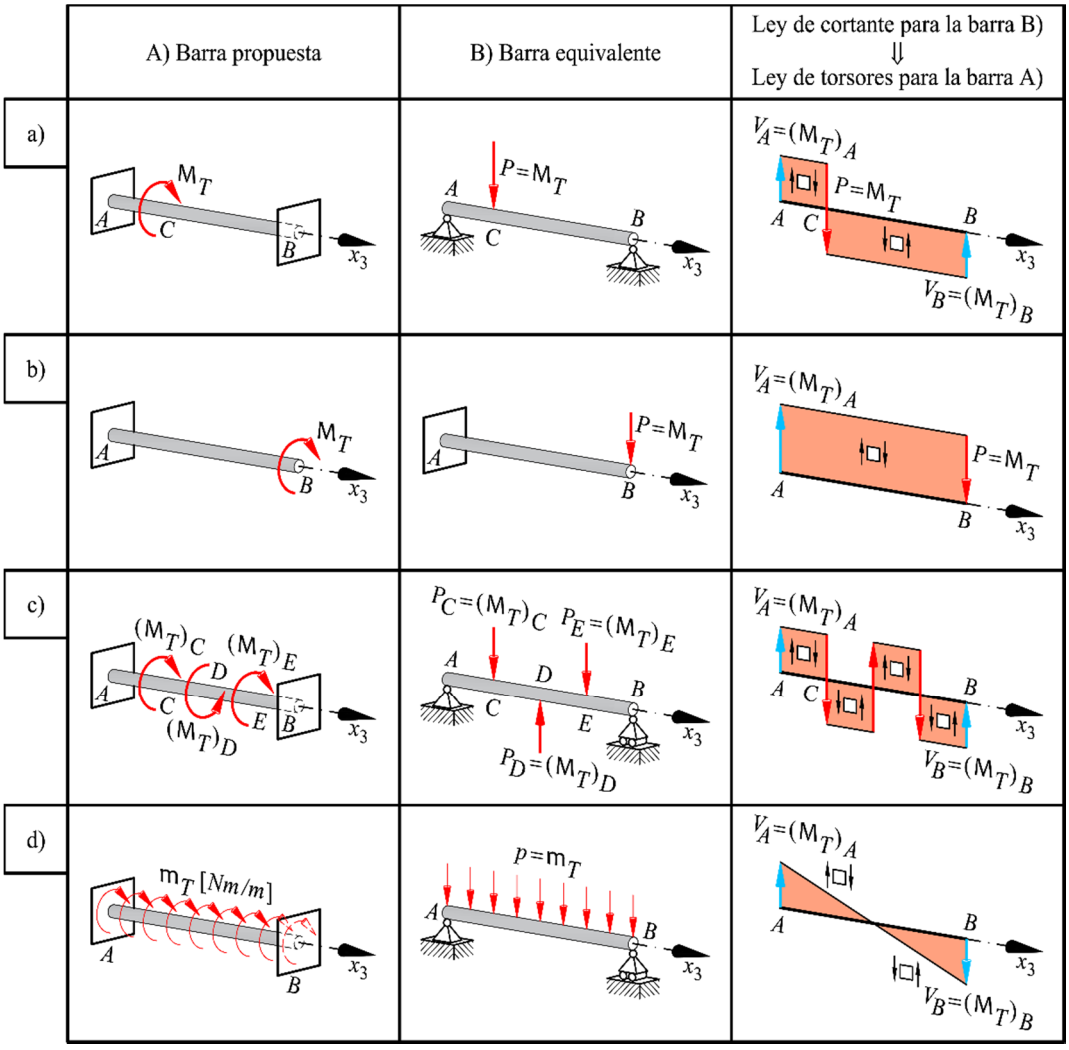


Tabla 7.1 – Leyes de momentos torsores obtenidas a partir de la "barra equivalente". Notar que sólo hay torsión uniforme en tramos de las piezas a), b) y c), siempre lo suficientemente alejados de las condiciones de contorno impuestas (apoyos y/o cargas).

7.2 Teoría de torsión para piezas cilíndricas

7.2.1 Introducción

Como se comentó, este problema fue estudiado por primera vez por Coulomb (1784). Se considera torsión constante a lo largo de toda la barra cilíndrica. Es decir, la barra está sometida a dos pares extremos iguales y de sentido contrario. Al actuar el momento torsor M_T se produce un giro relativo entre las dos caras extremas y cada sección genérica $s-s$ experimenta también un cierto giro (ver Figura 7.1).

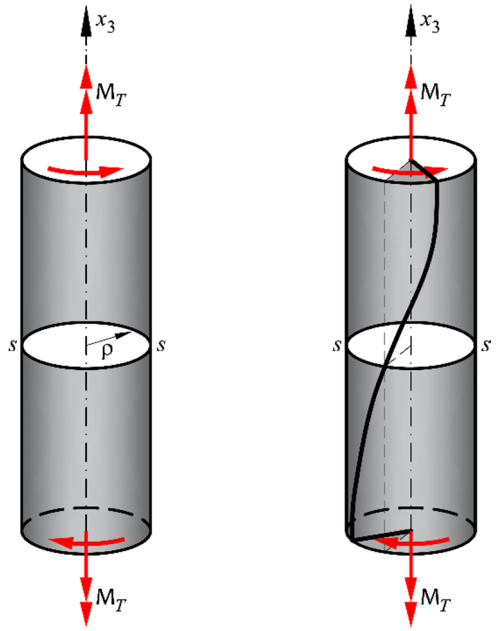


Figura 7.1 – Barra cilíndrica sometida a torsión y su deformación.

Para abordar el estudio de este problema es necesario admitir las siguientes hipótesis básicas establecidas por Coulomb:

1. Toda sección circular plana y normal al eje de la pieza gira por acción de la torsión respecto de su respectivo centro.
2. Toda sección circular plana y normal al eje de la pieza se conserva plana y circular después de la deformación.

3. Todo radio trazado en una sección cualquiera, se conserva recto después de la deformación.

Estas tres hipótesis podrían entenderse con más claridad si el lector se imaginara que la barra cilíndrica está conformada por una pila de discos, que giran uno respecto de otro sólo impedido por la fricción desarrollada entre sus caras.

Esta teoría puede demostrarse mediante razonamientos geométricos que se expondrán a continuación y es estrictamente exacta en concordancia con la teoría de la elasticidad.

7.2.2 Estado de deformación de la barra

Cortando una rebanada diferencial de la barra cilíndrica de la Figura 7.1 y estudiando las relaciones geométricas que resultan del giro entre las dos secciones distanciadas dx_3 (ver Figura 7.2), se obtiene la expresión que relaciona la *distorsión superficial cilíndrica* γ, provocada por el *giro absoluto* ψ de una sección respecto de otra, y el *ángulo de torsión unitario* o *ángulo de torsión específico* por unidad de longitud θ. Esto es,

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{ds}{dx_3} \\ ds &= \rho \cdot d\psi \end{aligned}\right\} \quad \gamma = \rho \cdot \underbrace{\frac{d\psi}{dx_3}}_{\theta} = \rho \cdot \theta \tag{7.1}$$

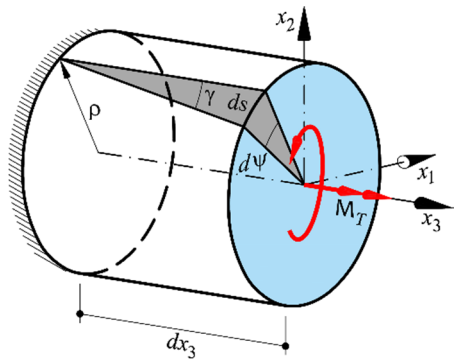


Figura 7.2 – Estado de deformación en una rebanada de barra cilíndrica, sometida a torsión.

7.2.3 Estado de tensión y equilibrio de la barra

En la Figura 7.3 se observa la rebanada de longitud dx_3 sometida a la acción del momento torsor M_T. Si sobre la sección transversal se aísla un punto a través de un elemento diferencial de área, la tensión tangencial τ en este elemento diferencial es compatible con las condiciones de borde de la barra, es decir tangente a la curva que define el contorno. A partir de la descomposición de la tensión τ en las direcciones principales (x_1, x_2), resulta el siguiente tensor de tensiones para ese punto de la sección transversal,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{siendo:} \quad \begin{cases} \sigma_{33} = \sigma_{22} = \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{31} = \tau_1 = -\tau \operatorname{sen} \alpha \\ \sigma_{32} = \tau_2 = \tau \cos \alpha \end{cases} \tag{7.2}$$

A partir de la ley de Hooke (ecuación constitutiva) y sustituyendo en ella la ecuación (7.1), se obtiene el siguiente estado tensional en la sección transversal,

$$\tau(\rho) = G \cdot \gamma(\rho) = \rho \cdot G \cdot \theta \quad \text{con} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{7.3}$$

donde G es el módulo de elasticidad transversal o módulo de corte (ver ec.(6.6)). Asimismo, la distribución de las tensiones tangenciales dada por la ecuación (7.3) se representa gráficamente en la Figura 7.4.

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores –estado de deformaciones, estado de tensiones y ecuación constitutiva– y la Figura 7.4, se deduce a continuación la ecuación de equilibrio entre el esfuerzo externo (momento torsor) y las tensiones que se desarrollan en el interior de la barra.

La tensión $\tau(\rho)$ que se desarrolla en un elemento dA, distante del eje de la barra un radio ρ, produce un momento torsor igual a:

$$d\mathsf{M}_T = \left[\tau(\rho)\, dA\right] \cdot \rho \quad \Rightarrow \quad \mathsf{M}_T = \int_A \tau(\rho) \cdot \rho \cdot dA \tag{7.4}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la ecuación (7.3), se obtiene,

$$\mathsf{M}_T = \int_A \tau(\rho) \cdot \rho \cdot dA = \int_A (\rho G \theta) \cdot \rho \cdot dA = G\theta \int_A \rho^2 \cdot dA = G\theta I_p \tag{7.5}$$

donde I_p es el momento de inercia polar[3] de la sección (ver Apéndice).

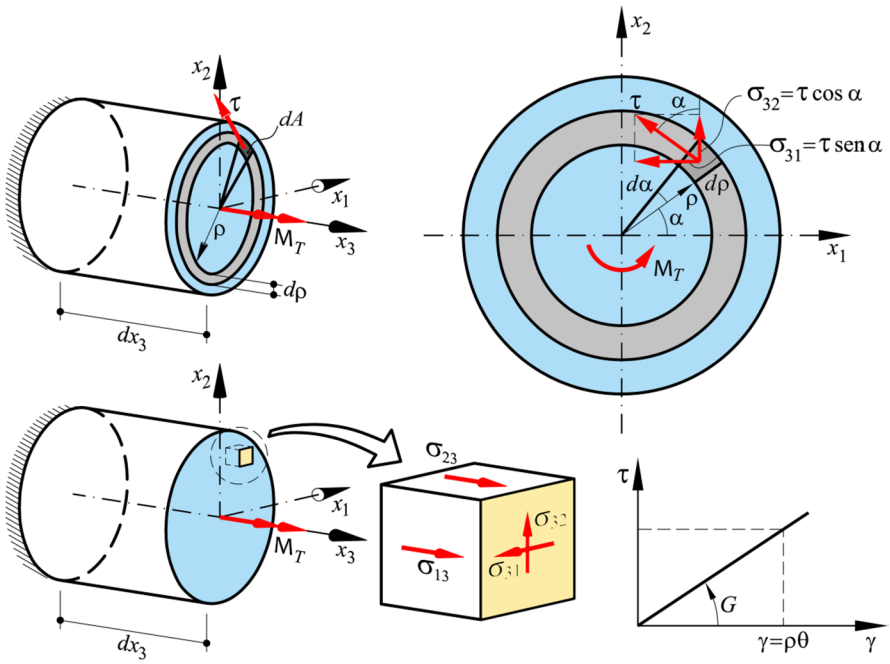


Figura 7.3 – Estado de tensión elástica en una rebanada de barra cilíndrica, sometida a torsión.

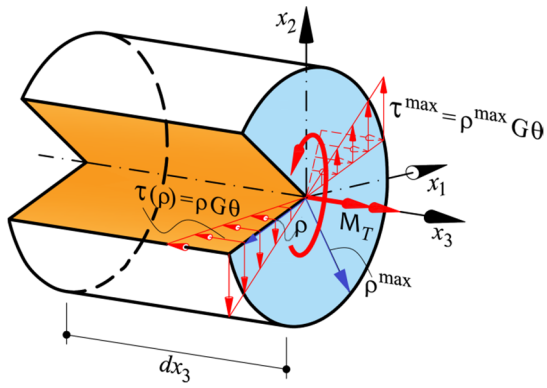


Figura 7.4 – Distribución tensional en una sección transversal de una barra cilíndrica sometida a torsión.

---

[3] Inercia polar: 1) Sección circular maciza de diámetro $D=2R \Rightarrow I_p=\dfrac{\pi D^4}{32}=\dfrac{\pi R^4}{2}$; 2) Sección anular de diámetro mayor $D=2R$ y diámetro menor $d=2r \Rightarrow I_p=\dfrac{\pi D^4}{32}\left(1-\dfrac{d^4}{D^4}\right)=\dfrac{\pi}{2}\left(R^4-r^4\right)$.

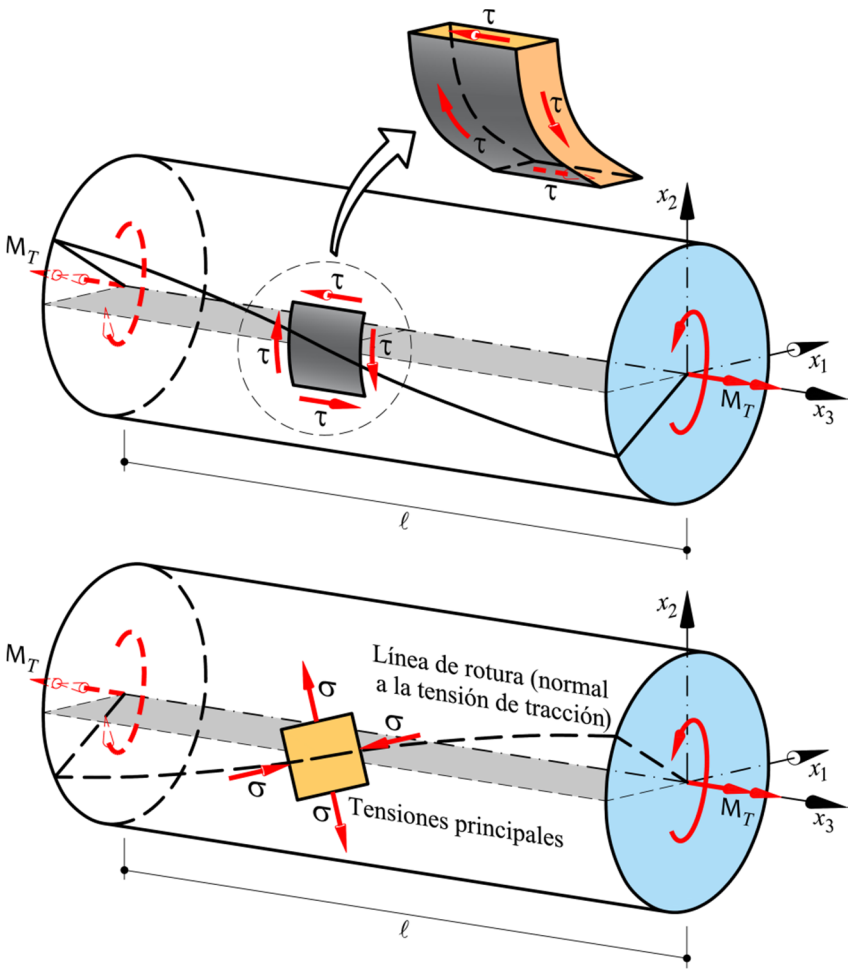


Figura 7.5 – Superficie de rotura generada por un momento torsor en una barra cilíndrica constituido por un material frágil.

Despejando de la ecuación (7.5) el ángulo de torsión unitario θ, se obtiene una expresión equivalente a la curvatura de Bernoulli para problemas de flexión[4] (ver

[4] Analogía entre el problema de flexión de Euler-Bernoulli y el problema de torsión de Coulomb

Flexión de Euler- Bernoulli	$\varepsilon_3(x_2) = \frac{du_3}{dx_3} = x_2 \frac{d\varphi}{dx_3}$	$\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{d\varphi}{dx_3} = \frac{M_1}{EI_1}$	$\sigma(x_2) = \frac{M_1}{I_1} x_2$
Torsión de Coulomb	$\gamma(\rho) = \frac{ds}{dx_3} = \rho \frac{d\psi}{dx_3}$	$\theta = \frac{d\psi}{dx_3} = \frac{M_T}{G I_p}$	$\tau(\rho) = \frac{M_T}{I_p} \rho$

Capítulo 5) y también resulta la expresión de la tensión en función del momento torsor (expresión también análoga a la fórmula de Navier para problemas de flexión). Esto es,

$$\theta = \frac{M_T}{G I_p} \quad \overset{\text{sust.(7.3)}}{\Rightarrow} \quad \tau(\rho) = (\rho G)\left(\frac{M_T}{G I_p}\right) = \frac{M_T}{I_p}\rho$$
$$\tau^{\max} = G\,\theta\,\rho^{\max} = \frac{M_T}{I_p}\rho^{\max} \tag{7.6}$$

Sustituyendo en esta última la ecuación (7.1), se obtiene la expresión para el giro absoluto entre dos secciones distantes una magnitud ℓ.

$$\theta = \frac{d\psi}{dx_3} = \frac{M_T}{G I_p} \quad \Rightarrow \quad \psi = \int_\ell \frac{M_T}{G I_p} dx_3 \tag{7.7}$$

Para el caso en que la torsión es constante a lo largo de la barra, la expresión anterior se reduce a la siguiente,

$$\psi = \frac{M_T}{G I_p}\ell \tag{7.8}$$

Esta teoría se podría aplicar con cierta precaución a aquellos casos en que el momento torsor y la sección transversal de la barra tiene una ligera variación a lo largo del eje.

La rotura que se produce por torsión en una barra cilíndrica tiene la forma de una superficie helicoidal para materiales frágiles, y ésta se inicia cuando la tensión tangencial supera la resistencia de rotura del material, que equivale a decir que la tensión principal mayor supera la resistencia de rotura a tracción. Esta afirmación resulta de estudios experimentales y puede deducirse de un simple análisis de las líneas de isotensión y para ello se muestra la Figura 7.5.

7.2.4 Energía de deformación elástica acumulada en la barra

El trabajo realizado por el momento torsor se acumula internamente en forma de energía elástica. Para cuantificar esta energía se partirá de la densidad de energía por unidad de volumen que se acumula en un punto de la sección transversal y luego se integrará sobre todo el volumen de la barra para obtener la energía total acumulada. Esto es,

$$\bar{\omega} = \int_{\gamma} \tau \, d\gamma = \int_{\gamma} G \gamma \, d\gamma = \frac{1}{2} \tau \gamma \qquad \Rightarrow \qquad W = \int_{V} \frac{1}{2} \tau \gamma \, dV \tag{7.9}$$

Integrando primeramente sobre la sección transversal y luego sobre la longitud, resulta:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{\ell} \left[\int_{A} \tau \gamma \, dA \right] dx_3 = \frac{1}{2} \int_{\ell} \left[\int_{A} \left(\frac{\mathsf{M}_T}{I_p} \rho \right) (\rho \theta) \, dA \right] dx_3 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\psi \max} \frac{\mathsf{M}_T}{I_p} \frac{d\psi}{dx_3} \underbrace{\left[\int_{A} \rho^2 \, dA \right]}_{I_p} dx_3 = \frac{1}{2} \int_{\psi \max} \mathsf{M}_T \; d\psi \end{aligned} \tag{7.10}$$

Para problemas en los cuales el momento torsor y la inercia polar son constantes, la expresión anterior se simplifica de la siguiente manera,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\psi \max} \mathsf{M}_T \; d\psi = \frac{1}{2} \mathsf{M}_T \, \psi_{\max} = \frac{1}{2} \int_{\ell} \frac{\mathsf{M}_T^2}{G I_p} dx_3 = \frac{1}{2} \frac{\mathsf{M}_T^2 \, \ell}{G I_p} \tag{7.11}$$

7.2.5 Estado de tensión elastoplástico perfecto y equilibrio de la barra

Considerando como válida las hipótesis cinemáticas previamente enunciadas en el apartado 7.2.2, se formula ahora una generalización, para abordar el comportamiento a torsión elastoplástico perfecto (tensión plástica constante durante todo el proceso no-lineal) y su consecuente equilibrio.

Al igual que en el caso elástico, el tensor de tensiones tiene la forma expresada en la ecuación (7.2), esto es

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{siendo:} \quad \begin{cases} \sigma_{33} = \sigma_{22} = \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{31} = \tau_1 = -\tau \operatorname{sen} \alpha \\ \sigma_{32} = \tau_2 = \tau \cos \alpha \end{cases} \tag{7.12}$$

La ley constitutiva elasto-plástica que se utiliza para el material cumple con la siguiente restricción,

$$\tau(\rho) - \tau^y \begin{cases} < 0 \quad \text{elástico} \quad \Rightarrow \quad \tau(\rho) = G \cdot \gamma(\rho) = G \cdot \rho \cdot \theta \\ = 0 \quad \text{plástico} \quad \Rightarrow \quad \tau(\rho) = \tau^y \end{cases} \tag{7.13}$$

donde τ^y es la tensión límite donde se inicia el comportamiento plástico del material.

A continuación se analiza la evolución del estado tensional en la sección transversal a medida que se aumenta el ángulo específico de torsión. Se considera como estado tensional de partida aquel que se muestra en la Figura 7.6a, donde la sección transversal se encuentra en el límite del comportamiento elástico, ya que sólo las fibras ubicadas en $\rho^{\max} = R$ alcanzan la tensión límite τ^y, correspondiendo a este caso un ángulo de torsión específico θ^y y un momento torsor M_T^y que se denomina *momento torsor de fluencia*. Si se continúa incrementando el ángulo de torsión específico se llega al estado final representado en la Figura 7.6c, donde toda la sección se encuentre plastificada ($\tau(\rho) = \tau^y$), correspondiendo este caso a un ángulo de torsión específico θ^u y a un momento torsor M_T^u denominado *momento torsor de plastificación total o momento último*. La transición entre los dos casos mencionados (Figura 7.6a y Figura 7.6c) produce un estado tensional de plastificación parcial, pudiéndose identificar en la sección transversal un núcleo elástico de radio ρ^e y un anillo plástico periférico de espesor $\rho^p = R - \rho^e$, tal como se muestra en la Figura 7.6b. A este caso intermedio corresponde un ángulo de torsión específico θ^a (con $\theta^y \le \theta^a \le \theta^u$) y un *momento torsor de plastificación parcial* M_T^a (con $M_T^y \le M_T^a \le M_T^u$).

Se determina a continuación el momento torsor M_T^a y, luego, los momentos torsores M_T^y y M_T^u se obtienen como casos límites de M_T^a. Sustituyendo la ley

constitutiva elasto-plástica (7.13) en la ecuación de equilibrio (7.4), resulta la siguiente relación para el problema elasto-plástico,

$$M_T^a = \int_A \tau(\rho)\cdot\rho\cdot dA = \int_\rho \tau(\rho)\cdot\rho\cdot(2\pi\rho\, d\rho) = \overbrace{\int_0^{\rho^e} (\rho G\theta)\cdot\rho^2\, 2\pi\, d\rho}^{M_T^e} + \overbrace{\int_{\rho^e}^{R} \tau^y \rho^2\, 2\pi\, d\rho}^{M_T^p} =$$

$$= 2\pi G\theta \int_0^{\rho^e} \rho^3\, d\rho + 2\pi\tau^y \int_{\rho^e}^{R} \rho^2\, d\rho = G\theta \underbrace{\frac{\pi\left(\rho^e\right)^4}{2}}_{I_p^e} + \tau^y \frac{2\pi\left(R^3 - \left(\rho^e\right)^3\right)}{3} \tag{7.14}$$

donde M_T^e es la parte del momento torsor M_T^a equilibrada por el núcleo elástico, M_T^p es la parte del momento torsor M_T^a equilibrada por el anillo plástico e I_p^e es el momento de inercia polar del núcleo elástico, dados respectivamente por,

$$M_T^e = G\theta I_p^e \;; \qquad M_T^p = \tau^y \frac{2\pi\left(R^3 - \left(\rho^e\right)^3\right)}{3} \;; \qquad I_p^e = \frac{\pi\left(\rho^e\right)^4}{2}$$

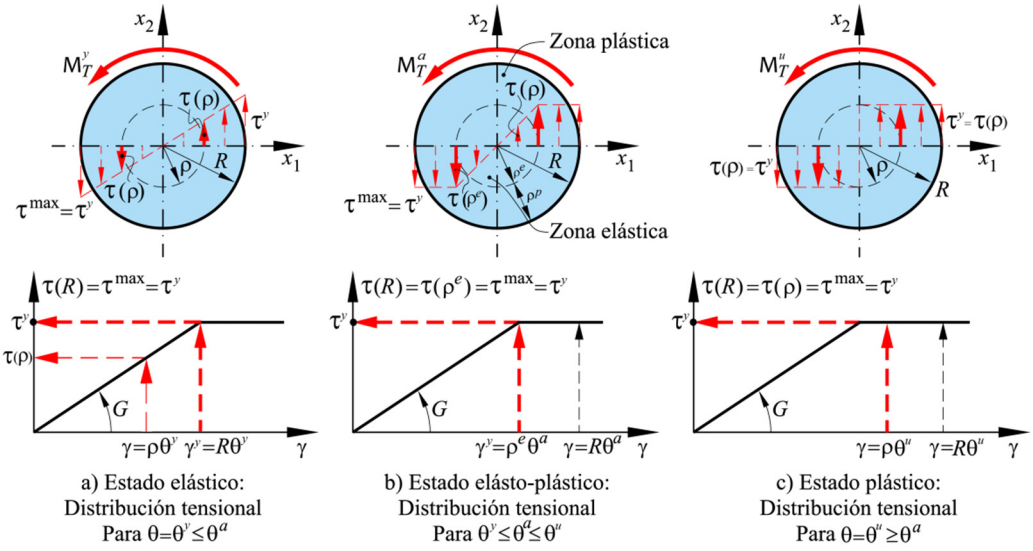


Figura 7.6 – Transición de comportamiento de un estado elástico a totalmente plástico.

De la ecuación (7.14) resulta el ángulo de torsión unitario o torsión específico y también la tensión en función del momento torsor. Esto es,

$$\theta = \frac{\mathsf{M}_T^a - \tau^y \dfrac{2\pi\left(R^3 - \left(\rho^e\right)^3\right)}{3}}{G\, I_p^e} = \frac{\mathsf{M}_T^a - \mathsf{M}_T^p}{G\, I_p^e}$$

$$\begin{cases} \tau(\rho) = G\cdot\rho\cdot\theta = \dfrac{\mathsf{M}_T^a - \tau^y \dfrac{2\pi\left(R^3 - \left(\rho^e\right)^3\right)}{3}}{I_p^e}\cdot\rho \quad ; \quad \text{Rango elástico: } \forall \;\; 0 \le \rho \le \rho^e \\ \tau(\rho) = \tau^y \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ; \quad \text{Rango plástico: } \forall \;\; \rho^e \le \rho \le R \end{cases} \tag{7.15}$$

De la ecuación de equilibrio (7.14) resultan las siguientes ecuaciones particulares que corresponden, respectivamente, al momento torsor de fluencia (Figura 7.6a) y al momento torsor de plastificación total o último (Figura 7.6c):

$$\begin{aligned} &\textbf{Estado elástico límite:} && \rho^e = R \quad \Rightarrow \quad \mathsf{M}_T^y = G\,\theta\,\frac{\pi R^4}{2} \\ &\textbf{Estado totalmente plastificado:} && \rho^e = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{M}_T^u = \tau^y\,\frac{2\pi R^3}{3} \end{aligned} \tag{7.16}$$

El radio del núcleo elástico ρ^e para un momento torsor M_T^a $(\mathsf{M}_T^y \le \mathsf{M}_T^a \le \mathsf{M}_T^u)$ se obtiene despejando de la ecuación (7.14).

7.3 Teoría de torsión para piezas prismáticas de sección transversal no circular sometidas a torsión uniforme

7.3.1 Introducción

Este problema fue estudiado por primera vez por Saint Venant en el año 1855 para piezas sometidas a torsión uniforme y la necesitad de su estudio estuvo motivada porque la teoría de Coulomb no podía generalizarse a piezas de sección transversal no circular/anular.

A partir de la teoría de Saint Venant se reconoce que las piezas de secciones no-circulares sufren alabeo después de una deformación torsional, es decir que las secciones transversales no mantienen la condición de planaridad. Este fenómeno

necesariamente debe estudiarse desde la óptica de la *Teoría General de la Elasticidad* y puede decirse que sus alcances están más allá de los objetivos de la resistencia de materiales. Sin embargo, mediante la teoría de Saint Venant, que aquí se expone, puede establecerse una hipótesis de simplificación que da lugar a una aplicación de utilidad práctica. Esta hipótesis se basa en admitir que es posible estudiar, sin errores significativos, aquellas piezas cuyas secciones transversales sufran alabeo por torsión, siempre que éste sea constante en todas las secciones a lo largo del eje de la pieza (alabeo relativo nulo entre dos secciones transversales o problema de torsión uniforme)[5].

El alabeo de la sección, producido por fuertes gradientes de tensión que en ella ocurren, da lugar a una distribución de tensiones tangenciales muy distinta a la que resulta de la teoría de Coulomb y puede decirse que ahora el ángulo de distorsión γ se obtiene a partir del ángulo de torsión unitario o específico θ y de la función de alabeo que adopta la sección transversal.

Como regla de cumplimiento obligado y previo al tratamiento de la teoría de Saint Venant, es conveniente recordar lo siguiente:

- Las tensiones tangenciales en el perímetro de una sección transversal deben orientarse en dirección tangencial a dicho contorno perimetral.

  Como puede verse en la Figura 7.7.a, si se supone la existencia de una tensión τ según una orientación cualquiera, significaría la existencia de una tensión tangencial normal τ_N y otra tangente τ_T al contorno. Puesto que no puede existir una tensión tangencial superficial, o sea es $\tau_N = 0$ (a no ser que exista una fuerza de fricción con la superficie exterior de la pieza), entonces necesariamente la única tensión existente es la que resulta tangente al contorno $\tau = \tau_T$.

- En las aristas, las tensiones tangenciales τ deben necesariamente ser nulas, $\tau = 0$, y esto resulta de una extensión de la condición anterior, puesto que ambas tensiones tangenciales $\tau_1 = 0$ y $\tau_2 = 0$ quedan sobre la superficie lateral de la pieza (Figura 7.7.b).

---

[5] **Nota:** Es importante recordar que una simplificación análoga permite utilizar la formulación de flexión de Euler-Bernoulli en piezas sometidas a flexión simple (flexión más cortante). El esfuerzo cortante genera una distribución de tensiones tangenciales no uniforme en la sección transversal que provoca también alabeo. No obstante esto, si se consigue que el alabeo relativo entre todas las secciones de la pieza sea nulo (todas las secciones se alabean la misma magnitud), entonces no se desarrollan tensiones secundarias y puede aplicarse la teoría general de flexión establecida por Euler-Bernoulli junto a la teoría general del cortante de Jourvasky-Colignon. Claro que esto valdría sólo en aquellos casos de cortante uniforme.

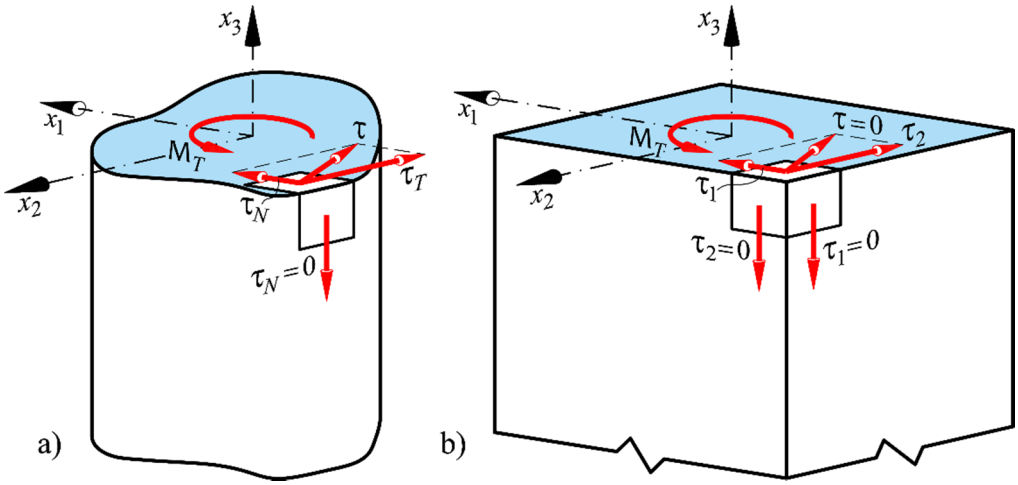


Figura 7.7 – Distribución de tensiones tangenciales en una sección de forma cualquiera. a) En el perímetro de la sección; b) En las esquinas de una sección.

7.3.2 Teoría de Saint Venant – Problema de valores de contorno

Esta formulación se basa en suponer parte de la solución –el campo de tensiones o el campo de desplazamientos–, al tiempo que las condiciones de contorno son satisfechas. Luego, se verifica si la suposición adoptada cumple con las condiciones del problema.

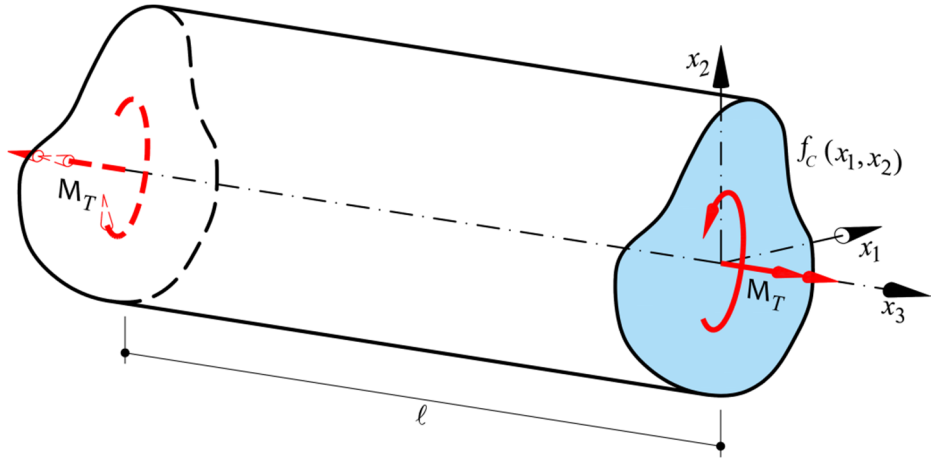


Figura 7.8 – Barra genérica para estudiar la torsión de Saint Venant con alabeo libre.

A continuación se presentará un **problema de valores de contorno que se enunciará a través de tres suposiciones** y que conducirá a la obtención de la

ecuación general de la torsión utilizando la *función de tensión de Prandtl* $\phi = \phi(x_1, x_2)$. Concretamente, Ludwig Prandtl en 1903 determinó la relación entre la tensión y la pendiente direccionada de la función ϕ.

Se supone para el desarrollo de esta formulación, una barra prismática, cuya sección transversal está definida por la curva $f_C(x_1, x_2)$ sometida a un estado de torsión uniforme (ver Figura 7.8).

7.3.2.1 1ra. Suposición de Saint Venant: Sobre el estado tensional

Se supone que sólo actúa un momento torsor M_T que da lugar a un estado de tensiones tangenciales formado por τ_1 , τ_2 en la sección transversal como muestra la Figura 7.9.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{siendo :} \quad \begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0 \\ \sigma_{31} = \tau_1 \\ \sigma_{32} = \tau_2 \end{cases} \tag{7.17}$$

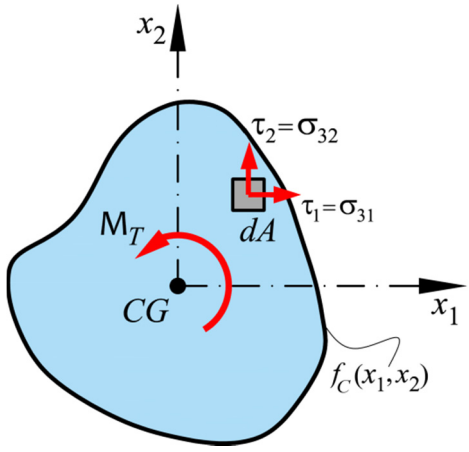


Figura 7.9 – Suposición del estado de tensiones en el plano de una sección transversal.

Bajo este estado de tensión, se exige ahora el cumplimiento de las condiciones de equilibrio que a continuación se detallan.

1.a. Condición de equilibrio en el contorno

Para una sección transversal de forma arbitraria, comprendida entre los dos extremos de la barra $0 \le x_3 \le \ell$, y admitiendo que no hay fuerzas aplicadas sobre la superficie de la barra, se escribe la condición de equilibrio en el contorno de la siguiente manera,

$$0 = t_i = \sigma_{ij}\, \ell_j \qquad \forall\ i,j = 1,2,3$$

$$0 = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \sigma_{13}\, \ell_3 \\ 0 = \sigma_{23}\, \ell_3 \\ 0 = \sigma_{31}\, \ell_1 + \sigma_{32}\, \ell_2 = \tau_1\, \ell_1 + \tau_2\, \ell_2 \end{cases} \tag{7.18}$$

Siendo t_i el denominado *vector de tensión completa*, σ_{ij} el tensor de tensiones y $\ell_j = \cos(\widehat{\ell, x_j})$ el coseno director del vector saliente normal al contorno de la sección transversal (ver Capítulo 2 - Conceptos Básicos Sobre Elasticidad Bidimensional).

La ecuación (7.18) muestra que no hay componentes de tensión en la dirección x_3, ni tampoco en la dirección normal al contorno –sólo hay tensiones tangenciales tangentes al contorno–, pero sí se deduce que una de las componentes de tensión tangencial (τ_1 o τ_2) en el plano (x_1, x_2) tiene sentido contrario al asignado en la Figura 7.10.

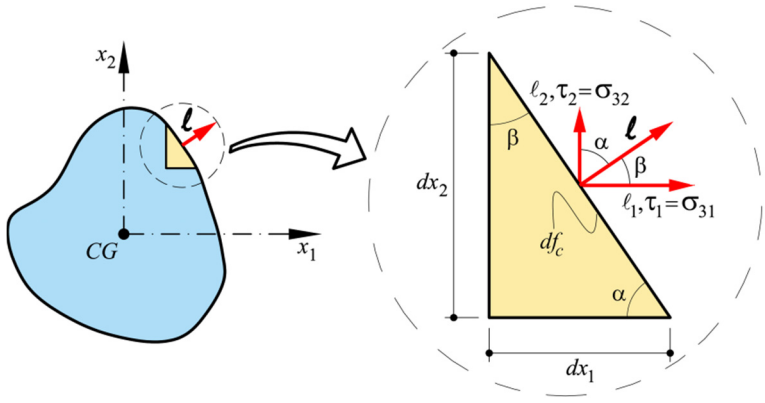


Figura 7.10 – Tensiones que garantizan el equilibrio en el contorno para una pieza sometida a torsión.

La ecuación del equilibrio en el contorno (7.18), también puede escribirse en la siguiente forma, que resulta conveniente para ser utilizada más adelante,

$$\boxed{0 = \tau_1 \frac{dx_2}{df_C} + \tau_2 \frac{dx_1}{df_C}} \quad \text{con:} \quad \begin{cases} \dfrac{dx_2}{df_C} = \cos\beta = \ell_1 = \cos(\widehat{\ell, x_1}) \\ \dfrac{dx_1}{df_C} = \cos\alpha = \ell_2 = \cos(\widehat{\ell, x_2}) \\ \ell_3 = \cos(\widehat{\ell, x_3}) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \tag{7.19}$$

Obsérvese que no hay componente de tensión tangencial que sea normal al contorno.

1.b. Condición de equilibrio en un punto interior de la sección – Equilibrio de Cauchy

Para establecer la condición de equilibrio en un punto interior de una barra se considera que las tensiones se desarrollarán por la sola presencia del momento torsor que se mantiene uniforme a lo largo del eje de la pieza, o sea que la barra no está sujeta a fuerzas másicas ($\mathbf{p} = p_i = \{p_1 \quad p_2 \quad p_3\}^T = \mathbf{0}$). Se utiliza la condición de equilibrio interno de Cauchy teniendo en cuenta el estado de tensiones definido en la ecuación (7.17) (ver Cap. 2 - Conceptos Básicos Sobre Elasticidad Bidimensional), esto es

$$\boxed{\operatorname{div}(\sigma_{ij}) - \cancel{p_i}^{=0} = 0} \rightarrow \begin{cases} \cancel{\dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}} + \cancel{\dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}} + \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 \text{ o bien } \dfrac{\partial \tau_1}{\partial x_3} = 0 \\ \cancel{\dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}} + \cancel{\dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}} + \dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = 0 \text{ o bien } \dfrac{\partial \tau_2}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \cancel{\dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \tau_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{7.20}$$

En la ecuación (7.20) se observa que se debe cumplir que $\dfrac{\partial \tau_1}{\partial x_3} = \dfrac{\partial \tau_2}{\partial x_3} = 0$, lo que implica que el estado tensional τ_1 y τ_2 es constante a lo largo del eje x_3. Esta situación ocurre porque el momento torsor M_T se mantiene constante a lo largo de

la barra ($\mathsf{M}_T = \text{cte}$), que corresponde a un problema de torsión uniforme sin restricción al alabeo de la sección. También se deduce de la ecuación (7.20), que el estado tensional τ_1 y τ_2 sólo tiene variación en el plano (x_1, x_2) de la sección transversal y siempre cumple la condición $\dfrac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \tau_2}{\partial x_2} = 0$.

7.3.2.2 2da. Suposición de Saint Venant: Sobre la existencia de la función de Prandtl

Observando el problema de la distribución de las tensiones tangenciales y las condiciones de equilibrio formuladas en el apartado anterior, Ludwig Prandtl (1875-1953) introdujo en el año 1903 una función gradiente de tensión $\phi = \phi(x_1, x_2)$ o potencial de tensión –también puede definirse como función de Airy–, en el plano de la sección transversal y cuya pendiente define el estado tensional de un punto de la sección (ver Figura 7.11). Esto es la medida de la tensión,

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_1 = \sigma_{31} &\overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \tau_2 = \sigma_{32} &\overset{\text{def}}{=} -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \end{aligned}} \tag{7.21}$$

Así, definida la función de Prandtl –que hace las veces de función potencial– se puede obtener el estado tensional en un punto de la sección transversal sometida a torsión, a partir de las condiciones de contorno, de la condición de equilibrio seccional, de la definición de la tensión y de las condiciones de compatibilidad que se introducirán más adelante.

2.a. Ecuación de equilibrio en el contorno

Partiendo de la suposición de existencia de la función de Prandtl, la ecuación de equilibrio en el contorno (ecuación (7.19)) queda expresada de la siguiente forma,

$$\boxed{0 = \tau_1 \frac{dx_2}{df_C} + \tau_2 \frac{dx_1}{df_C} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{df_C} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{df_C} = 0 = \frac{d\phi}{df_C}} \tag{7.22}$$

Esta ecuación de *equilibrio en el contorno*, permite suponer que la función de Prandtl $\phi = \phi(x_1, x_2)\big|_{f_c} = \text{cte}$, es constante en el contorno de la sección transversal (ver Figura 7.12). En esta misma figura se muestran las componentes de tensión en un punto "A" de la sección transversal.

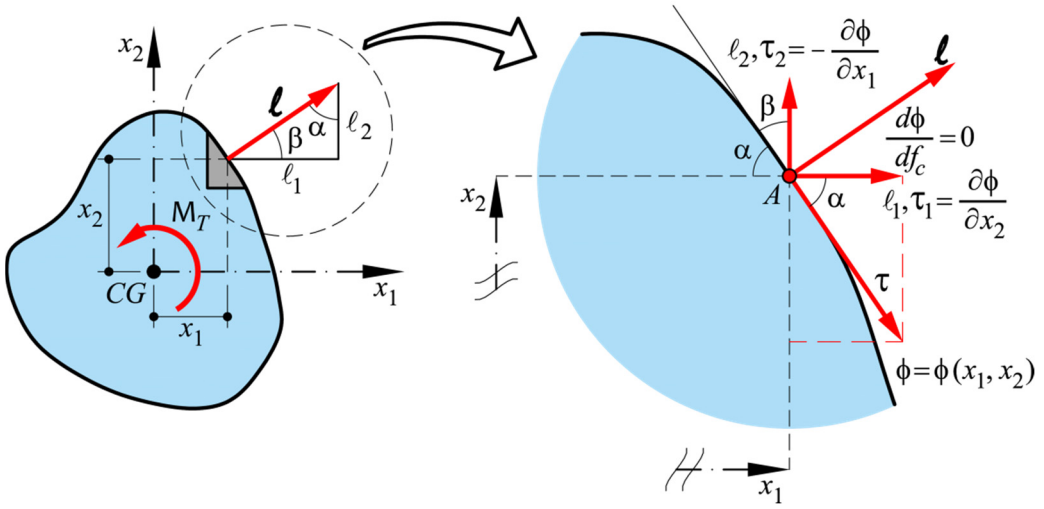


Figura 7.11 – Definición de las tensiones en el contorno a partir de la función de Prandtl.

2.b. Medida de la tensión

En el apartado anterior se han definido las componentes de la tensión τ_1 y τ_2 en un punto "A" de la sección transversal. En este apartado se muestra la composición de dichas componentes (ver Figura 7.11 y Figura 7.12). Así, resulta,

$$\tau = \tau_1 \cos\alpha - \tau_2 \cos\beta = \tau_1\ \ell_2 - \tau_2\ \ell_1 \qquad \text{con:} \quad \begin{cases} \cos\beta = \ell_1 = \dfrac{dx_1}{d\ell} \\ \cos\alpha = \ell_2 = \dfrac{dx_2}{d\ell} \end{cases}$$

$$\boxed{\tau = \overbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_2}}^{\tau_1} \frac{dx_2}{d\ell} + \overbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}}^{-\tau_2} \frac{dx_1}{d\ell} = \frac{d\phi}{d\ell}} \qquad (7.23)$$

De donde resulta que la tensión τ producida por el momento torsor M_T es tangente a la función de Prandtl $\phi = \phi(x_1, x_2)\big|_{f_C} = \text{cte}$ (ver Figura 7.11).

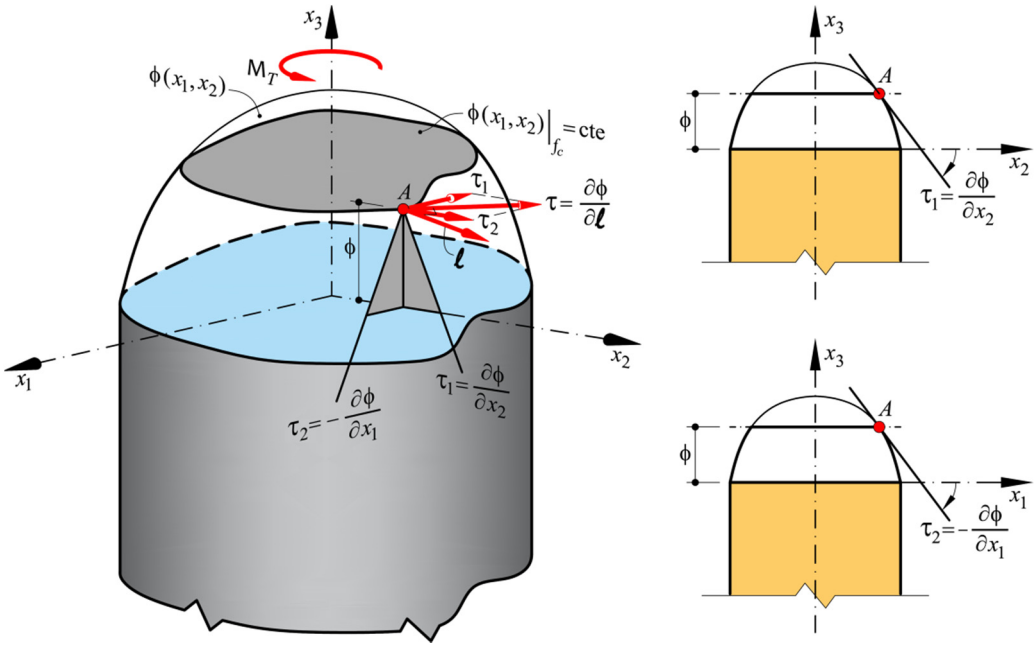


Figura 7.12 – Función de Prandtl y la tensión en un punto "A" de la sección.

2.c. Equilibrio en la sección – Fórmula de Bredt (sección llena)

A continuación se establece el equilibrio entre el momento torsor M_T y el momento interno generado por la integral de las tensiones tangenciales en la sección transversal (ver Figura 7.13). Esto es:

$$\boxed{M_T = \int_A \left(-\tau_1\ x_2 + \tau_2\ x_1\right) dA} \quad \Rightarrow \quad M_T = -\int_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\ x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\ x_1\right) dA$$

$$M_T = -\int_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\ x_i\right) dA \qquad \forall\ i = 1,2 \tag{7.24}$$

Integrando por partes esta última expresión, resulta la ecuación de equilibrio que relaciona el momento torsor con las tensiones tangenciales,

$$\mathsf{M}_T = -\int_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, x_i \right) dA = -\left[-\int_A \phi \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i)\, dA + \oint_{f_C} \phi_C \left(x_i\, \ell_i \right) df_C \right] \quad \forall\ i = 1,2$$

$$\mathsf{M}_T = 2\int_A \phi\, dA - \oint_{f_C} \phi_C \left(x_1\, \ell_1 + x_2\, \ell_2 \right) df_C \tag{7.25}$$

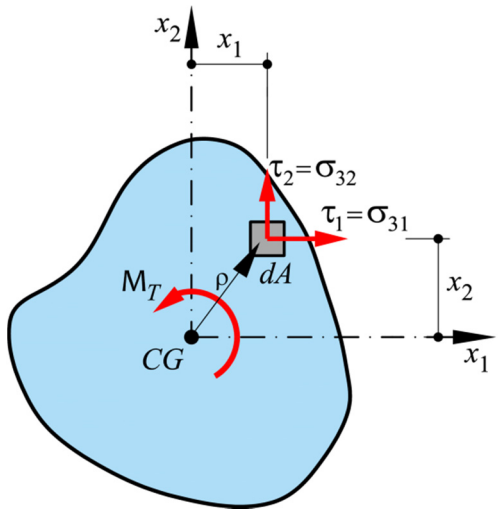


Figura 7.13 – Equilibrio entre el momento externo M_T y el momento interno generado por las tensiones tangenciales en la sección transversal.

Para el caso particular de una sección maciza en la que $\phi_C = \phi(x_1, x_2)\big|_{f_C} = \text{cte} = 0$, la ecuación (7.25) queda reducida a la siguiente ecuación, que mide el doble del volumen V^{ϕ} encerrado por la función de Prandtl,

$$\boxed{\mathsf{M}_T = 2\int_A \phi\, dA = 2 \cdot V^{\phi}} \tag{7.26}$$

Para el caso más general en que $\phi_C = \phi(x_1, x_2)\big|_{f_C} = \text{cte}$ se obtiene, de la Figura 7.12 y de la Figura 7.14, la siguiente expresión para la ecuación (7.25),

$$\text{Haciendo: } \begin{cases} \rho = x_1\, \ell_1 + x_2\, \ell_2 \\ dA_C = \dfrac{\rho\, df_C}{2} \rightarrow\ \rho\, df_C = 2\, dA_C \end{cases} \Rightarrow \oint_{f_C} \phi_C\, \rho\, df_C \cong \int_{A_C} 2\, \phi_C\, dA_C \tag{7.27}$$

Sustituyendo la ecuación (7.27) en la ecuación (7.25), resulta la siguiente ecuación de equilibrio,

$$\mathrm{M}_T = 2\int_A \phi\, dA - \oint_{A_C} 2\phi_C\, dA_C \overset{\phi_C=cte}{\Rightarrow} \boxed{\mathrm{M}_T = 2\int_A \phi\, dA - 2\phi_C\, A_C} \tag{7.28}$$

Obsérvese que para $\phi_C = 0$, se recupera la ecuación (7.26), válida para una sección maciza.

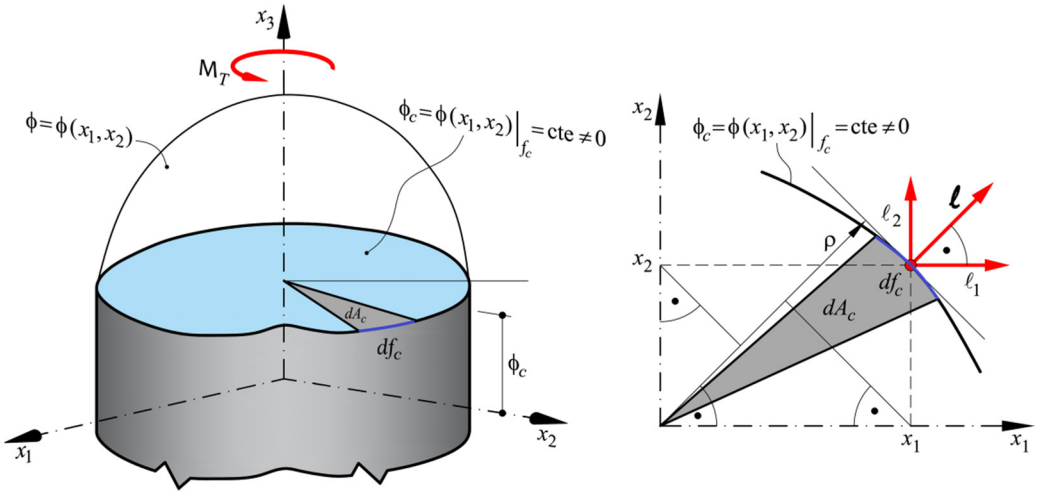


Figura 7.14 – Función de Prandtl para $\phi_C \neq 0$ y evaluación del volumen contenido.

2.d. Equilibrio en una sección simplemente conexa – Generalización de la fórmula de Bredt

Suponiendo una barra cuya sección transversal tiene un hueco (ver Figura 7.15), el equilibrio en dicha sección se consigue a partir del cálculo del volumen encerrado por la función de Prandlt contenida en la zona maciza de la sección. Dicho de otro modo, se resta de la sección llena la parte de momento torsor que no puede ser soportado por la parte hueca de la sección transversal. Esto se puede expresar de la siguiente manera,

$$\mathrm{M}_T = \underbrace{\left[2\int_{A_0} \phi\, dA - 2\phi_0\, A_0\right]}_{\text{Torsor en la sección Maciza}} - \underbrace{\left[2\int_{A_1} \phi\, dA - 2\phi_1\, A_1\right]}_{\text{Torsor no soportado por el hueco}} \tag{7.29}$$

Resultando de esta última la ecuación de equilibrio para la sección simplemente conexa,

$$\mathsf{M}_T = 2 \int_{(A_0 - A_1)} \phi \, dA - 2\phi_0 \, A_0 + 2\phi_1 \, A_1 \cong 2\phi_1 \, A_1^{\text{med}} \tag{7.30}$$

Siendo A_1^{med} el área del hueco más el área de la mitad de las paredes que rodean el hueco. Generalizando para una sección múltiplemente conexa, se podría escribir esta expresión a partir de la siguiente generalización,

$$\boxed{\mathsf{M}_T = 2 \int_{A} \phi \, dA - 2\phi_0 \, A_0 + \sum_i 2\phi_i \, A_i \cong \sum_i 2\phi_i \, A_i^{\text{med}}} \tag{7.31}$$

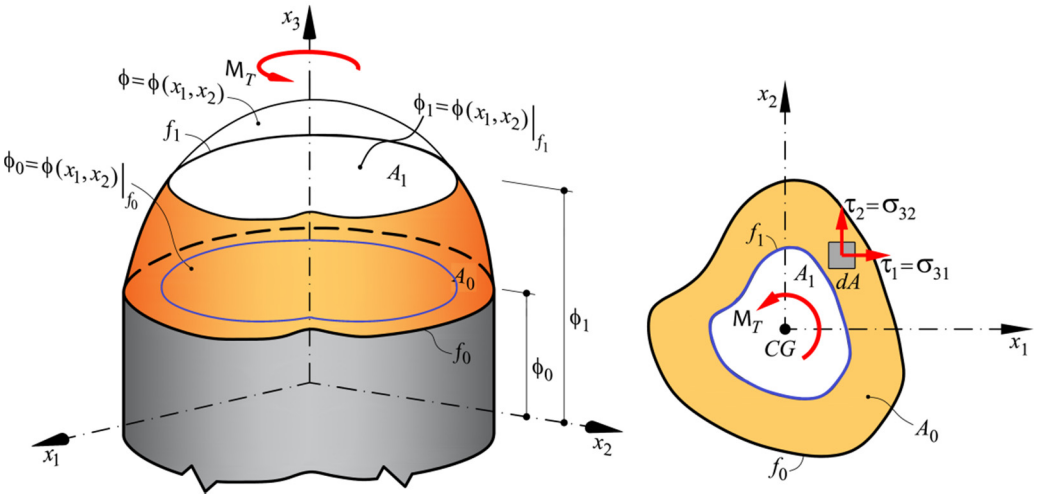


Figura 7.15 – Función de Prandtl para una sección con un hueco.

7.3.2.3 3da. Suposición de Saint Venant: Sobre el campo de desplazamientos

En lo referente a la deformación, la teoría de Saint Venant admite las siguientes hipótesis:

- La deformación de cualquier sección transversal se manifiesta girando alrededor del punto "CG" (Figura 7.16), acompañado de un alabeo $\mathfrak{I}(x_1, x_2)$ igual para todas las secciones.

- El ángulo de torsión específico por unidad de longitud θ es constante a lo largo de toda la pieza.

En virtud de esto, se puede expresar el siguiente campo de desplazamientos consistente con las hipótesis,

$$\begin{aligned} &\text{En el plano de la sección:} \quad \begin{cases} u_1 = -\Psi\, x_2 = -(\theta\, x_3)\, x_2 \\ u_2 = \Psi\, x_1 = (\theta\, x_3)\, x_1 \end{cases} \\ &\text{En el eje de la pieza:} \qquad u_3 = \theta\, \Im(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{7.32}$$

Siendo $\Im(x_1, x_2)$, la función de alabeo de Saint Venant.

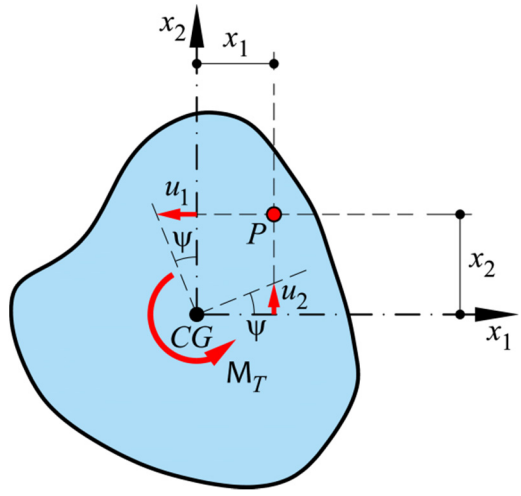


Figura 7.16 – Desplazamiento de un punto de la sección por efecto de la torsión.

A partir del campo de desplazamientos previamente definido, resulta el siguiente campo de deformaciones,

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = 2\,\varepsilon_{31} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} = \theta \dfrac{\partial \Im(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \theta\, x_2 = \theta \left(\dfrac{\partial \Im(x_1, x_2)}{\partial x_1} - x_2 \right) \\ \gamma_2 = 2\,\varepsilon_{32} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} = \theta \dfrac{\partial \Im(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \theta\, x_1 = \theta \left(\dfrac{\partial \Im(x_1, x_2)}{\partial x_2} + x_1 \right) \end{cases} \tag{7.33}$$

3.a. Tensión tangencial provocada por la torsión

Suponiendo un material homogéneo y elástico lineal, la tensión resulta según la ley de Hooke,

$$\tau_i = G \cdot \gamma_i \qquad \forall\ i = 1,2 \tag{7.34}$$

Sustituyendo en la última expresión las ecuaciones (7.21) y (7.33), resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, cuyas incógnitas son la *función de tensión o de Prantl* $\phi(x_1, x_2)$ y la *función de deformación o de Saint Venant* $\Im(x_1, x_2)$,

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2} = G \cdot \theta \left(\dfrac{\partial \Im(x_1, x_2)}{\partial x_1} - x_2 \right) \\ \tau_2 = -\dfrac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1} = G \cdot \theta \left(\dfrac{\partial \Im(x_1, x_2)}{\partial x_2} + x_1 \right) \end{cases} \tag{7.35}$$

A continuación se escribirá esta última expresión en función del campo de tensiones, eliminando la función de alabeo. Para ello se deriva la primera de las ecuaciones (7.35) respecto de x_2 y la segunda respecto de x_1, luego se suman miembro a miembro las expresiones obtenidas, resultando así la ecuación diferencial de la torsión,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = G \cdot \theta \left(\dfrac{\partial^2 \Im(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} - 1 \right) \\ -\dfrac{\partial \tau_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = -G \cdot \theta \left(\dfrac{\partial^2 \Im(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} + 1 \right) \end{cases}$$

$$\text{S.M.M}: \ \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = -2\, G\, \theta \tag{7.36}$$

Recordando que $\dfrac{\partial\ \phi(x_1, x_2)}{\partial x_3} = 0$, se puede escribir la **ecuación de la torsión** como,

$$\boxed{\nabla^2 \phi(x_1, x_2) = -2\, G\, \theta} \tag{7.37}$$

Otra forma de escribir esta ecuación de la torsión y que es útil luego en la aplicación a secciones transversales de paredes delgadas, resulta de integrar ambos miembros de la ecuación (7.37) sobre el área de la sección transversal,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_A \left(\nabla^2 \phi(x_1, x_2) + 2\,G\,\theta\right) dA \\
0 &= \int_A \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1}\right) dA + \int_A \left(2\,G\,\theta\right) dA
\end{aligned}
\tag{7.38}
$$

A través de la fórmula de Green, la expresión anterior se rescribe como (ver Figura 7.17),

$$
\begin{aligned}
&0 = -\oint_{f_C} \left(\tau_1\, dx_1 - \tau_2\, dx_2\right) + \int_A \left(2\,G\,\theta\right) dA \quad ; \quad \begin{cases} \dfrac{dx_2}{df_C} = \ell_1 = \cos\beta \\ \dfrac{dx_1}{df_C} = \ell_2 = \cos\alpha \end{cases} \\
&0 = -\oint_{f_C} \left(\tau_1\, \ell_2 - \tau_2\, \ell_1\right) df_C + \int_A \left(2\,G\,\theta\right) dA \\
&0 = -\oint_{f_C} \tau\, df_C + \int_A \left(2\,G\,\theta\right) dA \quad \Rightarrow \quad 0 = -\oint_{f_C} \tau\, df_C + 2\,G\,\theta\,A
\end{aligned}
\tag{7.39}
$$

Siendo esta última una forma de relacionar la tensión tangencial con el ángulo de torsión específico.

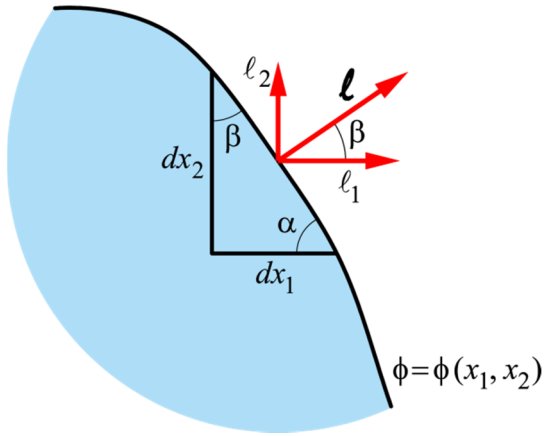


Figura 7.17 – Definición de los cosenos directores de la normal saliente al contorno de la sección transversal.

7.3.3 Teoría de Saint Venant – Analogía con el problema de Coulomb

Siguiendo la expresión (7.6) de la teoría de Coulomb, puede deducirse el *módulo de torsión* J a través de la siguiente analogía entre las dos teorías,

$$\theta = \frac{M_T}{G I_p} \overset{\text{Analogía}}{\Rightarrow} \theta = \frac{M_T}{G J} \Rightarrow J = \frac{M_T}{G \theta} \tag{7.40}$$

Sustituyendo en esta última las ecuaciones (7.26) y (7.37), resulta la siguiente expresión para el módulo de torsión,

$$J = \frac{M_T}{G\theta} = \frac{2\int_A \phi \, dA}{-\nabla^2 \phi(x_1, x_2)/2} = -\frac{4\int_A \phi \, dA}{\nabla^2 \phi(x_1, x_2)} \tag{7.41}$$

En el caso de una sección circular maciza, este módulo de torsión tiende al momento de inercia polar, situación que se verificará más adelante.

La ecuación (7.40) permite relacionar, en forma simple, el ángulo de torsión específico con el momento torsor aplicado, siempre que se calcule correctamente el módulo de torsión J.

7.3.4 Teoría de Saint Venant – Ejemplo de aplicación a una sección maciza de forma cualquiera

Se supone un eje de sección transversal maciza (Figura 7.18), cuyo perímetro está definido por la ecuación $f_C(x_1, x_2) = 0$ (siendo f_C continua y derivable). Se tienen en cuenta las ecuaciones obtenidas en las secciones previas y que a continuación se resumen.

Ecuación diferencial de la torsión	$\frac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = -2G\theta$	(7.36) (7.37)
Ecuación de equilibrio en el contorno	$\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{df_C} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{df_C} = \frac{d\phi}{df_C} = 0$	(7.22)

Medida de la tensión	$\tau = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_2}}_{\tau_1} \frac{dx_2}{d\ell} + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}}_{-\tau_2} \frac{dx_1}{d\ell} = \frac{d\phi}{d\ell}$	(7.23)
Ecuación de equilibro (Bredt)	$M_T = 2\int_A \phi \, dA$ $M_T = 2\int_A \phi \, dA - 2\phi_0 A_0 + \sum_i 2\phi_i A_i \cong \sum_i 2\phi_i A_i^{\text{med}}$	(7.26) (7.31)
Ecuación de la torsión para secciones de paredes delgadas	$\nabla^2 \phi(x_1, x_2) = -2G\theta$ $0 = -\oint_{f_C} \tau \, df_C + 2G\theta A$	(7.39)

Se puede proceder a resolver el problema de torsión de este eje, adoptando como función de tensión ϕ una expresión análoga a la función que describe el perímetro de la pieza, esto es,

$$\phi = C \cdot f_C(x_1, x_2) \tag{7.42}$$

Siendo C una constante a determinar y que una vez conocida resuelve el problema formulado.

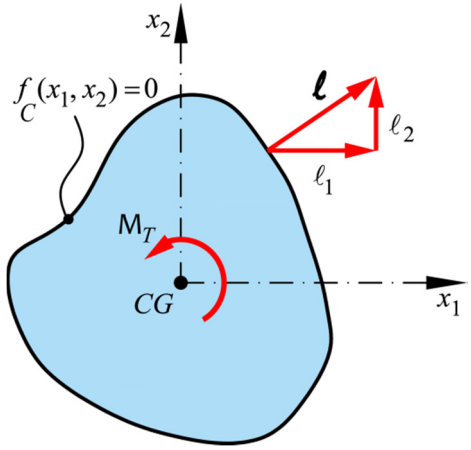


Figura 7.18 – Sección transversal de forma cualquiera.

A partir de este punto hay dos procedimientos a seguir, que en este texto se designan como A) y B), y se describen a continuación.

Procedimiento A): Sustituyendo la función de tensión, ec. (7.42), en la ecuación diferencial de la torsión (7.36) o (7.37) se obtiene,

$$C\left[\frac{\partial^2 f_C(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 f_C(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\right]=-2G\theta \Rightarrow C=-\frac{2G\theta}{\dfrac{\partial^2 f_C(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 f_C(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}} \quad (7.43)$$

A partir de la ecuación de equilibrio (7.26) y de la ecuación anterior, resulta

$$\begin{aligned} &\mathsf{M}_T=2\int_A \phi(x_1,x_2)\,dA \quad \Rightarrow \quad \mathsf{M}_T=2C\int_A f_C(x_1,x_2)\,dA \\ &C=\frac{\mathsf{M}_T}{2\int_A f_C(x_1,x_2)\,dA}\equiv -\frac{2G\theta}{\dfrac{\partial^2 f_C(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 f_C(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Obteniéndose de esta última ecuación la siguiente relación entre el momento torsor M_T y el ángulo de torsión específico θ,

$$\theta=\frac{\mathsf{M}_T\left(\dfrac{\partial^2 f_C(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 f_C(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\right)}{4G\int_A f_C(x_1,x_2)\,dA} \quad (7.45)$$

Procedimiento B): Sustituyendo la función de tensión (7.42) en la ecuación equilibrio de la torsión (7.26) se obtiene,

$$\mathsf{M}_T=2C\int_A f_C(x_1,x_2)\,dA \quad \Rightarrow \quad C=\frac{\mathsf{M}_T}{2\int_A f_C(x_1,x_2)\,dA} \quad (7.46)$$

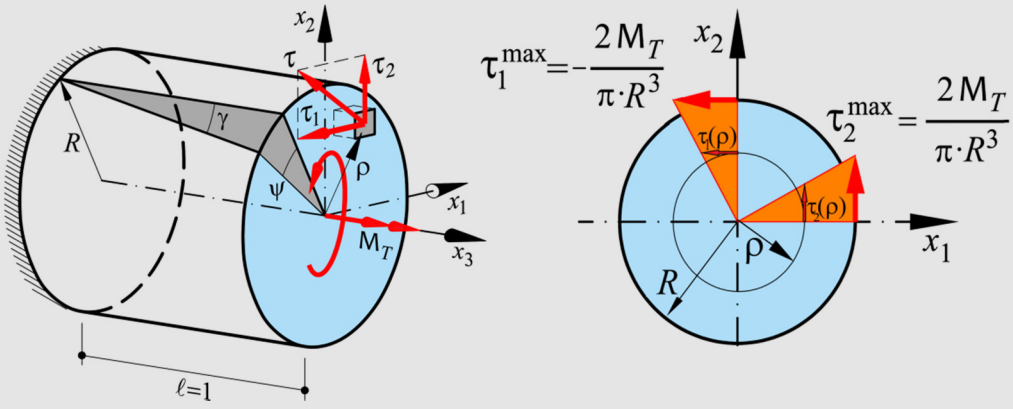
De esta otra forma también se obtiene C y, con ésta, el ángulo de torsión específico θ.

$$\theta = -\frac{C\left[\dfrac{\partial^2 f_C(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 f_C(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\right]}{2G} \tag{7.47}$$

Para ambos procedimientos, substituyendo la función de contorno $f_C(x_1,x_2)$ en (7.45) o (7.47) se obtiene el ángulo específico de torsión. A partir de allí, se puede obtener la magnitud de la tensión tangencial a través de la ecuación (7.23), esto es

$$\tau = \frac{d\phi}{d\ell} = C\frac{df_C}{d\ell} = C\left(\frac{\partial f_C}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\ell} + \frac{\partial f_C}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\ell}\right) \quad \text{con:} \quad \begin{cases} \cos\beta = \ell_1 = \dfrac{dx_1}{d\ell} \\ \cos\alpha = \ell_2 = \dfrac{dx_2}{d\ell} \end{cases} \tag{7.48}$$

Ejemplo 7-1: Resolver el problema de torsión en un eje cilíndrico macizo mostrando que, en este caso, la teoría de Saint Venant conduce a la solución de la teoría de Coulomb.



a) Teoría de Coulomb:

$$\tau = \rho G\theta \;\; ; \;\; \theta = \frac{M_T}{G I_p} \;\; ; \;\; I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

de donde se obtiene $\theta = \dfrac{2\,\mathsf{M}_T}{G\,\pi\,R^4} \Rightarrow |\tau| = \left|\dfrac{\mathsf{M}_T}{I_p}\rho\right| \Rightarrow \left|\tau^{\max}\right| = \left|\dfrac{2\,\mathsf{M}_T}{\pi R^3}\right|$ y $\Psi = \dfrac{2\,\mathsf{M}_T}{G\,\pi\,R^4}\,\ell$

b) Teoría de Saint Venant:

Se define la función de tensión de Prandtl a partir de la ecuación del perímetro de la sección transversal, o sea la ecuación de la circunferencia multiplicada por la constante C,

$$\phi = C \cdot f_C(x_1, x_2) = C \cdot \left(\frac{x_1^2}{R^2} + \frac{x_2^2}{R^2} - 1 \right)$$

Utilizando la ecuación de equilibrio de la torsión (7.26) se obtiene la función de Prantl,

$$\mathsf{M}_T = 2\int_A \phi\, dA = 2\,C \int_A f_C(x_1, x_2)\, dA$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{\mathsf{M}_T}{2\int_A f_C(x_1, x_2)\, dA} = \frac{\mathsf{M}_T}{R\,\dfrac{2}{R^2}\left[\underbrace{\int_A x_1^2\, dA + \int_A x_2^2\, dA}_{I_p} - R^2 \int_A dA \right]}$$

$$C = \frac{\mathsf{M}_T}{\dfrac{2}{R^2}\left[\dfrac{\pi \cdot R^4}{2} - \pi \cdot R^4 \right]} = -\frac{\mathsf{M}_T}{\pi \cdot R^2} \quad \Rightarrow \quad \phi = -\frac{\mathsf{M}_T}{\pi \cdot R^2} \cdot \left(\frac{x_1^2}{R^2} + \frac{x_2^2}{R^2} - 1 \right)$$

$$\phi = -\frac{\mathsf{M}_T}{\pi \cdot R^4} \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 - R^2 \right)$$

y a partir de ésta resulta la tensión:

$$\tau_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{2\,\mathsf{M}_T}{\pi \cdot R^4} \cdot x_2 \quad ; \quad \tau_1^{\max} = -\frac{2\,\mathsf{M}_T}{\pi \cdot R^3}$$

$$-\tau_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = -\frac{2\,\mathsf{M}_T}{\pi \cdot R^4} \cdot x_1 \quad ; \tau_2^{\max} = \frac{2\,\mathsf{M}_T}{\pi \cdot R^3}$$

$$\tau = \frac{d\phi}{d\ell} = \left(-\frac{2\,\mathsf{M}_T}{\pi \cdot R^4} x_2 \right) \cos\alpha - \left(\frac{2\,\mathsf{M}_T}{\pi \cdot R^4} x_1 \right) \cos\beta = -\frac{2\,\mathsf{M}_T}{\pi \cdot R^4} \overbrace{\left(x_2 \cos\alpha + x_1 \sin\alpha \right)}^{\rho}$$

Valores de tensión que coinciden con los obtenidos por la teoría de Coulomb.

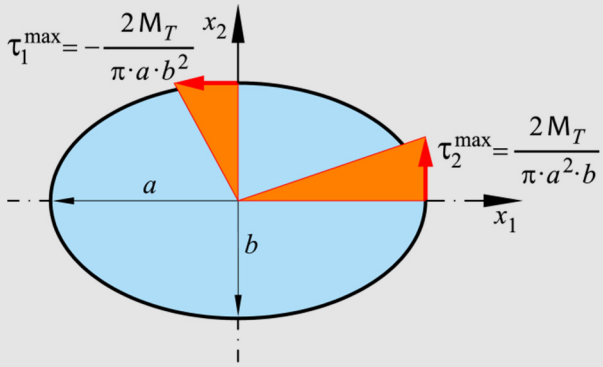
El ángulo específico de torsión resulta,

$$\frac{\partial^2 \phi(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \phi(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}=-2G\theta$$

$$-2\frac{2M_T}{\pi R^4}=-2G\theta \;\Rightarrow\; \theta=\frac{2M_T}{G\pi R^4}$$

Resultando también el mismo valor que en la teoría de Coulomb.

Ejemplo 7-2: Resolver el problema de torsión en un eje macizo de sección elíptica.



De la misma forma que para la sección circular, ahora se define la función de tensión de Prandtl a partir de la ecuación del perímetro de la sección transversal, esto es entonces la ecuación de una elipse multiplicada por la constante C,

$$\phi=C\cdot f_C(x_1,x_2)=C\cdot\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-1\right)$$

Utilizando la ecuación de equilibrio de la torsión (7.26), se obtiene la función de Prantl,

$$M_T=2C\int_A f_C(x_1,x_2)\,dA \;\Rightarrow\; C=\frac{M_T}{2\int_A f(x_1,x_2)\,dA}=\frac{M_T}{2\left[\int_A\frac{x_1^2}{a^2}dA+\int_A\frac{x_2^2}{b^2}dA-\int_A dA\right]}$$

$$C=\frac{\mathrm{M}_T}{2\cdot\left[\dfrac{b\pi a^3}{4a^2}+\dfrac{a\pi b^3}{4b^2}-\pi ba\right]}=-\frac{\mathrm{M}_T}{b\cdot\pi\cdot a}\ ;\ \begin{cases}\displaystyle\int_A x_1^2\,dA=4\int_0^b\left[\int_0^{x_1=\sqrt{\left(1-x_2^2/b^2\right)a^2}}x_1^2\,dx_1\right]dx_2=\frac{b\pi a^3}{4}\\ \displaystyle\int_A x_2^2\,dA=4\int_0^a\left[\int_0^{x_2=\sqrt{\left(1-x_1^2/a^2\right)b^2}}x_2^2\,dx_2\right]dx_1=\frac{a\pi b^3}{4}\\ \displaystyle\int_A dA=4\int_0^a\left[\int_0^{x_1=\sqrt{\left(1-x_2^2/b^2\right)a^2}}dx_2\right]dx_1=\pi ba\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \phi=-\frac{\mathrm{M}_T}{b\cdot\pi\cdot a}\cdot\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-1\right)$$

y a partir de esta función de tensión, resulta la magnitud de la tensión:

$$\tau_1=\frac{\partial\phi}{\partial x_2}=-\frac{2\mathrm{M}_T}{\pi\cdot a\cdot b^3}\cdot x_2\ ;\quad \tau_1^{\max}=-\frac{2\mathrm{M}_T}{\pi\cdot a\cdot b^2}$$

$$-\tau_2=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=-\frac{2\mathrm{M}_T}{\pi\cdot b\cdot a^3}\cdot x_1\ ;\quad \tau_2^{\max}=\frac{2\mathrm{M}_T}{\pi\cdot b\cdot a^2}$$

$$\tau=\frac{d\phi}{d\ell}=-\frac{2\mathrm{M}_T}{\pi\cdot a\cdot b^3}\cdot x_2\cos\alpha-\frac{2\mathrm{M}_T}{\pi\cdot b\cdot a^3}\cdot x_1\cos\beta=-\frac{2\mathrm{M}_T}{\pi}\left(\frac{\cos\alpha}{a\cdot b^3}x_2+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{b\cdot a^3}x_1\right)$$

El ángulo específico de torsión resulta,

$$\frac{\partial^2\phi(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\phi(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}=-2G\theta$$

$$-\frac{2\mathrm{M}_T}{\pi\cdot a\cdot b^3}-\frac{2\mathrm{M}_T}{\pi\cdot b\cdot a^3}=-2G\theta\ \Rightarrow\theta=\mathrm{M}_T\frac{a^2+b^2}{G\pi a^3b^3}$$

7.3.5 Teoría de Saint Venant – Particularización a secciones de paredes delgadas

Dada una sección transversal delgada sometida a un momento torsor, en la forma que se muestra en la Figura 7.19, se tiene en este caso la función de Prandtl con la forma aproximada a la que se muestra en la Figura 7.19a). No obstante, la forma de esta función no difiere mucho de un casquete de cilindro como se muestra en la Figura 7.19b). Si en vez de utilizar la función verdadera de Prandtl se utili-

za esta aproximación, se obtiene un buen resultado y a la vez una expresión simple para evaluar la tensión y el ángulo específico de torsión. Para este caso particular, la ecuación diferencial de la torsión (7.36) se reduce la siguiente expresión,

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi(x_1)}{\partial x_1^2} = -2\,G\,\theta} \tag{7.49}$$

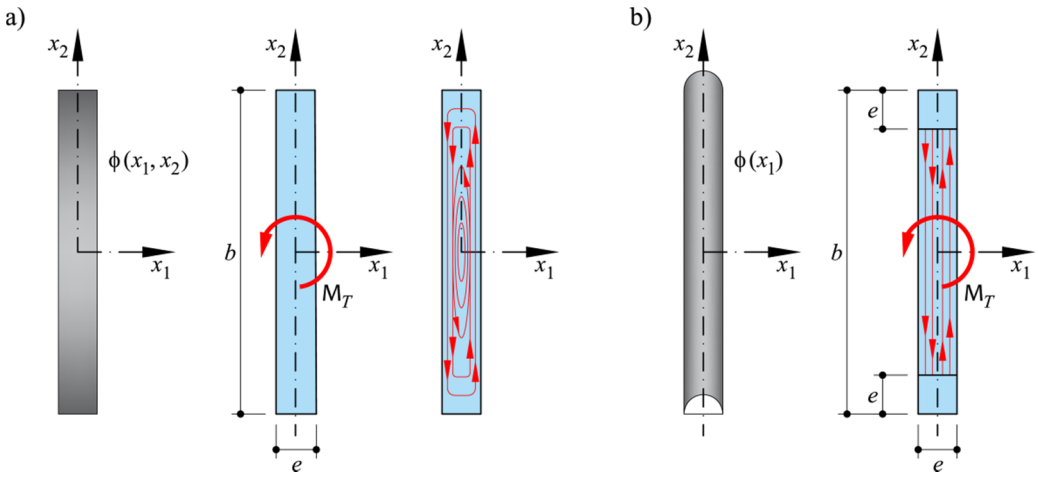


Figura 7.19 – Sección delgada sometida a momento torsor. a) Función de Prandtl para una sección delgada b) Aproximación de la función de Prandtl en una sección delgada.

Integrando esta ecuación dos veces e introduciendo las correspondientes condiciones de contorno, resulta la forma simplificada de la función de Prandtl, que se representa en la Figura 7.20, esto es,

$$\frac{\partial \phi(x_1)}{\partial x_1} = -2\,G\,\theta \cdot x_1 + C_1 \quad \Rightarrow \quad \phi(x_1) = -G\,\theta \cdot x_1^2 + C_1\,x_1 + C_2 \tag{7.50}$$

$$\text{Condiciones de Contorno:} \begin{cases} \text{para } x_1 = 0 \;\rightarrow \dfrac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ \text{para } x_1 = \dfrac{e}{2} \;\rightarrow \varphi(x_1) = 0 \Rightarrow -G\theta \cdot \dfrac{e^2}{4} + C_2 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow C_2 = G\theta \cdot \dfrac{e^2}{4} \end{cases}$$

Resultando,

$$\phi(x_1) = -G\theta \cdot x_1^2 + G\theta \cdot \frac{e^2}{4} = G\theta \cdot \left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 - x_1^2 \right] \quad \Rightarrow \quad \delta = \phi(x_1 = 0) = G\theta \cdot \frac{e^2}{4} \qquad (7.51)$$

La tensión será,

$$\tau_2(x_1) = -\frac{\partial \phi(x_1)}{\partial x_1} = 2\,G\theta \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad \tau_2^{\max} = \tau_2(x_1 = \frac{e}{2}) = G\theta \cdot e \qquad (7.52)$$

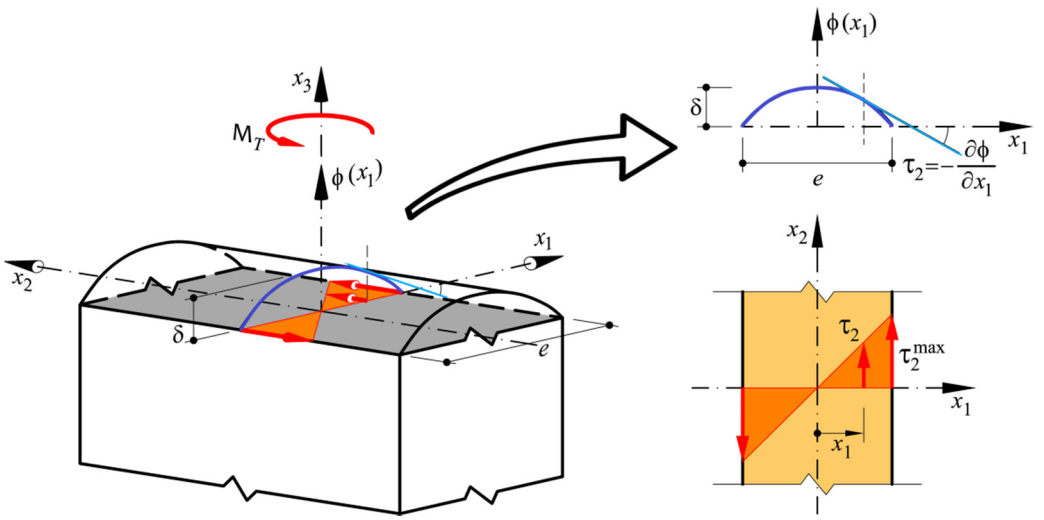


Figura 7.20 – Sección delgada sometida a momento torsor. Detalle de la función de Prandtl en una sección delgada.

Sustituyendo la función de Prandtl en la ecuación de equilibrio (7.26), se obtiene la expresión del momento torsor,

$$M_T = 2\int_A \phi\, dA = 2 \cdot V^{\phi} = 2\left(\frac{2}{3} \cdot \delta \cdot e \cdot b\right) = 2\left[\frac{2}{3} \cdot \left(G\theta \cdot \frac{e^2}{4}\right) \cdot e \cdot b\right]$$
$$M_T = \frac{1}{3} \cdot G\theta \cdot e^3 \cdot b \qquad (7.53)$$

Y de esta última se obtiene el ángulo específico de torsión y el módulo de torsión que también puede obtenerse a partir de la ecuación (7.41),

$$\theta = \frac{M_T}{\frac{1}{3}\cdot G\cdot e^3\cdot b} = \frac{M_T}{GJ} \qquad \Rightarrow \quad J = \frac{1}{3}e^3\cdot b \tag{7.54}$$

Sustituyendo el ángulo específico de torsión en la ecuación (7.52), se obtiene la tensión máxima en función del momento torsor aplicado,

$$\boxed{\tau_2^{\max} = G\theta\cdot e = \frac{M_T}{\frac{1}{3}\cdot e^2\cdot b} = \frac{M_T}{\frac{1}{3}\cdot e\cdot A}} \tag{7.55}$$

Siendo A el área de la sección transversal.

7.3.6 Teoría de Saint Venant – Particularización a secciones delgadas, abiertas compuestas

Las expresiones que rigen el comportamiento mecánico de estas secciones compuestas surgen de forzar la compatibilidad al giro, estableciendo el mismo ángulo de torsión específica para las diversas secciones simples definidas en la sección anterior (ver Figura 7.21). Eso es,

$$\begin{aligned}
&\theta = \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n \\
&\theta = \frac{M_T^1}{\frac{1}{3}\cdot G\cdot e_1^3\cdot b_1} = \frac{M_T^2}{\frac{1}{3}\cdot G\cdot e_2^3\cdot b_2} = \cdots = \frac{M_T^n}{\frac{1}{3}\cdot G\cdot e_n^3\cdot b_n} \\
&M_T = M_T^1 + M_T^2 + \cdots + M_T^n \quad ; \quad M_T^i = \left(\frac{1}{3}\cdot G\cdot e_i^3\cdot b_i\right)\theta = \frac{G\theta}{3}e_i^3\, b \\
&M_T = \frac{\theta G}{3}\left[\sum_{i=1}^{n} e_i^3\cdot b_i\right] \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{M_T}{\frac{1}{3}\cdot G\left[\sum_{i=1}^{n} e_i^3\cdot b_i\right]}
\end{aligned} \tag{7.56}$$

Sustituyendo la última de las ecuaciones (7.56) en la primera de ellas, se obtiene la relación entre el momento torsor total y el que absorbe cada subsección,

$$\theta = \frac{M_T^n}{\frac{1}{3} G e_n^3 \cdot b_n} = \frac{M_T}{\frac{1}{3} G \left[\sum_{i=1}^{n} e_i^3 \cdot b_i \right]} \quad \Rightarrow \quad M_T^n = \frac{e_n^3 \cdot b_n}{\sum_{i=1}^{n} e_i^3 \cdot b_i} M_T \tag{7.57}$$

Además, sustituyendo el ángulo de torsión específica en la ecuación (7.52) se obtiene la magnitud de la tensión para las n partes de la sección en la dirección local x_2 , normal a la dirección local x_1 (ver Figura 7.20)

$$\boxed{\tau_2^n(x_1) = 2 G \theta \cdot x_1 = \frac{2 M_T^n}{\frac{1}{3} \cdot e_n^3 \cdot b_n} \cdot x_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\tau_2^n\right)^{\max} = \tau_2^n(x_1 = \frac{e_n}{2}) = \frac{M_T^n}{\frac{1}{3} \cdot e_n^2 \cdot b_n}} \tag{7.58}$$

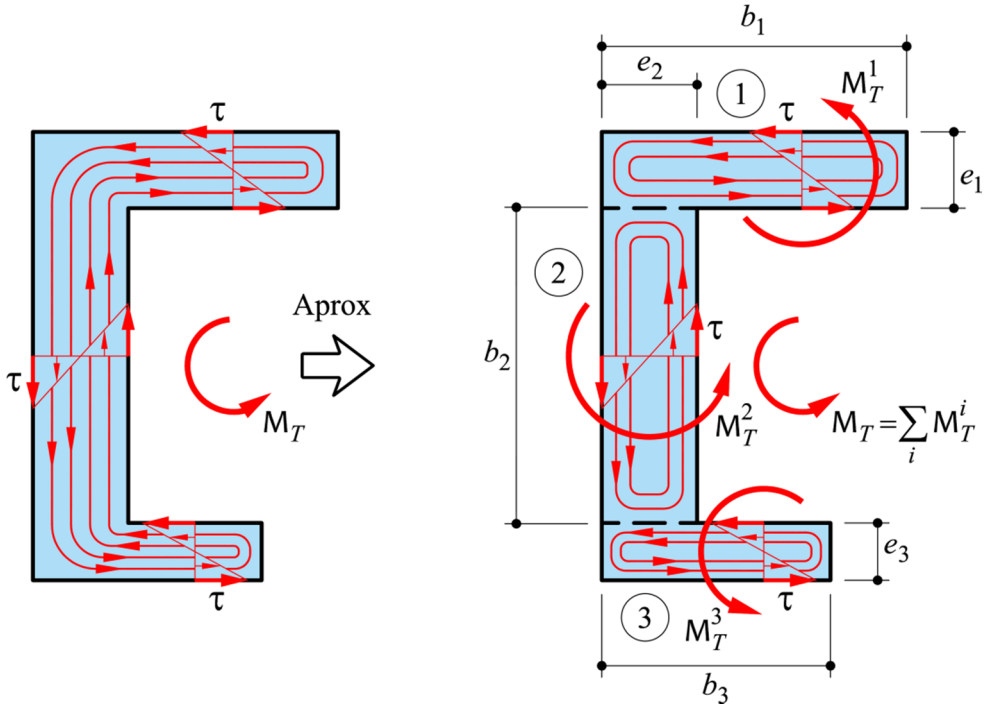


Figura 7.21 – Sección delgada compuesta, sometida a momento torsor. Simplificación de la función de Prandtl mediante la compatibilidad al giro de las subsecciones que componen la sección transversal.

7.3.7 Teoría de Saint Venant – Particularización a secciones cerradas de paredes delgadas

Se supone una simplificación para la función de Prandtl, tal como se muestra a continuación (ver Figura 7.22) y luego se la sustituye en la ecuación de equilibrio (7.30), resultando así la relación entre momento torsor y la tensión,

$$\boxed{\tau = \tau_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\phi_1}{e}} \quad \rightarrow \quad \phi_1 = \tau e = \text{cte}$$
$$\mathsf{M}_T = 2 \int_{A^{\text{neta}}} \phi \, dA - \underbrace{2 \phi_0 \, A_0}_{0} + 2 \phi_1 \, A_1 \cong 2 \underbrace{\phi_1 \, A^{\text{med}}}_{V_\phi} \tag{7.59}$$

Resultando, de la ecuación (7.59), las siguientes relaciones que permiten evaluar el comportamiento mecánico a torsión de una sección transversal cerrada de paredes delgadas,

$$\mathsf{M}_T = 2 \tau e \, A^{\text{med}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{\mathsf{M}_T}{2 e \, A^{\text{med}}}} \tag{7.60}$$

Conocida esta última como la *fórmula de Bredt*, pues deriva directamente de la ecuación (7.26).

El ángulo específico de torsión resulta ahora de la ecuación (7.39),

$$\oint_{f_c} \tau \, df_C = 2 G \theta \, A^{\text{med}} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\oint_{f_c} \tau \, df_C}{2 G \, A^{\text{med}}}$$
$$\theta = \frac{\frac{\mathsf{M}_T}{2 A^{\text{med}}} \oint_{f_C} \frac{1}{e} \, df_C}{2 G \, A^{\text{med}}} = \frac{\mathsf{M}_T \oint_{f_C} \frac{1}{e} \, df_C}{4 G \left(A^{\text{med}} \right)^2} = \frac{\mathsf{M}_T \sum_i \frac{1}{e_i} \left(f_C \right)_i}{4 G \left(A^{\text{med}} \right)^2} \tag{7.61}$$

Para $e = cte$ la ecuación anterior adquiere la siguiente forma,

$$\theta = \frac{M_T \sum_i (f_C)_i}{4eG\left(A^{med}\right)^2} = \frac{M_T}{G\left[\dfrac{4e\left(A^{med}\right)^2}{\sum_i (f_C)_i}\right]} = \frac{M_T}{GJ}$$

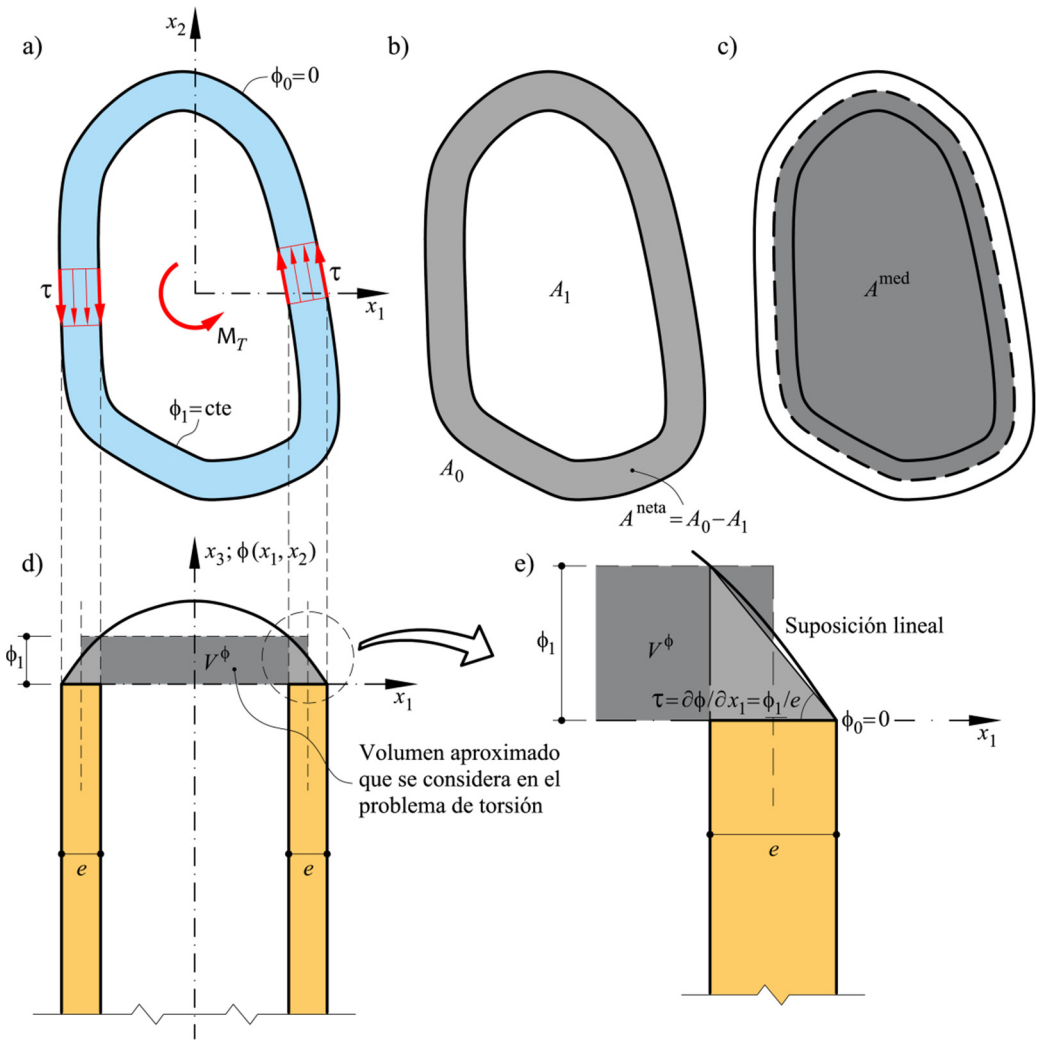


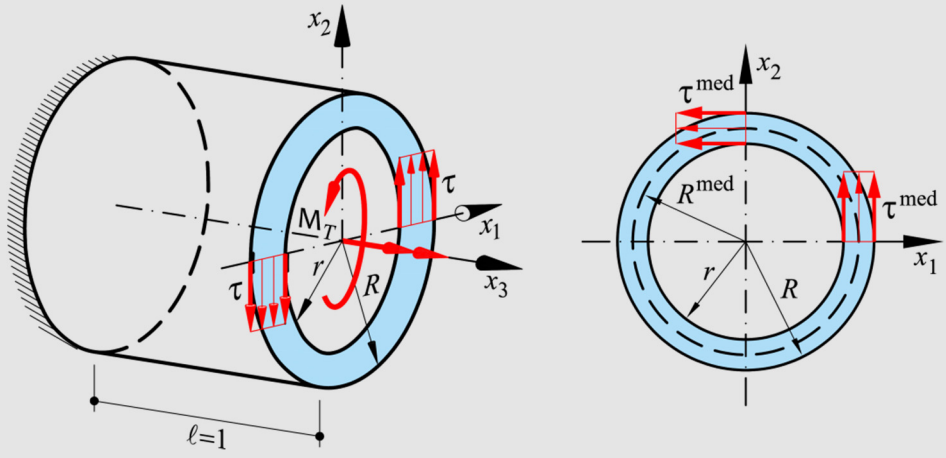
Figura 7.22 – Sección delgada cerrada; a) Distribución tensional, b) definición de las áreas consideradas, c) Definición del área media, d) Función de Prandtl y la aproximación adoptada, e) detalle de la función de Prandtl y su aproximación.

Para $\tau = cte$, la ecuación anterior se simplifica de la siguiente forma,

$$\tau \oint_{f_C} df_C = 2 G \theta A^{\text{med}} \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{2 G \theta A^{\text{med}}}{\oint_{f_C} df_C}$$

$$\theta = \frac{\mathrm{M}_T}{G J} \quad \Rightarrow \quad J = \frac{4\left(A^{\text{med}}\right)^2}{\oint_{f_C} \frac{df_C}{e}} \overset{e=cte}{=} \frac{4 e \left(A^{\text{med}}\right)^2}{\sum_i \left(f_C\right)_i} \tag{7.62}$$

Ejemplo 7-3: Dado un eje de sección anular como el que se muestra en la figura, comparar la aproximación de la fórmula de Bredt a los resultados que se obtienen de aplicar la teoría de Coulomb.



$$\tau^{\text{med}} = \frac{2 \mathrm{M}_T R^{\text{med}}}{\pi (R^4 - r^4)} \cong \frac{\mathrm{M}_T}{2 A^{\text{med}} e} = \frac{2 \mathrm{M}_T}{\pi e \left(R + r\right)^2}$$

a) Teoría de Saint Venant – Formula de Bredt:

Utilizando la fórmula de Bredt (ec. (7.60)), resulta de forma directa la aproximación de la tensión media obtenida anteriormente. Esto es,

$$\tau^{\text{med}} \cong \frac{\mathrm{M}_T}{2 e A^{\text{med}}} = \frac{\mathrm{M}_T}{2\pi \left(R^{\text{med}}\right)^2 e} = \frac{2 \mathrm{M}_T}{\pi e \left(R + r\right)^2}$$

y el ángulo de torsión específica resulta de (7.61),

$$\theta = \frac{M_T \dfrac{2\pi R^{med}}{e}}{4G\left[\left(\pi R^{med}\right)^2\right]^2} = \frac{M_T}{2\pi e G\left(R^{med}\right)^3}$$

b) Teoría de Coulomb (ecuación (7.6))

$$\tau = \rho G\theta \;\; ; \;\; \theta = \frac{M_T}{G I_p} \;\; ; \;\; I_p = \int_r^R \rho^2 dA = \int_r^R \rho^2 (2\pi\rho\, d\rho) = \frac{\pi}{2}\rho^4\Big|_r^R = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right)$$

De estas expresiones se obtiene

$$\theta = \frac{2M_T}{G\pi(R^4 - r^4)} \Rightarrow \tau = \frac{2M_T\rho}{\pi(R^4 - r^4)} \quad \tau^{max} = \frac{2M_T R}{\pi(R^4 - r^4)}$$

Y de esta última se deduce que la tensión media vale,

$$\tau^{med} = \frac{2M_T R^{med}}{\pi(R^4 - r^4)}$$

La tensión media también puede escribirse de otra forma si el momento de inercia polar se expresa en función del $R^{med} = (R + r)/2$. Esto es,

$$\tau^{med} = \tau(\rho = R^{med}) = R^{med} G\theta = R^{med} G\frac{M_T}{G I_p} \begin{cases} I_p = \int_{R^{med}-e/2}^{R^{med}+e/2} \rho^2 dA = \int_{R^{med}-e/2}^{R^{med}+e/2} \rho^2 (2\pi\rho\, d\rho) = \\ \quad = \dfrac{\pi}{2}\rho^4\Big|_{R^{med}-e/2}^{R^{med}+e/2} = \dfrac{R^{med} e}{2}\left(4A^{med} + \pi e^2\right) \end{cases}$$

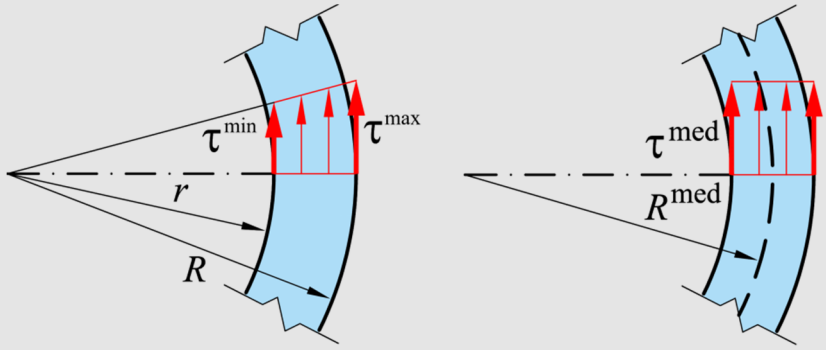
$$= \frac{M_T}{2A^{med} e + \dfrac{\pi e^3}{2}} \quad \text{Para } e \text{ pequeño} \Rightarrow \tau^{med} \cong \frac{M_T}{2A^{med} e} = \frac{M_T}{2\pi\left(R^{med}\right)^2 e} = \frac{2M_T}{\pi e\left(R + r\right)^2}$$

Ejemplo 7-4: Dado un eje de sección anular como el que se muestra en el **Ejemplo 7-3**, cuyas dimensiones son $R = 0.125m$ y $r = 0.12m$. Obtener y comparar los resultados que se obtienen utilizando la fórmula de Bredt (simplificación de la teoría de Saint Venant) y los que se obtienen de aplicar la teoría de Coulomb. Suponer que el eje está sometido a un momento torsor constante $M_T = 120\,kN \cdot m$ y que el módulo elástico transversal del material es $G = 85000\,MPa$.

a) Teoría de Coulomb:

Utilizando las expresiones de Coulomb (7.6) para ejes de sección anular se obtienen los siguientes resultados

$$I_p = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right) = \frac{\pi}{2}\left(0.125^4 - 0.12^4\right) = 5.777\times10^{-5}\ m^4$$



$$\theta = \frac{2M_T}{G\pi(R^4 - r^4)} = \frac{2\cdot120\,kNm}{85\times10^6\,\frac{kN}{m^2}\,\pi\left[(0.125\,m)^4 - (0.12\,m)^4\right]} = 0.02444\,\frac{rad}{m}$$

$$\tau^{\min} = \frac{2M_T r}{\pi(R^4 - r^4)} = \frac{2\cdot120\,kNm\cdot0.12\,m}{\pi\left[(0.125\,m)^4 - (0.12\,m)^4\right]} = 2.49243\times10^5\,\frac{kN}{m^2}$$

$$\tau^{\max} = \frac{2M_T R}{\pi(R^4 - r^4)} = \frac{2\cdot120\,kNm\cdot0.125\,m}{\pi\left[(0.125\,m)^4 - (0.12\,m)^4\right]} = 2.59628\times10^5\,\frac{kN}{m^2}$$

$$\tau^{\text{med}} = \frac{2M_T R^{\text{med}}}{\pi(R^4 - r^4)} = \frac{2\cdot120\,kNm\cdot0.1225\,m}{\pi\left[(0.125\,m)^4 - (0.12\,m)^4\right]} = 2.54435\times10^5\,\frac{kN}{m^2}$$

La tensión media calculada corresponde a la magnitud de la misma en la mitad del espesor de la pared de la sección transversal y para ello se ha utilizado en el cálculo el radio medio $R^{\text{med}} = (R+r)/2 = 0.1225\,m$.

b) Teoría de Saint Venant – Formula de Bredt:

Utilizando la fórmula de Bredt (ec. (7.60)), se obtiene en forma directa la aproximación de la tensión media obtenida anteriormente. Esto es,

$$A^{\text{med}} = \pi\left(R^{\text{med}}\right)^2 = \pi\left(0.1225\,m\right)^2 = 0.04514\,m^2$$

$$e = R - r = 0.125\,m - 0.12\,m = 0.005\,m$$

$$\tau^{\text{med}} \cong \frac{\mathsf{M}_T}{2\,e\,A^{\text{med}}} = \frac{\mathsf{M}_T}{2\pi\left(R^{\text{med}}\right)^2 e} = \frac{120\,kNm}{2\cdot\pi\left(0.1225\,m\right)^2 0.005\,m} = 2.54541\times10^5\ \frac{kN}{m^2}$$

y el ángulo de torsión específico resulta de (7.61),

$$\theta = \frac{\mathsf{M}_T \dfrac{2\pi R^{\text{med}}}{e}}{4G\pi^2\left(R^{\text{med}}\right)^4} = \frac{\mathsf{M}_T}{2\pi e G\left(R^{\text{med}}\right)^3}$$

$$\theta = \frac{120\,kNm}{2\cdot\pi 0.005\,m\,85\times10^6\,\dfrac{kN}{m^2}\left(0.1225\,m\right)^3} = 0.02444579\ \frac{rad}{m}$$

Como puede verse, para este caso de un cilindro de paredes delgadas, hay una gran similitud entre los resultados obtenidos por ambas teorías.

Ejemplo 7-5: El tubo de acero de la figura, de módulo elástico transversal $G = 84500\,MPa$, está sometido a un momento torsor $\mathsf{M}_T = 11.53\,kN\,m$. Obtener las tensiones tangenciales medias en todas las paredes y el ángulo de torsión específico.

Determinación del área media

$$\left.\begin{aligned} \ell_{AB} = \ell_{CD} &= 0.1143 + 2\left(\frac{0.00635}{2}\right) = 0.12065\,m \\ \ell_{BC} = \ell_{DA} &= 0.23495 + \left(\frac{0.00635}{2}\right) + \left(\frac{0.0127}{2}\right) = 0.244475\,m \end{aligned}\right\} A^{\text{med}} = \ell_{AB}\cdot\ell_{BC}$$

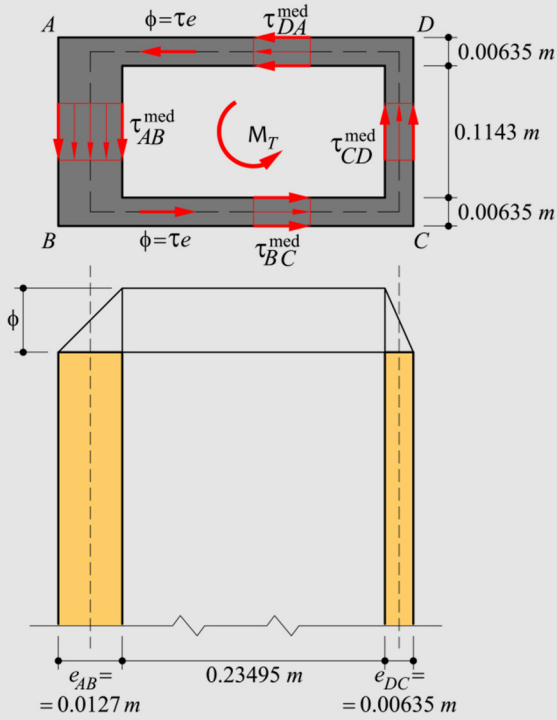
$$A^{\text{med}} = \left[0.1143 + 2\left(\frac{0.00635}{2}\right)\right]\cdot\left[0.23495 + \left(\frac{0.00635}{2}\right) + \left(\frac{0.0127}{2}\right)\right] = 0.02949\,m^2$$

Utilizando la fórmula de Bredt se obtiene las tensiones en los lados de la sección,

$$\tau_{AB}^{\text{med}} \cong \frac{M_T}{2\, e_{AB}\, A^{\text{med}}} = \frac{11.53}{2 \cdot 0.0127 \cdot 0.02949} = 1.5389 \times 10^4 \ \frac{kN}{m^2}$$

$$\tau_{BC}^{\text{med}} \cong \frac{M_T}{2\, e_{BC}\, A^{\text{med}}} = \frac{11.53}{2 \cdot 0.00635 \cdot 0.02949} = 3.0779 \times 10^4 \ \frac{kN}{m^2}$$

$$\tau_{CD}^{\text{med}} = \tau_{BC}^{\text{med}} = \tau_{DA}^{\text{med}}$$



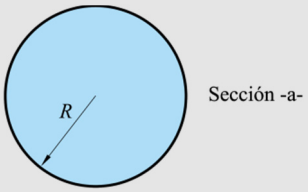
El ángulo de torsión específica resulta de (7.61),

$$\theta = \frac{M_T \sum_i \frac{1}{e_i} (f_C)_i}{4\, G \left(A^{\text{med}} \right)^2} = \frac{11.53 \cdot \left(\frac{\ell_{AB}}{e_{AB}} + \frac{\ell_{BC}}{e_{BC}} + \frac{\ell_{CD}}{e_{CD}} + \frac{\ell_{DA}}{e_{DA}} \right)}{4 \cdot 84.5 \times 10^6 \cdot (0.029495)^2} = 0.004136 \frac{rad}{m}$$

Ejemplo 7-6: Se consideran tres piezas constituidas del mismo material cuyas secciones transversales se muestran en la figura: Sección –a-: maciza, Sección -b-: anular delgada cerrada y Sección –c-: anular delgada abierta. Las tres secciones tienen igual módulo elástico transversal G, y resistencia máxima $\tau^{\max}$. Obtener el máximo momento torsor $M_T^{\max}$ que puede soportar cada una de ellas.

a) Sección circular maciza - Teoría de Coulomb

$$(M_T^{\max})_A = G I_p \theta = G\frac{\pi R^4}{2}\theta = G\frac{\pi R^4}{2}\frac{\tau^{\max}}{GR} = \tau^{\max}\frac{\pi R^3}{2}$$

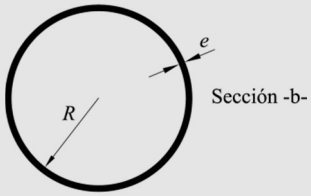


Sección -a-

b) Sección anular delgada - Fórmula de Bredt

$$(M_T^{\max})_B = \tau^{\max}(2e\,A^{med}) = \tau^{\max}(2e\pi R^2)$$

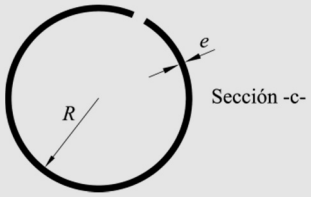
También puede obtenerse a partir de la teoría de Coulomb



Sección -b-

c) Sección anular delgada abierta

$$(M_T^{\max})_C = \tau^{\max}\left(\frac{1}{3}e^2 b\right) = \tau^{\max}\frac{2}{3}\pi R e^2$$



Sección -c-

7.3.8 Teoría de Saint Venant – Particularización a secciones cerradas multicelulares de paredes delgadas

La formulación para evaluar las secciones cerradas multicelulares de paredes delgadas resulta de establecer a la vez el equilibrio en cada celda, ecuación (7.39), junto al equilibrio global en la sección completa, ecuación (7.31) (ver Figura 7.23). Esto se formula de la siguiente forma,

$$\begin{cases} \text{- Equilibrio global:} \quad \mathrm{M}_T \cong \sum_{i=1} 2\phi_i A_i^{\text{med}} \\ \text{- Equilibrio de} \\ \text{cada celda:} \quad \oint_{f_{C_i}} \tau \, df_C = 2G\theta A_i^{\text{med}} \;\Rightarrow\; \int_{f_{C_i}} \tau_i \, df_C + \sum_j \int_{f_{C_{ij}}} \tau_{ij} \, df_c = 2G\theta A_i^{\text{med}} \\ \phi_i \int_{f_{C_i}} \frac{1}{e_i} df_C + \sum_j \left(\phi_i - \phi_j\right) \int_{f_{C_{ij}}} \frac{1}{e_{ij}} \, df_C = 2G\theta A_i^{\text{med}} \end{cases} \tag{7.63}$$

En estas últimas ecuaciones, $\tau_i = \phi_i / e_i$ representa la tensión en la celda *"i"*, en la pared de espesor e_i que la celda no comparte con ninguna otra celda (ver Figura 7.23), $\tau_{ij} = (\phi_i - \phi_j)/e_{ij}$ es la tensión en la celda *"i"*, en una pared de espesor e_{ij} que esta celda comparte con la celda *"j"*, mientras que ϕ_i y ϕ_j son los flujos en las respectivas celdas contiguas.

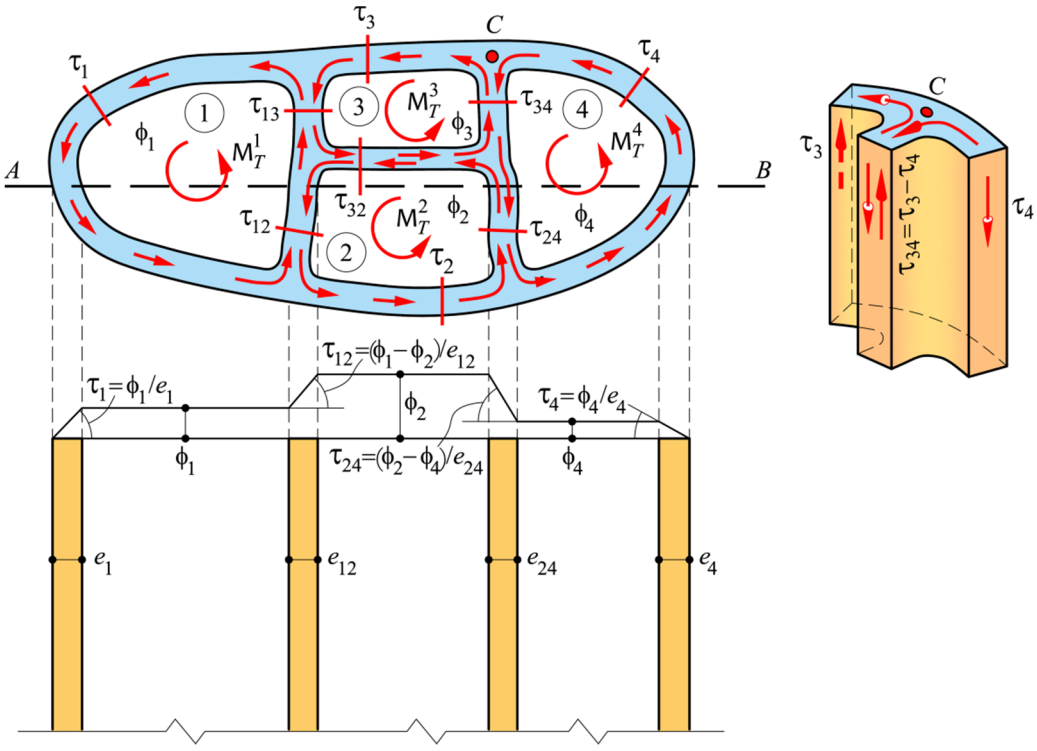


Figura 7.23 – Sección cerrada multicelular de paredes delgadas.

Para resolver el problema de torsión en la hipotética sección de la Figura 7.23, se necesitan cinco ecuaciones para dar respuesta a las cinco incógnitas del problema: θ, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4. Estas ecuaciones serán,

$$\begin{cases} M_T \cong 2\phi_1 A_1^{\text{med}} + 2\phi_2 A_2^{\text{med}} + 2\phi_3 A_3^{\text{med}} + 2\phi_4 A_4^{\text{med}} \\ \phi_1 \int_{f_{C_1}} \frac{df_C}{e_1} + (\phi_1 - \phi_2) \int_{f_{C_{12}}} \frac{df_C}{e_{12}} + (\phi_1 - \phi_3) \int_{f_{C_{13}}} \frac{df_C}{e_{13}} = 2G\theta A_1^{\text{med}} \\ \phi_2 \int_{f_{C_2}} \frac{df_C}{e_2} + (\phi_2 - \phi_1) \int_{f_{C_{21}}} \frac{df_C}{e_{21}} + (\phi_2 - \phi_3) \int_{f_{C_{23}}} \frac{df_C}{e_{23}} + (\phi_2 - \phi_4) \int_{f_{C_{24}}} \frac{df_C}{e_{24}} = 2G\theta A_2^{\text{med}} \\ \phi_3 \int_{f_{C_3}} \frac{df_C}{e_3} + (\phi_3 - \phi_1) \int_{f_{C_{31}}} \frac{df_C}{e_{31}} + (\phi_3 - \phi_2) \int_{f_{C_{32}}} \frac{df_C}{e_{32}} + (\phi_3 - \phi_4) \int_{f_{C_{34}}} \frac{df_C}{e_{34}} = 2G\theta A_3^{\text{med}} \\ \phi_4 \int_{f_{C_4}} \frac{df_C}{e_4} + (\phi_4 - \phi_2) \int_{f_{C_{42}}} \frac{df_C}{e_{42}} + (\phi_4 - \phi_3) \int_{f_{C_{43}}} \frac{df_C}{e_{43}} = 2G\theta A_2^{\text{med}} \end{cases}$$

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones, se procede a calcular las tensiones en las paredes de la sección,

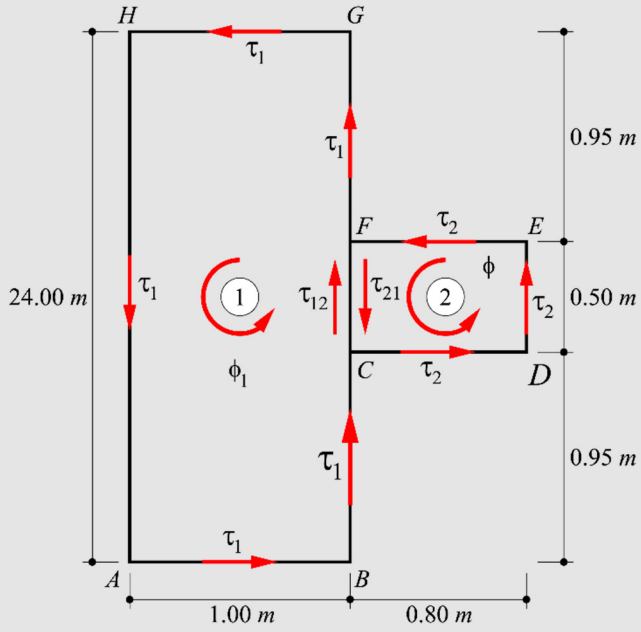
$$\tau_1 = \phi_1 / e_1, \tau_2 = \phi_2 / e_2, \tau_3 = \phi_3 / e_3, \tau_4 = \phi_4 / e_4$$
$$\tau_{12} = (\phi_1 - \phi_2) / e_{12}, \tau_{13} = (\phi_1 - \phi_3) / e_{13}$$
$$\tau_{21} = -\tau_{12}, \tau_{23} = (\phi_2 - \phi_3) / e_{23}, \tau_{24} = (\phi_2 - \phi_4) / e_{24}$$
$$\tau_{31} = -\tau_{13}, \tau_{32} = -\tau_{23}, \tau_{34} = (\phi_3 - \phi_4) / e_{34}, \tau_{42} = -\tau_{24}, \tau_{43} = -\tau_{34}$$

Ejemplo 7-7: Un momento torsor de magnitud p_T se aplica en la sección multicelular de la figura. Obtener las tensiones tangenciales medias en todas las paredes y el ángulo de torsión específico.

$e = 0.01m$

$A_1^{med} = 2.40 \cdot 1.00 = 2.40m^2$

$A_2^{med} = 0.50 \cdot 0.80 = 0.40m^2$



Se formula a continuación el sistema de ecuaciones que establece el equilibrio global y el de cada celda,

$$\begin{cases} \text{Equilibrio global:} & \mathsf{M}_T \cong \sum_{i=1} 2\,\phi_i\, A_i^{\text{med}} \\ \text{Equilibrio de cada celda:} & 2G\theta A_i^{\text{med}} = \phi_i \int_{f_{C_i}} \frac{1}{e_i}\, df_C + \sum_j \left(\phi_i - \phi_j\right) \int_{f_{C_{ij}}} \frac{1}{e_{ij}}\, df_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathsf{M}_T \cong 2\,\phi_1\, A_1^{\text{med}} + 2\,\phi_2\, A_2^{\text{med}} \\ 2G\theta A_1^{\text{med}} = \phi_1 \int_{AB+BC+FG+GH+HA} \frac{df_C}{e_1} + \left(\phi_1 - \phi_2\right) \int_{CF} \frac{df_C}{e_{12}} \qquad ; e_1 = e_2 = 0.01m \\ 2G\theta A_2^{\text{med}} = \phi_2 \int_{CD+DE+EF} \frac{df_C}{e_2} + \left(\phi_2 - \phi_1\right) \int_{FC} \frac{df_C}{e_{21}} \end{cases}$$

Sustituyendo las magnitudes numéricas, resulta,

$$\begin{cases} \mathrm{M}_T \cong 4.8\phi_1 + 0.8\phi_2 \\ 4.8G\theta = 630.0\phi_1 + 50.0(\phi_1 - \phi_2) \\ 0.8G\theta = 210.0\phi_2 + 50.0(\phi_2 - \phi_1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{M}_T \cong 4.8\phi_1 + 0.8\phi_2 \\ 0 = 680.0\phi_1 - 50.0\phi_2 - 4.8G\theta \\ 0 = -50\phi_1 + 260.0\phi_2 - 0.8G\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = 0.189144\,\mathrm{M}_T \\ \phi_2 = 0.115131\,\mathrm{M}_T \\ G\theta = 25.59621\,\mathrm{M}_T \end{cases}$$

y de esta última, resultan las siguientes magnitudes de tensión,

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{\phi_1}{e_1} = \dfrac{0.189144\,\mathrm{M}_T}{0.01} = 18.9144\,\mathrm{M}_T \\ \tau_2 = \dfrac{\phi_2}{e_2} = \dfrac{0.115131\mathrm{M}_T}{0.01} = 11.5131\mathrm{M}_T \\ \tau_{12} = \dfrac{\phi_1 - \phi_2}{e_{12}} = \dfrac{(0.189144 - 0.115131)\mathrm{M}_T}{0.01} = 7.4013\,\mathrm{M}_T \\ \theta = 25.59621\dfrac{\mathrm{M}_T}{G} \end{cases}$$

Las unidades resultarán luego de definir las magnitudes de M_T y G, todas ellas en unidades de fuerza expresadas en N (o múltiplos) y unidades de longitud expresadas en m.

7.3.9 Teoría de Saint Venant – Particularización a secciones delgadas compuestas con formas y materiales distintos

La teoría de Saint Venant permite una aproximación muy útil para resolver problemas de torsión en secciones compuestas por subsecciones de formas y materiales diversos. Para ello se parte de establecer la compatibilidad al giro para las *"n"* subsecciones que componen la sección total, estableciendo que el ángulo de torsión específico θ_i en cada subsección *"i"* debe ser el mismo θ que para la sección compuesta. Además, en las secciones de paredes delgadas –cerradas y abiertas– se supone $G \neq \mathrm{cte}$ sobre todo el contorno f_C. Para tener en cuenta esta sin-

gularidad, se adoptará un *módulo de elasticidad transversal arbitrario* único G^* para la sección compuesta.

Estableciendo la condición de compatibilidad y teniendo en cuenta el módulo de torsión J_i y el momento torsor M_T^i correspondiente a cada subsección, se tiene

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n \tag{7.64}$$

$$\theta = \frac{\mathsf{M}_T^1}{G^* J_1^*} = \frac{\mathsf{M}_T^2}{G^* J_2^*} = \cdots = \frac{\mathsf{M}_T^n}{G^* J_2^*} \quad ; J_i^* = \begin{cases} \dfrac{G_i}{3G^*} \cdot e_i^3 \cdot b_i \ ; \text{ Secc. delgadas abiertas} \\ \dfrac{4\left(A_i^{\text{med}}\right)^2}{\displaystyle\sum_k \int_{f_{Ck}} \frac{G^*}{G_k} \frac{df_C}{e_k}} \ ; \text{ Secc. delgadas cerradas} \\ -\dfrac{4\displaystyle\int_{A_i} \frac{G_i}{G^*} \phi_i \, dA}{\nabla^2 \phi_i(x_1, x_2)} \ ; \text{ Secc. macizas} \end{cases} \tag{7.65}$$

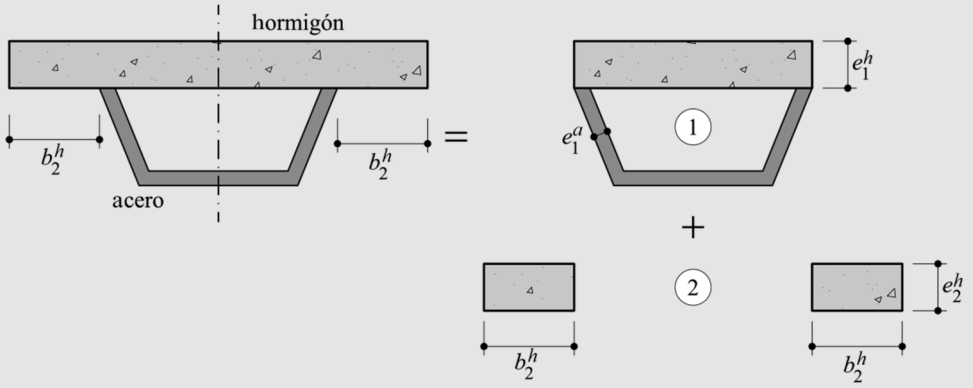
Una vez cumplida esta condición, se establece la condición de equilibrio seccional, a partir de cada subsección, y de aquí resulta el ángulo de torsión específica

$$\mathsf{M}_T = \sum_i \mathsf{M}_T^i = \theta \sum_i G^* J_i^* \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\mathsf{M}_T}{\displaystyle\sum_i G^* J_i^*} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{M}_T^i = \theta G^* J_i^* \tag{7.66}$$

Establecida la condición de compatibilidad y equilibrio, se procede a obtener el estado de tensión en cada punto de las subsecciones de la sección compuesta,

$$\begin{cases} \tau_i = C_i \dfrac{df(x_1, x_2)}{d\ell} \quad \text{siendo: } C_i = \dfrac{\mathsf{M}_T^i}{2\displaystyle\int_{A_i} f(x_1, x_2)\, dA} \ ; \text{ Secc. macizas} \\ \tau_i = 2 G_i \theta x \ ; \text{ Secc. delgadas abiertas} \\ \tau_i = \dfrac{\phi_i}{e_i} = \dfrac{\mathsf{M}_T^i}{2 A_i^{\text{med}} e_i} \ ; \text{ Secc. delgadas cerradas} \end{cases} \tag{7.67}$$

Ejemplo 7-8: Obtener el ángulo de torsión específico y las tensiones en la sección compuesta de la figura.



Se considera un ángulo de torsión específico constante para todas las subsecciones,

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \frac{\mathrm{M}_T^1}{G^* J_1^*} = \frac{\mathrm{M}_T^2}{G^* J_2^*} \;\text{ con }\; J_i^* = \begin{cases} \dfrac{G_i}{3G^*} \cdot e_i^3 \cdot b_i \;;\; \text{Secc. delgadas abiertas} \\ \dfrac{4\left(A_i^{\text{med}}\right)^2}{\displaystyle\sum_k \int_{f_{Ck}} \frac{G^*}{G_k} \frac{df_C}{e_k}} \;;\; \text{Secc. delgadas cerrada} \end{cases}$$

1) Resolución de la sección cerrada (1):

Si $G \neq \text{cte}$ en f_C, se puede escribir la siguiente expresión para el ángulo de torsión específico,

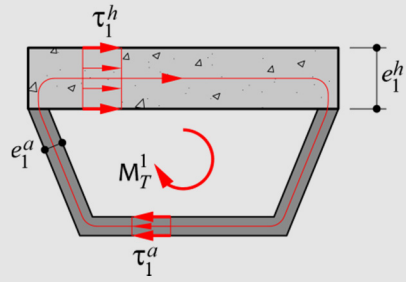
$$\theta = \frac{\mathrm{M}_T^1}{G^* J_1^*} \;\text{ con }\; J_1^* = \frac{4\left(A_1^{\text{med}}\right)^2}{\displaystyle\sum_k \int_{f_{Ck}} \frac{G^*}{G_k} \frac{df_C}{e_k}} = \frac{4\left(A_1^{\text{med}}\right)^2}{\displaystyle\int_{f_{Ch}} \frac{G^*}{G_h} \frac{df_C}{e_1^h} + \int_{f_{Ca}} \frac{G^*}{G_a} \frac{df_C}{e_1^a}}$$

donde G^* es el módulo de elasticidad adoptado arbitrariamente y M_T^1 el momento torsor absorbido por la sección cerrada de hormigón (h) y de acero (a).

Teniendo en cuenta que el flujo ϕ_1 será constante sobre toda la subsección (1), se puede plantear la siguiente ecuación de equilibrio (ver (7.67)), que da lugar a cuantificar el estado tensional en el hormigón y el acero de la sección cerrada,

$$\tau_1^h = \frac{\phi_1}{e_1^h} = \frac{M_T^1}{2\,A_1^{\text{med}}\,e_1^h}$$

$$\tau_1^a = \frac{\phi_1}{e_1^a} = \frac{M_T^1}{2\,A_1^{\text{med}}\,e_1^a}$$



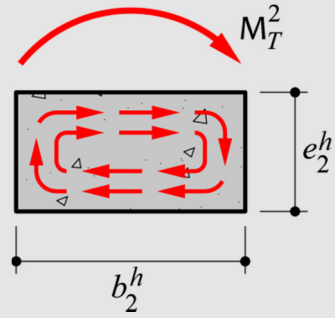
2) Resolución de las dos alas (2):

A partir de la ecuación (7.65), se expresa el mismo ángulo específico de torsión para las dos alas en función del momento torsor M_T^2 que éstas absorben,

$$\theta = \frac{M_T^2}{G^* J_2^*} \quad \text{con} \quad J_2^* = \frac{G_2}{3G^*} \cdot \left(e_2^h\right)^3 \cdot b_2^h$$

Teniendo en cuenta la ecuación de equilibrio (7.67), se obtiene el estado tensional en las alas de hormigón de la sección abierta (2),

$$\tau_2^h = 2\,G_2\,\theta\,\frac{e_2^h}{2} = G_2\,\theta\,e_2^h = \frac{3\,M_T^2}{\left(e_2^h\right)^2 \cdot b_2^h}$$



3) Resolución de la sección completa (1+2):

Dado que $\theta = \theta_1 = \theta_2$, entonces se cumple,

$$\theta = \frac{M_T^1}{\dfrac{4\left(A_1^{\text{med}}\right)^2}{\displaystyle\int_{f_{Ch}} \frac{1}{G_h}\frac{df_C}{e_1^h} + \int_{f_{Ca}} \frac{1}{G_a}\frac{df_C}{e_1^a}}} = \frac{M_T^2}{\dfrac{1}{3G^*} \cdot \left(e_2^h\right)^3 \cdot b_2^h}$$

y además, el momento torsor total surge de la suma de los momentos torsores que absorbe cada parte de la sección compuesta,

$$M_T = M_T^1 + 2 \cdot M_T^2 = \left[G^* J_1^* + 2 \cdot G^* J_2^* \right] \cdot \theta = \left[\frac{4\left(A_1^{\text{med}} \right)^2}{\int_{f_{Ch}} \frac{1}{G_h} \frac{df_C}{e_1^h} + \int_{f_{Ca}} \frac{1}{G_a} \frac{df_C}{e_1^a}} + 2 \cdot \frac{1}{3G^*} \cdot \left(e_2^h \right)^3 \cdot b_2^h \right] \cdot \theta$$

de donde puede deducirse la magnitud del ángulo de torsión específica

$$\theta = \frac{M_T}{G^* J_1^* + 2 \cdot G^* J_2^*}$$

$$\theta = \frac{M_T}{\frac{4\left(A_1^{\text{med}} \right)^2}{\int_{f_{Ch}} \frac{1}{G_h} \frac{df_C}{e_1^h} + \int_{f_{Ca}} \frac{1}{G_a} \frac{df_C}{e_1^a}} + 2 \cdot \frac{1}{3G^*} \cdot \left(e_2^h \right)^3 \cdot b_2^h}$$

y a partir de esta magnitud también se pueden obtener las tensiones tangenciales en cada parte de la sección, tal como se ha expresado en los dos subapartados anteriores.

$$M_T^1 = G^* J_1^* \theta = \frac{4\left(A_1^{\text{med}} \right)^2}{\int_{f_{Ch}} \frac{1}{G_h} \frac{df_C}{e_1^h} + \int_{f_{Ca}} \frac{1}{G_a} \frac{df_C}{e_1^a}} \theta \quad \Rightarrow \quad \tau_1^h = \frac{M_T^1}{2 A_1^{\text{med}} e_1^h} \;\; ; \;\; \tau_1^a = \frac{M_T^1}{2 A_1^{\text{med}} e_1^a}$$

$$M_2 = G^* J_2^* \theta = \frac{1}{3G^*} \cdot \left(e_2^h \right)^3 \cdot b_2^h \cdot \theta \qquad \Rightarrow \qquad \tau_2^h = \frac{3 M_T^2}{\left(e_2^h \right)^2 \cdot b_2^h}$$

Ejemplo 7-9: Dada la estructura de la figura, cuya barra $\overline{AB}$ se encuentra sometida a torsión, calcular la distribución de tensiones tangenciales y el ángulo de torsión específico en la sección transversal del extremo B de la barra cuyo material tiene un módulo de corte $G = 80 \cdot 10^6 \, kN / m^2$, suponiendo las siguientes secciones transversales:

1. Sección de pared delegada abierta "S1", de espesor $t = 0.03 \, m$.
2. Sección de pared delegada cerrada "S2", de espesor $t = 0.03 \, m$.

1. <u>Sección S1</u>

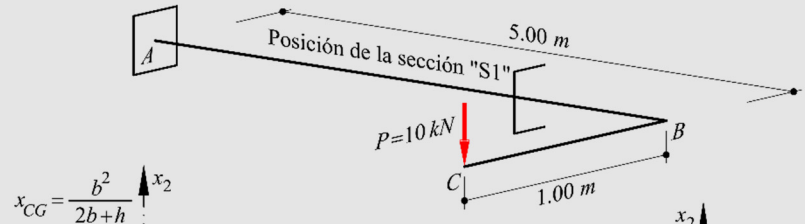
$$x_{CG} = \frac{0.2^2}{2 \cdot 0.2 + 0.4} = 0.05m \qquad d = \frac{3 \cdot 0.2^2}{6 \cdot 0.2 + 0.4} = 0.075m$$

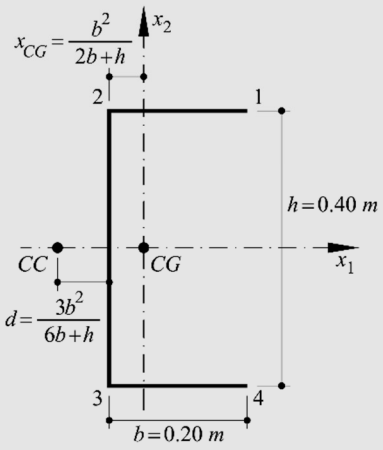
Momento torsor en la barra $\overline{AB}$

$$\mathrm{M}_T\big|_{AB} = P\left[1-\left(x_{CG}+d\right)\right] = 10\left[1-\left(0.05+0.075\right)\right] = 8.75kN \cdot m$$

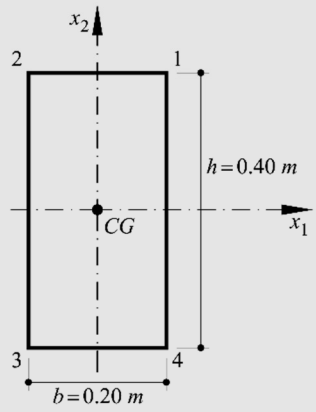
Ecuaciones para la determinación de tensiones y ángulo específico de torsión

$$\theta = \frac{\mathrm{M}_T}{\frac{1}{3}G\left(\sum_j t_j^3 b_j\right)}; \quad \tau\left(s\right) = 2G\theta s = \frac{2\mathrm{M}_T s}{\frac{1}{3}\left(\sum_j t_j^3 b_j\right)}; \quad \tau_i^{\max} = \tau\left(s = \frac{t_i}{2}\right) = \frac{2\mathrm{M}_T \frac{t_i}{2}}{\frac{1}{3}\left(\sum_j t_j^3 b_j\right)}$$





Sección "S1"

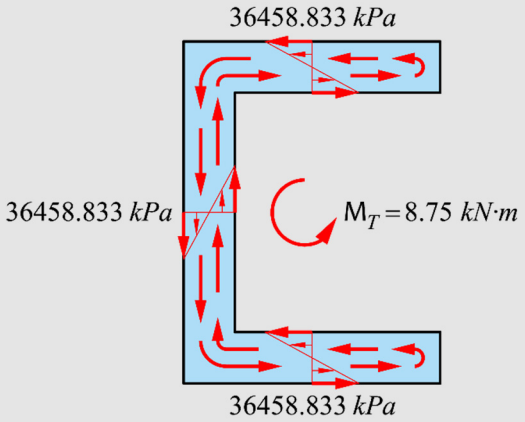


Sección "S2"

Cálculo de las tensiones tangenciales y su distribución

	A	B	C	D	E
1	**Tramo**	$t_i[m]$	$b_i[m]$	$t_i^3 b_i$	$\tau_i^{max} = \frac{3M_T t_i}{\left(\sum_j t_j^3 b_j\right)}$
2	1-2	0.03	0.2	=B2^3*C2	=($B$5*B2*3)/$D$5
3	2-3	0.03	0.4	=B3^3*C3	=($B$5*B3*3)/$D$5
4	3-4	0.03	0.2	=B4^3*C4	=($B$5*B4*3)/$D$5
5	$M_T[kN \cdot m]$	8.75	$\sum =$	=SUMA(D2:D4)	

	A	B	C	D	E
1	**Tramo**	$t_i[m]$	$b_i[m]$	$t_i^3 b_i\left[m^4\right]$	$\tau_i^{max}\left[kN/m^2\right]$
2	1-2	0.03	0.20	5.40E-06	36458.33333
3	2-3	0.03	0.40	1.08E-05	36458.33333
4	3-4	0.03	0.20	5.40E-06	36458.33333
5	$M_T[kN \cdot m]$	8.75	$\sum =$	2.16E-05	



Cálculo del ángulo de torsión específico

$$\theta = \frac{M_T}{\frac{1}{3}G\left(\sum_j t_j^3 b_j\right)} = \frac{8.75}{\frac{1}{3}\cdot 80\cdot 10^6 \cdot 2.16\cdot 10^{-5}} = 0.015\,rad = 0.8703^o$$

2. Sección S2

Momento torsor en la barra $\overline{AB}$

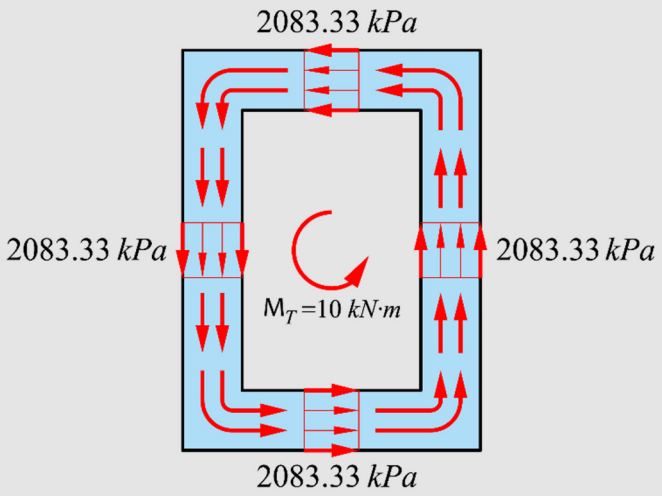
$$\mathrm{M}_T\big|_{AB} = P \cdot 1 = 10 kN \cdot m$$

Cálculo de las tensiones tangenciales y su distribución

$$\theta = \frac{\mathrm{M}_T \left(\sum_i \frac{b_i}{t_i} \right)}{4G\left(A^{med}\right)^2}; \quad \tau_i = \frac{\mathrm{M}_T}{2 t_i A^{med}}$$

	A	B	C	D	E	F
1	**Tramo**	$t_i[m]$	$b_i[m]$	$A^{med}\left[m^2\right]$	b_i / t_i	$\tau_i \left[kN / m^2\right]$
2	1-2	0.03	0.2	=C2*C3	=C2/B2	=$B$6/(2*B2*D2)
3	2-3	0.03	0.4	=D2	=C3/B3	=$B$6/(2*B3*D3)
4	3-4	0.03	0.2	=D2	=C4/B4	=$B$6/(2*B4*D4)
5	4-1	0.03	0.4	=D2	=C5/B5	=$B$6/(2*B5*D5)
6	$\mathrm{M}_T[kN \cdot m]$	10	$\sum$=		=SUMA(E2:E5)	

	A	B	C	D	E	F
1	**Tramo**	$t_i[m]$	$b_i[m]$	$A^{med}\left[m^2\right]$	b_i / t_i	$\tau_i \left[kN / m^2\right]$
2	1-2	0.03	0.20	0.08	6.6667	2083.33333
3	2-3	0.03	0.40	0.08	13.3333	2083.33333
4	3-4	0.03	0.20	0.08	6.6667	2083.33333
5	4-1	0.03	0.40	0.08	13.3333	2083.33333
6	$\mathrm{M}_T[kN \cdot m]$	10.00	$\sum$=		40.0000	



Cálculo del ángulo específico de torsión

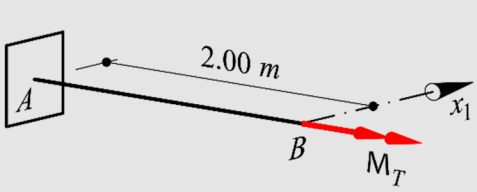
$$\theta = \frac{M_T\left(\sum_i \frac{b_i}{t_i}\right)}{4G\left(A^{med}\right)^2} = \frac{10 \cdot 40}{4 \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot 0.08^2} = 1.953 \cdot 10^{-4}\, rad = 0.1118^o$$

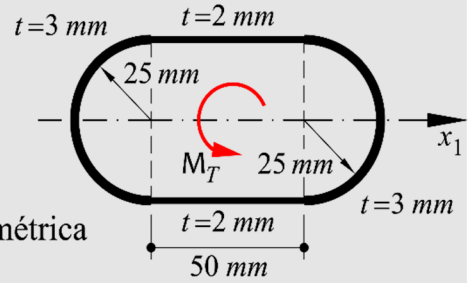
Ejemplo 7-10: La pieza de la figura está construida de una aleación ligera, cuya resistencia a tensiones tangenciales está limitada a $2.8MPa$ y su módulo de elasticidad transversal es $G = 27GPa$. Obtener:

1. El máximo momento torsor M_T que puede soportar.

2. El ángulo específico de torsión θ y el ángulo de torsión total ψ que gira la sección "B" respecto del empotramiento "A".

3. La distribución de tensiones tangenciales en la sección transversal.





Sección cerrada simétrica

Cálculo del momento torsor máximo

$$A^{med} = \left(\pi \cdot 0.025^2\right) + \left(0.05 \cdot 0.05\right) = 0.0046\, m^2$$

El momento torsor máximo que se puede aplicar, resulta del mínimo espesor:

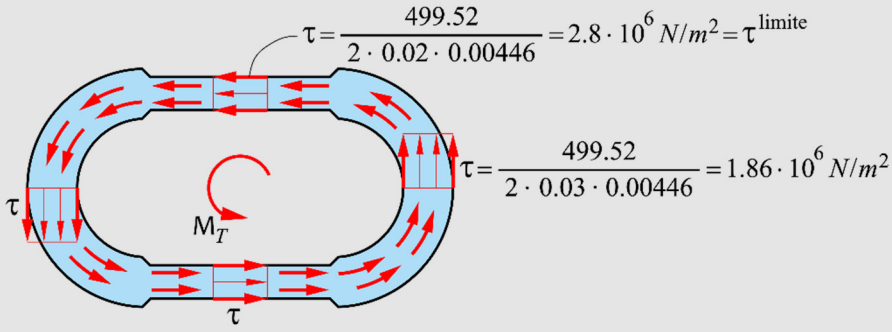
$$M_T = \tau^{\max} 2\, t_{\min} A^{med} = 2.8 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0.002 \cdot 0.00446 = 499.52 N \cdot m$$

Cálculo del ángulo de torsión específico

$$\theta = \frac{M_T \left(\sum_i \frac{b_i}{t_i} \right)}{4G\left(A^{med}\right)^2} = \frac{499.5 \cdot \left(2\frac{\pi \cdot 0.025}{0.03} + 2\frac{0.05}{0.02} \right)}{4 \cdot 27 \cdot 10^9 \cdot 0.00446^2} = 0.00238 \frac{rad}{m}$$

$$\psi = \theta\, \ell = 0.00238 \cdot 2 = 0.00476\, rad = 0.272^{\circ}$$

Distribución de tensiones tangenciales en la sección transversal

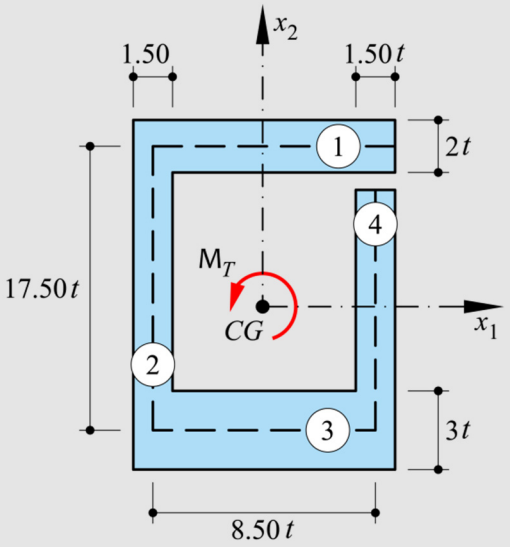


Ejemplo 7-11: La sección transversal representada en la figura es de pared delgada y está sometida a un momento torsor $M_T = 40 kN \cdot m$. Se pide:

1. Dimensionar la sección transversal para que la tensión tangencial máxima no supere el valor $\tau = 80000\, kN/m^2$.

2. Representar gráficamente la distribución de las tensiones tangenciales en la sección transversal.

3. Obtener el ángulo específico de torsión θ, considerando un módulo de elasticidad transversal $G = 80 \cdot 10^6\, kN/m^2$.



Dimensionado de la sección transversal

$$\tau_i(s) = 2G\theta s_i = \frac{2M_T s_i}{\frac{1}{3}\left(\sum_j t_j^3 b_j\right)}; \quad \tau_i^{\max} = \tau\left(s_i = \frac{t_i}{2}\right) = \frac{M_T t_i}{\frac{1}{3}\left(\sum_j t_j^3 b_j\right)}$$

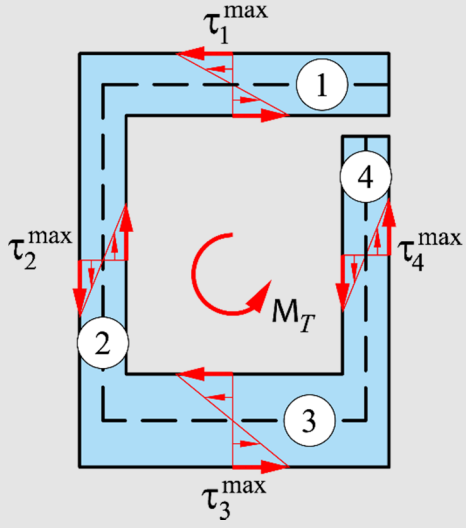
A continuación se obtienen las tensiones en cada lado de la sección, en función del espesor de sus paredes.

	A	B	C	D	E
1	Tramo	t_i/t	b_i/t	$\frac{1}{3}\left(\frac{t_i}{t}\right)^3\frac{b_i}{t}$	$\tau_i^{max}=\frac{3M_T t_i}{\left(\sum_{j=1}^{4} t_j^3 b_j\right)}$
2	1	2	8.5	=B2^3*C2/3	=($B$6*B2)/$D$6
3	2	1.5	17.5	=B3^3*C3/3	=($B$6*B3)/$D$6
4	3	3	8.5	=B4^3*C4/3	=($B$6*B4)/$D$6
5	4	1.5	17.5	=B5^3*C5/3	=($B$6*B5)/$D$6
6	$M_T[kN\cdot m]$	40	$\sum=$	=SUMA(D2:D5)	

	A	B	C	D	E
1	Tramo	t_i/t	b_i/t	$\frac{1}{3}\left(\frac{t_i}{t}\right)^3\frac{b_i}{t}$	$\tau_i^{max}t^3[kN\cdot m]$
2	1	2.00	8.50	22.667	0.57744
3	2	1.50	17.50	19.688	0.43308
4	3	3.00	8.50	76.500	0.86617
5	4	1.50	17.50	19.688	0.43308
6	$M_T[kN\cdot m]$	40.00	$\sum=$	138.542	

$$\rightarrow \quad \tau^{max}=80000=0.86617\cdot t^3 \quad \rightarrow \quad t=\sqrt[3]{\frac{0.86617}{80000}} \quad \rightarrow \quad \boxed{t=0.02221m}$$

Distribución de tensiones tangenciales



Ángulo específico de torsión

$$\theta = \frac{M_T}{\frac{1}{3} G \left(\sum_j t_j^3 b_j \right)} = \frac{40}{\left(138.54 \cdot t^4 \right) \cdot 80 \cdot 10^6} = 0.015 \frac{rad}{m}$$

7.4 Resumen de la formulación básica obtenida en el capítulo

Teoría de Coulomb		
Distorsión angular	$\gamma = \rho \dfrac{d\psi}{dx_3} = \rho \cdot \theta$	(7.1)
Tensión tangencial elástica	$\tau(\rho) = G \cdot \gamma(\rho) = \rho \cdot G \cdot \theta = \dfrac{M_T}{I_p}\rho$	(7.3) (7.6)
Ángulo de torsión específico. Problema elástico	$\theta = \dfrac{M_T}{G I_p}$	(7.6)
Ángulo de torsión absoluto	$\psi = \int_\ell \dfrac{M_T}{G I_p} dx_3$	(7.7)
Energía de deformación por torsión	$W = \dfrac{1}{2}\int_{\psi\,\max} M_T \; d\psi = \dfrac{1}{2}\int_\ell \dfrac{M_T^2}{G I_p} dx_3 = \dfrac{1}{2}\dfrac{M_T^2\,\ell}{G I_p}$	(7.11)
Tensión tangencial elasto-plástica	$\begin{cases} \text{Rango elástico: } \forall \;\; 0 \le \rho \le \rho^e \rightarrow \tau(\rho) = G \cdot \rho \cdot \theta \\ \qquad\qquad \tau(\rho) = \dfrac{M_T^a - \tau^y \dfrac{2\pi\left(R^3 - \left(\rho^e\right)^3\right)}{3}}{I_p^e} \cdot \rho \\ \text{Rango plástico: } \forall \;\; \rho^e \le \rho \le R \rightarrow \tau(\rho) = \tau^y \end{cases}$	(7.13) (7.15)
Ángulo de torsión específico. Problema elasto-plástico	$\theta = \dfrac{M_T^a - \tau^y \dfrac{2\pi\left(R^3 - \left(\rho^e\right)^3\right)}{3}}{G I_p^e} = \dfrac{M_T^a - M_T^p}{G I_p^e}$	(7.15)

Teoría de Saint Venant		
Ecuación diferencial de la torsión	$$\nabla^2\phi(x_1,x_2)=\frac{\partial^2\phi(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\phi(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}=-2G\theta$$	(7.36)
Ecuación de equilibrio en el contorno	$$\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{df_C}-\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{df_C}=\frac{d\phi}{df_C}=0$$	(7.22)
Medida de la tensión	$$\tau=\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x_2}}_{\tau_1}\frac{dx_2}{d\ell}+\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x_1}}_{-\tau_2}\frac{dx_1}{d\ell}=\frac{d\phi}{d\ell}$$	(7.23)
Ecuación de equilibro (Bredt)	$$M_T=2\int_A\phi\,dA-2\phi_0\,A_0+\sum_i 2\phi_i\,A_i\cong\sum_i 2\phi_i\,A_i^{\text{med}}$$	(7.31)
Analogía con el problema de Coulomb	$$\theta=\frac{M_T}{G\,I_p}\overset{\text{Analogía}}{\Rightarrow}\theta=-\frac{M_T\nabla^2\phi(x_1,x_2)}{4G\int_A\phi\,dA}\;;\;J=-\frac{4\int_A\phi\,dA}{\nabla^2\phi(x_1,x_2)}$$	(7.40) (7.41)
Relación tensión-ángulo de torsión específica	$$0=-\oint_{f_C}\tau\,df_C+2G\theta A$$	(7.39)
St. Venant – Secciones delgadas	$$\tau_2(x_1)=2G\theta\cdot x_1\;\Rightarrow\;\tau_2^{\max}=G\theta\cdot e=\frac{M_T}{(1/3)\cdot e^2\cdot b}=\frac{M_T}{J}$$ $$M_T=\frac{1}{3}\cdot G\theta\cdot e^3\cdot b=G\theta J\,e\quad;\quad J=\frac{1}{3}\cdot e^2\cdot b$$	(7.52) (7.53) (7.55)
St. Venant – Perfiles delgadas abiertos	$$\theta=\frac{M_T}{\frac{1}{3}\cdot G\left[\sum_{i=1}^{n}e_i^3\cdot b_i\right]}\;;\;M_T^n=\frac{e_n^3\cdot b_n}{\sum_{i=1}^{n}e_i^3\cdot b_i}M_T\;;\;\left(\tau_j^n\right)^{\max}=\frac{M_T^n}{\frac{1}{3}\cdot e_n^2\cdot b_n}$$	(7.56) (7.57) (7.58)

St. Venant – Perfiles delgadas cerrados	$\mathrm{M}_T = 2\tau e A^{\text{med}} \rightarrow \tau = \dfrac{\mathrm{M}_T}{2eA^{\text{med}}}$; $\tau = \dfrac{2G\theta A^{\text{med}}}{\oint_{f_C} df_C}$	(7.39)
	$\theta = \dfrac{\oint_{f_C} \tau\, df_C}{2GA^{\text{med}}} = \dfrac{\mathrm{M}_T \sum_i \dfrac{1}{e_i}(f_C)_i}{4G\left(A^{\text{med}}\right)^2} = \dfrac{M_T}{GJ} \Rightarrow J = \dfrac{4\left(A^{\text{med}}\right)^2}{\oint_{f_C} \dfrac{df_C}{e}}$	(7.60) (7.41)
St. Venant – Perfiles delgadas cerrados múltiplemente conexos	Eq. global: $M_T \cong \sum_{i=1} 2\phi_i A_i^{\text{med}}$ Eq. celda"i": $2G\theta A_i^{\text{med}} = \phi_i \int_{f_{C_i}} \dfrac{1}{e_i} df_C + \sum_j (\phi_i - \phi_j) \int_{f_{C_{ij}}} \dfrac{1}{e_{ij}} df_C$	(7.63)

Apéndice

Propiedades geométricas de las secciones transversales

A.1 Introducción

La formulación que se utiliza en Resistencia de Materiales hace uso de la definición de algunas propiedades geométricas de las secciones transversales de las barras. Concretamente, es necesario conocer la posición del Centro Geométrico (CG) de la sección, del Centro de Gravedad (CP) y del Centro Mecánico (CM). Asimismo, es preciso determinar los momentos estáticos (primer orden) y los momentos de inercia (segundo orden) respecto a cualquier sistema de referencia contenido en el plano de la sección transversal. En el caso de los momentos de inercia, interesa particularmente la determinación de sus valores principales, como así también sus correspondientes direcciones.

En este Apéndice se definen las propiedades geométricas y se desarrollan ejemplos que permiten entender el procedimiento para obtener la información antes mencionada.

A.2 Momento estático de una sección respecto de un eje y posición del centro geométrico (CG)

A.2.1 Definición de momento estático y centro geométrico

En primer lugar, se define el momento estático de una sección respecto a ejes ortogonales cartesianos. Sea la sección transversal mostrada en la Figura A.1, se define como *Momento Estático* respecto al eje x (S_x) y respecto al eje y (S_y) a las cantidades definidas por las siguientes integrales:

$$S_x = \int_A y \cdot dA \tag{A.1}$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA \tag{A.2}$$

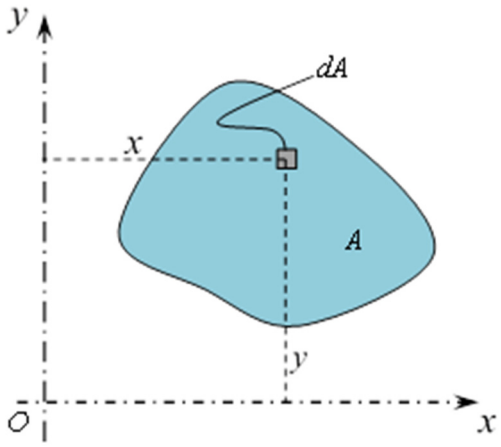


Figura A.1 – Momento estático de una sección respecto de ejes cartesianos ortogonales.

Cambiando el sistema de referencia a otro paralelo (ver Figura A.2), donde

$$x - x' = a \qquad \text{y} \qquad y - y' = b \tag{A.3}$$

Se obtienen los respectivos momentos estáticos respecto a los ejes x' e y',

$$S_{x'} = \int_A y' \cdot dA \tag{A.4}$$

$$S_{y'} = \int_A x' \cdot dA \tag{A.5}$$

Substituyendo (A.3) en (A.4) y (A.5),

$$S_{x'} = \int_A (y - b) \cdot dA = S_x - b \cdot A \tag{A.6}$$

$$S_{y'} = \int_A (x - a) \cdot dA = S_y - a \cdot A \tag{A.7}$$

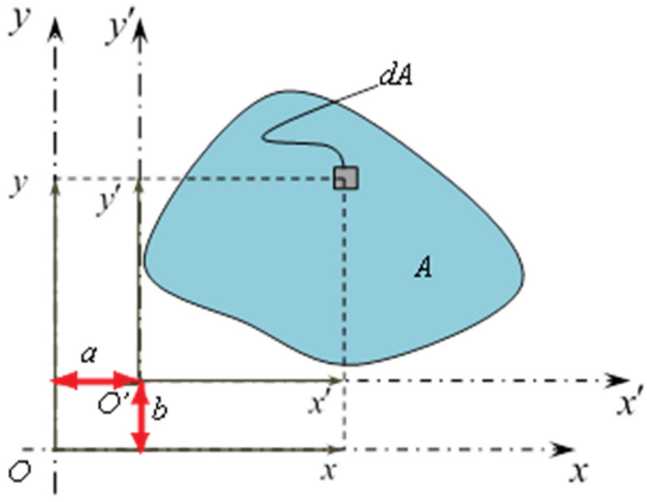


Figura A.2 – Momento estático de una sección respecto a ejes ortogonales paralelos a los ejes *x-y*.

El eje respecto del cual el momento estático se anula, se denomina *eje central o centroidal*. Del conjunto de ejes paralelos sólo uno es central, y se obtiene como:

$$S_{x_C} = 0 = S_x - b \cdot A \rightarrow b = y_{CG} = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y \cdot dA}{\int_A dA} \tag{A.8}$$

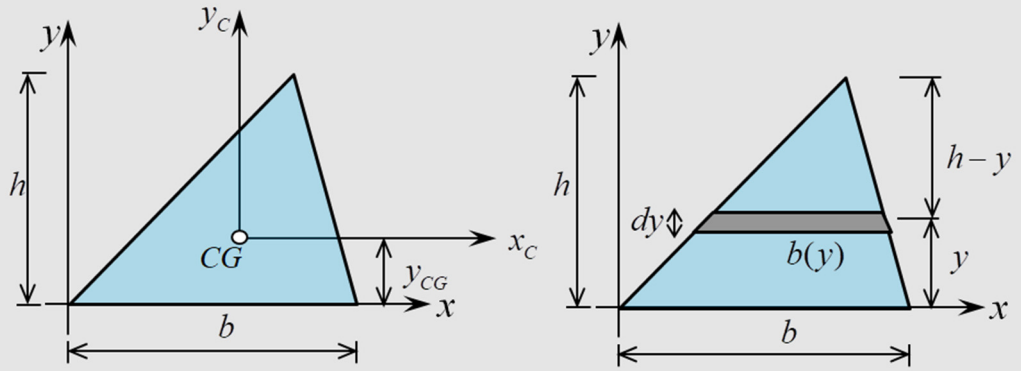
$$S_{y_C} = 0 = S_y - a \cdot A \rightarrow a = x_{CG} = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x \cdot dA}{\int_A dA} \tag{A.9}$$

La intersección de los ejes centrales determina el *centro geométrico*, *centroide* o *baricentro* de la sección. El momento estático de una sección respecto de cualquier eje que pase por el centro geométrico es nulo.

Ejemplo A-1: Para la sección triangular de la figura, determinar:

a) El momento estático (o momento de primer orden), respecto del eje x.

b) La coordenada y_{CG} del centro geométrico.



a) Momento estático S_x respecto al eje x:

Es conveniente elegir como elemento de área una elemento diferencial horizontal de longitud $b(y)$ y espesor dy, paralelo al eje x. Por semejanza de triángulos se obtiene la función de variación $b(y)$,

$$\frac{b(y)}{b} = \frac{h-y}{h} \quad \Rightarrow \quad b(y) = b \cdot \frac{h-y}{h}$$

Entonces, de aquí resulta el diferencial de área,

$$dA = b(y)\cdot dy = b\cdot\frac{h-y}{h}\cdot dy$$

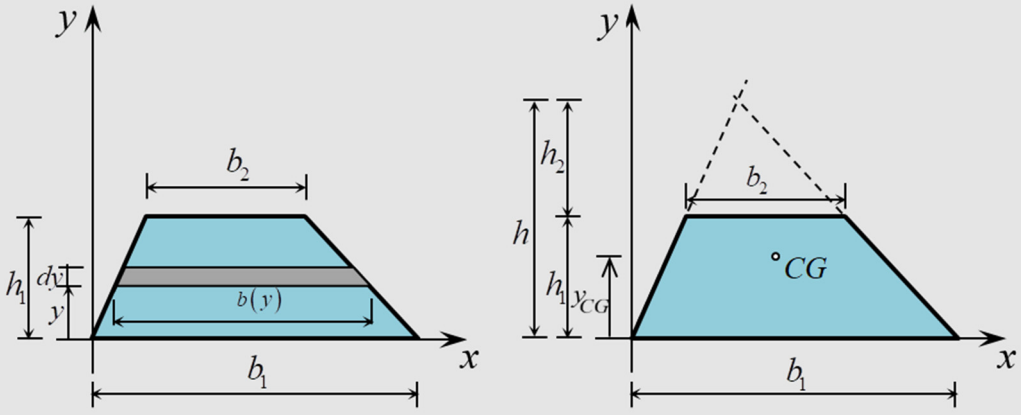
Resultando de la definición (ec.(A.1)) el momento estático de la figura plana triangular, respecto del eje x:

$$S_x = \int_A y\cdot dA = \int_0^h y\, b\,\frac{h-y}{h}\,dy = \frac{b}{h}\int_0^h \left(h\,y - y^2\right)dy = \frac{b}{h}\left[h\,\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^h \Rightarrow\; S_x = \frac{1}{6}bh^2$$

b) Ordenada al centro geométrico. Recordando la ecuación $S_x = A\,y_{CG}$, se obtiene:

$$y_{CG} = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{b\,h}{2}} = \frac{1}{3}h$$

Ejemplo A-2: Determinar el centro geométrico de la sección trapecial mostrada en la figura



Para determinar el centro geométrico de la sección trapecial representada en la figura, se determina en primer lugar el momento estático S_x de acuerdo a lo definido por la ecuación (A.1). Se elige como elemento de área una elemento diferencial horizontal de longitud $b(y)$ y espesor dy, paralelo al eje x. Por semejanza de triángulos se obtiene:

$$b(y) = \frac{b_1}{h}(h-y)$$

Teniendo en cuenta que $h = h_1 + h_2$ y que $\frac{b_1 - b_2}{h_1} = \frac{b_2}{h_2} \quad \rightarrow \quad h_2 = \frac{h_1 b_2}{b_1 - b_2}$. Sustituyendo hacia atrás se tiene:

$$h = h_1 + \frac{h_1 b_2}{b_1 - b_2}$$

$$b(y) = b_1 - b_1 y \frac{b_1 - b_2}{h_1 b_1 - h_1 b_2 + h_1 b_2}$$

$$b(y) = b_1 - b_1 y \frac{b_1 - b_2}{h_1 b_1}$$

Resultando de la definición (ec.(A.1)) el momento estático de la figura plana trapecial, respecto del eje x:

$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^{h_1} \left(b_1 y - b_1 y^2 \frac{b_1 - b_2}{h_1 b_1} \right) dy = \frac{b_1 h_1^2}{2} - \frac{(b_1 - b_2) h_1^2}{3} \Rightarrow S_x = \frac{(b_1 + 2b_2) h_1^2}{6}$$

Recordando la ecuación $S_x = A\, y_{CG}$, se obtiene la ordenada del centro geométrico:

$$y_{CG} = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{(b_1 + 2b_2) h_1^2}{6}}{\frac{(b_1 + b_2) h_1}{2}} = \frac{(b_1 + 2b_2)}{(b_1 + b_2)} \frac{h}{3}$$

A.2.2 Teoremas de Pappus - Guldin

Hay dos teoremas, denominados de *Pappus – Guldin*, que permiten obtener en forma simple la distancia de un eje al centro geométrico. Ambos teoremas se basan en el concepto de simetría de rotación. A continuación se presentan estos teoremas.

Teorema 1: El área que desarrolla la rotación de una curva plana es igual al producto de la longitud de dicha curva por la distancia que recorre su centro geométrico en un giro completo.

$$A = L \cdot (2\pi y_{CG}) \tag{A.10}$$

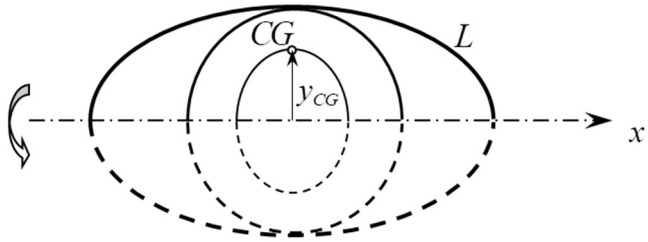


Figura A.3 – Teorema 1 de Pappus-Guldin.

Teorema 2: El volumen que desarrolla la rotación de una sección plana es igual al producto del área de dicha sección por la distancia que recorre su centro geométrico en un giro completo.

$$V = A \cdot (2\pi y_{CG}) \tag{A.11}$$

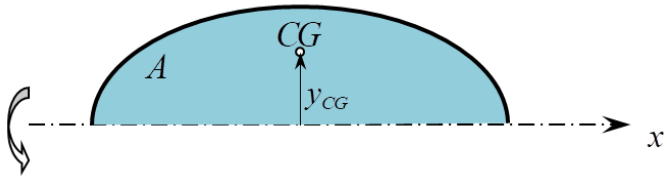
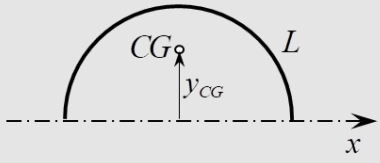


Figura A.4 – Teorema 2 de Pappus-Guldin.

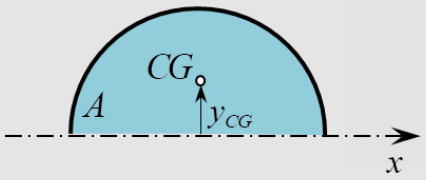
Ejemplo A-3: Determinar por el primer teorema de Pappus – Guldin el centro geométrico de una media circunferencia.



$$A = L(2\pi y_{CG}) \quad \rightarrow \quad y_{CG} = \frac{A}{L2\pi} = \frac{4\pi R^2}{\left(\frac{2\pi R}{2}\right)2\pi}$$

$$\boxed{y_{CG} = \frac{2R}{\pi}}$$

Ejemplo A-4: Determinar por el segundo teorema de Pappus – Guldin el centro geométrico de un medio círculo.



$$V = A(2\pi y_{CG}) \rightarrow y_{CG} = \frac{V}{A2\pi} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{\left(\frac{\pi R^2}{2}\right)2\pi}$$

$$\boxed{y_{CG} = \frac{4R}{3\pi}}$$

A.2.3 Centro geométrico de secciones compuestas

Se considera como sección compuesta aquella que está constituida por varias formas simples (Figura A.5). Esta consideración facilita la localización del centro geométrico.

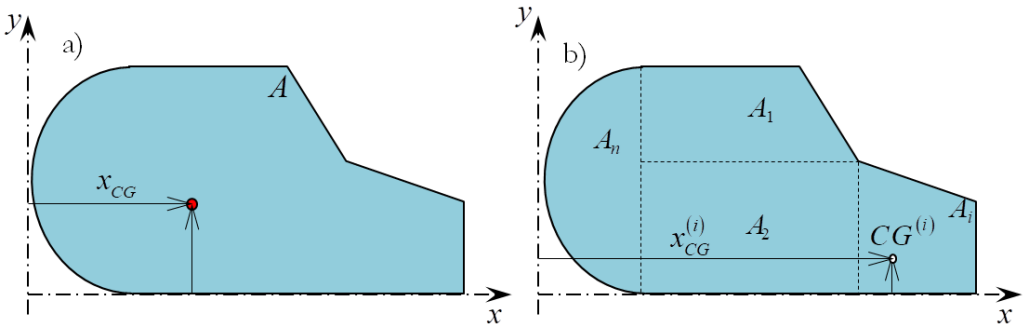


Figura A.5 – a) Sección compuesta; b) división de la sección en áreas simples.

Otro concepto que ayuda a localizar el centro geométrico es que si el área dispone de un eje de simetría, el centroide se localizará en dicho eje. Algunas figuras complejas cuentan con dos ejes de simetría y, por consiguiente, el centro geométrico se localiza en la intersección de estos dos ejes, como se muestra por ejemplo en la Figura A.6.

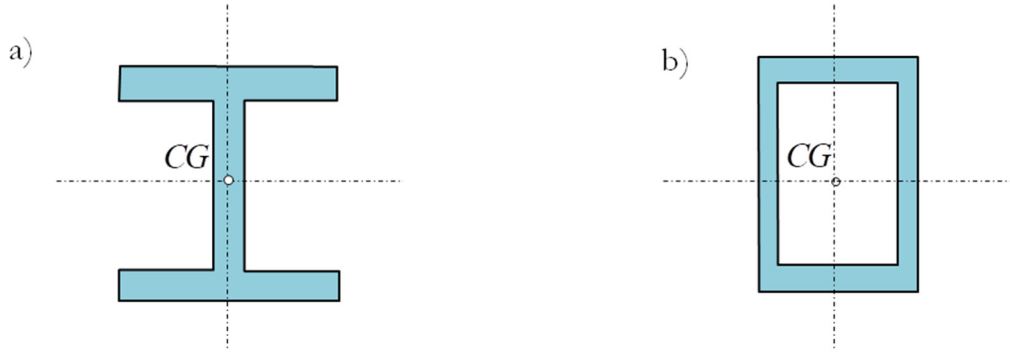


Figura A.6 – a) Perfil representativo de una sección doble T; b) Perfil representativo de una sección hueca.

En los casos en que la sección no posea dos ejes de simetría se usa el *método de las áreas compuestas* para localizar el centro geométrico. Sea, por ejemplo, la sección mostrada en la Figura A.5a). Se considera que el área total A está compuesta por n áreas simples como se muestra en la Figura A.5b), de manera que:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \tag{A.12}$$

De acuerdo a la definición de momento estático, la aplicación de las ecuaciones (A.1) y (A.2) lleva a:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_x^{(i)} = A\, y_{CG} \tag{A.13}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} S_y^{(i)} = A\, x_{CG} \tag{A.14}$$

donde $S_x^{(i)}$ y $S_y^{(i)}$ son los momentos estáticos de cada área A_i respecto de los ejes x e y, respectivamente.

Las ecuaciones (A.13) y (A.14) expresan que el momento estático del área total con respecto a un eje particular, es igual a la suma de los momentos estáticos de todas las áreas componentes con respecto al mismo eje.

Teniendo en cuenta las expresiones (A.8) y (A.9), los momentos estáticos de las áreas individuales respecto de los ejes x e y, se pueden escribir, respectivamente, como

$$S_x^{(i)} = A_i y_{CG}^{(i)} \tag{A.15}$$

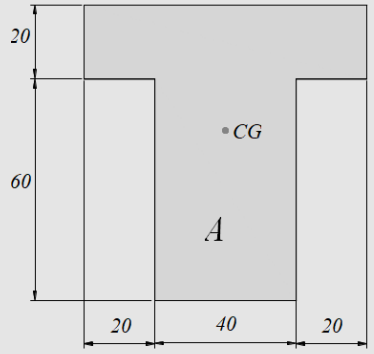
$$S_y^{(i)} = A_i x_{CG}^{(i)} \tag{A.16}$$

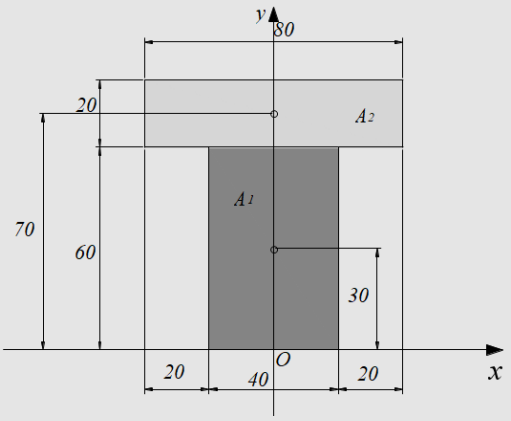
donde $x_{CG}^{(i)}$ y $y_{CG}^{(i)}$ son las coordenadas del centro geométrico $CG^{(i)}$ de cada área A_i.

Luego, las coordenadas del centro geométrico de la sección total se pueden obtener reemplazando (A.15) y (A.16) en (A.13) y (A.14):

$$y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_{CG}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad \text{(A. 17)} \qquad x_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_{CG}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad \text{(A.18)}$$

Ejemplo A-5: Localizar el centro geométrico (CG) de la sección de área A mostrada en la figura en la que las cotas están en mm.





Para determinar el centro geométrico de la sección representada en la figura, en primer lugar se debe establecer el sistema de coordenadas que se empleará como referencia. Debido a que el centro geométrico debe estar en el eje y, por ser éste un eje de simetría de la sección, se obtiene de manera directa $x_{CG} = 0$.

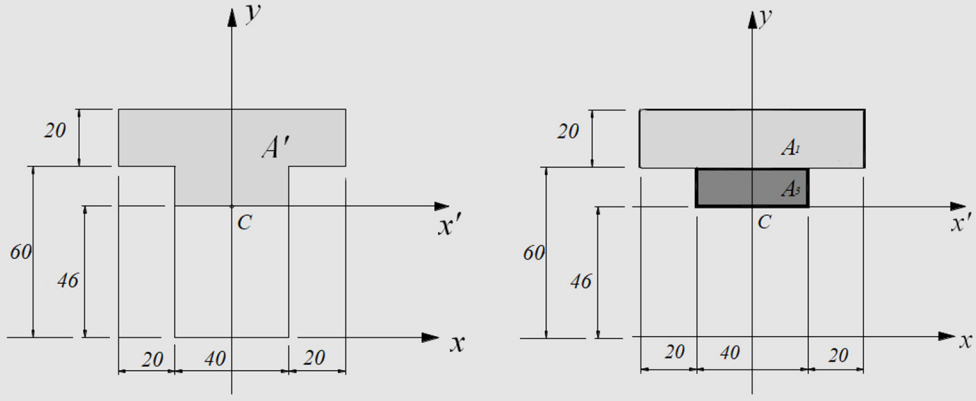
Luego se divide el área total A en las áreas conocidas: A_1 y A_2, de manera que es posible construir la siguiente Tabla, que contiene la información de las propiedades geométricas de las áreas individuales.

Figura	Área (mm^2)	$y_{CG}^{(i)}\,(mm)$	$A_i \cdot y_{CG}^{(i)}\,(mm^3)$
A_1	$20 \cdot 80 = 1600$	70	$112 \cdot 10^3$
A_2	$40 \cdot 60 = 2400$	30	$72 \cdot 10^3$
A	$\sum_{i=1}^{n=2} A_i = 4000$		$\sum_i A_i \cdot y_{CG}^{(i)} = 184 \cdot 10^3$

Finalmente, se obtiene la ordenada del centro geométrico mediante la expresión:

$$y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot y_{CG}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{184 \cdot 10^3\, mm^3}{4 \cdot 10^3\, mm^2} = 46mm$$

Ejemplo A-6: En la sección representada en el Ejemplo A.5 se considera el eje horizontal x' que pasa por el centro geométrico (CG) de la sección de área A (x' es un eje centroidal). Si A' es la porción de A localizada sobre el eje, como se muestra en la figura, determinar el primer momento de A' con respecto al eje x'.



Para calcular el momento estático del área A' con respecto al eje x' se divide A' en las áreas A_1 y A_3 como muestra la Figura.

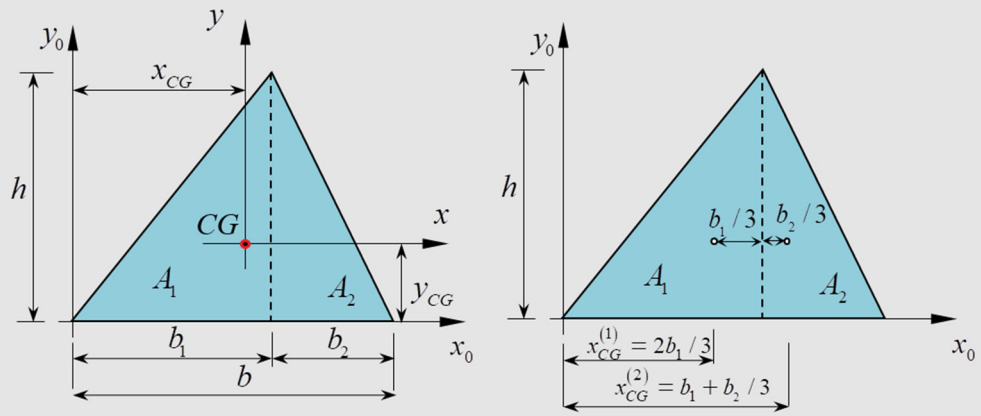
Teniendo en cuenta el resultado del Ejemplo A-5, en el que se determinó que el centro geométrico está localizado $46mm$ sobre la base de A, se determinan las coordenadas $y_{CG}^{(1)}$ e $y_{CG}^{(3)}$ de los centros geométricos de A_1 y A_3 respecto al eje x', y luego se calcula el momento estático.

Figura	Área (mm^2)	$y_{CG}^{(i)}\,(mm)$	$A_i \cdot y_{CG}^{(i)}\,(mm^3)$
A_1	$20 \cdot 80 = 1600$	$60 - 46 + 20/2 = 24$	$1600 \cdot 24 = 3840$
A_3	$14 \cdot 40 = 560$	$(60 - 46)/2 = 7$	$7 \cdot 560 = 3920$
			$\sum_i A_i \cdot y_{CG}^{(i)} = 42320$

Finalmente, el momento estático del área A' con respecto al eje x' resulta:

$$S_{x'}^{(A')} = 42.320 \cdot 10^3\ mm^3$$

Ejemplo A-7: Conocida la ordenada del centro geométrico ($y_{CG} = h/3$) de la sección representada en la Figura, calcular la abscisa x_{CG} .



$$x_{CG} = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x dA}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_{CG}^{(i)} A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{\left[\left(2\frac{b_1}{3}\right) b_1 \frac{h}{2}\right] + \left[\left(b_1 + \frac{b_2}{3}\right) b_2 \frac{h}{2}\right]}{\frac{bh}{2}}$$

$$= \frac{\frac{h}{2}\left[\frac{2}{3}b_1^2 + \left(b_1 + \frac{b}{3} - \frac{b_1}{3}\right)(b - b_1)\right]}{\frac{bh}{2}} = \frac{1}{3}(b_2 + 2b_1)$$

$$x_{CG} = \frac{1}{3}(b_2 + 2b_1)$$

A.3 Propiedades mecánicas de piezas estructurales

A.3.1 Centro de peso o gravedad de un cuerpo compuesto por distintos materiales

El concepto que se desarrolla aquí es una generalización de lo enunciado anteriormente para secciones planas. Sea un cuerpo compuesto por diferentes materiales, tal como se muestra en la Figura A.7.

El peso de cada material está dado por:

$$P_i = m_i g = \int_{V_i} \left(\rho_i^{dens} dV \right) \cdot g \tag{A.19}$$

donde m_i, ρ_i^{dens} y V_i son, respectivamente, la masa, la densidad y el volumen de cada material, mientras que g es la aceleración de la gravedad.

A partir de la ecuación (A.19) se puede obtener el peso total del cuerpo mostrado en la Figura A.7 como:

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = g \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} \rho_i^{dens} dV \tag{A.20}$$

Las coordenadas del centro de gravedad del conjunto resultan:

$$x_{CP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i x_i^C}{\sum_{i=1}^{n} P_i} = \frac{\cancel{g} \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} \rho_i^{dens} x_i \, dV}{\cancel{g} \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} \rho_i^{dens} dV} \tag{A.21}$$

$$y_{CP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i y_i^C}{\sum_{i=1}^{n} P_i} = \frac{\cancel{g} \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} \rho_i^{dens} y_i \, dV}{\cancel{g} \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} \rho_i^{dens} dV} \tag{A.22}$$

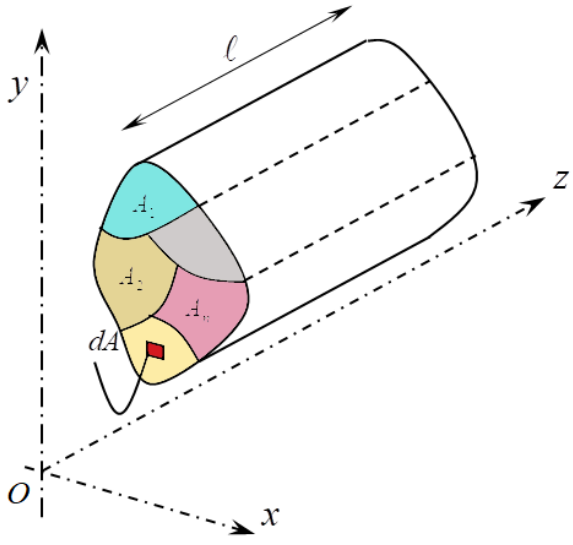


Figura A.7 – Cuerpo compuesto por distintos materiales.

Teniendo en cuenta que $dV = \ell \cdot dA$ resulta de las ecuaciones (A.21) y (A.22), para $\ell = cte$,

$$x_{CP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{dens} \int_{A_i} x_i \, dA}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{dens} \int_{A_i} dA_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{dens} S_y^i}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{dens} A_i} \tag{A.23}$$

$$y_{CP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{dens} \int_{A_i} y_i \, dA}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{dens} \int_{A_i} dA_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{dens} S_x^i}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{dens} A_i} \tag{A.24}$$

Es preciso notar que las ecuaciones (A.23) y (A.24) constituyen una generalización de las ecuaciones (A.8) y (A.9), las cuales corresponden al caso simple de una sección compuesta por un único material, es decir con $\rho^{dens} = cte$.

A.3.2 Centro geométrico de un cuerpo compuesto por distintos materiales

La coordenada del Centro Geométrico del cuerpo mostrado en la Figura A.8 se determina mediante las siguientes expresiones

$$y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} y_i \, dV}{\sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} dV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \int_{\ell} \ell \int_{A_i} y_i \, dA}{\sum_{i=1}^{n} \int_{\ell} \ell \int_{A_i} dA} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} y_i \, dA}{\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} dA} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i^x}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \tag{A.25}$$

$$y_{CG} = \frac{\int_{A} y \, dA}{\int_{A} dA} \tag{A.26}$$

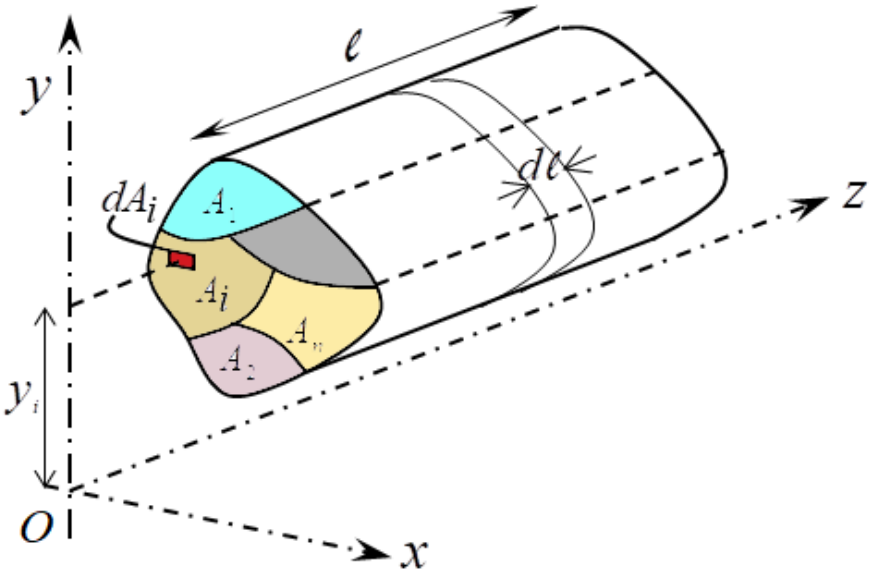


Figura A.8- Pieza estructural constituida por varios materiales.

A.3.3 Centro mecánico de un cuerpo compuesto por distintos materiales

La coordenada del Centro Mecánico del cuerpo mostrado en la Figura A.8 se determina mediante las siguientes expresiones,

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} E_i y_i \, dV}{\sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} E_i dV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i \int_{\ell} \ell \int_{A_i} y_i \, dA}{\sum_{i=1}^{n} E_i \int_{\ell} \ell \int_{A_i} dA} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i \int_{A_i} y_i \, dA}{\sum_{i=1}^{n} E_i \int_{A_i} dA} \qquad \text{(A.27)}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i S_i^x}{\sum_{i=1}^{n} E_i A_i} \qquad \text{(A.28)}$$

donde E_i es el módulo de elasticidad longitudinal del *i*-ésimo material compuesto que integra la pieza.

A.4 Momentos de inercia o Momentos de segundo orden

Como complemento de lo anterior se definen otra de las características geométricas de las "secciones transversales", la que viene dada a través de los denominados *momentos de segundo orden* o *momentos de inercia*. La expresión matemática de estos momentos (ver Figura A.9), en forma cartesiana, están dados por:

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA, \quad I_{yy} = \int_A x^2 dA \tag{A.29}$$

Y en forma polar es

$$I_O = \int_A \rho^2 dA \tag{A.30}$$

Si se desarrolla la expresión del momento de segundo orden (*momento polar de inercia*) dado por (A.30) se tiene:

$$I_O = \int_A \left(x^2 + y^2 \right) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_{xx} + I_{yy} \tag{A.31}$$

Por otra parte, se denomina *producto de inercia* de una sección respecto de los ejes x e y a la siguiente expresión:

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA \tag{A.32}$$

Si alguno de los ejes (x o y) es de simetría el producto de inercia de las sección respecto a estos ejes resulta nulo.

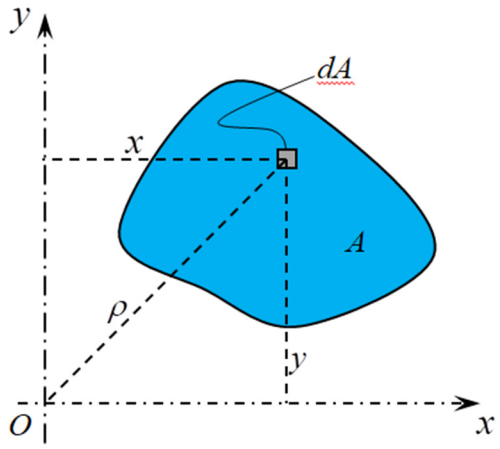


Figura A.9 – Momento de segundo orden.

A.4.1 Teorema de Steiner

Este teorema sirve para evaluar el momento de inercia respecto de cualquier otro eje paralelo al ya conocido. Sean (x', y') un sistema de ejes ortogonales paralelos a los ejes cartesianos (x, y) como se observa en la Figura A.10, donde:

$$x - x' = a \Rightarrow x' = x - a, \quad y - y' = b \Rightarrow y' = y - b \tag{A.33}$$

Por definición, los momentos de segundo orden de la sección transversal A respecto a los ejes x' e y', están dados por:

$$I'_{xx} = \int_A y'^2 dA, \qquad I'_{yy} = \int_A x'^2 dA, \quad I'_{xy} = \int_A y'\, x'\, dA, \tag{A.34}$$

Si se reemplaza en las ecuaciones (A.34) las coordenadas por sus expresiones (ecuaciones (A.33)) se obtienen:

$$I'_{xx} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y - b)^2\, dA = \int_A y^2 dA + \int_A b^2 dA - \int_A 2 y\, b\, dA \tag{A.35}$$

$$I'_{yy} = \int_A x'^2 dA = \int_A (x-a)^2 \, dA = \int_A x^2 dA + \int_A a^2 dA - \int_A 2x\,a\,dA \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned} I'_{xy} &= \int_A y'\,x'\,dA = \int_A (y-b)(x-a)\,dA \\ &= \int_A y\,x\,dA + \int_A b\,a\,dA - \int_A y\,a\,dA - \int_A x\,b\,dA \end{aligned} \tag{A.37}$$

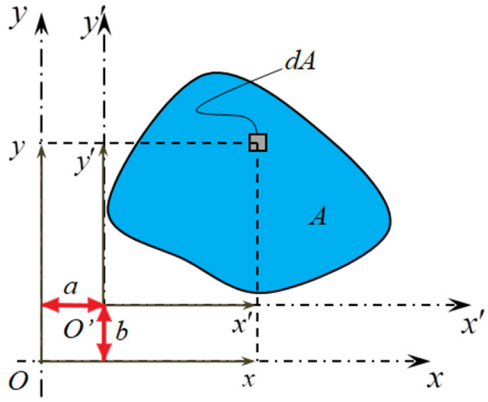


Figura A.10- Momento de inercia de una sección respecto a ejes ortogonales paralelos a los ejes (x, y).

resultando:

$$I'_{yy} = I_{yy} + a^2 A - 2\,a\,S_y \tag{A.38}$$

$$I'_{xx} = I_{xx} + b^2 A - 2\,b\,S_x \tag{A.39}$$

$$I'_{xy} = I_{xy} + a\,b\,A - b\,S_y - a\,S_x \tag{A.40}$$

Cuando los ejes x e y son ejes centrales (Figura A.11) resulta $S_x = S_y = 0$. Por lo tanto, las expresiones (A.38) a (A.40) se simplifican considerablemente, obteniéndose

$$I'_{yy} = I^{CG}_{yy} + a^2 A \tag{A.41}$$

$$I'_{xx} = I^{CG}_{xx} + b^2 A \tag{A.42}$$

$$I'_{xy} = I^{CG}_{xy} + a\,b\,A \tag{A.43}$$

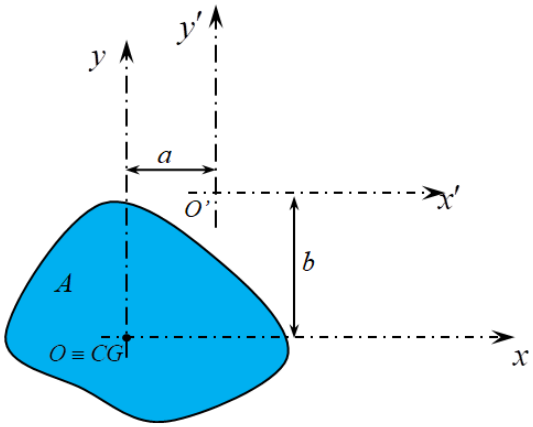


Figura A.11– Momento de inercia de una sección respecto a ejes ortogonales paralelos a los ejes centrales *x*-*y*.

A.4.2 Radio de giro

El radio de giro es otra característica geométrica de las secciones, que permite tener una idea de la robustez de una pieza. Las expresiones matemáticas de los radios de giro respecto a los ejes x e y (Figura A.9), están dadas respectivamente por:

$$i_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{A}} \tag{A.44}$$

$$i_{yy} = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} \tag{A.45}$$

Para determinar los radios de giro respecto de los ejes x' e y', paralelos a los ejes x e y, se considera la Figura A.11 y se aplican las expresiones del teorema de Steiner (A.38) a (A.40), de la siguiente manera

$$i'^2_{xx} = \frac{I'_{xx}}{A} = \frac{I_{xx}}{A} + \frac{b^2 A}{A} - \frac{2\,b\,S_x}{A} = i^2_{xx} + b^2 - 2\,b\,y_{CG} \qquad \text{(A.46)}$$

$$i'^2_{yy} = \frac{I'_{yy}}{A} = \frac{I_{yy}}{A} + \frac{a^2 A}{A} - \frac{2\,a\,S_y}{A} = i^2_{yy} + a^2 - 2\,a\,x_{CG} \qquad \text{(A.47)}$$

Cuando los ejes x e y son ejes centrales (Figura A.11), las expresiones (A.46) y (A.47) se simplifican considerablemente, resultando:

$$i'^2_{xx} = \left(i^{CG}_{xx}\right)^2 + b^2 \qquad \text{(A.48)}$$

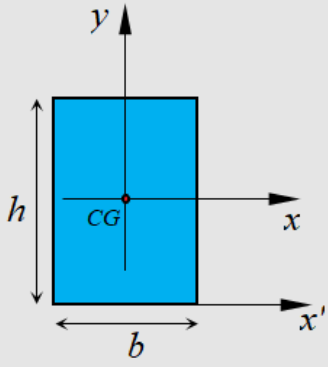
$$i'^2_{yy} = \left(i^{CG}_{yy}\right)^2 + a^2 \qquad \text{(A.49)}$$

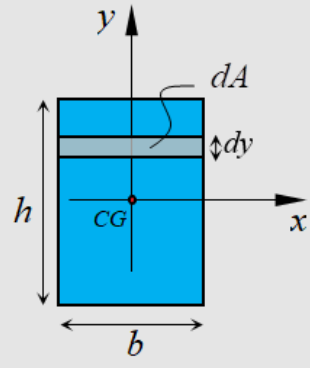
Ejemplo A-8: Para la sección rectangular representada en la figura determinar:

a) El momento de inercia respecto al eje central x.

b) El radio de giro respecto al eje central x.

c) El momento de inercia respecto al eje x' que contiene a la base del rectángulo, aplicando el teorema de Steiner.





a) Se escoge como elemento diferencial de área un elemento rectangular paralelo al eje x de base b y altura dy, de manera que todos los puntos del elemento dA se encuentren a igual distancia y del eje x. Aplicando la definición de momento de inercia se obtiene:

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b\frac{y^3}{3}\Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3}\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right)$$

Resultando $\boxed{I_{xx} = \frac{bh^3}{12}}$

b) El radio de giro se obtiene aplicando la definición dada por la ecuación (A.44):

$$i_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12}\frac{1}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

c) El momento de inercia I'_{xx} se obtiene aplicando la ecuación (A.43):

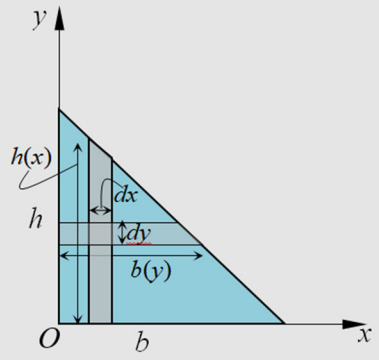
$$I'_{xx} = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

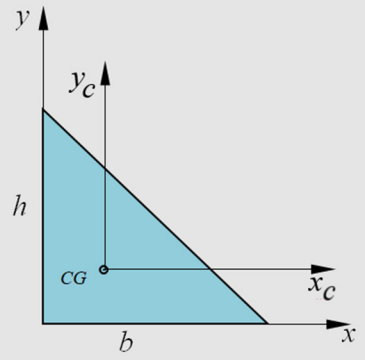
Ejemplo A-9: Para la sección triangular representada en la figura determinar:

a) Los momentos de inercia respecto de los ejes cartesianos x e y representados en la figura.

b) El producto de inercia respecto a los mismos ejes que el inciso a).

c) Los momentos de inercia respecto de los ejes centrales, aplicando el teorema de Steiner.





a) En primer lugar se determina la variación de las magnitudes diferenciales respecto de los ejes coordenados con origen en O,

$$b(y) = \frac{b}{h}(h - y) = b - \frac{b}{h}y, \qquad h(x) = \frac{h}{b}(b - x) = h - \frac{h}{b}x$$

Por definición, el momento de inercia con respecto al eje x se obtiene de la siguiente manera:

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b(y) dy = \int_0^h y^2 \left(b - \frac{b}{h}y \right) dy = \frac{b\,y^3}{3} - \frac{b}{h}\frac{y^4}{4}\Big|_0^h$$

$$\rightarrow \qquad I_{xx} = \frac{b\,h^3}{12}$$

De manera análoga, el momento de inercia con respecto al eje y se obtiene:

$$I_{yy} = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 h(x) dx = \int_0^b x^2 \left(h - \frac{h}{b}x \right) dx = \frac{h\,x^3}{3} - \frac{h}{b}\frac{x^4}{4}\Big|_0^b$$

$$\rightarrow \qquad I_{yy} = \frac{h\,b^3}{12}$$

b) Para determinar el producto de inercia respecto de los ejes x e y, se utiliza la variación de las magnitudes diferenciales encontradas en a) y se aplica la definición de producto de inercia:

$$I_{xy} = \int_A x\,y\,dA = \int_0^h \left[\int_0^{b(y)} (x\,y\,dx) \right] dy = \int_0^h \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\left(b - \frac{b}{h}y\right)} y\,dy$$

$$= \int_0^h \frac{1}{2}\left(b^2 - \frac{2b^2}{h}y + \frac{b^2}{h^2}y^2 \right) y\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b^2 y^2}{2} - \frac{2b^2}{h}\frac{y^3}{3} + \frac{b^2}{h^2}\frac{y^4}{4} \right)\Big|_0^h$$

$$\rightarrow \qquad I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{24}$$

c) Se conoce que las coordenadas del centro geométrico de la sección triangular de la figura están dadas por $x_{CG} = b/3$, $y_{CG} = h/3$. Si se aplica el teorema de Steiner, a partir de las ecuaciones (A.41) a (A.43), se obtiene:

$$I_{yy}^{CG} = I_{yy} - a^2 A = \frac{h b^3}{12} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{b h}{2} = \frac{h b^3}{36}$$

De manera análoga se obtiene $I_{xx}^{CG} = \dfrac{b h^3}{36}$

El producto de inercia se obtiene de la siguiente manera:

$$I_{xy}^{CG} = I_{xy} - ab A = \frac{h^2 b^2}{24} - \frac{b}{3}\frac{h}{3}\frac{bh}{2} = -\frac{h^2 b^2}{72}$$

A.4.3 Forma de tratar las secciones gruesas y delgadas

a) Secciones gruesas

Sea la sección mostrada en la Figura A.12. Para determinar las coordenadas del baricentro del se aplican las ecuaciones (A.17 y A.18), lo cual conduce a:

$$y_{CG} = \frac{A_1 y_{CG}^{(1)} + A_2 y_{CG}^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{(be)\dfrac{e}{2} + [(h-e)e]\left[\left(\dfrac{h-e}{2}\right) + e\right]}{(be) + (h-e)e} = \frac{be + h^2 - e^2}{2(b + h - e)} \tag{A.50}$$

$$x_{CG} = \frac{A_1 x_{CG}^{(1)} + A_2 x_{CG}^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{(be)\dfrac{b}{2} + [(h-e)e]\left(\dfrac{e}{2}\right)}{(be) + (h-e)e} = \frac{he + b^2 - e^2}{2(b + h - e)} \tag{A.51}$$

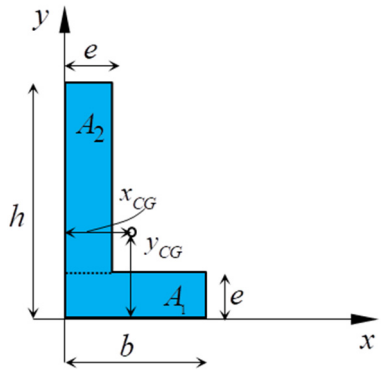


Figura A.12 – Sección transversal de paredes gruesas.

b) Secciones delgadas

Sea la sección mostrada en la Figura A.13, la cual se obtiene a partir de la Figura A.12 tomando un espesor muy pequeño ($e \to 0$). Para determinar las coordenadas del baricentro se aplica lo visto anteriormente.

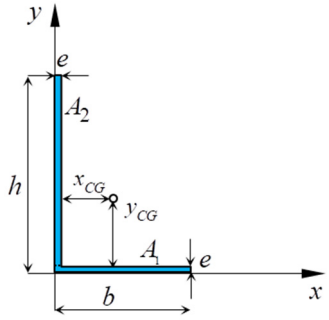


Figura A.13 – Sección transversal de paredes delgadas.

$$y_{CG} = \frac{A_1 y_{CG}^{(1)} + A_2 y_{CG}^{(2)}}{A_1 + A_2} \cong \frac{(be)0 + (he)\dfrac{h}{2}}{(h+b)e} = \frac{h^2}{2(b+h)} \tag{A.52}$$

$$x_{CG} = \frac{A_1 x_{CG}^{(1)} + A_2 x_{CG}^{(2)}}{A_1 + A_2} \cong \frac{(be)\dfrac{b}{2} + [(h-e)e]0}{(h+b)e} = \frac{b^2}{2(b+h)} \tag{A.53}$$

Observar que:

$$\lim_{e\to 0}\frac{be+h^2-e^2}{2(h+b-e)}=\frac{h^2}{2(b+h)} \qquad \text{(A.54)}$$

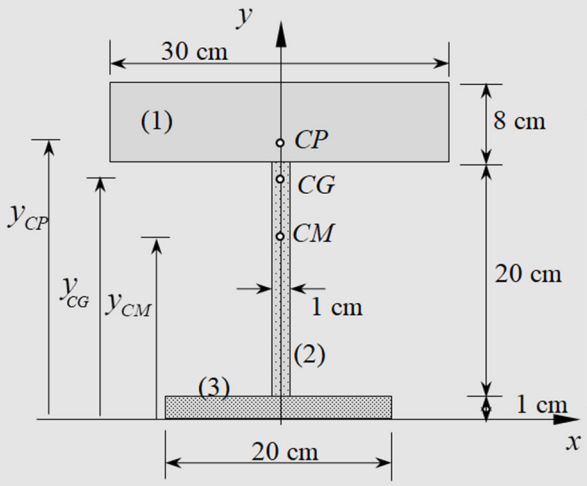
$$\lim_{e\to 0}\frac{he+b^2-e^2}{2(b+h-e)}=\frac{b^2}{2(b+h)} \qquad \text{(A.55)}$$

Ejemplo A-10: Calcular las coordenadas de

a) centro geométrico,

b) centro de gravedad y

c) centro mecánico de la sección mixta representada en la figura.



Propiedades de los materiales:

(1) $E_1 = 1\ kg/cm^2$, $\rho_1^{dens} = 1\ kg/cm^3$

(2) $E_2 = 10\ kg/cm^2$, $\rho_2^{dens} = 3\ kg/cm^3$

(3) $E_3 = 10\ kg/cm^2$, $\rho_3^{dens} = 3\ kg/cm^3$

a) Determinación del centro geométrico

Figura	Área (cm^2)	$y_{CG}^{(i)}\,(cm)$	$A_i \cdot y_{CG}^{(i)}\,(cm^3)$
(1)	$8\cdot 30 = 240$	25	$240\cdot 25 = 6000$
(2)	$1\cdot 20 = 20$	11	$20\cdot 11 = 220$
(3)	$1\cdot 20 = 20$	0.5	$20\cdot 0.5 = 10$
	$\sum_{i=1}^{3} A_i = 280$		$\sum_{i=1}^{3} A_i \cdot y_{CG}^{(i)} = 6230$

Finalmente, se obtiene la ordenada del centro geométrico mediante la expresión:

$$y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i \cdot y_{CG}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{6230 cm^3}{280 cm^2} = 22.25 cm \qquad x_{CG} = 0$$

b) Determinación del centro de gravedad

Figura	Área (cm^2)	ρ_i^{dens} (kg/cm^3)	$A_i^P = A_i \cdot \rho_i^{dens}$ (kg/cm)	$y_{CG}^{(i)}$ (cm)	$A_i^P \cdot y_{CG}^i (kg)$
(1)	$8 \cdot 30 = 240$	1	$240 \cdot 1 = 240$	25	$240 \cdot 25 = 6000$
(2)	$1 \cdot 20 = 20$	3	$20 \cdot 3 = 60$	11	$60 \cdot 11 = 660$
(3)	$1 \cdot 20 = 20$	3	$20 \cdot 3 = 60$	0.5	$60 \cdot 0.5 = 30$
	$\sum_{i=1}^{n=3} A_i = 280$		$\sum_{i=1}^{3} A_i^P = 360$		$\sum_{i=1}^{3} A_i^P \cdot y_{CG}^i = 6690$

Finalmente, se obtiene la ordenada del centro de gravedad mediante la expresión:

$$y_{CP} = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i^P \cdot y_{CG}^i}{\sum_{i=1}^{3} A_i^P} = \frac{6690 kg}{360 kg/cm} = 18.58 cm \qquad x_{CP} = 0$$

c) Determinación del centro mecánico

Figura	Área (cm^2)	E_i (kg/cm^2)	$A_i^M = A_i \cdot E_i$ (kg)	$y_{CG}^{(i)}$ (cm)	$A_i^M \cdot y_{CG}^i (kg \cdot cm)$
(1)	$8 \cdot 30 = 240$	1	$240 \cdot 1 = 240$	25	$240 \cdot 25 = 6000$
(2)	$1 \cdot 20 = 20$	10	$20 \cdot 10 = 200$	11	$200 \cdot 11 = 2200$
(3)	$1 \cdot 20 = 20$	10	$20 \cdot 10 = 200$	0.5	$200 \cdot 0.5 = 100$

	$\sum_{i=1}^{n=3} A_i = 280$		$\sum_{i=1}^{3} A_i^M = 640$		$\sum_{i=1}^{3} A_i^M \cdot y_{CG}^i = 8300$

Finalmente, se obtiene la ordenada del centro de mecánico mediante la expresión:

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i^M \cdot y_{CG}^i}{\sum_{i=1}^{3} A_i^M} = \frac{8300 kg \cdot cm}{640 kg} = 12.969 cm \qquad x_{CM} = 0$$

Ejemplo A-11: Para la sección mixta del ejemplo A-10 determinar:

a) el momento de inercia axial respecto al eje paralelo a la base que contiene al centro geométrico, y

b) el momento de inercia axial respecto al eje paralelo a la base que contiene centro mecánico.

a) Cálculo del momento de inercia geométrico

Figura	Área (cm^2)	$(I_{xx}^0)_i\,(cm^4)$	$(d_{CG}^2)_i\,(cm^2)$	$A_i \cdot (d_{CG}^2)_i$ (cm^4)
(1)	240	$\frac{30 \cdot 8^3}{12} = 1280$	$(25 - 22.25)^2 = 7.56$	$240 \cdot 7.56 = 1814.4$
(2)	20	$\frac{1 \cdot 20^3}{12} = 666.67$	$(11 - 22.25)^2 = 126.56$	$20 \cdot 126.56 = 2531.2$
(3)	20	$\frac{20 \cdot 1^3}{12} = 1.67$	$(0.5 - 22.25)^2 = 473.06$	$20 \cdot 473.06 = 9461.2$

Finalmente, se obtiene el momento de inercia geométrico mediante la expresión:

$$
\begin{aligned}
I_{xx}^{CG} &= \sum_{i=1}^{3} \left(I_{xx}^{0} \right)_i + A_i \left(d_{CG}^2 \right)_i \\
&= \left(1280 + 1814.4 \right) + \left(666.67 + 2531.2 \right) + \left(1.67 + 9461.2 \right) \\
&= 15755.14\, cm^4
\end{aligned}
$$

b) Cálculo del momento de inercia mecánico

Figura	Área (cm^2)	$\left(I_{xx}^0\right)_i$ (cm^4)	$\left(d_{CM}^2\right)_i (cm^2)$	$A_i \cdot \left(d_{CM}^2\right)_i (cm^4)$
(1)	240	1280	$\left(25-12.97\right)^2 = 144.72$	$240 \cdot 144.72 = 34732.8$
(2)	20	666.67	$\left(11-12.97\right)^2 = 3.88$	$20 \cdot 3.88 = 77.6$
(3)	20	1.67	$\left(0.5-12.97\right)^2 = 155.5$	$20 \cdot 155.5 = 3110$

Finalmente, se obtiene el momento de inercia geométrico mediante la expresión:

$$
\begin{aligned}
I_{xx}^{CM} &= \sum_{i=1}^{3} E_i \left[\left(I_{xx}^{0} \right)_i + A_i \left(d_{CM}^2 \right)_i \right] \\
&= 1 \cdot \left(1280 + 34732.8 \right) + 10 \cdot \left(666.67 + 77.6 \right) + 10 \cdot \left(1.67 + 3110 \right) \\
&= 74572.2\, kg\, cm^2
\end{aligned}
$$

A.4.4 Rotación de ejes de inercia

Conocidos los momentos de inercia axiales y el producto de inercia de la sección representada en la Figura A.14 con respecto a los ejes (x, y), el objetivo es determinar los momentos de inercia para un sistema de ejes rotados respecto de los anteriores. Se toma como punto de partida el cambio de una base ortogonal (x, y) a otra base ortogonal (x'', y''), rotada un ángulo α respecto de la primera, es decir se efectúa un cambio de base para un vector o tensor de primer orden:

$$
\underbrace{\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix}}_{x''} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}}_{x} \qquad \text{(A.56)}
$$

$$\boldsymbol{x''} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}\,, \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x''} \tag{A.57}$$

La matriz de transformación $\boldsymbol{A}$ es ortonormal, es decir que se verifica $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$.

Ahora se escribe la inercia de una sección plana como un tensor de segundo orden, donde sus componentes reúnen toda la información del estado de inercia. Es decir:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix}, \text{ con } I_{xy} = I_{yx} \tag{A.58}$$

Este tensor cambia sus componentes según la orientación que toman los ejes (x'', y'') al rotar sobre "O".

El cambio de base para un tensor de segundo orden viene dado por

$$\boldsymbol{I''} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{A}^T, \text{ con } I_{xy} = I_{yx} \tag{A.59}$$

Resolviendo este producto se tiene

$$\begin{bmatrix} I''_{xx} & -I''_{xy} \\ -I''_{yx} & I''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (I_{xx}\cos\alpha - I_{xy}\,\text{sen}\,\alpha) & -(I_{xx}\,\text{sen}\alpha + I_{xy}\cos\alpha) \\ (-I_{yx}\cos\alpha + I_{yy}\,\text{sen}\,\alpha) & (I_{yx}\,\text{sen}\,\alpha + I_{yy}\cos\alpha) \end{bmatrix} \tag{A.60}$$

$$\begin{aligned} I''_{xx} &= (I_{xx}\cos\alpha - I_{xy}\,\text{sen}\,\alpha)\cos\alpha + (-I_{yx}\cos\alpha + I_{yy}\,\text{sen}\,\alpha)\,\text{sen}\,\alpha \\ -I''_{xy} &= -(I_{xx}\,\text{sen}\alpha + I_{xy}\cos\alpha)\cos\alpha + (I_{yx}\,\text{sen}\,\alpha + I_{yy}\cos\alpha)\,\text{sen}\,\alpha \\ -I''_{yx} &= -(I_{xx}\,\text{sen}\alpha + I_{xy}\cos\alpha)\,\text{sen}\,\alpha + (-I_{yx}\cos\,\alpha + I_{yy}\,\text{sen}\,\alpha)\cos\alpha \\ I''_{yy} &= (I_{xx}\,\text{sen}\alpha + I_{xy}\cos\alpha)\,\text{sen}\,\alpha + (I_{yx}\,\text{sen}\,\alpha + I_{yy}\cos\alpha)\cos\alpha \end{aligned}$$

Operando cada uno de estos componentes y teniendo en cuenta que $I_{xy} = I_{yx}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} I''_{xx} &= I_{xx}\cos^2\alpha - I_{xy}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - I_{yx}\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha + I_{yy}\,\text{sen}^2\alpha \\ -I''_{xy} &= -I_{xx}\,\text{sen}\alpha\cos\alpha - I_{xy}\cos^2\alpha + I_{yx}\,\text{sen}^2\alpha + I_{yy}\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha \\ -I''_{yx} &= -I_{xx}\,\text{sen}^2\alpha - I_{xy}\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha - I_{yx}\cos^2\alpha + I_{yy}\,\text{sen}\alpha\cos\alpha \\ I''_{yy} &= I_{xx}\,\text{sen}^2\alpha + I_{xy}\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha + I_{yx}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + I_{yy}\cos^2\alpha \end{aligned} \tag{A.61}$$

De donde surge:

$$\begin{aligned} I''_{xx} &= I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\,\text{sen}^2\alpha - \underbrace{2I_{xy}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}_{=I_{xy}\,\text{sen}\,2\alpha} \\ I''_{xy} &= \left(I_{xx} - I_{yy}\right)\underbrace{\text{sen}\alpha\cos\alpha}_{\frac{\text{sen}\,2\alpha}{2}} + I_{xy}\underbrace{\left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right)}_{\cos 2\alpha} \\ I''_{yy} &= I_{xx}\,\text{sen}^2\alpha + I_{yy}\cos^2\alpha + \underbrace{2I_{xy}\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha}_{=I_{xy}\,\text{sen}\,2\alpha} \end{aligned} \tag{A.62}$$

Las expresiones de las inercias en el sistema de ejes (x'', y'') pueden obtenerse partiendo de las ecuaciones de transformación (A.62) y de la definición de momento de inercia. Teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} x'' &= x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha \\ y'' &= -x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{aligned} \tag{A.63}$$

Resulta,

$$\begin{aligned} I''_{xx} &= \int_A (y'')^2\,dA = \int_A \left(-x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha\right)^2 dA \\ &= \int_A \left(x^2\text{sen}^2\alpha + y^2\cos^2\alpha - 2xy\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)dA \\ &= \left(\int_A x^2 dA\right)\text{sen}^2\alpha + \left(\int_A y^2 dA\right)\cos^2\alpha - 2\left(\int_A xy\,dA\right)\text{sen}\,\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

$$I''_{xx} = \left(\int_A x^2 dA \right) \text{sen}^2 \alpha + \left(\int_A y^2 dA \right) \cos^2 \alpha - 2 \left(\int_A xy\, dA \right) \text{sen}\, \alpha \cos \alpha$$

$$I''_{xx} = I_{yy} \text{sen}^2 \alpha + I_{xx} \cos^2 \alpha - I_{xy} \text{sen}\, 2\alpha \tag{A.64}$$

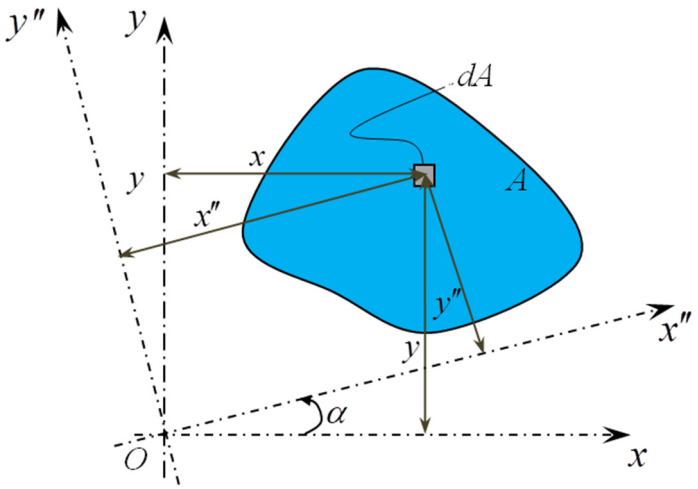


Figura A.14– Momento de inercia de una sección respecto a ejes ortogonales rotados.

De la misma manera

$$\begin{aligned} I''_{yy} &= \int_A (x'')^2 dA = \int_A (x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha)^2 dA \\ &= \int_A (x^2\cos^2\alpha + y^2\text{sen}^2\alpha + 2xy\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)\, dA \\ &= I_{xx}\,\text{sen}^2\alpha + I_{yy}\cos^2\alpha + I_{xy}\text{sen}\,2\alpha \end{aligned} \tag{A.65}$$

$$\begin{aligned} I''_{xy} &= \int_A x''y''^2 dA = \int_A (x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha)(-x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha)\, dA \\ &= I_{xy} \underbrace{(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)}_{\cos 2\alpha} + (I_{xx} - I_{yy}) \underbrace{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}_{\frac{\text{sen}\,2\alpha}{2}} \end{aligned} \tag{A.66}$$

A.4.5 Ejes principales de inercia

Entro todos los posibles ángulos α que definen una rotación de los ejes (x,y) existe sólo uno donde uno de los momentos de inercia se hace máximo y el otro mínimo, en tanto el momento centrífugo o producto de inercia se hace cero. Estos ejes reciben el nombre de *ejes principales de inercia*. Se pueden seguir distintos caminos para determinar los ejes principales de inercia, y el valor de los respectivos momentos de segundo orden. Aquí se ha optado por tres de los muchos que hay.

a) Considerando la ecuación característica del tensor de inercia

Dado el tensor de inercia, que está identificado con los ejes ortogonales que pasan por el punto "O" del plano (Figura A.14), es posible encontrar otro sistema coordenado ortogonal, rotado respecto del anterior, donde x'' coincide con un vector ℓ_1 y el eje y'' ℓ_2, tal que sobre la dirección del primero se tenga $I_1 \equiv I_{\max}$, sobre el segundo eje $I_2 \equiv I_{\min}$, y el correspondiente producto de inercia $I_{12} \equiv 0$. Este sistema de ejes será un sistema de ejes principales, asociado al sistema (x,y). Los momentos de inercia I_1 e I_2 se denominan *momentos principales de inercia* de la sección. En otras palabras, se trata de otra manera de medir las mismas características geométricas de una sección. Esto es,

$$\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\ell} - I^*\,\boldsymbol{\ell} = \mathbf{0} \tag{A.67}$$

$$\left(\boldsymbol{I} - I^*\,\mathbf{1}\right)\boldsymbol{\ell} = \mathbf{0} \tag{A.68}$$

donde I^* son los momento principales de inercia, $\boldsymbol{I}$ es el tensor de inercia y $\mathbf{1}$ es la matriz identidad.

Para que la solución de este sistema no sea la trivial, para $\boldsymbol{\ell} \neq 0$, es necesario que:

$$\det\left(\boldsymbol{I} - I^*\,\mathbf{1}\right) = 0 \tag{A.69}$$

Desarrollando el determinante anterior se obtiene la ecuación característica del tensor de inercia $\boldsymbol{I}$

$$\det\begin{bmatrix} I_{xx}-I^* & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_{yx}-I^* \end{bmatrix} = \left(I_{xx}I_{yy} - I^*I_{xx} - I^*I_{yy} + I^{*2} \right) - \left(I_{xy}I_{yx} \right) = 0 \qquad \text{(A.70)}$$

Resultando la siguiente ecuación característica en I^*

$$\left(I^* \right)^2 - I^* \underbrace{\left(I_{xx} + I_{yy} \right)}_{I_0} + \underbrace{\left(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 \right)}_{I_0'} = 0 \qquad \text{(A.71)}$$

donde I_0 e I_0' son el primer y segundo invariante de inercia.

La ecuación (A.71) tiene dos raíces, que serán los valores propios o autovalores de (A.68), tal que el mayor de estos autovalores coincidirá con $I_1 \equiv I_{\max}$ y el menor con $I_2 \equiv I_{\min}$,

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy} \pm \sqrt{\left(I_{xx} + I_{yy} \right)^2 - 4\left(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 \right)}}{2} \qquad \text{(A.72)}$$

Desarrollando esta última expresión se obtiene,

$$I_{1,2} = \frac{\left(I_{xx} + I_{yy} \right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} \qquad \text{(A.73)}$$

Sustituyendo cada uno de estos autovalores en (A.67), se obtendrán los correspondientes vectores propios o autovectores (direcciones principales). Esto es:

$$\text{Para} \qquad I_{\max} = I_1 \rightarrow \ell_1 = \begin{Bmatrix} \cos\left(\widehat{\ell_1; x} \right) \\ \cos\left(\widehat{\ell_1; y} \right) \end{Bmatrix} \qquad \text{(A.74)}$$

$$\text{Para} \qquad I_{\min} = I_2 \rightarrow \ell_2 = \left\{ \begin{matrix} \cos\left(\widehat{\ell_2; x}\right) \\ \cos\left(\widehat{\ell_2; y}\right) \end{matrix} \right\} \tag{A.75}$$

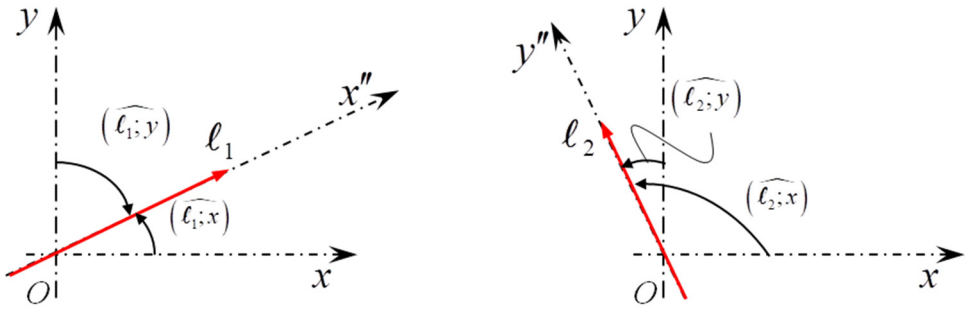


Figura A.15– Nomenclatura utilizada para designar los ángulos en una rotación de ejes.

Se verifica que el producto escalar entre los versores que indican las direcciones principales es nulo, es decir:

$$\ell_1 \cdot \ell_2 = 0 \tag{A.76}$$

El resultado dado por la expresión (A.76) confirma que $\ell_1 \perp \ell_2$. Como nota aclaratoria, conviene resaltar que el sistema (A.68) está constituido por dos ecuaciones linealmente dependientes, por lo que sólo tiene solución si se aplica la siguiente condición auxiliar:

$$\left(\ell_i^x\right)^2 + \left(\ell_i^y\right)^2 = 1, \quad i = 1,2 \tag{A.77}$$

donde ℓ_i^x, ℓ_i^y son las componentes de los vectores que definen las direcciones principales en las direcciones cartesianas x e y, respectivamente.

Si se desarrolla la ecuación (A.68) para el momento principal de inercia I_1 se obtiene,

$$\begin{cases} (I_{xx} - I_1)\ell_1^x + I_{xy}\ell_1^y = 0 \\ I_{yx}\ell_1^x + (I_{yy} - I_1)\ell_1^y = 0 \end{cases} \tag{A.78}$$

Teniendo en cuenta la condición auxiliar dada por la ecuación (A1.77) para la dirección principal de inercia ℓ_1, resulta

$$(\ell_1^x)^2 + (\ell_1^y)^2 = 1 \tag{A.79}$$

Se despeja ℓ_1^y de la primera de las ecuaciones (A.78) y luego se lo sustituye en la condición auxiliar (A.79), se obtiene

$$\ell_1^y = -\frac{(I_{xx} - I_1)}{I_{yx}}\ell_1^x, \quad (\ell_1^x)^2 + \left(\frac{I_{xx} - I_1}{I_{yx}}\right)^2 (\ell_1^x)^2 = 1 \tag{A.80}$$

$$\rightarrow \quad \ell_1^x = \frac{1}{1 + \left(\frac{I_{xx} - I_1}{I_{yx}}\right)^2} \quad \text{y} \quad \ell_1^y = -\frac{(I_{xx} - I_1)}{I_{yx}}\ell_1^x \tag{A.81}$$

b) Maximizando la ecuación (A.64)

Derivando la expresión (A.64) respecto de α, e igualando a cero, se obtiene el ángulo φ (ver Figura A.16) para el cual el momento de inercia es máximo o mínimo, así como el valor correspondiente:

$$\frac{dI''_{xx}}{d\alpha} = 0 = -2I_{xx}\cos\alpha\ \text{sen}\alpha + 2I_{yy}\,\text{sen}\alpha\cos\alpha - I_{xy}\underbrace{(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)}_{\cos 2\alpha} \tag{A.82}$$

$$0 = (I_{xx} - I_{yy})\,\text{sen}\,2\alpha + 2I_{xy}\cos 2\alpha \tag{A.83}$$

$$0 = \frac{(I_{xx} - I_{yy})}{2I_{xy}}\,\text{tg}\,2\alpha + 1 \quad \rightarrow \quad \text{tg}\,2\varphi = \text{tg}\,2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{(I_{xx} - I_{yy})} \tag{A.84}$$

$$\begin{cases} I''_{xx} = I_1 = I_{\max} \\ I''_{yy} = I_2 = I_{\min} \\ I''_{xy} = I_{12} = 0 \end{cases} \tag{A.85}$$

Si se sustituye el ángulo φ obtenido a través de la ecuación (A.84) en el sistema de ecuaciones (A.64-66) se obtienen los valores de los momentos principales de inercia antes determinados (Figura A.16).

c) Círculo de Mohr

Mohr establece una construcción gráfica, para obtener tanto los momentos de inercia máximos y mínimos, como así también el valor del ángulo en el que se producen estos momentos de inercia. Para ello se pate de representar el tensor de inercia en un plano convencional, como se muestra en la Figura A.17.

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} \tag{A.86}$$

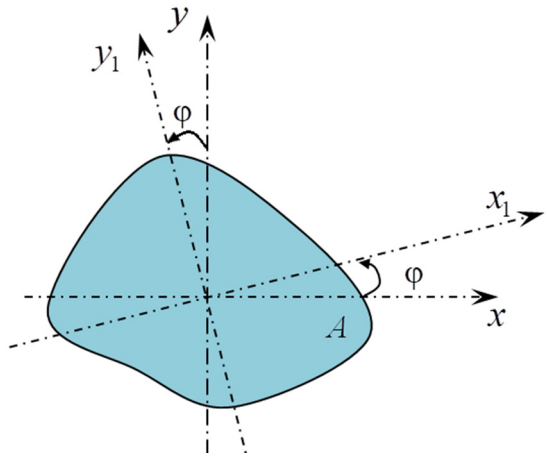


Figura A.16– Momento de inercia de una sección respecto a ejes ortogonales rotados a las posiciones de ejes principales.

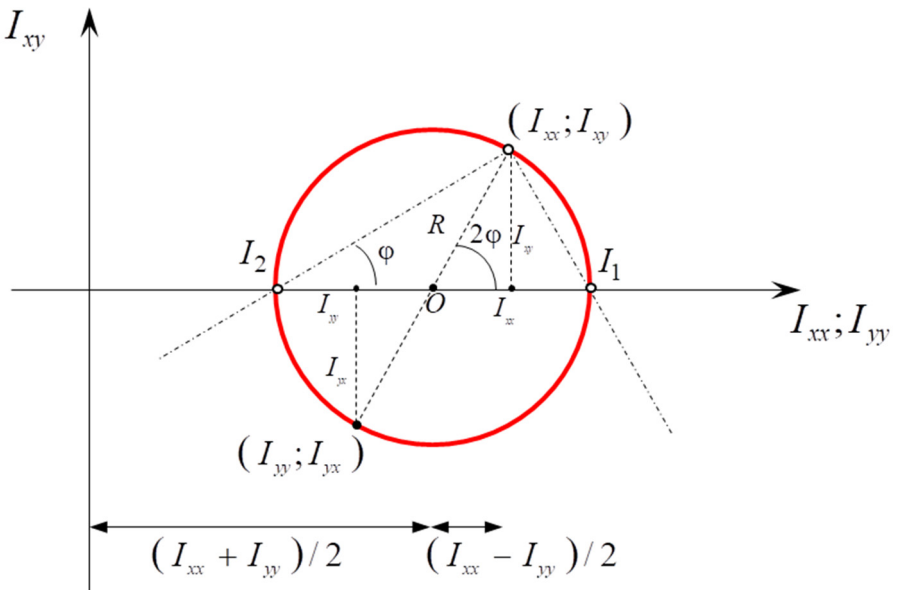


Figura A.17– Círculo de Mohr.

Del círculo de Mohr representado en la Figura A.17 surge lo siguiente:

$$R=\sqrt{\left(\frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\right)^2+I_{xy}^2} \tag{A.87}$$

$$I_1=\frac{I_{xx}+I_{yy}}{2}+R, \qquad I_2=\frac{I_{xx}+I_{yy}}{2}-R \tag{A.88}$$

$$\operatorname{tg}(2\varphi)=-\frac{2I_{xy}}{I_{xx}-I_{yy}} \tag{A.89}$$

d) Círculo de Mohr-Land

Existe una variante del círculo de Mohr, donde se representa el tensor de inercia en un cierto modo, y luego se obtiene de allí la misma información que brinda el círculo de Mohr, más otra que es de utilidad en problemas de flexión. A continuación se detalla en forma gráfica el mencionado círculo. Por encima del centro geométrico de la sección se traza el círculo de inercia con un diámetro igual

al momento de inercia polar $I_o = I_{xx} + I_{yy}$. En la Figura A.18 se presenta la construcción.

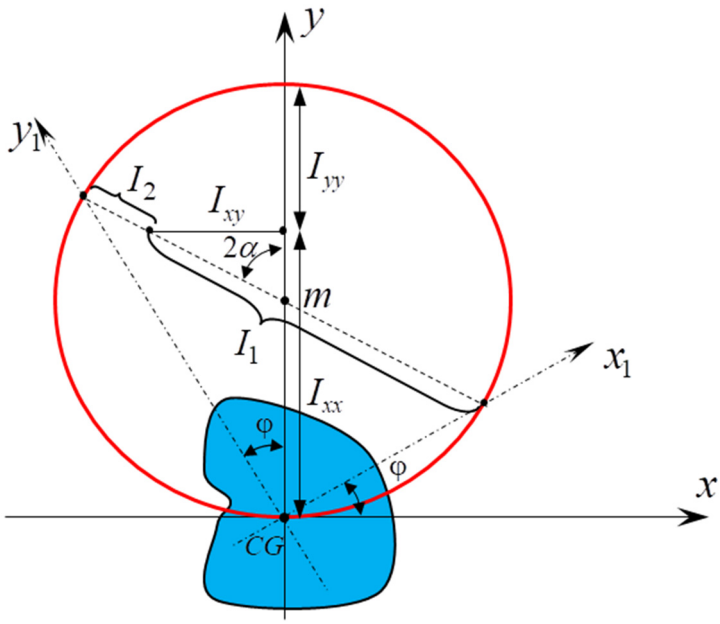


Figura A.18– Círculo de Mohr-Land.

Bibliografía

P. Benham, R. Crawford and C. Armstrong (1997). *Mechanics of Engineering Materials*. Longman.

T.H.G. Megson (2005). *Structural and Stress Analysis*. Elsevier, Second Edition, USA.

R. D.Cook, W. C.Young, (1999). *Advanced Mechanics of Materials*. Prentice Hall.

M. Cervera Ruiz y E. Blanco Díaz (2015). *Resistencia de Materiales*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)

M. Cervera Ruiz y E. Blanco Díaz (2012). *Mecánica y Resistencia de Materiales*. CIMNE.

M. Cervera Ruiz y E. Blanco Díaz (2002). *Mecánica de estructuras*. Vol. 1 y Vol. 2. Edicions-UPC. Barcelona.

J. M. Gere (2002). *Timoshenko Resistencia de materiales*. Editorial Paraninfo, Madrid.

S. P Timoshenko, and J. N Goodier (1970). *Theory of elasticity*. McGraw-Hill.

S. P. Timoshenko y D. H. Young (1976). *Teoría de las estructuras*. Urmo.

S. P. Timoshenko (1983). History of Strength of Materials. Dover.

J. Miquel Canet (2000). *Cálculo de estructuras*. Vol. 1 y Vol. 2. Edicions-UPC CIMNE. Barcelona.

L. Ortiz Berrocal (1991). *Resistencia de materiales*. McGraw-Hill.

Bruhn (1973). *Analysis and design of flight vehicle structures*. Jacobs Publishing Inc.
B. K. Donaldson (1993). *Analysis of aircraft structures – An introduction*. McGraw-Hill.

M. C. Y. Niu (1997). *Airframe – Stress analysis and sizing*. Hong Kong Conmilit Press Ltd..

W. Nash (1991). *Resistencia de materiales*. McGraw-Hill.

H. West (1998). *Analysis of Structures – An Integration of Classical and Modern Methods*. Jhon Wiley and Sons, USA.

K. Hirschfeld (1975). *Estática en la Construcción*. Editorial Reverté, Barcelona.

F. P. Beer, E. R, Johnston, J. T. De Wolf & D. F. Mazurek, (2011). *Mechanics of Materials*. McGraw-Hill.

R. R. Craig, (2011). *Mechanics of Materials*. Wiley.

R. C. Hibbeler (2010). *Mechanics of Materials*. Prentice Hall.

Ch. Massonnet (1968). *Résistance des matériaux*. Dunod.

E. P. Popov, (1999). *Engineering Mechanics of Solids*. Prentice Hall.



Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos por la E.T.S de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona (UPC), España; Especialista en Cálculo Avanzado de Estructuras por la Università degli Studi di Roma, Italia. Catedrático "Senior" de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras en la E.T.S de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, Universidad Politécnica de Cataluña (UPC), España; Profesor Titular de Estabilidad y de Mecánica en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta (UNSA), Argentina; Investigador Principal del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina; Investigador "Senior" del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), España. Doctor "Honoris-Causa" por la Universidad Nacional de Salta (UNSA), Argentina; Profesor Honorario por la Universidad Nacional de Salta, Argentina.



Doctora en Ingeniería, Orientación Estructuras, por la por la Universidad Nacional de Salta (UNSA), Argentina; Profesor Titular de Estabilidad II de la carrera de Ingeniería Civil y docente de la carrera de Doctorado en Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta (UNSA), Argentina; Docente en la Maestría en Ingeniería Estructural y el Doctorado en Ingeniería del Instituto de Estructuras de la Universidad Nacional de Tucumán (UNT), Argentina; Directora del Aula CIMNE – UNSa; Investigador Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.

Este libro está dirigido a la formación de estudiantes de ingeniería, arquitectura y también a ingenieros y arquitectos como base de consulta para el ejercicio de la profesión. Presenta un enfoque de la Resistencia de Materiales enriquecido con nuevos conceptos y con ejemplos resueltos mediante herramientas informáticas, ayudando así a establecer una metodología de trabajo simple, reduciendo los tiempos de solución de los problemas y permitiendo una mejor asimilación de los conceptos fundamentales.

El trabajo contenido en este libro es fruto de la extensa experiencia de los autores dedicada a la enseñanza de esta temática y ha sido desarrollado con el objetivo de ayudar al aprendizaje de las bases del análisis de estructuras en general y de piezas de máquinas.

9 788412 110128

CIMNE
www.cimne.com/publicaciones