

Dinámica No-Lineal

S. Oller

Dinámica No-Lineal

S. Oller

Profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros
De Caminos, Canales y Puertos de Barcelona.

Investigador del Centro Internacional de Métodos Numéricos
en Ingeniería

Monografía CIMNE N°-63, Enero 2002

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España

Primera edición: Enero 2002

DINAMICA NO-LINEAL
Monografía CIMNE M 63
© El autor

ISBN: 84-89925-95-X

Depósito legal: B-9022-02

Presentación

Esta monografía trata la “dinámica no-lineal” de los sistemas estructurales. Existen diversos enfoques para esta materia y por ello intento que este trabajo aporte un punto de vista más al estudio dinámico no-lineal.

La motivación para escribir estas páginas se basa en la necesidad de contar con un material de estudio para la asignatura de “Dinámica no-lineal” que dicto en doctorado del departamento de “Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería” de la Universidad Politécnica de Cataluña.

Espero que estas notas ayuden a la mejor comprensión de la dinámica e incentiven a lector a una mayor profundización.

Barcelona, Enero de 2002

Sergio Oller

Contenido.

B 1 Introducción.....	1-1
B1.1 Presentación.....	1-1
 B 2 Bases Termodinámicas de la Ecuación del Movimiento.....	 2-1
B2.1 Introducción.....	2-1
B2.2 Cinemática del Continuo Deformable.....	2-1
B2.2.1 Definiciones básicas de los tensores que describen la cinemática de un punto en el espacio.....	2-1
B2.2.2 Medidas de la Deformación.....	2-3
B2.2.3 Relación entre Variables Mecánicas.....	2-4
B2.2.4 Derivada Objetiva.....	2-6
B2.2.5 Velocidad.....	2-6
B2.2.6 Medidas de la Tensión.....	2-7
B2.3 Bases Termodinámicas.....	2-8
B2.3.1 Primera Ley de la Termodinámica.....	2-8
B2.3.2 Segunda Ley de la Termodinámica.....	2-11
B2.3.3 Disipación Mecánica escrita en Forma Lagrangeana.....	2-14
B2.4 Variables Internas.....	2-15
B2.5 Ecuación de Equilibrio.....	2-16
B2.6 Distintos tipos de Problemas Dinámicos No-lineales.....	2-20
B2.6.1 No linealidad en los Materiales.....	2-23
 B 3 Resolución de la Ecuación del Movimiento.....	 3-1
B3.1 Introducción.....	3-1
B3.2 Solución explícita-implícita.....	3-3
B3.3 Solución implícita.....	3-4
B3.3.1 Equilibrio en cada instante ($t + \Delta t$).....	3-5
B3.3.2 Solución del equilibrio en el tiempo - Métodos implícitos.....	3-6
B3.3.2.1 Procedimiento de Newmark.....	3-6
B3.3.2.2 Procedimiento de Houbolt.....	3-11
B3.3.3 Solución del sistema de ecuaciones de equilibrio no lineal.....	3-12
B3.3.3.1 Método de Newton-Raphson.....	3-13
B3.3.3.2 Método de Newton-Raphson modificado.....	3-14
B3.3.3.3 Aceleradores de convergencia.....	3-15
B3.3.3.4 Acelerador de Aitken o algoritmo de extrapolación.....	3-16
B3.3.3.5 Algoritmos de B.F.G.S.....	3-16
B3.3.3.6 Algoritmos de Newton-Secante.....	3-18
B3.3.3.7 Algoritmos de “Line-Search”.....	3-18
B3.3.3.8 Algoritmos de control de respuesta – “Arc-Length”.....	3-20
Ecuación de control de desplazamiento – Superficie esférica.....	3-21

B 4 Análisis de convergencia en la solución dinámica.	4-1
B4.1 Introducción.....	4-1
B4.2 Reducción al problema elástico lineal.	4-1
B4.3 Procedimiento de solución de sistemas “lineales” de 2do. orden.....	4-4
B4.4 La ecuación de equilibrio dinámico y su convergencia-Consistencia y Estabilidad.	4-5
B4.5 Estabilidad en la solución de sistemas simétricos “lineales” de segundo orden.	4-7
B4.5.1 Procedimiento para el análisis de estabilidad.....	4-7
B4.5.2 Determinación de A y L para “Newmark”.....	4-7
B4.5.3 Determinación de A y L para “Diferencias centradas” – Forma explícita de Newmark.	4-11
B4.6 Estabilidad en la solución de sistemas simétricos “no-lineales” de segundo ord.	4-14
B4.6.1 Estabilidad de la ecuación linealizada.	4-14
B4.6.2 Algoritmos de conservación de la energía.....	4-14
APÉNDICE - 1.....	4-18
APÉNDICE - 2.....	4-24

B 5 Modelos independientes del tiempo.....	5-1
B 5.1 Introducción.	5-1
B 5.2 Comportamiento Elástico.....	5-1
B 5.2.1 Cálculo de los Invariantes de un Tensor.....	5-4
B 5.3 Elasticidad No-Lineal.	5-5
B 5.3.1 Introducción.....	5-5
B 5.3.2 Modelo Hiperelástico No-Lineal.....	5-6
B 5.3.2.1 Modelo Hiperelástico Basado en Tensiones.....	5-6
B 5.3.2.2 Postulados de Estabilidad.....	5-7
B 5.4 Plasticidad en Pequeñas Deformaciones.	5-10
B 5.4.1 Introducción.....	5-10
B 5.4.2 Criterios de Discontinuidad de Comportamiento o Criterio de Fluencia Plástica.	5-12
B 5.5 Comportamiento Elasto-Plástico.....	5-15
B 5.5.1 Teoría de Levy-Mises.	5-16
B 5.5.2 Teoría de Prandtl-Reus.	5-16
B 5.6 Teoría Clásica de Plasticidad.	5-17
B 5.6.1 Trabajo Plástico Unitario o Específico.....	5-18
B 5.6.2 Superficie de Carga Plástica. Variable de Endurecimiento Plástico.	5-20
B 5.6.2.1 Endurecimiento isótropo.	5-20
B 5.6.2.2 Endurecimiento Cinemático.	5-21
B 5.6.3 Relación Tensión-Deformación. Consistencia Plástica y Rigidez Tang..	5-22
B 5.7 Postulado de Estabilidad de Drucker y Axioma de la Máxima Disipación Plástica.	5-24
B 5.8 Condición de Estabilidad.....	5-25
B 5.8.1 Estabilidad local.	5-25
B 5.8.2 Estabilidad Global.	5-26
B 5.9 Condición de Unicidad en la Solución.....	5-27
B 5.10 Condición de carga-descarga. Kuhn-Tucker.....	5-28
B 5.11 Criterios Clásicos de Fluencia o Discontinuidad Plástica.....	5-29
B 5.11.1 Criterio de Rankine. De la Máxima Tensión de Tracción.	5-30
B 5.11.2 Criterio de Tresca. De la Máxima Tensión de Cortante.	5-32
B 5.11.3 Criterio de von Mises. De Tensión Cortante Octaédrica.	5-34

B 5.11.4	Criterio de Mohr-Coulomb. De Tensión Cortante Octaédrica.	5-36
B 5.11.5	Criterio de Drucker-Prager.....	5-40
B 5.12	Plasticidad Para Geomateriales.	5-42
B 5.13	Bases del modelo de “daño-plástico”.	5-43
B 5.13.1	Hipótesis sobre el comportamiento del material a representar.....	5-45
B 5.13.2	Algunas Características del Modelo de Daño Plástico.	5-46
B 5.14	Variables fundamentales del modelo de “daño-plástico”.	5-48
B 5.14.1	Definición de la variable de daño plástico.	5-48
B 5.14.2	Definición de la ley de evolución de la cohesión $c - \kappa^p$	5-51
B 5.14.3	Definición de la variable ϕ , ángulo de rozamiento interno.	5-52
B 5.14.4	Definición de la variable ψ , ángulo dilatación.....	5-56
B 5.15	Generalización del modelo de daño plástico con degradación de rigidez.....	5-57
B 5.15.1	Introducción.....	5-57
B 5.15.2	Ecuación constitutiva elasto-plástica con degradación de rigidez.	5-59
B 5.15.3	Ecuación constitutiva tangente para procesos con degradación de	5-61
B 5.15.4	Funciones de Fluencia particulares.	5-62
B 5.15.4.1	Función de Mohr-Coulomb Modificada.	5-62
B 5.15.4.2	Función de Drucker-Prager Modificada.	5-65
B 5.16	Daño continuo isótropo - Introducción.....	5-67
B 5.17	Modelo de daño isótropo.....	5-67
B 5.18	Energía libre de Helmholtz y ecuación constitutiva.	5-69
B 5.19	Criterio umbral de daño.	5-70
B 5.20	Ley de evolución de la variable interna de daño.....	5-71
B 5.21	Tensor constitutivo de daño tangente.	5-72
B 5.22	Particularización del criterio de daño.....	5-73
B 5.22.1	Ablandamiento general.	5-73
B 5.22.2	Ablandamiento Exponencial.....	5-74
B 5.22.3	Ablandamiento lineal.....	5-76
B 5.23	Particularización de la Función Umbral de Tensión.....	5-76
B 5.23.1	Modelo de Simo y Ju.....	5-76
B 5.23.1.1	Deducción del parámetro A para el modelo de Simo-Ju.....	5-76
B 5.23.2	Modelo de Lemaitre y Mazars.....	5-78
B 5.23.3	Modelo para distintas superficies de daño.	5-79
B 5.23.4	Deducción del parámetro A	5-79

B 6 Modelos dependientes del tiempo.....6-1

B6.1	Introducción.....	6-1
B6.2	Ecuaciones constitutivas basadas en ana-logías “muelle-amortiguador”.....	6-1
B6.2.1	Modelo simplificado de Kelvin.....	6-2
B6.2.2	Modelo simplificado de Maxwell.....	6-3
B6.2.3	Modelo generalizado de Kelvin.	6-3
B6.2.4	Modelo múltiple de Kelvin generalizado.....	6-6
B6.2.5	Modelo generalizado de Maxwell.	6-7
B6.2.6	Modelo múltiple de Maxwell generalizado.....	6-10
B6.2.6.1	Evaluación de la disipación.	6-11
B6.3	Generalización multiaxial de las leyes constitutivas viscoelásticas.....	6-12
B6.3.1	Forma multiaxial de los modelos viscoelásticos.....	6-12
B6.3.2	Resolución numérica de la integral y algoritmia.	6-14
B6.4	El modelo de Kelvin en los problemas diná-micos.	6-16
B6.4.1	Disipación del modelo de Kelvin.	6-17
B6.4.2	Ecuación de equilibrio dinámico para el modelo de Kelvin.....	6-18

B6.4.3	Consideración sobre la tensión. Rayleigh vs. Kelvin.....	6-20
B6.4.4	Consideración sobre la disipación. Rayleigh vs. Kelvin.	6-20
B6.4.5	Viga en voladizo.....	6-21
B6.4.6	Pórtico con dintel rígido y masa concentrada en el mismo.....	6-23
B6.5	Viscoplasticidad.....	6-24
B6.5.1	Estados límites de la viscoplasticidad.	6-26
B6.5.2	Función de sobretensión.	6-27
B6.5.3	Algoritmo de integración de la ecuación constitutiva viscoplástica.	6-28
B6.5.3	Caso particular del modelo de Duvaut-Lion para materiales visco-plástico de von Mises.....	6-28

B 1 Introducción.

B1.1 Presentación.

La *dinámica de estructuras* estudia el equilibrio estructural a lo largo del tiempo entre las acciones externas, las fuerzas elásticas, las fuerzas másicas y las fuerzas de amortiguamiento, para un sistema estructural discreto en forma de puntos vinculados internamente entre sí y todos ellos a un sistema de referencia fijo. Estos vínculos internos entre los puntos que describen el sistema estructural pueden o no ser elástico, en el caso que no lo sean, el comportamiento del sistema de puntos es no conservativo y por lo tanto se dice que el material de la estructura tiene un *comportamiento constitutivo no lineal disipativo*. Además de este comportamiento no lineal, también existe el *comportamiento no lineal disipativo por influencia de la viscosidad* del material, que da lugar a fuerzas de amortiguamiento dependientes de la velocidad del sistema. En algunos casos más simples, la no linealidad por amortiguamiento se debe al desarrollo de fuerzas viscosas proporcionales a la velocidad, pero en otros casos más complejos puede ocurrir que el propio término de viscosidad es dependiente del tiempo. La no linealidad del sistema, también se manifiesta en aquellos casos en que hay grandes movimientos y el sistema trabaja fuera de su configuración geométrica inicial, motivando un comportamiento *cinemático no lineal*. Esta última no linealidad se profundiza más en aquellos casos en que además de los grandes movimientos, ocurren grandes deformaciones, situación que hace más compleja la solución del problema dinámico de la estructura.

Toda esta descripción que antecede será tratada con más profundidad a lo largo de este trabajo, cuyos conceptos se fundamentan en la *dinámica lineal de las estructuras*, en la *mecánica de medios continuos* y en las *técnicas numéricas* entre las cuales está el *método de los elementos finitos*.

Existen diversos enfoques sobre el contenido y el desarrollo de los conceptos que debe contener un curso de dinámica no lineal de las estructuras y todos ellos son válidos en consecuencia con los objetivos que se proponen alcanzar. El presente trabajo se ha decidido trata los conceptos necesarios para completar la formación básica de quien haya sido formado en la dinámica lineal de las estructuras, en la mecánica de medios continuos y en el método de los elementos finitos. Es por esta razón que a lo largo del desarrollo de este trabajo, no se insiste sobre temas que están incluidos en ésta formación básica de las estructuras y que ya se suponen sabidos por el lector.

A continuación se hace una descripción breve del contenido que se desarrolla en las páginas de este libro. En el **capítulo B2**, se hace una *introducción a las bases termodinámicas de la ecuación del movimiento*. Este capítulo fundamental muestra los orígenes del problema y lo enmarca dentro de una formulación estructurada que permite abordar con coherencia todos los temas restantes. En el **capítulo B3** se muestra con detalle los métodos para resolver la ecuación del movimiento, presentándose los procedimientos implícito y explícito, como así también las ventajas y desventajas que presentan cada uno de ellos. El **capítulo B4** estudia el concepto de estabilidad de la solución de sistemas conservativos para distintos métodos de resolución de la ecuación del movimiento. Una vez establecidas

las bases de estudio de la estabilidad de solución para sistemas lineales, se hace una aproximación al problema no lineal y se dan criterios para el estudio de la estabilidad exigiendo la conservación de la energía como requerimiento fundamental. Esto mismo, da lugar a la “formulación de métodos de solución conservativos”, que actualmente se están utilizando en la dinámica no lineal. Establecidas las bases fundamentales de la dinámica no lineal, el **capítulo B5** aborda la formulación constitutiva independiente del tiempo, tales como la plasticidad y el daño, y muestra la forma en que estos comportamientos afectan a la no-linealidad de la estructura. De manera análoga, el **capítulo B6** detalla el comportamiento constitutivo de los materiales dependientes del tiempo, tales como la elasticidad retardada y la relajación, donde se introduce en forma natural la no linealidad por amortiguamiento. Sobre este punto se insiste pues, se considera que es uno de los sitios de la dinámica no lineal donde se encuentra un gran vacío conceptual.

B 2 Bases Termodinámicas de la Ecuación del Movimiento.

B2.1 Introducción.

Este capítulo introduce las bases termodinámicas necesarias para definir el comportamiento lineal o no lineal de un sólido durante el tiempo que dure el proceso mecánico. Los conceptos que aquí se sintetizan ayudan a comprender el comportamiento no lineal de los sólidos y permiten establecer claramente el equilibrio del mismo en cada instante.

Se considera conveniente hacer una reseña sobre *la cinemática del sólido deformable*, estableciendo la notación que se utilizará, como así también las definiciones de la mecánica de medios continuos que se consideran importantes recordar. De la misma manera se hace una muy breve descripción de *termodinámica* para puntualizar los aspectos importantes a tener en cuenta en la formulación de los modelos constitutivos que representan la no-linealidad en el comportamiento del sólido. Es muy recomendable recurrir a las referencias de mecánica de medios continuos y termodinámica,^{1,2,3} en caso de que se quiera mayor profundidad y amplitud en los conceptos que aquí se establecen.

B2.2 Cinemática del Continuo Deformable.

Para sustentar la formulación de un modelo constitutivo es necesario introducir los conceptos básicos que describen la cinemática de un punto en el espacio, las medidas de la tensión y deformación y la relación que hay entre ellas en las distintas configuraciones. En este capítulo solamente se quiere establecer la notación y recordar algunas definiciones, pero en ningún caso se intenta sustituir un tratado específico de mecánica de medios continuos, para lo cual se recomienda consultar las fuentes^{1,2,3}.

B2.2.1 Definiciones básicas de los tensores que describen la cinemática de un punto en el espacio.

Considérese un sólido continuo en tres dimensiones representado por dominio $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ situado en el espacio en su *configuración actual* en el tiempo t , o también por una

¹ Malvern, L. (1969). *Introduction to the mechanics of continuous medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

² Lubliner, J. (1990). *Plasticity theory*. MacMillan, New York.

³ Maugin, G. A. (1992). *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press.

imagen de este dominio situada en el espacio en una *configuración intermedia* $\bar{\Omega}_t \subset \mathbb{R}^3$ o por el dominio $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ situado en la *configuración referencial* o *de origen* (ver Figura B2.1).

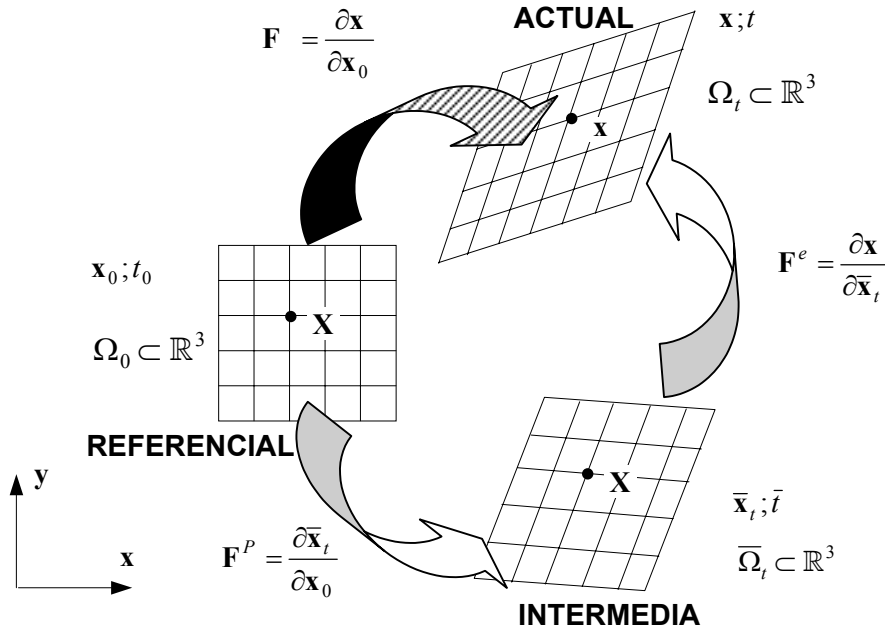


Figura B2.1 – Representación esquemática de las configuraciones cinemáticas de un sólido en el espacio.

A un punto $\mathbf{X} \in \Omega_0$, de coordenadas $(\mathbf{x}_i)_0$, situado en la *configuración referencial*, le corresponde uno y sólo uno de los puntos en la *configuración intermedia*, representado por $\bar{\mathbf{X}} \in \bar{\Omega}_t$ de coordenadas $(\bar{\mathbf{x}}_i)_t$, y del mismo modo le corresponde $\mathbf{x} \in \Omega_t$ con coordenadas $(\mathbf{x}_i)_t$ correspondiente a la *configuración actual*. Así, el movimiento del cuerpo se describe en función de la posición en la configuración de referencia y del tiempo,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}; t); \quad \mathbf{X} \in \Omega_0 \quad (\text{B2.1})$$

Se define como tensor *gradiente de deformación* a la siguiente transformación

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}; t) = \nabla_0 \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{J} \quad (\text{B2.2})$$

donde $\mathbf{J}$ es la *matriz jacobiana*. Las restantes transformaciones que se muestran en la Figura B2.1 resultan de la siguiente definición,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{x}}_t} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_t}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (\text{B2.3})$$

donde en ella se denomina,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^e &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{x}}_t} && \text{Transformación elástica,} \\ \mathbf{F}^p &= \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_t}{\partial \mathbf{x}_0} && \text{Transformación plástica,} \end{aligned} \quad (\text{B2.4})$$

El cambio de volumen que ocurre en un sólido durante un cambio de configuración, se obtiene a partir del determinante de la matriz jacobiana, que suele denominarse simplemente *jacobiano*. Esto es,

$$J = |\mathbf{J}| = |\mathbf{F}| = \frac{dV}{dV_0} > 0 \quad (\text{B2.5})$$

siendo dV y dV_0 los volúmenes infinitesimales en las configuraciones Ω_t y Ω_0 , respectivamente.

El tensor gradiente de deformación puede descomponerse según la siguiente transformación polar,

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (\text{B2.6})$$

donde $\mathbf{R}$ es el denominado *tensor ortogonal*, que cumple con la siguiente condición de ortonormalidad $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \equiv \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \equiv \mathbf{I}$, y tanto $\mathbf{U}$ como $\mathbf{V}$ son tensores simétricos definidos positivos. La definición de estos dos últimos depende del *tensor derecho* de Cauchy-Green $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$, así el *tensor derecho de estiramiento* resulta igual a $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$. Se define también el *tensor izquierdo* de Cauchy-Green como $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$, tal que sustituyendo en éste último la ecuación (B2.6), resulta $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \equiv \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T$ y de aquí se puede ahora definir también el *tensor izquierdo de estiramiento* como $\mathbf{V} = \mathbf{B}^{1/2}$, luego puede reescribirse como $\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}^T$. De aquí puede verse que el gradiente de deformación puede también escribirse como $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$.

Siguiendo la notación de Noll (ver Lubliner²), se denomina con $\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{x}}$ un genérico vector espacial euclideo, definido en una configuración $\mathbf{x}$ cualquiera; así, $\vec{\mathbf{V}}_0$ y $\vec{\mathbf{V}}$ serán vectores definidos en la configuración *referencial* y *actual* respectivamente. Se designa con $L(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ el espacio continuo lineal, que transforma: $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$. Con base en este criterio, se designa a continuación los tensores antes definidos, a partir del origen y destino de la transformación que realizan,

$$\left. \begin{array}{ll} \mathbf{C} \in L(\vec{\mathbf{V}}_0; \vec{\mathbf{V}}_0) & ; \quad \mathbf{U} \in L(\vec{\mathbf{V}}_0; \vec{\mathbf{V}}_0) : \text{ Tensores referenciales - Lagrangeanos,} \\ \mathbf{B} \in L(\vec{\mathbf{V}}; \vec{\mathbf{V}}) & ; \quad \mathbf{V} \in L(\vec{\mathbf{V}}; \vec{\mathbf{V}}) : \text{ Tensores actualizados - Eulerianos,} \\ \mathbf{F} \in L(\vec{\mathbf{V}}_0; \vec{\mathbf{V}}) & ; \quad \mathbf{R} \in L(\vec{\mathbf{V}}_0; \vec{\mathbf{V}}) \\ \mathbf{F}^e \in L(\vec{\mathbf{V}}_p; \vec{\mathbf{V}}) & ; \quad \mathbf{F}^p \in L(\vec{\mathbf{V}}_0; \vec{\mathbf{V}}_p) \end{array} \right\} : \text{ Tensores bipuntuales.} \quad (\text{B2.7})$$

Los tensores $\mathbf{F}^e \in L(\vec{\mathbf{V}}_p; \vec{\mathbf{V}})$ y $\mathbf{F}^p \in L(\vec{\mathbf{V}}_0; \vec{\mathbf{V}}_p)$ se denominan también *tensores materiales* y son invariantes frente a cualquier transformación euclidia.

B2.2.2 Medidas de la Deformación.

La deformación en la configuración de referencia, también denominada *deformación lagrangeana*, se define como:

$$\mathbf{E}_n = \frac{1}{n} (\mathbf{U}^n - \mathbf{I}) \quad (\text{B2.8})$$

de donde resultan las siguientes medidas de la deformación:

$$\mathbf{E}_n = \frac{1}{n}(\mathbf{U}^n - \mathbf{I}) \Rightarrow \begin{cases} \text{para : } n=0 \Rightarrow \mathbf{E}_0 = \ln \mathbf{U} \text{ , Def. natural} \\ \text{para : } n=1 \Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{U} - \mathbf{I} \\ \text{para : } n=2 \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \text{ , Def. de Green - St. Venant} \end{cases} \quad (\text{B2.9})$$

La *deformación euleriana* medida en la configuración actualizada se expresa en la forma de Almansi. Esto es,

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (\text{B2.10})$$

donde $\mathbf{B}$ es el *tensor izquierdo de Cauchy-Green* ya definido, y $\mathbf{B}^{-1}$ suele denominarse *tensor de Finger*. En el caso en que $|\mathbf{F} - \mathbf{I}| \ll 1$, todas las deformaciones previamente definidas coinciden $\mathbf{E}_n \cong \mathbf{e} \cong \boldsymbol{\varepsilon}$ y se aproximan a la *deformación infinitesimal*,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0^T \mathbf{u}) \quad (\text{B2.11})$$

donde se cumple $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, siendo $\mathbf{x}_0$ las coordenadas del punto $\mathbf{X}$ en la configuración referencial y $\mathbf{u}$ el desplazamiento relativo de dicho punto. Así, el gradiente resulta,

$$\nabla_0 \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} - \mathbf{I} \right) = (\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \mathbf{j} \quad (\text{B2.12})$$

Y de esta última y la ecuación (B2.11), resulta la *deformación infinitesimal* y el *gradiente de deformaciones*, como

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) = \left(\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} \right) = \mathbf{I} + \mathbf{j} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{j} + \mathbf{j}^T) \end{aligned} \quad (\text{B2.13})$$

B2.2.3 Relación entre Variables Mecánicas.

Dada la transformación *gradiente de deformaciones* $\mathbf{F}$, que permite relacionar la posición de un punto en una cierta configuración con su imagen en cualquier otra configuración, puede establecerse una equivalencia entre todas las variables mecánicas residente en una configuración con sus imágenes correspondiente a otra configuración cualquiera. Para ello se definen las siguientes transformaciones tensoriales^{1,2,34}, que pueden ilustrarse con la Figura B2.2,

⁴ Marsden J. And Hughes T. (1983). *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice Hall, Enlewood Cliffs.

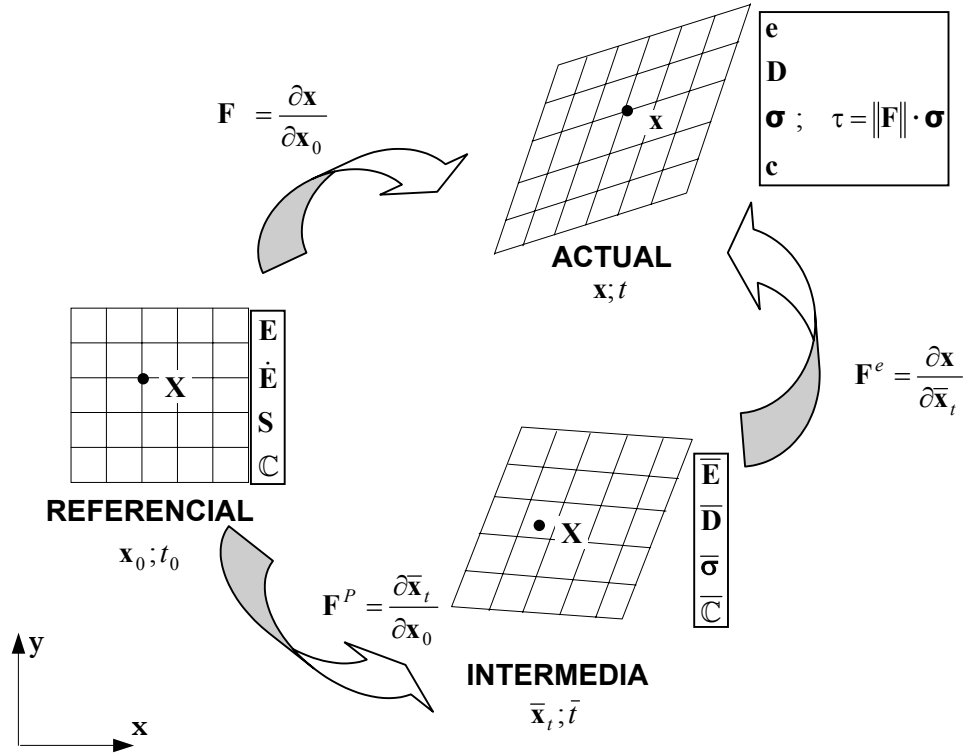


Figura B2.2 – Relación entre variables mecánicas entre las distintas configuraciones.

$$\text{Transformación} \begin{cases} \text{Covariante} \begin{cases} \text{Hacia adelante} & : \underline{\phi}(\mathbf{A}_{\#}) = \mathbf{F}^{-T} \cdot (\mathbf{A}_{\#}) \cdot \mathbf{F}^{-1} \\ \text{Hacia atrás} & : \underline{\phi}(\mathbf{A}_{\#}) = \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{A}_{\#}) \cdot \mathbf{F} \end{cases} \\ \text{Contravariante} \begin{cases} \text{Hacia adelante} & : \bar{\phi}(\mathbf{A}^{\#}) = \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{A}^{\#}) \cdot \mathbf{F} \\ \text{Hacia atrás} & : \bar{\phi}(\mathbf{A}^{\#}) = \mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{A}^{\#}) \cdot \mathbf{F}^{-T} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{B2.14})$$

donde se muestran los operadores y su expresión en función *del gradiente de deformaciones* y siendo $\mathbf{A}_{\#}$ y $\mathbf{A}^{\#}$ genéricos tensores de segundo orden *covariante* (tensor de deformación $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{e}$) y *contravariante* (tensor de tensión $\mathbf{S} \leftrightarrow \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\sigma})$), respectivamente. En particular resultan las siguientes transformaciones para el transporte de los tensores de deformación tensión y constitutivo¹,

$\mathbf{e} = \underline{\phi}(\mathbf{E})$	$e_{ij} = F_{iI}^{-T} E_{IJ} F_{jJ}^{-1}$	$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1}$
$\mathbf{E} = \underline{\phi}(\mathbf{e})$	$E_{IJ} = F_{iI}^T e_{ij} F_{jJ}$	$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}$
$\boldsymbol{\tau} = \bar{\phi}(\mathbf{S})$	$\tau_{ij} = F_{iI} S_{IJ} F_{jJ}^T$	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$
$\mathbf{S} = \bar{\phi}(\boldsymbol{\tau})$	$S_{IJ} = F_{iI}^{-1} \tau_{ij} F_{jJ}^{-T}$	$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}$
$\mathbf{c} = \bar{\phi}(\mathbf{C})$	$c_{ijkl} = F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} C_{IJKL}$	
$\mathbf{C} = \bar{\phi}(\mathbf{c})$	$C_{IJKL} = F_{iI}^{-1} F_{jJ}^{-1} F_{kK}^{-1} F_{lL}^{-1} c_{ijkl}$	

Tabla B2.1 Cinemática: relación entre tensores de la configuración actualizada y la referencial.

B2.2.4 Derivada Objetiva.

Una forma posible de realizar una *derivación temporal objetiva* de una variable tensorial sobre una configuración cuyo sistema referencial se encuentra en movimiento, es a través del concepto de *derivación objetiva de Lie*^{1,3,4} $L_v(\bullet)$. La derivación temporal de una variable tensorial que reside en la configuración actualizada, cuyo sistema referencial está en movimiento, puede realizarse trasladando ésta variable a un sistema de referencia fijo, configuración referencial, luego derivar respecto del tiempo y por último volver a transportar dichas variable a la configuración actualizada (Figura B2.3). Esta operación que se apoya sobre los operadores de transportes definidos en el apartado anterior, garantiza objetividad. Esto es,

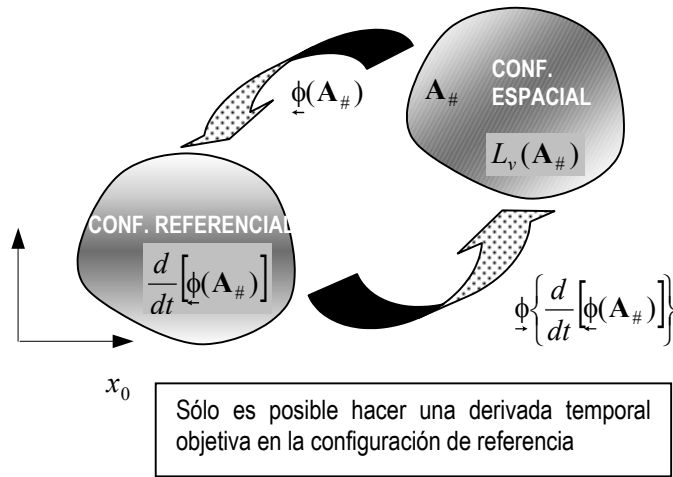


Figura B2.3 – Representación esquemática del concepto de derivación objetiva de Lie.

$$\begin{aligned}
 L_v(A_{\#}) &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{F}^T \cdot (A_{\#}) \cdot \mathbf{F}] \right\} \cdot \mathbf{F}^{-1} \\
 L_v(A_{\#}) &= \mathbf{F} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{F}^{-1} \cdot (A_{\#}) \cdot \mathbf{F}^{-T}] \right\} \cdot \mathbf{F}^T
 \end{aligned}
 \tag{B2.15}$$

donde puede verse en la primera de las anteriores la derivación temporal de un tensor *covariante*, en tanto en la segunda se tiene la derivación temporal de un *tensor contravariante*.

B2.2.5 Velocidad.

El cálculo de la velocidad necesita una derivación temporal objetiva como la definida anteriormente o bien la clásica *derivación material objetiva*^{1,2,3}. La velocidad en la configuración referencial o formulación lagrangeana se define como $\dot{\mathbf{x}}_0 = \partial \mathbf{x}_0 / \partial t$, y su correspondiente imagen en la configuración actualizada como $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$. Se define ahora la *derivada material objetiva* de una variable cualquiera como

$$\phi(x_i; t) \xrightarrow{\text{derivada material}} \frac{D}{Dt} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}
 \tag{B2.16}$$

Tal que la *velocidad del gradiente de deformación* resulta entonces,

$$\mathbf{F} = \nabla_0 \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \Rightarrow \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t \partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \quad (\text{B2.17})$$

de donde el *gradiente espacial de velocidades* puede también escribirse como:

$$\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \in L(\vec{\mathbf{v}}; \vec{\mathbf{v}}) \quad (\text{B2.18})$$

Se considera en la configuración material la posición de un punto $\mathbf{x}_0$, su cambio infinitesimal de posición $\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}_0$ y la correspondencia de este movimiento en la configuración actualizada $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + d\mathbf{x}$. Por otro lado, si el movimiento diferencial puede expresarse según la ecuación (B2.17) como $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{x}_0$, entonces la velocidad en la configuración actualizada resulta luego de aplicar la correspondiente derivación objetiva, $D\mathbf{x}/Dt = \dot{\mathbf{F}}d\mathbf{x}_0 = \mathbf{L}d\mathbf{x}$ (ver también ecuaciones (B2.17) y (B2.18)).

El *tensor velocidad de deformación* se define como,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \{\mathbf{L}\}_S \in L(\vec{\mathbf{v}}; \vec{\mathbf{v}}) \quad (\text{B2.19})$$

El *tensor de vorticidad*, que es la parte antimétrica del gradiente espacial de velocidades se escribe como,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \{\mathbf{L}\}_A \\ \mathbf{\Omega} &= \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} \end{aligned} \in L(\vec{\mathbf{v}}; \vec{\mathbf{v}}) \quad (\text{B2.20})$$

En vista de estas dos últimas ecuaciones, también puede escribirse *el tensor gradiente de velocidades*, como,

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega} \quad (\text{B2.21})$$

La velocidad de deformación lagrangeana se puede expresar a partir de la ecuación (B2.9) como,

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{n} (\mathbf{U}^n - \mathbf{I}) \right] = \underline{\phi}(\mathbf{D}) = \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{D}) \cdot \mathbf{F} \quad (\text{B2.22})$$

Cuya demostración se formaliza para $n=2$, situación en la que $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$, de donde resulta la siguiente expresión para el cambio temporal del tensor de deformación

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}) \quad (\text{B2.23})$$

pero sabiendo que: $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}$ y $\dot{\mathbf{F}}^T = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{L}^T$, se llega a la siguiente expresión, de la velocidad de deformación lagrangeana,

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{L}^T + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{D}) \cdot \mathbf{F} = L_v(\mathbf{e}) \quad (\text{B2.24})$$

Para $\mathbf{D} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{E}} = 0$ se tiene movimiento del cuerpo rígido

B2.2.6 Medidas de la Tensión.

Partiendo de la tensión verdadera o *tensión de Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}$, que reside en la configuración actualizada, se expresa a continuación la *tensión de Kirchhoff* $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$, que también reside en la configuración actualizada, pero que su magnitud no está influenciada por los cambios de volumen $J = dV/dV_0 = \det|\mathbf{J}|$, que experimenta el sólido al cambiar de configuración. A partir de la tensión de Kirchhoff se puede obtener la tensión equivalente en la configuración referencia, denominada *segundo tensor de Piola-Kirchoff* $\mathbf{S} = \tilde{\phi}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}$. Este tensor representa un estado tensional sobre un sólido ideal no deformado^{1,2,3}, y en ciertos cálculos es útil su definición para evitar la actualización permanente de la geometría, consiguiendo un proceso con total equivalencia al que se desarrolla en la configuración actualizada.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = \tilde{\phi} \mathbf{S} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T & \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \\ \dot{\mathbf{S}} = f_{\text{REF}}(\dot{\mathbf{E}}; \mathbb{C}^T) & \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = f_{\text{ACT}}(\dot{\mathbf{e}}; \mathbb{C}) \end{aligned} \quad (\text{B2.25})$$

En esta última puede verse dos variaciones temporales de las relaciones constitutivas que pueden establecerse en forma equivalente en una u otra configuración, es decir en la configuración referencial, (REF), se relaciona la tensión de Piola-Kirchoff con la deformación de Green-Lagrange y en la configuración actualizada, (ACT), la tensión de Cauchy con la deformación de Almansi. Las tres medidas de la tensión coinciden en pequeñas deformaciones.

B2.3 Bases Termodinámicas.

Para sustentar la formulación de un modelo constitutivo es también necesario introducir los principios básicos de la termodinámica^{1,2,3}. Para ello, en este apartado se hará una breve presentación de las dos leyes de la termodinámica y se mencionará alguna de sus consecuencias.

El objetivo de este apartado es recordar los elementos esenciales de la termodinámica de los medios continuos, dentro de la “hipótesis de las pequeñas perturbaciones” (HPP)³.

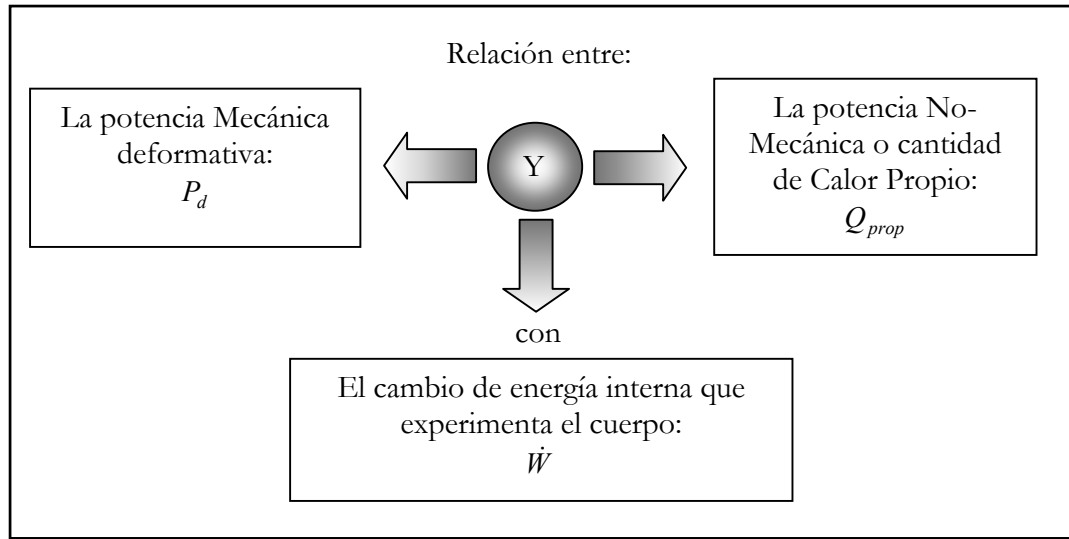
B2.3.1 Primera Ley de la Termodinámica:

El principio de conservación de la energía es uno de los principios generales más importantes. Este principio indica que la energía no puede crearse ni destruirse, sino solamente transformarse de una a otra forma. Para un sistema cerrado el cambio temporal de trabajo realizado por los agentes externos debe ser igual al cambio temporal en la energía total del sistema. Este principio es también denominado *primera ley de la termodinámica*. Así, esta ley postula el balance energético, exigiendo la conservación de la energía total interna W del sistema. En otras palabras, el primer principio relaciona la potencia introducida al sistema P_{in} y la cantidad de calor Q o potencia calórica existente en el mismo, con el cambio temporal de energía interna, o potencia global, $\partial W / \partial t$ que experimenta el sistema (ver la representación esquemática que se presenta a continuación).

Axioma: Existen:

1. Una cantidad de calor propio Q_{prop} . (calor propio más transferencia global de calor), regida por leyes físicas bien definidas (Newton, Fourier),
2. Y una cantidad de energía global interna W , función del estado físico del sólido, que depende de la variable de estado ω que representa densidad de energía interna o densidad de energía interna por unidad de masa ρ y volumen V . Tal que se cumple la siguiente relación,

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V \rho \omega dV \right] = \frac{dW}{dt} = \dot{W} = Q_{prop} + P_d \quad (B2.26)$$



Obtención de la Potencia Deformativa P_d :

Para obtener la potencia deformativa, se partirá de la siguiente definición de la potencia mecánica introducida P_{in} o Potencia Externa,

$$P_{int} = \oint_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV = \oint_S t_i v_i dS + \int_V \rho b_i v_i dV \quad (B2.27)$$

donde t_i es la fuerza de superficie aplicada sobre el contorno S , (siendo $t_i = \sigma_{ij} n_j$, tal que σ_{ij} es el tensor de tensiones de Cauchy y n_j el vector normal a la superficie S que envuelve el sólido^{1,2,3}); b_i fuerzas de volumen por unidad de masa; $\rho = \partial M / \partial V$ la densidad de masa, M la masa y V el volumen; $v_i = du_i / dt = \dot{u}_i$ es el campo de velocidades (si $t=cte$. entonces la velocidad $v_i = \dot{u}_i$ se transforma en un incremento temporal del campo de los desplazamientos, y la potencia introducida se transforma en el incremento temporal de trabajo introducido).

A través del teorema de Green^{1,2,3}, se puede transformar la integral de superficie de la (B2.27), en una integral sobre el volumen del sólido, quedando la potencia introducida con la siguiente forma matemática,

$$P_{int} = \int_V \left[v_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dV \quad (B2.28)$$

Siendo el término entre paréntesis la conocida ecuación de Cuachy o balance de momento por unidad de volumen.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (\text{B2.29})$$

En el caso que la aceleración sea nula, o el problema sea independiente del tiempo, se obtiene de la expresión (B2.29), la clásica ecuación de equilibrio estático de Cauchy,

$$\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0}_{\text{problema cuasi-estático}} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\rho b_i}_{\text{equilibrio de Cauchy}} \quad (\text{B2.30})$$

Sustituyendo la ecuación (B2.29) en la (B2.28), se tiene la potencia introducida en función de la potencia deformativa y la cinética,

$$P_{\text{int}} = \underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho v_i v_i \right] dV}_{\text{Pot. Cinética}} + \underbrace{\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV}_{\text{Pot. Deformativa}} = \dot{K} + P_d \quad (\text{B2.31})$$

Donde $\dot{K}$ es la potencia cinética y P_d la potencia deformativa, tal que esta última resulta entonces,

$$P_{\text{int}} = \dot{K} + P_d \Rightarrow P_d = P_{\text{int}} - \dot{K} \quad (\text{B2.32})$$

Observando ésta última expresión, resultan tres casos típicos de la mecánica,

- Problemas de comportamiento de sólido rígido: $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow P_{\text{int}} \equiv \dot{K}$
- Problemas de comportamiento cuasi estático: $\dot{K} = 0 \Rightarrow P_{\text{int}} = P_d$
- Problemas de vibración libre: $P_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \dot{K} = -P_d$

Obtención de la Potencia Térmica Q_{prop} :

Para completar la definición de la ecuación (B2.26), es necesario definir la Potencia térmica o Calor Propio Q_{prop} como el Calor Interno r , menos el calor $q = q_i n_i$ que sale por fronteras:

$$Q_{\text{prop}} = \int_V \rho r dV - \oint_S q_i n_i dS \quad (\text{B2.33})$$

siendo q el flujo de calor que sale por la frontera, q_i el vector de flujo de calor, n_i la normal saliente a la superficie que envuelve la frontera y r la fuente de calor por unidad de masa.

Sustituyendo P_d y Q_{prop} en la ecuación (B2.26), resulta la ecuación de conservación en problemas cuasi-estáticos

$$\int_V \rho \dot{\omega} dV = \underbrace{\int_V \rho r dV - \oint_S q_i n_i dS}_{Q_{\text{prop}}} + \underbrace{\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV}_{P_d} \quad (\text{B2.34})$$

Transformando la integral se superficie en una de volumen (Teorema de Green); se obtiene la forma local Euleriana de la 1ª ley de la termodinámica. Esto es,

$$\rho \dot{\omega} = \rho r - \text{div}(q_i) + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (\text{B2.35})$$

Teniendo en cuenta que el tensor gradiente espacial de deformación puede expresarse como un tensor simétrico más otro antisimétrico, $\partial v_i / \partial x_j = L_{ij} = D_{ij} + \Omega_{ij}$, la ecuación (B2.35) se puede escribir como,

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} L_{ij} = \sigma_{ij} D_{ij} + \underbrace{\sigma_{ij} \Omega_{ij}}_0 \quad (\text{B2.36})$$

$$\rho \dot{\omega} = (\rho r - \text{div}(q_i)) + \sigma_{ij} D_{ij} \quad (\text{B2.37})$$

donde D_{ij} y Ω_{ij} , representan respectivamente el tensor de velocidad de deformación – simétrico- y el tensor vorticidad –antisimétrico-.

B2.3.2 Segunda Ley de la Termodinámica.

La segunda ley de la termodinámica limita el sentido de la transformación energética. Esta energía que se transforma sólo puede hacerlo de una forma en otra y esta situación no se refleja en la primera ley y es por ello que es necesario definir una segunda ley de la termodinámica. Mas precisamente, la segunda ley postula el balance de entropía η . La entropía es una función de estado conjugada de la temperatura θ , y que está relacionada con la potencia (habitualmente con la potencia térmica).

Se define la densidad de entropía en función de la potencia específica y la velocidad de deformación,

$$\eta = \eta(\dot{\omega}; D_{ij}) \quad (\text{B2.38})$$

tal que para $\dot{\eta} = 0$ se tiene un proceso termodinámico isentrópico y adiabático (sin pérdida de calor por las fronteras) ($\rho r - \text{div} q_i = 0$). Para un proceso reversible se define la ley evolutiva de la entropía como,

$$\dot{\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\theta} \dot{q} \Rightarrow \eta = \oint \dot{\eta} dt = \oint \left(\frac{1}{\theta} \dot{q} dt \right)_{\text{rev}} \quad (\text{B2.39})$$

La entropía global para todo el sólido resulta entonces,

$$\mathfrak{S} \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \rho \eta dV \quad (\text{B2.40})$$

De las distintas formas de presentar el 2do principio de la termodinámica, la mas usual en el continuo de Cauchy es la de Clausius-Duhem. Para ello se supone que existen dos campos escalares conjugados, la temperatura θ y la entropía η , ambas funciones de estado local, tal que se cumple

$$\mathcal{Q}_{\text{prop}} = \int_V \rho r dV - \oint_S q_i n_i dS = \dot{\mathfrak{S}} \theta \quad (\text{B2.41})$$

o bien

$$\dot{\mathfrak{S}} = \int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \oint_S \frac{q_i}{\theta} n_i dS \quad (\text{B2.42})$$

Que representa el cambio de entropía introducida por transferencia de calor al sistema.

Con base en lo definido, la 2da Ley de la termodinámica considera que en un medio continuo con una cierta entropía, ocurre que cualquier cambio total de entropía que pueda sufrir será siempre igual o mayor a la magnitud de entropía introducida. Como puede deducirse de la definición de esta desigualdad, por primera vez se introduce el concepto de pérdida o disipación de energía.

$\underbrace{\frac{d}{dt} \mathfrak{S}}_{\substack{\text{INCREMENTO} \\ \text{DE ENTROPÍA} \\ \text{EN EL SISTEMA}}} \geq \underbrace{\dot{\mathfrak{S}}}_{\substack{\text{INCREMENTO} \\ \text{DE ENTROPÍA} \\ \text{INTRODUCIDA}}}$

Sustituyendo en esta definición de la segunda ley de la termodinámica las ecuaciones (B2.40) y (B2.42), se llega a la forma denominada “Desigualdad de Clausius-Duhem”,

$$\text{Desigualdad de Clausius - Duhem} \quad \left\{ \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \eta dV \geq \int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \oint_S \frac{q_i}{\theta} n_i dS \quad \right. \quad (\text{B2.43})$$

Transformando la integral de superficie en una de volumen (Teorema de Green) se obtiene la forma local Euleriana de la 2ª Ley de la Termodinámica.

$$\dot{\eta} - \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\rho} \text{div} \left(\frac{q_i}{\theta} \right) \geq 0 \quad (\text{B2.44})$$

Y resolviendo la divergencia del cociente entre el flujo de calor y la temperatura, se tiene

$$\rho \dot{\eta} - \rho \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\theta} \text{div}(q_i) - \frac{1}{\theta^2} q_i \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{B2.45})$$

Y reordenando sus términos se obtiene la el cambio temporal en la disipación térmica-mecánica

$$\Xi = \theta \dot{\eta} - \left(r - \frac{1}{\rho} \text{div}(q_i) \right) - \frac{1}{\rho \theta} q_i \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{B2.46})$$

Combinando la disipación con la forma Euleriana del 1er principio, ecuación (B2.35), se obtiene la disipación en función de la potencia deformativa y calórica

$$\Xi = \theta \dot{\eta} - \dot{\omega} + \left(\frac{\sigma_{ij} D_{ij}}{\rho} \right) - \frac{1}{\theta \rho} q_i \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{B2.47})$$

Para procesos termo-mecánicos donde puede desacoplarse el problema térmico del mecánico, imponiendo la teoría racional de de Coleman and Noll^{1,2,3}, se puede transformar la desigualdad anterior en la conocida forma de Clausius-Planck,

$$\begin{cases} \Xi_m = \theta \dot{\eta} - \dot{\omega} + \left(\frac{\sigma_{ij} D_{ij}}{\rho} \right) \geq 0 & \rightarrow \text{Disipación Mecánica} \\ \Xi_\theta = -q_i \nabla \theta \geq 0 & \rightarrow \text{Disipación Térmica} \end{cases} \quad (\text{B2.48})$$

En la definición de los modelos constitutivos es habitual utilizar la disipación en la forma de Clausius-Planck, pero además en función de la energía libre de Helmholtz, recordando que esta última define la capacidad para producir trabajo. Se define la energía libre de Helmholtz Ψ como:

$$\Psi = \Psi(e_{ij}; \theta; p_i) \stackrel{\text{def}}{=} \omega - \theta \eta \quad \text{con} \quad p_i = \{F_{ij}^P; \alpha_i; d_i\} \quad (\text{B2.49})$$

donde e_{ij} es el tensor de deformación de Almansi y p_i representa el conjunto de variables internas, que a modo de ejemplo, en un problema de plasticidad y daño considera las variables internas de cada uno de los problemas, tal como se muestra en la ecuación (B2.49). Derivando temporalmente la definición de la energía libre de Helmholtz se tiene

$$\dot{\Psi} = \dot{\omega} - \eta \dot{\theta} - \dot{\eta} \theta \Rightarrow -\dot{\omega} + \eta \dot{\theta} = -\dot{\Psi} - \dot{\eta} \theta \quad (\text{B2.50})$$

y sustituyendo en la ecuación de la disipación mecánica (B2.48), se puede rescribir la disipación mecánica en la forma local Euleriana, como:

$$\boxed{\Xi_m = -\dot{\Psi} - \dot{\eta} \theta + \frac{\sigma_{ij} D_{ij}}{\rho} \geq 0} \quad (\text{B2.51})$$

$$\Xi_m = \rho(-\dot{\Psi} - \dot{\eta} \theta) + \sigma_{ij} D_{ij} \geq 0 \quad (\text{B2.52})$$

Sustituyendo en esta una forma general de la variación temporal de la energía libre,

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} D_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} \dot{p}_i \geq 0 \quad (\text{B2.53})$$

donde e_{ij} y θ representan las variables libres mecánicas y térmicas y p_i las variables internas del proceso no lineal. Considerando esto, la disipación resulta entonces,

$$\Xi_m = \left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} \right) D_{ij} - \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} \dot{p}_i \geq 0 \quad (\text{B2.54})$$

D_{ij} y $\dot{\theta}$ son las variaciones temporales de las variables libres, por lo tanto, para garantizar el cumplimiento de la desigualdad de Clausius-Duhem, sus multiplicadores deben ser idénticamente nulos. Es decir, de aquí resultan las ecuaciones constitutivas y la disipación mecánica,

$$\left. \begin{aligned} \left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} \right) &= 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \eta \right) &= 0 \Rightarrow \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \text{Ec. Constitutiva} \quad (\text{B2.55})$$

$$\Xi_m = \rho \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} \dot{p}_i \geq 0 \right\} \quad \text{Disipación} \quad (\text{B2.56})$$

B2.3.3 Disipación Mecánica escrita en Forma Lagrangeana.

Para pasar a la forma local Lagrangeana la expresión de la disipación, es necesario hacer la siguiente transformación:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}) \quad ; \quad \mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad ; \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (\text{B2.57})$$

donde $\mathbf{F}$ representa el gradiente de deformación que es un tensor bipuntual que relaciona un punto de una configuración en referencia $\mathbf{x}_0$, con el mismo punto en una configuración actualizada $\mathbf{x}$, (esto se verá más adelante y puede también consultarse en las referencias^{1,2,3}). Operando algebraicamente se llega a,

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}}) = \text{tr}\left(\frac{1}{J} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}\right) \quad (\text{B2.58})$$

donde J , determinante de la matriz Jacobiana y $\mathbf{S}$ el tensor de tensiones en la configuración de referencia o también llamado tensor de Piola-Kirchoff.

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \frac{1}{J} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \quad ; \quad J = \det(\mathbf{F}) = \frac{dV}{dV_0} \quad (\text{B2.59})$$

Sustituyendo esta última expresión en la forma Euleriana de la disipación, se obtiene la forma Lagrangeana, a veces mas apropiada para resolver algunos problemas estructurales. Esto es,

$$\Xi_m = J\rho(-\dot{\Psi} - \dot{\theta}\eta) + S_{ij}\dot{E}_{ij} \geq 0 \quad (\text{B2.60})$$

Donde la energía libre de Helmholtz Ψ se define ahora como,

$$\Psi = \Psi(E_{ij}; \theta; P_i) \stackrel{\text{def}}{=} \omega - \theta\eta \quad \text{con} \quad P_i = \{F_{ij}^P; \alpha_i; d_i\} \quad (\text{B2.61})$$

siendo E_{ij} es el tensor de deformación de Green y P representa el conjunto de variables internas, que a modo de ejemplo, en un problema de plasticidad y daño considera las variables internas de cada uno de los problemas, tal como se muestra en la ecuación (B2.49).

Sabiendo por la ecuación de continuidad que el cambio de densidad entre la configuración referencial y la actualizada viene dada por la siguiente expresión $\rho_0 = \rho J = \frac{dM}{dV} \frac{dV}{dV_0}$, y definiendo una forma general de la energía libre como $\Psi = \Psi(E_{ij}, \theta, P_i)$, cuya variación temporal resulta,

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} \dot{E}_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial P_i} \dot{P}_i \geq 0 \quad (\text{B2.62})$$

donde E_{ij} y θ representan las variables libres mecánicas y térmicas y P_i las variables internas del proceso no lineal. Considerando esto, la disipación resulta entonces,

$$\Xi_m = \left(S_{ij} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} \right) \dot{E}_{ij} - \rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial P_i} \dot{P}_i \geq 0 \quad (\text{B2.63})$$

$\dot{E}_{ij}$ y $\dot{\theta}$ son las variaciones temporales de las variables libres, por lo tanto, para garantizar el cumplimiento de la desigualdad de Clausius-Duhem, sus multiplicadores deben ser idénticamente nulos, resultando de aquí las ecuaciones constitutivas y la disipación en la configuración lagrangeana,

$$\left. \begin{aligned} \left(S_{ij} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} \right) &= 0 \Rightarrow S_{ij} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \eta \right) &= 0 \Rightarrow \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \text{Ec. Constitutiva} \quad (\text{B2.64})$$

$$\left. \Xi_m = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial P_i} \dot{P}_i \geq 0 \right\} \text{Disipación} \quad (\text{B2.65})$$

B2.4 Variables Internas.

El origen de las variables internas termodinámicas $p_i = \mathbf{p}$ puede en principio encontrarse en la necesidad de describir la cinética de la evolución fisicoquímica de los procesos termomecánicos, pero su gran desarrollo ha llegado relacionado con los procesos reológicos que se desarrollan en el comportamiento elasto-viscoplástico de los sólidos deformables.

Estas variables internas $\mathbf{p}$ proveen una potente forma de caracterizar el comportamiento mecánico de los medios continuos, pues junto a la variable libre del problema, tensión $\boldsymbol{\sigma}$ o deformación $\boldsymbol{\epsilon}$, permiten definir precisamente el estado termodinámico del sólido.

Las variables internas pueden ser de naturaleza escalar, vectorial o tensorial y representan el comportamiento microscópico promedio de uno o más efectos físicos. Normalmente estas variable suelen representar un conjunto de complejos fenómenos físicos indivisibles a nivel macroscópico. En cada problema constitutivo que se quiera formular, habrá que detectar y medir en forma apropiada la variable interna que represente el comportamiento macroscópico, u observable, de uno o más fenómenos físicos que ocurren a nivel de la micro o media escala. De esta forma se establece que las variables son en esencia medibles, pero no controlables, pues sólo puede establecerse su ley de evolución en el tiempo que dependerá de la variable libre y del resto de variables internas $\dot{\mathbf{p}} = f_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p})$.

Así, la definición de una ley de estado, o ley constitutiva, dependerá de la variable de estado controlable o variable libre $\boldsymbol{\sigma}$ o $\boldsymbol{\epsilon}$ y del grupo de variables internas $\mathbf{p}$. Esta definición tiene solución si además se establece la ley de evolución de las variables internas. Esto es,

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= f_\sigma(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\mathbf{p}}) && \text{Ley constitutiva} \\ \dot{\mathbf{p}} &= f_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) && \text{Ley de evolución de la variable interna} \end{aligned} \quad (\text{B2.66})$$

En esta última ecuación, $\mathbf{X}$ representa las variables que definen el comportamiento constitutivo elástico del material.

B2.5 Ecuación de Equilibrio Dinámico para un Sólido Discreto.

La ecuación de equilibrio dinámico de un sólido discreto sometido acciones externas variables en el tiempo puede obtenerse directamente a partir de la 1ra. Ley de la termodinámica y de conocimientos previos sobre el método de los elementos finitos que se considera tiene el lector. A partir de las ecuaciones (B2.26) y (B2.32), puede escribirse la ley de conservación en la siguiente forma,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \omega dV - Q_{prop} = P_d = P_{int} - \dot{K} \quad (B2.67)$$

$$\underbrace{\int_V \rho \dot{\omega} dV - \left[\int_V \rho r dV - \oint_S q_i n_i dS \right]}_{\text{Pot. Mecánica}} = \underbrace{\int_V \sigma_{ij} D_{ij} dV}_{\text{Pot. Deformativa}} = \underbrace{\oint_S t_i \dot{u}_i dS + \int_V \rho b_i \dot{u}_i dV}_{\text{Pot. Introducida}} - \underbrace{\int_V \rho \dot{u}_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} dV}_{\text{Pot. Cinética}}$$

Donde la velocidad de deformación, ahora incremento temporal de deformación, puede escribirse como $D_{ij} = \{L_{ij}\}_S = \{\nabla_i^S \dot{u}_j\}_S = \{\dot{F}_{ij} F_{kj}^{-1}\}_S$, que sustituida en la anterior, resulta el equilibrio de potencias en un sólido continuo,

$$\int_V \sigma_{ij} \nabla_i^S \dot{u}_j dV = \oint_S t_i \dot{u}_i dS + \int_V \rho b_i \dot{u}_i dV - \int_V \rho \dot{u}_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} dV \quad (B2.68)$$

A continuación se utiliza el concepto de aproximación polinómica del campo continuo de desplazamientos $u_j(x, y, z)$ o velocidades $\dot{u}_j(x, y, z)$, mediante una función polinómica normalizada $N_{jk}(x, y, z)$ de soporte local que recibe el nombre de función de forma⁵.

$$u_j(x, y, z)|_{\Omega^e} = N_{jk}(x, y, z) U_k|_{\Omega^e} \Rightarrow \dot{u}_j(x, y, z)|_{\Omega^e} = N_{jk}(x, y, z) \dot{U}_k|_{\Omega^e} \quad (B2.69)$$

Esta función $N_{jk}(x, y, z)$, que actúa sobre un dominio acotado Ω^e denominado *elemento finito*, permite aproximar dentro de dicho dominio los campos de desplazamientos $u_k(x, y, z)$, velocidades $\dot{u}_k(x, y, z)$ y aceleraciones $\ddot{u}_k(x, y, z)$ mediante la valoración de sus respectivas magnitudes $U_k, \dot{U}_k, \ddot{U}_k$ en un número finito de puntos, denominado *nodos*, pertenecientes al dominio del elemento finito Ω^e . De esta forma puede establecerse los campos derivados del desplazamiento, como lo es entre otros la deformación de Almansi $e_{ik} = \nabla_i^S u_k$. Esto es,

$$u_j(x, y, z)|_{\Omega^e} = N_{jk}(x, y, z) U_k|_{\Omega^e} \Rightarrow e_{ij}|_{\Omega^e} = \nabla_i^S u_j|_{\Omega^e} = \nabla_i^S N_{jk} U_k|_{\Omega^e} \quad (B2.70)$$

Se denomina método de los elementos finitos⁵ al procedimiento numérico que surge de utilizar esta aproximación polinómica para las funciones de campo. Esta aproximación reduce las infinitas incógnitas de la función de campo a un número finito de incógnitas, definidas en ciertos puntos preestablecidos como nodos del elemento finito.

Sustituyendo la aproximación (B2.69) y (B2.70) en la ecuación (B2.68), puede escribirse la ecuación de equilibrio de potencias a partir de la siguiente aproximación

⁵ Zienkiewicz, O. and Taylor, R. (1989). The finite element method. McGraw-Hill, Vol I y II.

$$\left[\int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV \right]_{\Omega^e} \dot{U}_k \Big|_{\Omega^e} = \left[\oint_{S^e} t_i N_{ik} dS + \int_{V^e} \rho b_i N_{ik} dV - \int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} \ddot{U}_j dV \right]_{\Omega^e} \dot{U}_k \Big|_{\Omega^e} \quad (B2.71)$$

Pero esta ecuación se cumple para cualquier velocidad $\dot{U}_k \Big|_{\Omega^e}$, por lo tanto la igualdad establecida en la ecuación (B2.71) es independiente de esta velocidad, obteniéndose de aquí la siguiente ecuación de equilibrio dinámico para el sólido discreto

$$\underbrace{\left[\int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV \right]_{\Omega^e}}_{f_k^{\text{int}} \Big|_{\Omega^e}} = \underbrace{\left[\oint_{S^e} t_i N_{ik} dS + \int_{V^e} \rho b_i N_{ik} dV \right]_{\Omega^e}}_{f_k^{\text{ext}} \Big|_{\Omega^e}} - \underbrace{\left[\int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV \right]_{\Omega^e}}_{f_k^{\text{mas}} \Big|_{\Omega^e}} \cdot \ddot{U}_j \Big|_{\Omega^e} \quad (B2.72)$$

siendo $f_k^{\text{int}} \Big|_{\Omega^e}$, $f_k^{\text{mas}} \Big|_{\Omega^e}$ y $f_k^{\text{ext}} \Big|_{\Omega^e}$ los conjuntos ordenados, en forma de matrices columna, de las fuerzas interna, másica y externa que se desarrollan en cada punto del sistema discreto que aproxima el continuo, $\ddot{U}_j \Big|_{\Omega^e}$ la aceleración en dichos puntos, $M_{kj} \Big|_{\Omega^e}$ la masa elemental y $\bar{B}_{ijk} \Big|_{\Omega^e} = \nabla_i^S N_{jk} \Big|_{\Omega^e}$ el tensor de compatibilidad de deformaciones o gradiente simétrico de la función de forma.

La ecuación (B2.72) representa la ecuación elemental de *equilibrio dinámico en la configuración actualizada*, que expresada en la *configuración de referencia* adquiere la siguiente forma,

$$\left(\int_{V_0^e} S_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV_0 \right)_{\Omega_0^e} = \left(\oint_{S_0^e} t_i N_{ik} dS_0 + \int_{V_0^e} \rho_0 b_i N_{ik} dV_0 \right)_{\Omega_0^e} - \left(\int_{V_0^e} \rho_0 N_{ki} N_{ij} dV_0 \right)_{\Omega_0^e} \ddot{U}_j \Big|_{\Omega_0^e} \quad (B2.73)$$

$$M_{kj} \ddot{U}_j + f_k^{\text{int}} = f_k^{\text{ext}} \quad \in \Omega_0^e$$

siendo M_{kj} la matriz de masa, S_{ij} la tensión de Piola Kirchhoff, ρ_0 , V_0 y S_0 la densidad, el volumen y la superficie del sólido en la configuración referencial (ver Figura B2.1).

Desde un punto de vista mecánico-numérico, la no linealidad en la ecuación (B2.72) o (B2.73) puede estar originada por distintos fenómenos,

- **No linealidad constitutiva**, que resulta de la pérdida de linealidad entre el campo de tensiones y deformaciones $\sigma_{ij} - e_{ij}$ (o $S_{ij} - E_{ij}$ para la configuración de referencia), tal como ocurre en la plasticidad, daño etc. Esta no linealidad ocurre debido al cambio de propiedades que sufre el material durante su comportamiento mecánico y se refleja en su tensor constitutivo $\mathbb{C}_{ijkl}$.
- **No linealidad por grandes deformaciones**, que es debida a la influencia no lineal que tiene el cambio de configuración del sólido en el campo de deformaciones, (ver Figura B2.1 y ecuación (B2.8)). Este cambio de configuración también altera el

tensor constitutivo $\mathbb{C}_{ijkl}$ (ver Tabla B2.1), y por ello establece una relación no lineal entre tensiones y deformaciones (ver ecuación (B2.25)). Además, estos cambios de configuración son producidos por grandes movimientos, traslaciones y rotaciones, que también producen cambios en el sistema de referencia local en los puntos del sólido, afectando por ello al tensor de compatibilidad de deformaciones $\bar{B}_{ijk}$.

- **No linealidad por grandes desplazamientos**, que a diferencia de las grandes deformaciones, sólo afecta al tensor de compatibilidad de deformaciones $\bar{B}_{ijk}$, porque en este caso sólo ocurren cambios en el sistema de referencia local de los puntos del sólido como consecuencia de grandes movimientos.

Estas posibles no linealidades que pueden ocurrir todas juntas o por separado, se resumen en la forma que se muestra en el siguiente cuadro descriptivo,

<u>No linealidades posibles en:</u>	
σ_{ij} -	• No Linealidad Constituti va : Dependenci a no lineal entre tensiones y deformacio nes, debido a cambios en el tensor constituti vo $\mathbb{C}_{ijkl}$ • Grandes Deformacio nes : Dependenci a no lineal entre las deformacio nes e_{ij} o E_{ij} y los desplazami entos. Dependenci a no lineal entre tensiones y deformacio nes debido a cambios en el tensor constituti vo $\mathbb{C}_{ijkl}$, por cambios de configurac ión. No linealidad por cambios en la configurac ión geométrica del sólido, que se refleja en el tensor $\bar{B}_{ijk}$.
	• Grandes Desplazamientos : Sólo representa una parte del problema en grandes deformaciones, porque sólo afecta al tensor de compatibilidad de deformaciones $\bar{B}_{ijk}$.

La ecuación (B2.72) (o la (B2.73) para la configuración de referencia) representa el equilibrio en el dominio elemental Ω^e , y su participación en dominio global Ω se realiza a través del “ensamblaje” de esta ecuación de equilibrio, utilizando el operador lineal $\mathbf{A}$ que representa la suma entre las componentes de la fuerza, según corresponda a la posición y dirección de las contribuciones locales⁵.

B2.5.1 Problema No-Lineal – Linealización de la Ecuación de Equilibrio.

En el caso que haya linealidad en el comportamiento del sólido, se cumple la siguiente relación de equilibrio global, cuya expresión resulta del ensamblaje de las ecuaciones de equilibrio local representadas en la ecuación (B2.72) (o la (B2.73))

$$0 = \mathbf{A} \left[\int_{\Omega^e}^{\text{mas}} f_k^{\text{int}} + f_k^{\text{ext}} \right]_{\Omega^e} = \Delta f_k|_{\Omega} \quad (\text{B2.74})$$

La no linealidad en el comportamiento global del sólido se manifiesta como una fuerza residual $\Delta f_k|_{\Omega}$, provocada por el desequilibrio entre las fuerzas interiores $f_k^{\text{int}}|_{\Omega}$, las fuerzas másicas $f_k^{\text{mas}}|_{\Omega}$ y las exteriores $f_k^{\text{ext}}|_{\Omega}$. Este desequilibrio, en un cierto instante de tiempo “ t ” del proceso dinámico, puede eliminarse mediante la linealización de esta fuerza residual $\Delta f_k|_{\Omega}$ (B2.74), en la vecindad del estado de equilibrio actual $(i+1)$. Para ello es necesario forzar el equilibrio en el estado actual $(i+1)$ y expresar dicha condición mediante una expansión en serie de Taylor truncada en su primera variación,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{A}_{\Omega^e}^{i+1} [\Delta f_k]_{\Omega^e}^t \cong \mathbf{A}_{\Omega^e}^i [\Delta f_k]_{\Omega^e}^t + \mathbf{A}_{\Omega^e}^i \left[\left[\frac{\partial (\Delta f_k)}{\partial U_r} \right]_{\Omega^e}^t \cdot {}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \right] \\ 0 &= {}^{i+1} [\Delta f_k]_{\Omega^e}^t \cong {}^i [\Delta f_k]_{\Omega^e}^t + \mathbf{A}_{\Omega^e}^i \left[\left[M_{kj} \frac{\partial \ddot{U}_j}{\partial U_r} + \frac{\partial f_k^{\text{int}}}{\partial U_r} + \frac{\partial f_k^{\text{int}}}{\partial \dot{U}_j} \frac{\partial \dot{U}_j}{\partial U_r} - \frac{\partial f_k^{\text{ext}}}{\partial U_r} \right]_{\Omega^e}^t \cdot {}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \right] \end{aligned} \quad (\text{B2.75})$$

donde la aceleración y la velocidad deben expresarse mediante una aproximación lineal en diferencias finitas, ver más adelante, en el apartado (B3.3.21), el método de Newmark como un ejemplo de esta aproximación. Sustituyendo en esta ecuación las fuerzas internas y másicas expresadas en la ecuación (B2.72) (En forma análoga puede procederse con la ecuación (B2.73)), se tiene,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{A}_{\Omega^e}^i \left[M_{kj} \ddot{U}_j + \int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{\text{ext}} \right]_{\Omega^e}^t + \\ &+ \mathbf{A}_{\Omega^e}^i \left[\left(\int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV \right) \frac{\partial \ddot{U}_j}{\partial U_r} + \frac{\partial}{\partial U_r} \left(\int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{U}_m} \left(\int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV \right) \frac{\partial \dot{U}_m}{\partial U_r} - \frac{\partial f_k^{\text{ext}}}{\partial U_r} \right]_{\Omega^e}^t \cdot \\ &\cdot \mathbf{A}_{\Omega^e}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \\ 0 &= \mathbf{A}_{\Omega^e}^i \left[M_{kj} \ddot{U}_j + \int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{\text{ext}} \right]_{\Omega^e}^t + \\ &+ \mathbf{A}_{\Omega^e}^i \left[\left(\int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV \right) \frac{\partial \ddot{U}_j}{\partial U_r} + \left(\int_{V^e} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{st}} \frac{\partial e_{st}}{\partial U_r} \nabla_i^S N_{jk} dV \right) + \left(\int_{V^e} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial D_{st}} \frac{\partial D_{st}}{\partial \dot{U}_m} \nabla_i^S N_{jk} dV \right) \frac{\partial \dot{U}_m}{\partial U_r} - \frac{\partial f_k^{\text{ext}}}{\partial U_r} \right]_{\Omega^e}^t \cdot \\ &\cdot \mathbf{A}_{\Omega^e}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t \end{aligned}$$

Tal que particularizando esta ecuación de equilibrio dinámico para un material cuya ley constitutiva visco elasto-plástica es del tipo $\sigma_{ij} = \rho(\partial \Psi(e_{ij}, p_i) / \partial e_{ij}) = \mathbb{C}_{ijkl} : e_{kl}^e + \xi_{ijkl} : D_{kl}$ para una relación cinemática del tipo $e_{ij} = \nabla_i^S u_j = \nabla_i^S N_{jk} U_k$, y $D_{ij} = \nabla_i^S \dot{u}_j = \nabla_i^S N_{jk} \dot{U}_k$, resulta,

$$\begin{aligned}
0 = & \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[M_{kj} \ddot{U}_j + \int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{\text{ext}} \right]_{\Omega^e}^t + \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\left(\int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV \right) \frac{\partial \ddot{U}_j}{\partial U_r} + \right. \\
& \left. + \left(\int_{V^e} (\nabla_s^S N_{tr}) \mathbb{C}_{ijst}^T (\nabla_i^S N_{jk}) dV \right) + \left(\int_{V^e} (\nabla_s^S N_{tr}) \xi_{ijst}^T (\nabla_i^S N_{jk}) dV \right) \frac{\partial \dot{U}_m}{\partial U_r} - \frac{\partial f_k^{\text{ext}}}{\partial U_r} \right]_{\Omega^e}^t. \quad (\text{B2.76}) \\
& \mathbf{A}_{\Omega^e}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^t
\end{aligned}$$

$$0 = {}^i [\Delta f_k]_{\Omega}^t + {}^i [J_{kr}^T]_{\Omega}^t \cdot {}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega}^t$$

donde $\xi_{ijst}^T = \xi^T$ es el tensor de viscosidad tangente y $J_{kr}^T = \mathbb{J}^T$ es el operador jacobiano tangente. Esta ecuación puede también presentarse en la siguiente forma matricial, donde se detallan los operadores que contribuyen a la definición del jacobiano,

$$0 = {}^{i+1} [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^t \cong {}^i [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^t + \underbrace{\left[\mathbb{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} + \mathbb{K}^T + \mathbb{D}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\Omega}^t}_{{}^i \mathbb{J}_{\Omega}^t} \cdot {}^{i+1} [\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^t \quad (\text{B2.77})$$

Siendo esta última la ecuación de equilibrio linealizada, donde $[\mathbb{K}^T]_{\Omega} = \mathbf{A}_{\Omega^e} \int_{V^e} (\nabla^S \mathbf{N}) : \mathbb{C}^T : (\nabla^S \mathbf{N}) dV$ representa la matriz de rigidez tangente, $[\mathbb{M}]_{\Omega} = \mathbf{A}_{\Omega^e} \int_{V^e} \rho \mathbf{N} : \mathbf{N} dV$ es la matriz de masa, $[\mathbb{D}^T]_{\Omega} = \mathbf{A}_{\Omega^e} \int_{V^e} (\nabla^S \mathbf{N}) : \xi^T : (\nabla^S \mathbf{N}) dV$ es la matriz de amortiguación tangente, todas ellas definidas en todo el dominio Ω , $\mathbb{C}_{ijst}^T$ el tensor tangente correspondiente a la ley constitutiva utilizada en cada punto del sólido y $\mathbf{f}^{\text{ext}} = \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\oint_{S^e} \mathbf{N} : \mathbf{t} dS + \int_{V^e} \rho \mathbf{N} : \mathbf{b} dV \right]$ es la fuerza exterior que se expresa como. La fuerza desequilibrada en el sólido ${}^{i+1} [\Delta \mathbf{f}_k]_{\Omega}^t$ se elimina siguiendo una resolución por Newton-Raphson⁵ hasta que este residuo resulte despreciable, situación que se conoce como convergencia del proceso linealizado hacia la solución exacta (ver Figura B2.4).

En la Figura B2.4 se describe el equilibrio espacial, dejando el tratamiento de la convergencia en el tiempo para ser tratado al estudiar los métodos de resolución en el tiempo de la ecuación de equilibrio dinámico.

B2.6 Distintos tipos de Problemas Dinámicos No-lineales.

A continuación se hace una breve presentación de los distintos tipos de comportamiento que introducen no-linealidad en el problema dinámico. En principio y en consecuencia con el alcance de éste libro de dinámica no lineal, se estudiarán problemas de elasticidad retardada y relajación de tensiones, que dan lugar al denominado amortiguamiento viscoso dependiente de la velocidad, plasticidad y daño, que contribuyen a la disipación de la energía independiente de la velocidad. Aunque las grandes deformaciones

también inducen no-linealidad en el problema dinámico no será tratada con la misma profundidad que los otros fenómenos no lineales.

Se considerarán problemas en pequeñas deformaciones, en los cuales el jacobiano (ecuación (B2.5)), cumple con la siguiente condición,

$$J = |\mathbf{J}| = |\mathbf{F}| = \frac{dV}{dV_0} \cong 1 \quad (\text{B2.78})$$

Resultando de aquí la coincidencia entre las tensiones de Cauchy y de Piola Kirchoff $\sigma_{ij} = S_{ij}$, entre la velocidad de deformación en la configuración actualizada y la correspondiente magnitud infinitesimal $D_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$ y entre la densidad en las distintas configuraciones $\rho = \rho_0$. Con estas condiciones particulares los desplazamientos y deformaciones son despreciables frente a las dimensiones del sólido y por lo tanto puede escribirse la medida de deformación de la siguiente forma,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T - \mathbf{I}) = \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] \quad (\text{B2.79})$$

Además, para un material particular cuyo comportamiento es elástico y en pequeñas deformaciones, ocurre la siguiente coincidencia en la definición de las deformaciones ($\mathbf{e} = \mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon}$), y la energía libre se escribe en la siguiente forma simplificada,

$$\Psi = \frac{1}{2\rho_0} (\boldsymbol{\epsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}) \quad (\text{B2.80})$$

tal que sustituida en la ecuación (B2.55) o en la (B2.64), resulta la siguiente ley constitutiva,

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{B2.81})$$

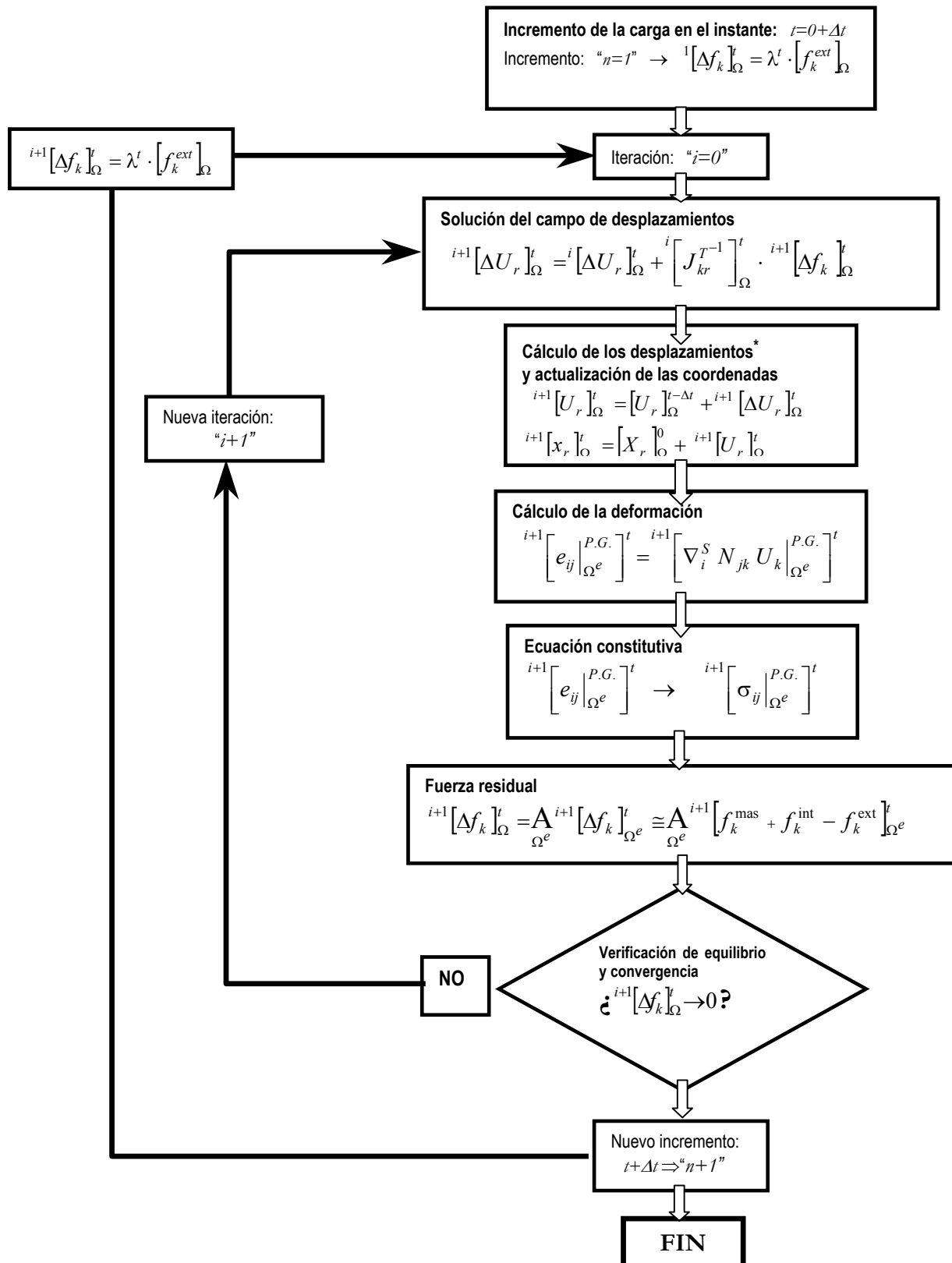
donde el tensor constitutivo $\mathbb{C}$ coincide exactamente con el obtenido mediante la ley de Hooke generalizada, y cuya expresión canónica es la siguiente,

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{B2.82})$$

Donde λ y μ son las constantes de Lamé y δ_{ij} es el tensor de Kroneker. El tensor de elasticidad de Hooke resulta definido positivo y posee las siguientes simetrías

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} = \mathbb{C}_{ijlk} = \mathbb{C}_{jilk} \quad (\text{B2.83})$$

Cauchy definía cuerpo elástico como “aquel en el cual las deformaciones en cualquier punto del sólido quedan determinadas por su estado de tensión y temperatura”. En contraste con esta definición, se tendrá un material con comportamiento inelástico, cuando es necesario establecer unas definiciones adicionales a las propias de la teoría de la elasticidad clásica, cuya formulación está relacionada con la historia del comportamiento del material. Esta situación hace que no pueda garantizarse una relación biunívoca entre el tensor de tensiones y el de deformaciones, o dicho de otra forma, que no son relaciones invertibles una de otra.



* **NOTA:** El campo de velocidades y aceleraciones deben calcularse según el método aproximación de la aceleración (ver a modo de ejemplo el método de Newmark)

Figura B2.4 – Representación esquemática de la resolución del problema no lineal mediante Newton-Raphson.

B2.6.1 No linealidad en los Materiales.

La influencia del tiempo produce en algunos sólidos comportamientos irreversibles. Básicamente pueden establecerse tres tipos de comportamientos no lineales dependientes del tiempo:

- **Elasticidad retardada o “creep”**, donde ocurren crecimiento de deformación a tensión aplicada constante (ver Figura B2.5).
- **Relajación de tensiones**, donde se produce pérdida de tensión mientras el nivel de deformaciones se mantiene constante. Este comportamiento, aunque no invertible, representa la forma implícita inversa de la elasticidad retardada (ver Figura B2.5)
- **Visco-plasticidad** cuyo comportamiento no lineal se debe a un crecimiento del campo de deformaciones inelásticas, pero esto ocurre siempre que el campo de tensiones supere unos umbrales preestablecidos (ver Figura B2.7).

Hay también materiales cuyo comportamiento no lineal es independiente del tiempo y puede ser consecuencia de,

- **Plasticidad o comportamiento con flujo instantáneo**. Este comportamiento puede matemáticamente establecerse como un caso particular del comportamiento viscoplástico, pero la física del problema es cualitativamente diferente. Este concepto se lo describirá también con detalle en capítulos posteriores. (ver Figura B2.6).
- **Daño o degradación de rigidez**, que produce en los materiales una pérdida de resistencia como consecuencia de una degradación en la elasticidad del material.

Estos comportamientos pueden presentarse en forma aislada o participar todos ellos en distinto grado. Sobre la modelización constitutiva y su influencia en el comportamiento estructuras se profundizará más adelante.

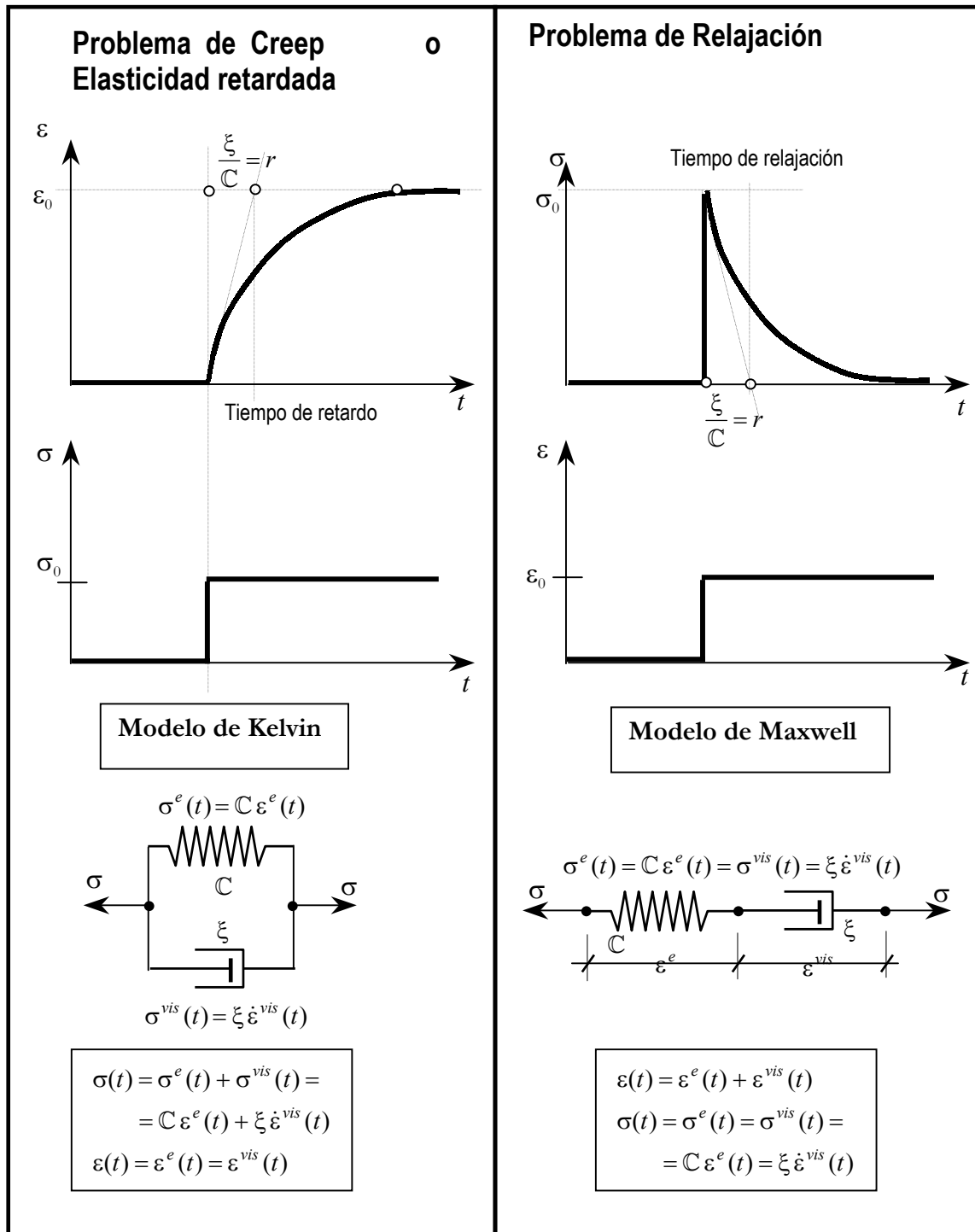


Figura B2.5 – Formas simplificadas de entender el comportamiento viscosos de Kelvin y Maxwell.

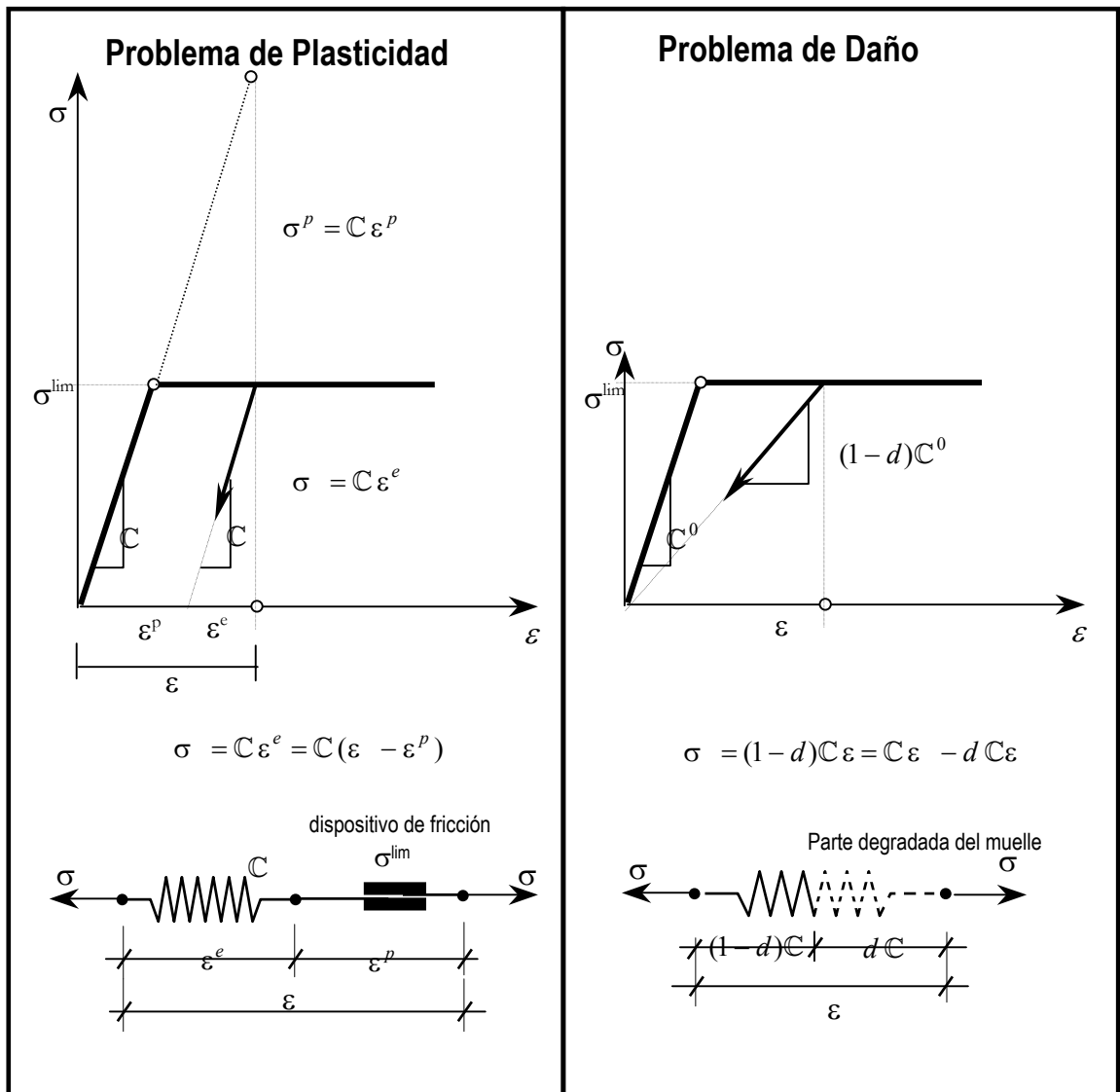


Figura B2.6 – Formas simplificadas de entender el comportamiento elastoplástico y daño.

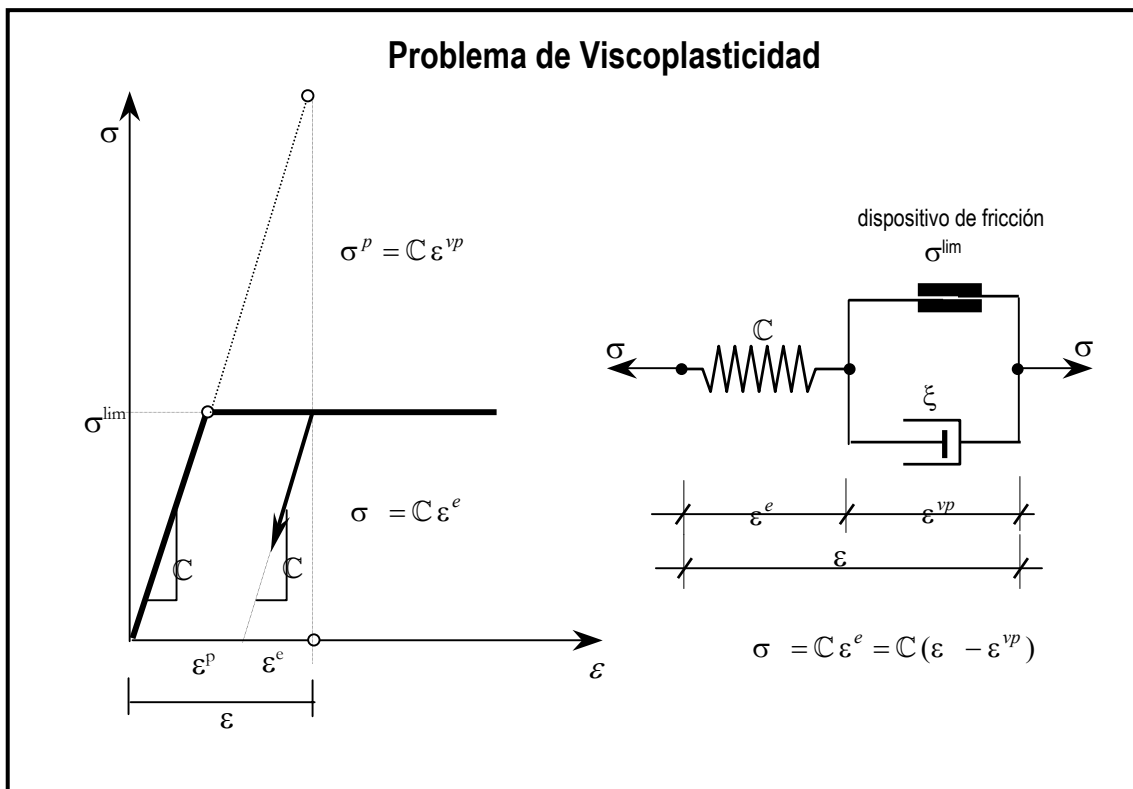


Figura B2.7 – Formas simplificadas de entender el comportamiento viscoplástico.

B 3 Resolución de la Ecuación del Movimiento

B3.1 Introducción.

En este capítulo se estudia la resolución en el tiempo de la ecuación del movimiento en su forma semi-discreta (ver ecuación de equilibrio, apartado B2.5). A continuación se considera el ensamblaje de la ecuación B2.72 (o la B2.73 si se hace el equilibrio en la configuración referencial), que permite definir el equilibrio en todo el sólido en el instante $t + \Delta t$,

$$\mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\int_{V^e} \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} = \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\oint_{S^e} t_i N_{ik} dS + \int_{V^e} \rho b_i N_{ik} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} - \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \ddot{U}_j \Big|_{\Omega^e}^{t+\Delta t}$$

que escrita en forma compacta tiene la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f}_k &= \mathbf{M}_{kj} \ddot{U}_j(t + \Delta t) + \mathbf{f}_k^{\text{int}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t + \Delta t) - \mathbf{f}_k^{\text{ext}}(t + \Delta t) = 0 & \in \Omega \\ \Delta \mathbf{f} &= \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t + \Delta t) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t + \Delta t) = 0 & \in \Omega \end{aligned} \quad (\text{B3.1})$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias ya contiene la aproximación polinomial del campo de desplazamientos, velocidades y aceleraciones definida por la ecuación B2.69. La discretización espacial de los campos de desplazamientos, velocidades y aceleraciones, queda representada por los valores de dichas funciones, $\mathbf{U}(t)$, $\dot{\mathbf{U}}(t)$ y $\ddot{\mathbf{U}}(t)$ respectivamente, definidas sólo en algunos puntos del medio continuo (nodos), donde se soporta el polinomio de aproximación local o también denominado función de forma de un elemento finito. Es necesario puntualizar que en la ecuación (B3.1) el campo temporal es continuo y que sólo se ha discretizado las funciones definidas en el espacio. También se representa en esta ecuación la matriz de masa $\mathbf{M} = \int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV$, las fuerzas externas $\mathbf{f}^{\text{ext}}(t + \Delta t) = \oint_{S^e} t_i N_{ik} dS + \int_{V^e} \rho b_i N_{ik} dV$ y las fuerzas internas $\mathbf{f}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t + \Delta t) = \int_V \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV$ que contienen los términos no lineales del comportamiento del material. Entre las posibles no linealidades que puede tener un punto de un sólido genérico, sólo se tratarán en este trabajo aquellas producida por la plasticidad, el daño y la viscosidad. También se enfocará la presentación a problemas de la mecánica en pequeñas deformaciones y movimientos, de forma tal que el campo de deformaciones podrá representarse como $e_{ij} = E_{ij} = \varepsilon_{ij}$. Bajo estos supuestos, la tensión σ_{ij} puede escribirse como (ver ecuación B2.55 para una descripción euleriana y B2.64 para una descripción lagrangeana),

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \begin{cases} \mathbb{C}^S : \boldsymbol{\epsilon}^e + \hat{\mathbf{1}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} & \text{Caso elasto - plastico con viscosidad} \\ \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon} & \text{Caso elastico} \end{cases} \quad (\text{B3.2})$$

En el caso de un problema elástico lineal, la viscosidad se introduce en la ecuación de equilibrio mediante un término que se añade en forma de fuerzas viscosas $\mathbf{f}^{\text{visc}}(\dot{\mathbf{U}}, t + \Delta t) = \mathbb{D} \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t)$, donde $\mathbb{D} = \int_V (\nabla^S \mathbf{N}) \xi (\nabla^S \mathbf{N}) dV$ es la denominada matriz de amortiguamiento y que habitualmente toma la forma dada por la combinación lineal de Rayleigh¹. Así, en el caso que se suponga comportamiento lineal, las fuerzas internas adquieren la siguiente forma conocida,

$$\begin{aligned} f_k^{\text{int}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t + \Delta t) &= D_{kj} \dot{U}_j(t + \Delta t) + K_{kj} U_j(t + \Delta t) & \in \Omega_0 \\ \mathbf{f}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t + \Delta t) &= \mathbb{D} \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \mathbb{K} \mathbf{U}(t + \Delta t) & \in \Omega_0 \end{aligned} \quad (\text{B3.3})$$

La filosofía preponderante para la resolución de este problema clásico en dinámica estructural se basa en admitir el “concepto de separación de variables” en el cual se supone que los problemas temporales y espaciales son independientes entre sí. Por esta razón se establece una estrategia diferente de resolución para cada una de los problemas, así para la solución del problema espacial se adopta el método de los elementos finitos, en tanto el problema temporal suele resolverse mediante diferencias finitas. Dicho de otra manera, se resuelve en cada instante de tiempo t la ecuación semi-discreta (B3.1) que representa el equilibrio espacial en dicho instante de tiempo (ver Figura B3.1).

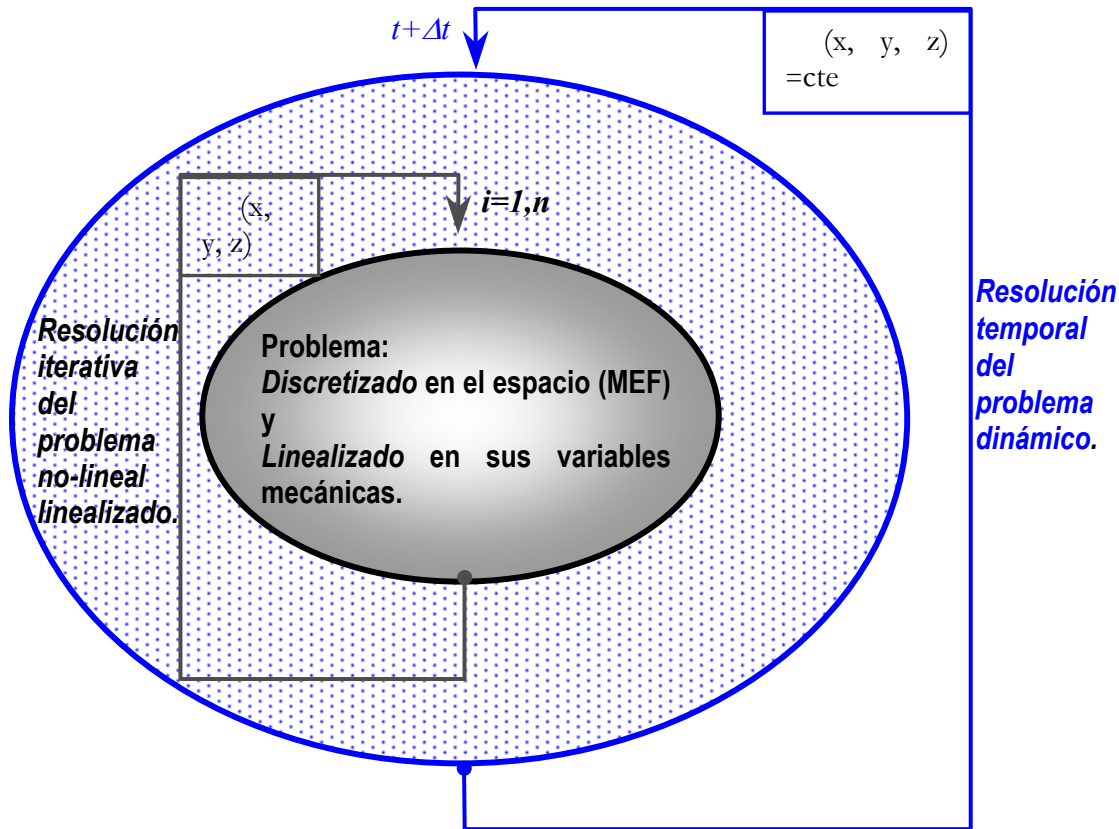


Figura B3.1 – Representación esquemática de la resolución no-lineal de un problema dinámico.

¹ R. Clough and J. Penzien (1993). Dynamics of Structures. Mc Graw-Hill N. York.

B3.2 Solución explícita-implícita.

La solución en el tiempo de la ecuación diferencial (B3.3) puede obtenerse siguiendo una estrategia de solución implícita o explícita. Esto es, si la respuesta en el instante actual $(t + \Delta t)$ depende completamente de la solución en el paso previo (t) , se tiene una solución explícita, pero si la solución actual depende de la velocidad y aceleración en el instante actual $(t + \Delta t)$, se tiene una solución implícita. A modo de ejemplo se adopta una ecuación más simple, como es la ecuación diferencial de primer orden para representar el fenómeno de conducción de calor, $M \dot{U}(t) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{U}, t) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) = 0$. A través de esta ecuación puede explicarse en forma simple el concepto sobre solución implícita-explícita diciendo que, dada la solución en desplazamientos y velocidades en un tiempo t , se obtiene en un tiempo posterior $(t + \Delta t)$, la siguiente solución,

$$\begin{cases} \mathbf{U}(t + \Delta t) = \mathbf{U}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{U}}(t + \alpha \Delta t) \\ \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) = (1 - \alpha) \dot{\mathbf{U}}(t) + \alpha \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) \end{cases} \quad (\text{B3.4})$$

donde α es un parámetro que permite obtener una solución:

- **Explícita** en la que se formula el equilibrio en el instante t , con $\alpha = 0$. Se obtiene el desplazamiento en el paso posterior dependiente de la velocidad y el desplazamiento en el anterior,
- **Implícita** en la que se plantea el equilibrio en el instante $(t + \Delta t)$ con $\alpha = 1$. Se obtiene el desplazamiento en el paso posterior dependiente de la velocidad en tiempo actual y el desplazamiento en el paso anterior.

α	Método	Tipo de solución
0	Dif. Adelante Forward Euler	Explícito ● ↓
$\frac{1}{2}$	Regla Medio Punto Crank-Nicholson	
$\frac{2}{3}$	Galerkin	
1	Dif. Atrás Backward Euler	Implícito

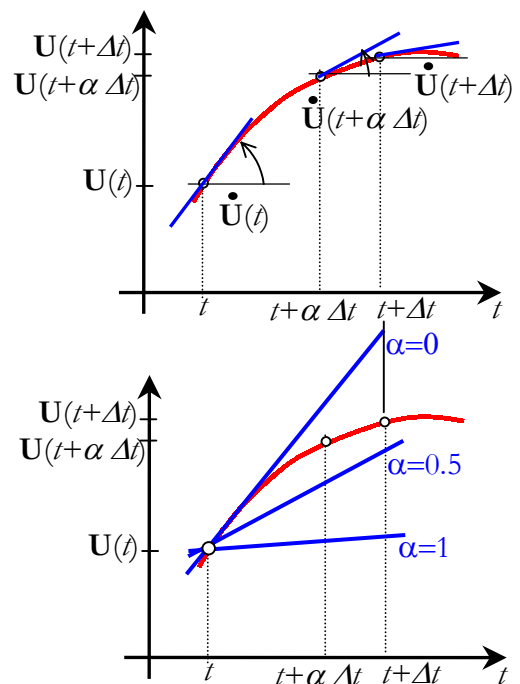


Figura B3.2 – Representación simplificada de una solución explícita-implícita.

Haciendo una comparación entre una solución en el tiempo explícita y otra implícita, resultan los siguientes tópicos, que deben matizarse según el problema que se esté resolviendo,

Integración temporal explícita:

Se requiere poco tiempo de cálculo para cada paso de tiempo,

1. El algoritmo de solución es simple tanto en su lógica como en su estructura, por lo tanto permite un tratamiento simple de las distintas no linealidades,
2. Requiere menos esfuerzo computacional en cuanto al almacenamiento en memoria
3. No necesita de operadores tangentes costosos de obtener y que son propios de los métodos implícitos,
4. Los métodos explícitos ofrecen algoritmos confiables.
5. El incremento de tiempo en la solución está acotado y normalmente resulta muy pequeño, haciendo difícil la solución de problemas que se desarrollan en dominios del tiempo muy grandes.

Integración temporal implícita:

Son métodos muy estables y robustos,

1. Los incrementos de tiempos pueden ser mucho más grandes que en los métodos explícitos, conservando la estabilidad en la solución,
2. Permiten soluciones más exactas, ajustando mucho la solución mediante tolerancias de error muy bajas,
3. Una relativa desventaja está en la linealización de la solución que suele llevarse a cabo mediante Newton-Raphson y esto exige operadores tangentes que en muchos casos son de difícil obtención,
4. Otra desventaja puede encontrarse en el gran requerimiento de almacenamiento en caso de utilizarse métodos directos de solución del sistema de ecuaciones,

Debido a la robustez que ofrece en la solución los métodos implícitos, se orientará el resto de esta presentación a presentar sus particularidades. En todos los casos se admitirá un problema espacial aproximado mediante una forma discreta tal como lo formula el método de los elementos finitos y sólo se estudiará la forma de resolver el problema temporal, dejando la solución del problema espacial para un tratado más orientado a problemas independientes del tiempo.

B3.3 Solución implícita.

El carácter implícito de un método de integración en el tiempo supone que los desplazamientos $\mathbf{U}(t + \Delta t) = \mathbf{U}^{t+\Delta t}$ y velocidades $\dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$ en el tiempo $t + \Delta t$ se obtienen utilizando la siguiente *aproximación lineal en diferencias*,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = k_v \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \Delta t + \mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{U}}^t, \dot{\mathbf{U}}^t, \dots) \\ \mathbf{U}^{t+\Delta t} = k_u \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \Delta t^2 + \mathbf{f}_u(\mathbf{U}^t, \mathbf{U}^t, \dot{\mathbf{U}}^t, \dots) \end{cases} \quad (\text{B3.5})$$

Donde Δt es el paso de tiempo y k_u y k_v son coeficientes que se determinarán al precisar el método de solución.

B3.3.1 Equilibrio en cada instante $(t + \Delta t)$.

Se admite que los coeficientes k_U y k_V son no nulos, que las aceleraciones $\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$ y velocidades $\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$ son funciones del desplazamiento $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$ en el tiempo $(t + \Delta t)$ y que la fuerza residual en dicho instante ${}^i[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t}$, linealizada para cada iteración " i ", está definida en todo el dominio Ω (ecuación B2.77), por la expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= {}^{i+1}[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \cong {}^i[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + {}^i\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \\ \mathbf{0} &= {}^{i+1}\Delta \mathbf{f}^{t+\Delta t} \cong {}^i\Delta \mathbf{f}^{t+\Delta t} + {}^i\mathbb{J}^{t+\Delta t} \cdot [{}^{i+1}\mathbf{U}^{t+\Delta t} - {}^i\mathbf{U}^{t+\Delta t}] \end{aligned} \quad (\text{B3.6})$$

En el resto de este capítulo y para simplificar la notación, siempre que se haga referencia al equilibrio global, se prescindirá del subíndice Ω en las formulaciones. Este equilibrio global bajo comportamiento no lineal puede alcanzarse satisfactoriamente mediante el procedimiento iterativo de Newton-Raphson, el cual permite aproximar la solución en la vecindad del punto " $(i+1)$ ", mediante la linealización descrita en la ecuación (B3.6). En esta solución linealizada, el operador jacobiano tangente tiene la siguiente forma,

$${}^i\mathbb{J}^{t+\Delta t} = \mathbb{J}({}^i\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} = \left[\mathbb{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.7})$$

Tal que se entiende por operador tangente de rigidez a la relación $\mathbb{K}^T = \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{U}}$, operador tangente de amortiguación a la relación $\mathbb{D}^T = \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \dot{\mathbf{U}}}$ y a la relación $\frac{\partial \mathbf{f}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{U}}$ como la influencia del cambio de la posición de las fuerzas externas con los sucesivos cambios de configuración. Este último término puede considerarse nulo en pequeños desplazamientos, pues en este caso los cambios de posición de las cargas son casi despreciables frente al tamaño de la pieza. Sustituyendo estos operadores tangentes en la ecuación (B3.7), la matriz jacobiana toma la siguiente forma,

$${}^i\mathbb{J}^{t+\Delta t} = \mathbb{J}({}^i\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} = \left[\mathbb{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} + \mathbb{K}^T + \mathbb{D}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.8})$$

En problemas dinámicos elásticos lineales se simplifica aun más, por que se transforma en el siguiente operador constante,

$${}^i\mathbb{J}^{t+\Delta t} \equiv \mathbb{J}^0 = \mathbb{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} + \mathbb{K}^0 + \mathbb{D}^0 \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} \quad (\text{B3.9})$$

y en el caso de problemas cuasi estáticos, donde $\ddot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{f}^{\text{ext}} = cte$, el operador jacobiano tiende a la clásica matriz de rigidez.

$${}^i\mathbb{J}^{t+\Delta t} = \mathbb{J}({}^i\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} = {}^i[\mathbb{K}^T]^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.10})$$

B3.3.2 Solución del equilibrio en el tiempo - Métodos implícitos.

Una vez establecida la ecuación de equilibrio y su linealización, el problema fundamental que es necesario resolver ahora es la relación que existe entre los campos de aceleración, velocidad y desplazamiento ($\partial\ddot{U}/\partial U ; \partial\dot{U}/\partial U$). Esto permitiría obtener el operador jacobiano expresado en las ecuaciones (B3.7), (B3.8) y (B3.9). Para alcanzar este objetivo hay distintos caminos, o dicho de otra manera, hay distintas maneras de formular un integrador implícito en el tiempo. Entre los procedimientos mas comunes están los métodos de *integración de un paso*, al que pertenece la familia de métodos tipo Newmark cuya principal característica es que son incondicionalmente estables para resolver problemas dinámicos lineales. En cuanto a la estabilidad de la solución en problemas no lineales no hay nada que la asegure, pero sobre este tema se volverá más adelante.

También hay *métodos multipasos*, como lo son la familia de métodos tipo Houbolt, que tienen más precisión a cambio de mantener almacenada mayor información, razón que los hace más caros en término de cálculo computacional.

Con la finalidad de ilustrar al lector sobre métodos de uno y dos pasos, se presentarán los procedimientos de integración temporal de Newmark y Houbolt, respectivamente.

B3.3.2.1 Procedimiento de Newmark.

Es un método de integración temporal de un paso, que resulta incondicionalmente estable en problemas dinámicos elásticos lineales. Es uno de los métodos más utilizados por su equilibrada relación entre coste computacional, precisión y simpleza de implementación numérica.

Una formulación de un paso se caracteriza porque los desplazamientos y velocidades en el tiempo ($t + \Delta t$) se obtiene parcialmente a partir de un sistema ya conocido en el paso anterior (t). Esto es (ecuación (B3.5)),

$$\begin{cases} U^{t+\Delta t} = f_1(\ddot{U}^{t+\Delta t}, U^t, \dot{U}^t, \ddot{U}^t) \\ \dot{U}^{t+\Delta t} = f_2(\ddot{U}^{t+\Delta t}, U^t, \dot{U}^t, \ddot{U}^t) \end{cases} \quad (B3.11)$$

El carácter implícito resulta de la dependencia de la aceleración en el tiempo actual.

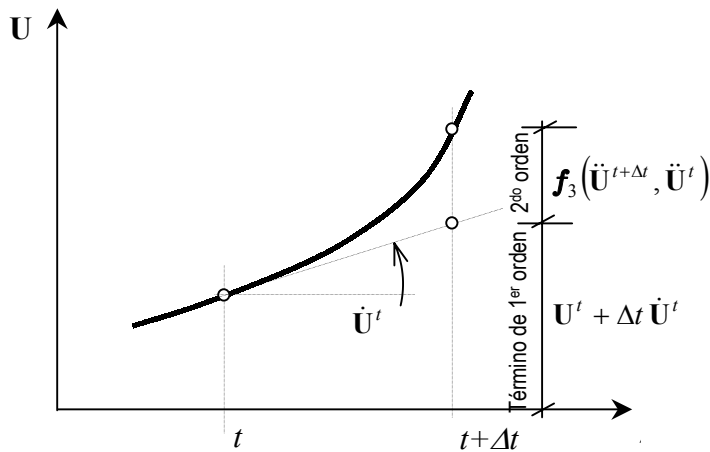


Figura B3.3 – Aproximación temporal del desplazamiento.

La diferencia fundamental con el clásico método de diferencia centrada¹ se basa en que la velocidad y el desplazamiento no resultan de la aceleración instantánea (una derivada), sino de la integral de la aceleración que hace la solución más estable. Así, la velocidad y el desplazamiento se definen siguiendo el procedimiento que a continuación se resume,

• **Cálculo de la velocidad:**

$$\ddot{U}(\tau) = \frac{d \dot{U}(\tau)}{d \tau}$$

➔

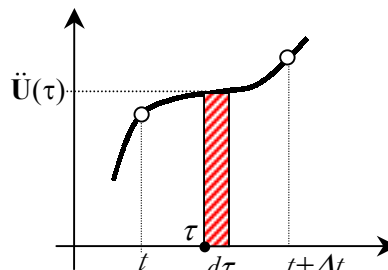
$$d\dot{U} = \ddot{U}(\tau) d\tau$$

$$\int_t^{t+\Delta t} d\dot{U} = \int_t^{t+\Delta t} \ddot{U}(\tau) d\tau$$

$$\dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \ddot{U}(\tau) d\tau}_{\text{Vel. promedio durante } \Delta t}$$

Área del diagrama

(B3.12)



• **Cálculo del desplazamiento:**

$$\dot{U}(\tau) = \frac{d U(\tau)}{d \tau}$$

➔

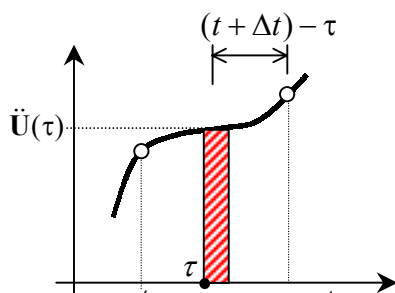
$$dU = \dot{U}(\tau) d\tau$$

$$\int_t^{t+\Delta t} dU = \int_t^{t+\Delta t} \dot{U}(\tau) d\tau$$

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \int_t^{t+\Delta t} \dot{U}(\tau) d\tau$$

Momento de primer orden.
Figura (B3.3)

(B3.13)



Sustituyendo la velocidad $\dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + \int_t^{t+\Delta t} \ddot{U}(\tau) d\tau$, previamente obtenida, en ésta última expresión, resulta la expresión del desplazamiento en función de la aceleración,

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \int_t^{t+\Delta t} \left[\dot{U}(\tau) + \int_0^\tau \ddot{U}(\tau) d\tau \right] d\tau \quad (B3.14)$$

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \int_0^{\Delta t} \dot{U}(\tau) d\tau + \int_0^{\Delta t} \left[\int_0^\tau \ddot{U}(\tau) d\tau \right] d\tau$$

transformando el momento de primer orden en otra forma integral, $\int_0^{\Delta t} \left[\int_0^\tau \ddot{U}(\tau) d\tau \right] d\tau = \int_0^{\Delta t} [(t+\Delta t) - \tau] \ddot{U}(\tau) d\tau$, resulta la siguiente expresión para el desplazamiento,

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \dot{U}^t \Delta t + \int_0^{\Delta t} \left[\int_0^\tau \ddot{U}(\tau) d\tau \right] d\tau = U^t + \dot{U}^t \Delta t + \underbrace{\int_0^{\Delta t} [(t+\Delta t) - \tau] \ddot{U}(\tau) d\tau}_{\text{Desp. promedio durante } \Delta t} \quad (B3.15)$$

Para resolver este problema es necesario suponer la expresión de la aceleración. Newmark adopta una variación lineal de la aceleración en el tiempo, del tipo

$$\ddot{U}(\tau) = \ddot{U}^t + f(\tau)(\ddot{U}^{t+\Delta t} - \ddot{U}^t) \quad (B3.16)$$

Donde $f(\tau)$ es una función de forma, que tiene la siguiente definición $f(\tau=t)=0$ y $f(\tau=t+\Delta t)=1$ (ver Figura B3.4).

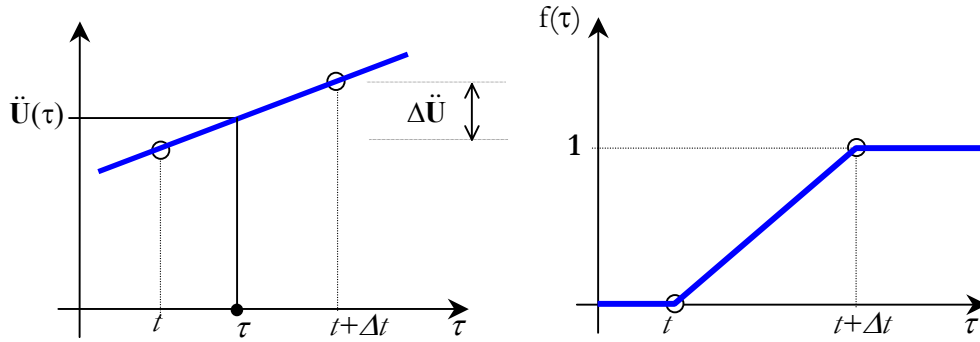


Figura B3.4 – Aproximación temporal del desplazamiento.

Sustituyendo esta variación lineal en la ecuación de la velocidad B3.12 y del desplazamiento (B3.15) se tiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + \int_0^{\Delta t} \ddot{U}^t d\tau + \int_0^{\Delta t} f(\tau) (\ddot{U}^{t+\Delta t} - \ddot{U}^t) d\tau \\ U^{t+\Delta t} = U^t + \dot{U}^t \Delta t + \int_0^{\Delta t} [(t+\Delta t) - \tau] \cdot [\ddot{U}^t + f(\tau) (\ddot{U}^{t+\Delta t} - \ddot{U}^t)] d\tau \end{cases} \quad (B3.17)$$

Que puede escribirse luego de algunos pasos como,

$$\begin{cases} \dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + \ddot{U}^t \Delta t + (\ddot{U}^{t+\Delta t} - \ddot{U}^t) \cdot \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau \\ U^{t+\Delta t} = U^t + \dot{U}^t \Delta t + \ddot{U}^t \frac{\Delta t^2}{2} + \int_0^{\Delta t} \left[(\ddot{U}^{t+\Delta t} - \ddot{U}^t) \cdot \underbrace{\int_0^{\tau} f(\tau) d\tau}_{g(\tau)} \right] d\tau \end{cases} \quad (B3.18)$$

El resultado de la integral $g = \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau = k_U \Delta t = \gamma \Delta t$ debe interpretarse como el área de la función de aproximación lineal de las aceleraciones (Figura B3.4). Obsérvese que en este caso particular el coeficiente es $\gamma = 0.5$ (área rayada de la Figura B3.5).

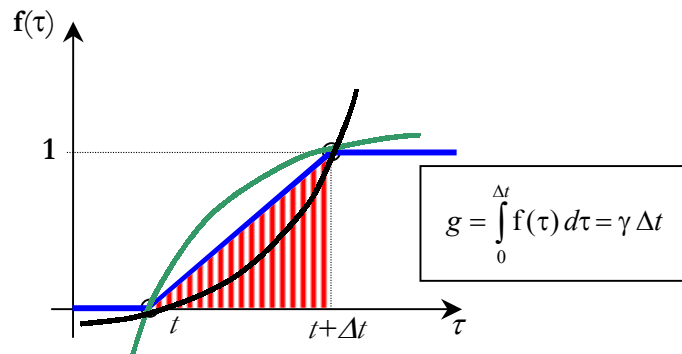


Figura B3.5 – Área de la función de aproximación de las aceleraciones.

Teniendo en cuenta que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau = k_U \Delta t = \gamma \Delta t \\ \int_0^{\Delta t} \left[\int_0^{\tau} f(\tau) d\tau \right] d\tau = k_V \Delta t^2 = \beta \Delta t^2 \end{array} \right. \quad (B3.19)$$

y sustituyendo estos resultados en la ecuación (B3.18), resultan las siguientes ecuaciones para la velocidad y el desplazamiento,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + \ddot{\mathbf{U}}^t \Delta t + (\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}^t) \gamma \Delta t \\ \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \dot{\mathbf{U}}^t \Delta t + \ddot{\mathbf{U}}^t \frac{\Delta t^2}{2} + (\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}^t) \beta \Delta t^2 \end{array} \right. \quad (B3.20)$$

reordenando los términos de estas ecuaciones, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + (1-\gamma) \ddot{\mathbf{U}}^t \Delta t + \gamma \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \Delta t \\ \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \dot{\mathbf{U}}^t \Delta t + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}^t \Delta t^2 + \beta \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \Delta t^2}_{\Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t}} \end{array} \right. \quad (B3.21)$$

de estas dos últimas resultan las expresiones fundamentales de Newmark (B3.11), que expresan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en el tiempo actual del proceso de integración temporal,

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \right) (\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}^t - \dot{\mathbf{U}}^t \Delta t) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}^t \\ \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \right) \Delta^i \mathbf{U}^t + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{U}}^t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{U}}^t \Delta t \\ \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta^i \mathbf{U}^{t+\Delta t} \end{array} \right. \quad (B3.22)$$

Los coeficientes $k_U = \gamma$ y $k_V = \beta$ determinan la estabilidad del método, tal como se verá más adelante. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de equilibrio dinámico linealizada (B3.6) y en el jacobiano (B3.8), en el instante $(t + \Delta t)$ iteración (i) , se tiene:

$$\mathbf{0} = {}^{i+1} \Delta \mathbf{f}^{t+\Delta t} \cong {}^i \Delta \mathbf{f}^{t+\Delta t} + {}^i \mathbb{J}^{t+\Delta t} \cdot [{}^{i+1} \mathbf{U}^{t+\Delta t} - {}^i \mathbf{U}^{t+\Delta t}]$$

$$\text{con : } {}^i \mathbb{J}^{t+\Delta t} = \left[\mathbb{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} + \mathbb{K}^T + \mathbb{D}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} = \left[\mathbb{M} \frac{1}{\beta \Delta t^2} + \mathbb{K}^T + \mathbb{D}^T \frac{\gamma}{\beta \Delta t} - \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} \quad (B3.23)$$

y sustituida en la ecuación de equilibrio (B3.1), resulta la expresión de las fuerzas residuales, en el instante $(t + \Delta t)$ iteración (i) ,

$$\begin{aligned}
{}^i\Delta \mathbf{f}^{t+\Delta t} &= \mathbb{M} \left[{}^i\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \left[\mathbf{f}^{\text{int}} \right]^{t+\Delta t} - {}^{i+1} \left[\mathbf{f}^{\text{ext}} \right]^{t+\Delta t} \right] = \\
&= \mathbb{M} \left[\left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \right) \left(\Delta {}^i\mathbf{U}^{t+\Delta t} - {}^i\dot{\mathbf{U}}^t \Delta t \right) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^i\ddot{\mathbf{U}}^t \right] + \\
&\quad + \int_V {}^i\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} (\nabla^S \mathbf{N}) dV - {}^{i+1} \left[\mathbf{f}^{\text{ext}} \right]^{t+\Delta t}
\end{aligned} \tag{B3.24}$$

Puede probarse que la solución en el tiempo que ofrece este método es incondicionalmente estable para valores de $\gamma \geq 1/2$ y $\beta \geq 1/4(0.5 + \gamma)^2$ (ver cap-B-4).

El esquema de integración en el tiempo se realiza siguiendo los siguientes pasos, luego de imponer la condición de fuerza residual nula (${}^{i+1}\Delta \mathbf{f}^{t+\Delta t} = \mathbf{0}$, ecuación (B3.23)),

1. Predicción de velocidades y desplazamiento, ecuación (B3.21), a partir de la condición inicial de aceleración nula en $(t + \Delta t)$,

$$\ddot{\tilde{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}^t \Delta t$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \dot{\mathbf{U}}^t \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}^t \Delta t^2$$

2. Obtención de la corrección $\Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t}$ de los desplazamientos a partir de la ecuación (B3.23) de equilibrio linealizada en el instante $(t + \Delta t)$

$${}^i\Delta \mathbf{f}^{t+\Delta t} = - {}^i\mathbb{J}^{t+\Delta t} \cdot \Delta {}^{i+1}\mathbf{U}^{t+\Delta t}$$

3. Obtención de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones corregidas,

$${}^{i+1}\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \right) \Delta {}^{i+1}\mathbf{U}^{t+\Delta t}$$

$${}^{i+1}\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\tilde{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} + \left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \right) \Delta {}^{i+1}\mathbf{U}^{t+\Delta t}$$

$${}^{i+1}\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \Delta {}^{i+1}\mathbf{U}^{t+\Delta t}$$

4. Cálculo del campo de deformaciones, resolución de la ecuación constitutiva y verificación de la convergencia mediante el cálculo de la fuerza residual,

$${}^{i+1}\boldsymbol{\epsilon}^{t+\Delta t} = \nabla^S {}^{i+1}\mathbf{U}^{t+\Delta t} \quad ; \quad {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{t+\Delta t} = \frac{(\nabla^S {}^{i+1}\mathbf{U}^{t+\Delta t}) - (\nabla^S {}^i\mathbf{U}^t)}{\Delta t}$$

$${}^{i+1}\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} = {}^{i+1} \left[\mathbb{C}^S : \boldsymbol{\epsilon}^e + \xi : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right]^{t+\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
{}^{i+1}\Delta \mathbf{f}^{t+\Delta t} &= \mathbb{M} \left[\left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \right) \left(\Delta {}^{i+1}\mathbf{U}^{t+\Delta t} - {}^{i+1}\dot{\mathbf{U}}^t \Delta t \right) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^{i+1}\ddot{\mathbf{U}}^t \right] + \\
&\quad + \int_V {}^{i+1}\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} (\nabla^S \mathbf{N}) dV - {}^{i+1} \left[\mathbf{f}^{\text{ext}} \right]^{t+\Delta t}
\end{aligned}$$

5. Si $\left| {}^{i+1}\Delta \mathbf{f}^{t+\Delta t} \right| > \text{TOL}$, entonces "IR a 2"; caso contrario "IR a 1" e incrementar el tiempo $(t + \Delta t)$.

Tabla B3.1 Procedimiento de integración en el tiempo de Newmark.

B3.3.2.2 Procedimiento de Houbolt.

Es un método de integración temporal de dos pasos, o cuatro puntos, es decir que para resolver un problema en el tiempo $(t + \Delta t)$ necesita la información del estado de las variables en los tiempos (t) , $(t - \Delta t)$ y $(t - 2\Delta t)$. La diferencia con los métodos de un paso radica en la precisión, pues mejora respecto de aquellos, a cambio introducir más complejidad en el cálculo y también una mayor exigencia en los requerimientos de memoria para almacenar las variables en tiempos precedentes.

La aceleración se calcula a partir de la siguiente aproximación,

$$\sum_{k=1}^m \left(\gamma_k \mathbf{U}^{(t+\Delta t)-k\cdot\Delta t} - \Delta t \delta_k \ddot{\mathbf{U}}^{(t+\Delta t)-k\cdot\Delta t} \right) = \mathbf{0} \quad (\text{B3.25})$$

donde m representa el número de puntos discretos a considerar en el dominio del tiempo, γ_k y δ_k son coeficientes a determinar. Particularmente en el caso de Houbolt se adopta $m = 4$, $\gamma_0 = 2$, $\gamma_1 = -5$, $\gamma_2 = 4$, $\gamma_3 = -1$, $\delta_0 = 1$, $\delta_k = 0$ para $(k = 1, 2, 3)$.

La expresión de las fuerzas residuales, toma ahora la siguiente forma,

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\Delta \mathbf{f}^* &= \frac{1}{\delta_0} \sum_{k=1}^m \delta_k \left[{}^{i+1}\Delta \mathbf{f}^{t+\Delta t} \right]_k = \\ &= \frac{1}{\delta_0} \sum_{k=1}^m \delta_k \left[\mathbb{M} {}^{i+1}\ddot{\mathbf{U}}^{(t+\Delta t)-k\cdot\Delta t} + {}^{i+1}[\mathbf{f}^{\text{int}}]^{(t+\Delta t)-k\cdot\Delta t} - [\mathbf{f}^{\text{ext}}]^{(t+\Delta t)-k\cdot\Delta t} \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{B3.26})$$

y de acuerdo a la ecuación de la aceleración (B3.25), puede reescribirse las fuerzas residuales sólo en función de los desplazamientos e implícitamente de las velocidades. Esto es,

$${}^{i+1}\Delta \mathbf{f}^* = \frac{1}{\delta_0} \sum_{k=1}^m \left[\frac{\gamma_k}{\Delta t^2} \mathbb{M} {}^i \mathbf{U}^{(t+\Delta t)-k\cdot\Delta t} + \delta_k \left[{}^{i+1}[\mathbf{f}^{\text{int}}]^{(t+\Delta t)-k\cdot\Delta t} - [\mathbf{f}^{\text{ext}}]^{(t+\Delta t)-k\cdot\Delta t} \right] \right] = \mathbf{0} \quad (\text{B3.27})$$

resultando de aquí la siguiente expresión para el operador jacobiano,

$${}^i \mathbb{J}^{t+\Delta t} = \mathbb{J} \left({}^i \mathbf{U}^{t+\Delta t} \right) = \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{f}^*}{\partial \mathbf{U}_{n+1}} \right] = \left[\mathbb{M} \frac{\gamma_0}{\delta_0 \Delta t^2} + \mathbb{K}^T + \mathbb{D}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.28})$$

Para resolver la relación entre velocidad y desplazamiento se establece la siguiente aproximación, al igual que se ha introducido la relación aceleración desplazamiento en la ecuación (B3.16),

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} &= \frac{\alpha_0}{\beta_0 \Delta t} \mathbf{U}^{t+\Delta t} + \frac{1}{\beta_0 \Delta t} \sum_{k=1}^m \left(\alpha_k \mathbf{U}^{(t+\Delta t)-k\Delta t} - \Delta t \beta_k \ddot{\mathbf{U}}^{(t+\Delta t)-k\Delta t} \right) = \mathbf{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} = \frac{\alpha_0}{\beta_0 \Delta t} \end{aligned} \quad (\text{B3.29})$$

quedando escrito el operador jacobiano como,

$${}^i \mathbb{J}^{t+\Delta t} = \mathbb{J} \left({}^i \mathbf{U}^{t+\Delta t} \right) = \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{f}^*}{\partial \mathbf{U}_{n+1}} \right] = \left[\mathbb{M} \frac{\gamma_0}{\delta_0 \Delta t^2} + \mathbb{K}^T + \mathbb{D}^T \frac{\alpha_0}{\beta_0 \Delta t} - \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.30})$$

Con esto, la ecuación de equilibrio linealizada se escribe,

$${}^{i+1}\Delta \mathbf{f}^* = - {}^i \mathbb{J}^{t+\Delta t} \cdot \Delta {}^{i+1} \mathbf{U}^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.31})$$

El esquema de integración en el tiempo se realiza siguiendo los siguientes pasos, luego de forzar la condición de residuo nulo (${}^{i+1}\Delta \mathbf{f}^{t+\Delta t} = \mathbf{0}$), en la ecuación (B3.26),

1. Predicción de velocidades, ecuación (B3.29), a partir de la condición inicial de desplazamiento nulo en $t + \Delta t$,

$$\tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta_0 \Delta t} \sum_{k=1}^m \left(\alpha_k \mathbf{U}^{(t+\Delta t)-k \cdot \Delta t} - \Delta t \beta_k \dot{\mathbf{U}}^{(t+\Delta t)-k \cdot \Delta t} \right)$$

2. Cálculo de las fuerzas residuales ${}^i \Delta \mathbf{f}^*$ de acuerdo a la ecuación (B3.27)
3. Obtención de la corrección $\Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t}$ de los desplazamientos a partir de la ecuación de equilibrio linealizada en el instante $t + \Delta t$

$${}^i \Delta \mathbf{f}^* = - {}^i \mathbb{J}^{t+\Delta t} \cdot \Delta {}^{i+1} \mathbf{U}^{t+\Delta t}$$

4. Obtención de los desplazamientos, velocidades corregidas,

$${}^{i+1} \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\tilde{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} + \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0 \Delta t} \right) \Delta {}^{i+1} \mathbf{U}^{t+\Delta t}$$

$${}^{i+1} \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \Delta {}^{i+1} \mathbf{U}^{t+\Delta t}$$

5. Obtención de campo de aceleraciones a partir de la ecuación (B3.25),
6. Cálculo del campo de deformaciones, resolución de la ecuación constitutiva y verificación de la convergencia en fuerzas

$${}^{i+1} \boldsymbol{\epsilon}^{t+\Delta t} = \nabla^S {}^{i+1} \mathbf{U}^{t+\Delta t} ; \quad {}^{i+1} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{t+\Delta t} = \frac{(\nabla^S {}^{i+1} \mathbf{U}^{t+\Delta t}) - (\nabla^S {}^{i+1} \mathbf{U}^t)}{\Delta t}$$

$${}^{i+1} \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} = {}^{i+1} \left[\mathbf{C}^S : \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\xi} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right]^{t+\Delta t}$$

$${}^{i+1} \Delta \mathbf{f}^* = \frac{1}{\delta_0} \sum_{k=1}^m \left[\frac{\gamma_k}{\Delta t^2} \mathbb{M} {}^{i+1} \mathbf{U}^{(t+\Delta t)-k} + \delta_k \left[{}^{i+1} \left[\int_V {}^{i+1} \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} (\nabla^S \mathbf{N}) dV \right]^{(t+\Delta t)-k} - {}^{i+1} [\mathbf{f}_{\text{ext}}]^{(t+\Delta t)-k} \right] \right]$$

7. Si $|{}^{i+1} \Delta \mathbf{f}^*| > \text{TOL}$, entonces "IR a 3"; caso contrario "IR a 1" e incrementar el tiempo ($t + \Delta t$).

Tabla B3.2 Procedimiento de integración en el tiempo de Houbolt.

B3.3.3 Solución del sistema de ecuaciones de equilibrio no lineal.

En este apartado se hace una breve reseña sobre algunas técnicas de resolución del sistema de ecuaciones linealizado, que resulta de la integración de Newmark o Houbolt. Para mayor profundización en los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones es aconsejable consultar las referencias^{2,3}.

La resolución del siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio no lineal,

$${}^i \Delta \mathbf{f}^{t+\Delta t} = - {}^i \mathbb{J}^{t+\Delta t} \cdot \Delta {}^{i+1} \mathbf{U}^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.32})$$

puede llevarse a cabo básicamente por dos técnicas diferentes²:

² Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W. (1987). *Numerical Recipes – The art of scientific computing*. Cambridge University Press.

1. Linealización basada en las técnicas de *Newton-Raphson* estándar o modificadas³,
2. Técnicas de aproximación de *Quasi-Newton* para la matriz jacobiana².

Ambas técnicas se diferencian fundamentalmente en la forma de expandir el residuo ${}^i\Delta\mathbf{f}^{t+\Delta t} = {}^i\mathbb{J}^{t+\Delta t} \cdot \Delta {}^{i+1}\mathbf{U}^{t+\Delta t}$ en el entorno de la solución previa y la forma de calcular el operador jacobiano.

B3.3.3.1 Método de Newton-Raphson.

Es el procedimiento de convergencia más rápido para solucionar sistemas de ecuaciones no lineales mediante la técnica de linealización. Esta técnica supone que la solución está dentro de la “*zona de atracción*”, o dicho de otro modo, la solución es convergente si se está en la vecindad de ella. En este caso, la relación de convergencia es cuadrática.

En este método iterativo se supone que la ecuación de equilibrio tiene la siguiente forma general,

$$\Delta\mathbf{f} = \mathbb{M} \ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t + \Delta t) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t + \Delta t) = \mathbf{0} \quad (\text{B3.33})$$

Puede escribirse también, como se deduce en la ecuación (B2.77), mediante una aproximación en serie de Taylor truncada en el segundo término,

$$\begin{aligned} 0 = {}^{i+1}[\Delta\mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} &\cong {}^i[\Delta\mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + \left(\frac{\partial \Delta\mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right)_{\Omega}^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1}[\Delta\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = \\ &= {}^i[\Delta\mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + \underbrace{\left[\mathbb{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} + \mathbb{K}^T + \mathbb{D}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\Omega}^{t+\Delta t}}_{{}^i\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}} \cdot {}^{i+1}[\Delta\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{B3.34})$$

en esta ecuación (i) representa el contador de iteración y (t) el tiempo. La solución de la misma resulta por inversión del operador jacobiano ${}^i\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}$. Esto es,

$${}^{i+1}[\Delta\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = - \left[{}^i\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t} \right]^{-1} \cdot {}^i[\Delta\mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.35})$$

Tal que el desplazamiento al final del proceso linealizado, o también suele decirse al converger, será (ver Figura B3.6),

$${}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = {}^i[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + {}^{i+1}[\Delta\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.36})$$

A pesar de la rápida convergencia que ofrece este método, se puede observar que tiene algunos rasgos negativos, tales como,

1. Siempre necesita un operador jacobiano tangente, que no es posible obtenerlo en forma sencilla en todos los casos,
2. Cuando se está lejos de la solución se tiene una velocidad de convergencia muy baja,
3. En ocasiones el problema necesita la solución de la ecuación (B3.35) para operadores jacobianos asimétricos. Esto complica mucho la inversión del mismo,
4. El método suele encontrar mínimos locales y luego se hace muy difícil salir de los mismos. Para ello se requiere de otras técnicas auxiliares, tales como los métodos de control de desplazamiento (arc-length), que se enunciará más adelante.

³ Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (1994)– *El método de elementos finitos* – Vol. 1 y 2 – Mc Graw Hill-CIMNE.

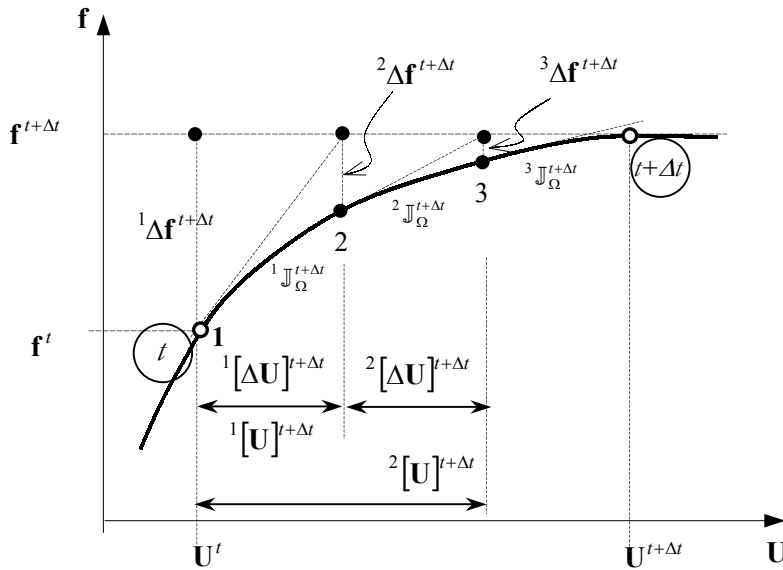


Figura B3.6 – Método de Newton-Raphson.

B3.3.3.2 Método de Newton-Raphson modificado.

Este método consiste en resolver la ecuación (B3.35) con el operador jacobiano definido en distintas modalidades:

1. **Método de rigidez inicial** (Figura B3.7). En esta técnica numérica se fuerza a que el operador jacobiano se mantenga constante desde el inicio del proceso hasta el final.
2. **Método de actualización en cada incremento** (Figura B3.8). Se considera que el operador jacobiano se actualizará cada vez que se incremente la carga, es decir, que mientras el tiempo t se mantenga constante, no habrá cambio en el operador jacobiano.

Existen otras modalidades de actualización del jacobiano según otros criterios, pero se considera poco importante mencionarlo en esta breve presentación.

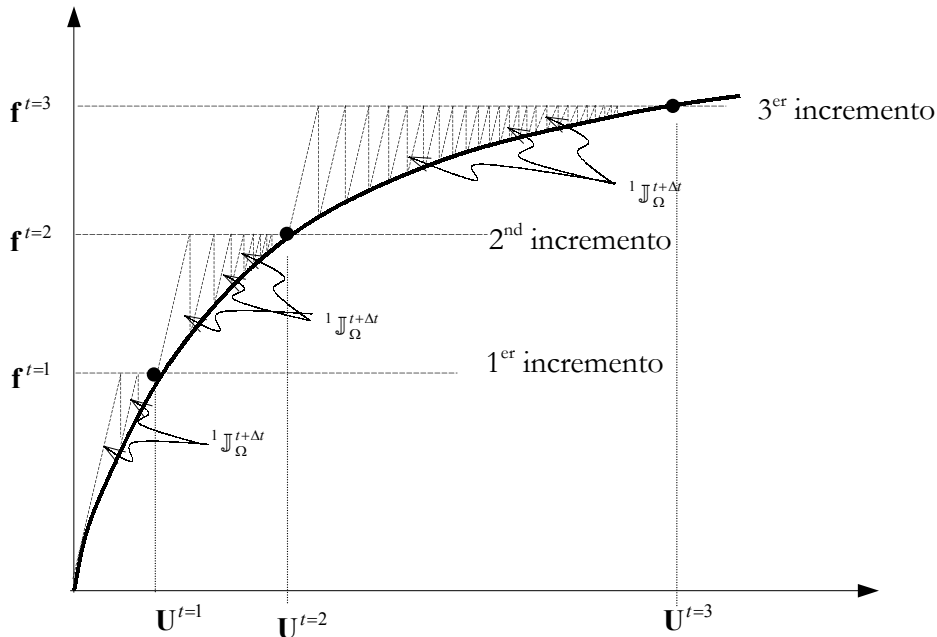


Figura B3.7 – Newton-Raphson de rigidez inicial.

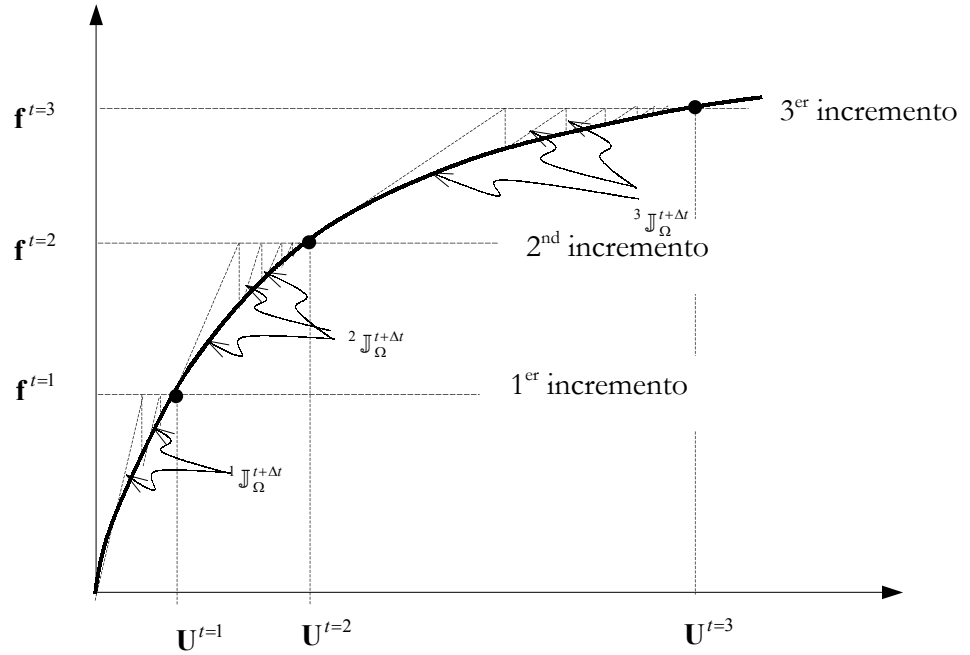


Figura B3.8 – Newton-Raphson actualizado en cada incremento de tiempo.

En cualquier de los métodos de “Newton modificado” se pierde la esencia fundamental de esta técnica, que es la velocidad de convergencia y por ello sólo se suelen utilizar en casos muy particulares. Ejemplo de estos casos se encuentra cuando hay definición nula del operador jacobiano, o cuando se produce un mal condicionamiento de este operador, sacrificando así la velocidad para obtener al menos una solución al problema.

B3.3.3.3 Aceleradores de convergencia.

Estos procedimientos numéricos ayudan a mejorar la convergencia y se basan en actualizar el campo de desplazamientos mediante una extrapolación lineal del mismo. Puede decirse que los aceleradores de convergencia constituyen la base conceptual de los métodos de “Newton secante” o “Cuasi-Newton”. La actualización del campo de desplazamientos presenta normalmente la siguiente forma:

Sin acelerador:

$${}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = {}^i[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.37})$$

siendo ${}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t}$ el incremento de desplazamiento obtenido de la ecuación (B3.32) mediante cualquier algoritmo.

Con acelerador:

$$\boxed{{}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = {}^i[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + \mathbf{A} \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t}} \quad (\text{B3.38})$$

donde $\mathbf{A}$ representa la “matriz de aceleración” en el instante (t). Entre las distintas formas de definir esta matriz de aceleración, está el denominado acelerador de Aitken², que se presenta a continuación.

B3.3.3.4 Acelerador de Aitken o algoritmo de extrapolación.

La idea general consiste en obtener los coeficientes de esta matriz de aceleración a partir de una extrapolación basada en la relación de proporción entre las componentes de desplazamiento ya consolidado en el tiempo (t) y los distintos valores iterativos, no consolidados, del desplazamiento en el tiempo ($t+\Delta t$),

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \alpha_n \end{bmatrix}; \quad \text{con} \quad \alpha_n = \frac{{}^{i+1}(\Delta U_n)^{t+\Delta t}}{(\Delta U_n)^t - {}^{i+1}(\Delta U_n)^{t+\Delta t}} \quad (\text{B3.39})$$

donde ΔU_n representa la componente $n^{\text{ésima}}$ del incremento de desplazamiento.

Los fundamentos de esta técnica se asientan en valorar el cambio en las fuerzas residuales entre la iteración (i) y la siguiente ($i+1$), cuyos valores residuales pueden escribirse respectivamente a partir de un operador jacobiano secante único $[\mathbb{J}_\Omega^{t+\Delta t}]^*$, para dos iteraciones sucesivas. Esto es,

$${}^{i-1}[\Delta \mathbf{f}]_\Omega^{t+\Delta t} = -[\mathbb{J}_\Omega^{t+\Delta t}]^* \cdot {}^i[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t} \quad \text{y} \quad {}^i[\Delta \mathbf{f}]_\Omega^{t+\Delta t} = -[\mathbb{J}_\Omega^{t+\Delta t}]^* \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t}$$

haciendo la diferencia entre ambos niveles de fuerza desequilibrada, se obtiene

$${}^{i-1}[\Delta \mathbf{f}]_\Omega^{t+\Delta t} - {}^i[\Delta \mathbf{f}]_\Omega^{t+\Delta t} = -[\mathbb{J}_\Omega^{t+\Delta t}]^* \cdot [{}^i[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t} - {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t}] \quad (\text{B3.40})$$

que también puede escribirse utilizando un operador único secante (ver Figura B3.9)

$${}^{i-1}[\Delta \mathbf{f}]_\Omega^{t+\Delta t} - {}^i[\Delta \mathbf{f}]_\Omega^{t+\Delta t} = -[\bar{\mathbb{J}}_\Omega^{t+\Delta t}] \cdot {}^i[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.41})$$

Igualando los primeros miembros de las expresiones (B3.40) y (B3.41), se obtiene

$$[\mathbb{J}_\Omega^{t+\Delta t}]^* \cdot [{}^i[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t} - {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t}] = [\bar{\mathbb{J}}_\Omega^{t+\Delta t}] \cdot {}^i[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t}$$

y de esta última se define la matriz de aceleración o extrapolación, como

$$\mathbf{A} = [\mathbb{J}_\Omega^{t+\Delta t}]^* \cdot [\bar{\mathbb{J}}_\Omega^{t+\Delta t}]^{-1} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot [{}^i[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t} - {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t}] = {}^i[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.42})$$

sustituyendo esta matriz de aceleración en la ecuación del cambio de la fuerza residual entre dos iteraciones sucesivas (ecuación (B3.40)), se tiene la siguiente ecuación de equilibrio linealizada

$${}^i[\Delta \mathbf{f}]_\Omega^{t+\Delta t} = -[\mathbb{J}_\Omega^{t+\Delta t}]^* \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t} = -\mathbf{A} \cdot [\bar{\mathbb{J}}_\Omega^{t+\Delta t}] \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_\Omega^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.43})$$

De esta forma siempre se resuelve el sistema con un operador secante, cuya expresión se resume en la siguiente ecuación,

$$[\bar{\mathbb{J}}_\Omega^{t+\Delta t}] = \mathbf{A}_n^{-1} \cdot [\mathbb{J}_\Omega^{t+\Delta t}]^* \quad (\text{B3.44})$$

Las distintas formas de obtener el operador de aceleración $\mathbf{A}$, da lugar a distintos algoritmos.

B3.3.3.5 Algoritmos de B.F.G.S

Este algoritmo fue desarrollado por **Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno**². A continuación se hará una breve presentación de las expresiones más importantes que describen el algoritmo y se mostrará la idea fundamental del método, que se basa en obtener una

aproximación inversa del operador jacobiano a partir de la igualdad (B3.40). De esta forma, tras varios pasos de manipulación matemática, se llega a la siguiente fórmula de actualización de la inversa del jacobiano,

$$\left[{}^i \mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t} \right]^{-1} = {}^i \mathbf{A}^T \left[{}^{i-1} \mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t} \right]^{-1} \cdot {}^i \mathbf{A} \quad ; \quad {}^i \mathbf{A} = \left[\mathbf{I} + {}^i \mathbf{V} \cdot {}^i \mathbf{W}^T \right] \quad (\text{B3.45})$$

Siendo,

$$\begin{aligned} {}^i \mathbf{V} &= \left\{ 1 - \frac{{}^{i-1} [\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \cdot \left[{}^{i-1} [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} - {}^i [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \right]}{{}^{i-1} [\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \cdot {}^{i-1} [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t}} \right\} \cdot {}^{i-1} [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} - {}^i [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \\ {}^i \mathbf{W} &= \frac{{}^{i-1} [\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t}}{{}^{i-1} [\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \left[{}^{i-1} [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} - {}^i [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \right]} \end{aligned} \quad (\text{B3.46})$$

Entre las ventajas de este método de Newton secante se encuentra el ahorro de cálculo, pues sólo debe invertirse la matriz de rigidez inicial una sola vez, además, la forma de obtener la matriz jacobiana mediante la ecuación (B3.45), preserva la simetría de la matriz original. Por el contrario, la naturaleza de esta actualización no preserva la distribución de los elementos de la matriz o topología (forma “*sparsa*”). Por esta razón es conveniente recuperar la topología original de la matriz jacobiana ${}^1 \mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}$, en cada iteración y reformular la ecuación (B3.45) en la siguiente forma,

$${}^i \mathbf{b} = \left[{}^1 \mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t} \right] \cdot \prod_{j=2}^i \left({}^j \mathbf{A} \cdot {}^j [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \right) \Rightarrow {}^i [\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = \left[\prod_{j=0}^{i-j} \left({}^{i-j} \mathbf{A}^T \right) \right] \cdot {}^i \mathbf{b} \quad (\text{B3.47})$$

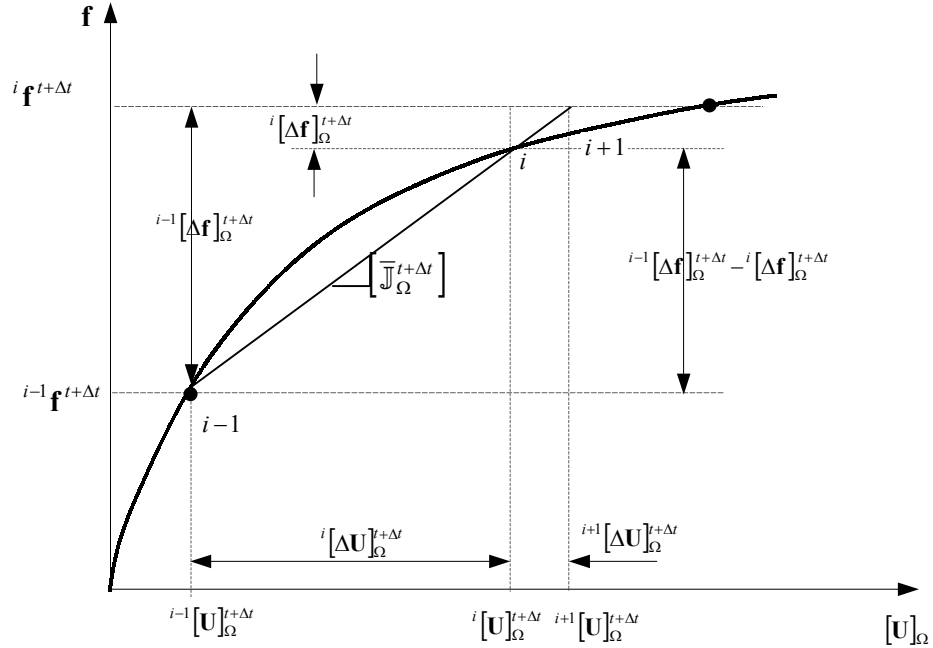


Figura B3.9 – Cuasi-Newton – Algoritmo de Aitken.

Este procedimiento numérico necesita el almacenamiento de los vectores ${}^i \mathbf{V}$ y ${}^i \mathbf{W}$ en cada una de las iteraciones, información que le permite contruir la matriz ${}^i \mathbf{A}$.

B3.3.3.6 Algoritmos de Newton-Secante.

En este algoritmo, el cambio que sufre el operador jacobiano $\Delta[\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}]$, durante un incremento de tiempo, no se obtiene en función de su magnitud en el incremento de tiempo anterior $\Delta[\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}]$, sino a partir del operador tangente correspondiente a la primera iteración del incremento $[\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}]$, cuya forma es la siguiente

$$[\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}]^{-1} = [\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}]^{-1} + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T}{\mathbf{b}^T [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} - {}^{i-1}[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t}} \quad (\text{B3.48})$$

siendo,

$$\mathbf{b} = [\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^t + [\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} - {}^{i-1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.49})$$

tal que los incrementos de desplazamiento se mencionan en esta ecuación se obtienen de la siguiente forma,

$${}^i[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = -[\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}]^{-1} \cdot {}^i[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t}, \quad {}^{i-1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = -[\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}]^{-1} \cdot {}^{i-1}[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.50})$$

B3.3.3.7 Algoritmos de “Line-Search”.

Es un método que mejora el avance hacia la solución y que puede ser aplicado como apoyo de cualquiera de los métodos previamente presentados, es decir que se puede aplicar conjuntamente con algoritmos tipo Newton o Cuasi-Newton.

Aquí se propone que la solución del sistema de ecuaciones no-lineales (B3.35) o (B3.41), ya sea que se utilice Newton o Cuasi-Newton, debe complementarse con la minimización de un funcional $\Pi(\mathbf{U})$ (ver Figura B3.10). Esto implica que la búsqueda de un mínimo se realiza en el espacio de la energía,

$$\delta \Pi_{\Omega}(\mathbf{U}) = 0 = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} \right)_{\Omega} \delta \mathbf{U} \xrightarrow{\delta \mathbf{U} \neq 0} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} \right)_{\Omega} = \mathbf{0} = [\Delta \mathbf{f}]_{\Omega} \quad (\text{B3.51})$$

El método consiste en obtener ${}^i[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t}$ por cualquier procedimiento antes citado. Este incremento de desplazamiento no será considerado como incremento en sí mismo, sino como dirección de búsqueda. Dentro de esta nueva dirección se busca el mínimo direccional P , que no es el mínimo absoluto, se obtiene minimizando $\mu(s) = \Pi[\mathbf{U}(s)]$, de donde resulta la posición del mínimo s^* . Al igual que en el acelerador de Aitken (ecuación (B3.38)), el incremento de desplazamiento se escribe como,

$${}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = {}^i[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + [s^*]^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.52})$$

Para hallar el valor de s^* se minimiza el funcional de energía Π en la dirección de búsqueda s o como alternativa se aplica el principio de los trabajos virtuales en dicha dirección. Esto es,

$${}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = {}^i[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + [s]^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \Rightarrow \frac{\partial {}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t}}{\partial s} = {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.53})$$

También se tiene que el mínimo de este funcional de energía respecto del campo de desplazamiento es la fuerza residual,

$${}^{i+1} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} \right)_{\Omega}^{t+\Delta t} = {}^{i+1}[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \quad (\text{B3.54})$$

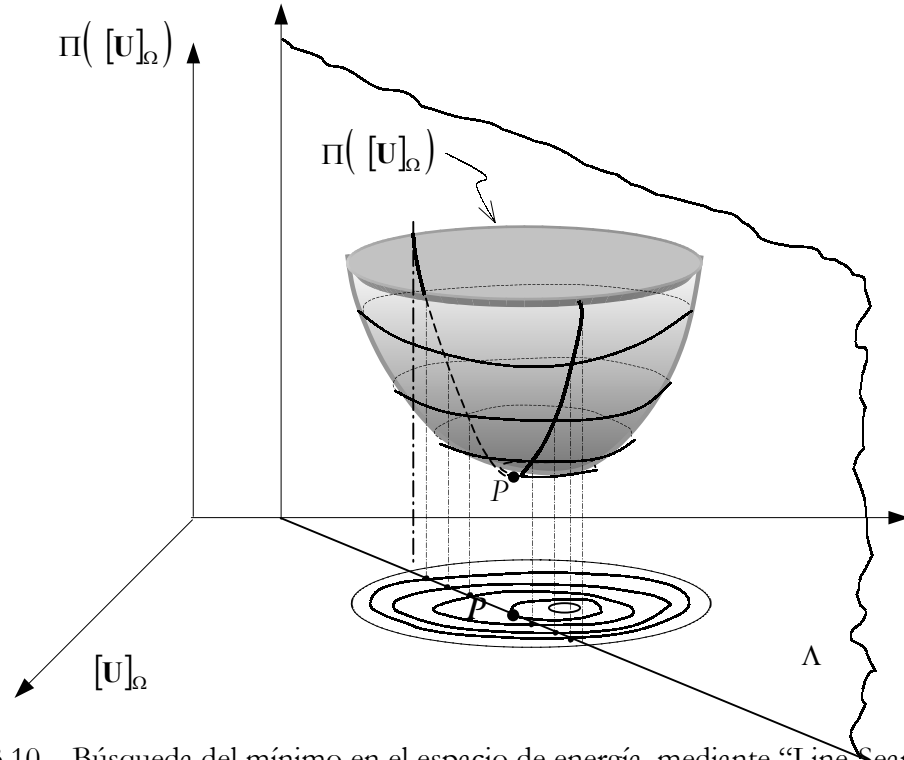


Figura B3.10 – Búsqueda del mínimo en el espacio de energía, mediante “Line-Search”.

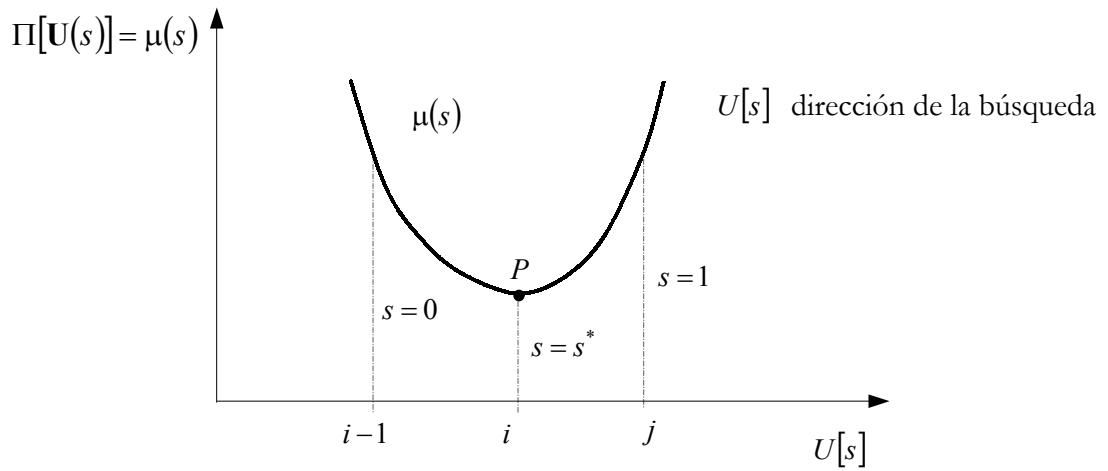


Figura B3.11 – Plano \$\Lambda\$ - Plano de búsqueda (ver Figura (B3.10)).

Teniendo ahora en cuenta las dos ecuaciones anteriores, resulta la siguiente ecuación en función de la coordenada (\$s\$),

$$\frac{\partial \Pi \left({}^i[U]_{\Omega}^{t+\Delta t} + {}^i[s]^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1}[\Delta U]_{\Omega}^{t+\Delta t} \right)}{\partial s} = {}^{i+1} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial s} \right]^{t+\Delta t} = {}^{i+1} [\Delta f]_{\Omega}^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1} [\Delta U]_{\Omega}^{t+\Delta t} = G(s) = 0 \quad (B3.55)$$

De esta manera puede verse que se trata de solucionar una ecuación \$G(s)\$, no lineal en (\$s\$), cuya solución es \$s^*\$ (ver Figura B3.12).

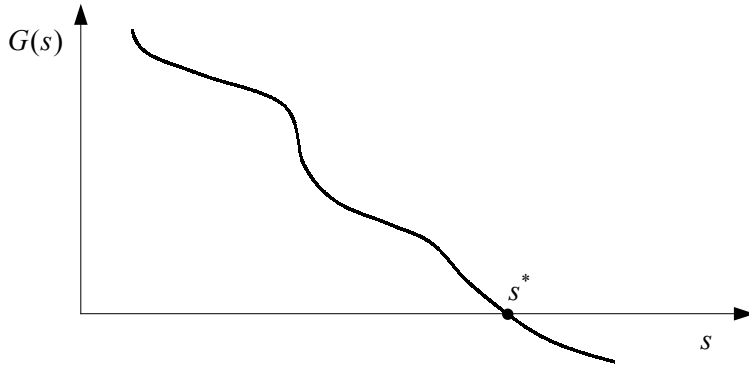


Figura B3.12 – Plano Λ en el que se busca el cero de la función $G(s)$.

Para obtener la solución de esta ecuación no lineal se pueden utilizar métodos como el de la “Regula falsi”², “Algoritmo de Illinois”², etc.

B3.3.3.8 Algoritmos de control de respuesta – “Arc-Length”

En diversos problemas de la mecánica estructural suelen ocurrir estados de comportamiento inestable en los cuales no es posible alcanzar la solución. Para evitar esto suele utilizarse un sistema de ecuaciones de equilibrio con restricciones del tipo $\Delta \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \lambda)$, donde la magnitud de la fuerza exterior $\lambda \mathbf{f}^{\text{ext}}$ es una incógnita condicionada por una ecuación adicional $c(\mathbf{U}, \lambda)$. Así, se obtiene un sistema de ecuaciones de equilibrio ampliado por esta ecuación de restricción⁴,

$$\begin{cases} {}^{i+1}[\Delta \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \lambda)]_{\Omega}^{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{-1}[\ddot{\mathbf{U}}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + {}^{i+1}[\mathbf{f}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U})]_{\Omega}^{t+\Delta t} - {}^{i+1}[\lambda \mathbf{f}^{\text{ext}}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = \mathbf{0} \\ {}^{i+1}[c(\mathbf{U}, \lambda)]_{\Omega}^{t+\Delta t} = 0 \end{cases} \quad (\text{B3.56})$$

Desarrollando las fuerzas residuales en series de Taylor, en el entorno de la solución en el tiempo $(t+\Delta t)$, y considerando que las velocidades y aceleraciones dependen del campo de desplazamiento en este instante de tiempo, se tiene⁵

$$\Delta \mathbf{f}({}^i[\mathbf{U}]_+{}^{i+1}[\delta \mathbf{U}], {}^i[\lambda]_+{}^{i+1}[\delta \lambda]) = \mathbf{0} = \Delta \mathbf{f}({}^i[\mathbf{U}], {}^i[\lambda])_+ \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right)^{i+1}[\delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \lambda} \right)^{i+1}[\delta \lambda] \quad (\text{B3.57})$$

Pero en esta última ecuación puede identificarse las siguientes relaciones (ver ecuación (B3.34)),

$$\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right)^i = {}^i \mathbb{J} \quad ; \quad \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \lambda} \right)^i = -\mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{B3.58})$$

Que sustituidas en la ecuación (B3.57), se rescribe el sistema de ecuaciones de equilibrio con restricciones, como

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \Delta \mathbf{f}({}^i \mathbf{U}, {}^i \lambda)_+ \cdot {}^i \mathbb{J} \cdot {}^{i+1}[\delta \mathbf{U}] - \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot {}^{i+1}[\delta \lambda] \\ 0 = {}^{i+1}[c(\mathbf{U}, \lambda)] \end{cases} \quad (\text{B3.59})$$

y de aquí se obtiene el campo de desplazamientos buscado,

⁴ Crisfield M. A. (1983). An arc-length method including line searches and accelerations. *Int. Journal for numerical method in engineering*. Vol. 19, pp. 1269, 1289.

⁵ NOTA: Para simplificar la presentación, se omitirá a continuación el superíndice $(t+\Delta t)$ en todos los desarrollos.

$$\begin{aligned}
{}^i \mathbb{J}^{i+1}[\delta \mathbf{U}] &= -\Delta \mathbf{f}({}^i \mathbf{U}, {}^i \lambda) + \mathbf{f}^{\text{ext}, i+1}[\delta \lambda] \\
{}^i \mathbb{J}^{i+1}[\delta \mathbf{U}] &= - \underbrace{\left[\mathbb{M} {}^i [\dot{\mathbf{U}}] + {}^i [\mathbf{f}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U})] - {}^i [\lambda \mathbf{f}^{\text{ext}}] \right]}_{{}^i \mathbb{J}^{i+1}[\delta \hat{\mathbf{U}}]} + {}^i \mathbb{J}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\text{TOT}} \cdot {}^{i+1}[\delta \lambda]
\end{aligned} \tag{B3.60}$$

Debido a que el operador jacobiano es el mismo en ambos miembros de la ecuación anterior, puede escribirse el incremento de desplazamiento como,

$${}^{i+1}[\delta \mathbf{U}] = {}^{i+1}[\delta \hat{\mathbf{U}}] + {}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\text{TOT}} \cdot {}^{i+1}[\delta \lambda] \tag{B3.61}$$

siendo en esta expresión:

$$\begin{cases}
{}^i \mathbb{J}^{i+1}[\delta \hat{\mathbf{U}}] = - \left[\mathbb{M} {}^i [\mathbf{U}] + {}^i [\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{U}, \mathbf{U})] - {}^i [\lambda \mathbf{f}^{\text{ext}}] \right] \\
{}^i \mathbb{J}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\text{TOT}} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \\
{}^{i+1}[\lambda] = {}^i [\lambda] + {}^{i+1}[\delta \lambda]
\end{cases} \tag{B3.62}$$

Donde ${}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\text{TOT}}$ es el desplazamiento total obtenido con el último, o máximo, valor de fuerza exterior, ${}^{i+1}[\delta \hat{\mathbf{U}}]$ es la solución del sistema de ecuaciones sin corrección y $\delta {}^{i+1}\lambda$ es cambio del factor de aplicación de la carga.

Una vez definidas las ecuaciones generales del método, es necesario precisar sobre la forma de la ecuación de restricción y para ello se introduce el siguiente apartado.

Ecuación de control de desplazamiento – Superficie esférica.

Una de las ecuaciones de control de desplazamiento más utilizada es la denominada “ecuación de control esférico”. Se basa en exigir que una cierta norma del incremento de desplazamiento este contenida dentro de una hiper-esfera en el espacio de desplazamientos. Esto es,

$${}^{i+1}[c(\mathbf{U}, \lambda)] = {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]^T \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}] - \Delta \ell^2 = 0 \tag{B3.63}$$

tal que el desplazamiento y su incremento se obtiene como

$${}^{i+1}[\mathbf{U}]^{t+\Delta t} = {}^i[\mathbf{U}]^t + {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]^{t+\Delta t} \quad ; \quad {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]^{t+\Delta t} = {}^i[\Delta \mathbf{U}]^{t+\Delta t} + {}^{i+1}[\delta \mathbf{U}]^{t+\Delta t} \tag{B3.64}$$

sustituyendo la ecuación (B3.61) en la (B3.64) y la ecuación que de aquí resulte en la (B3.63), se tiene la siguiente ecuación de control escrita en el tiempo $t + \Delta t$,

$$\begin{aligned}
& \left\{ {}^i[\Delta \mathbf{U}] + {}^{i+1}[\delta \hat{\mathbf{U}}] + {}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\text{TOT}} \cdot {}^{i+1}[\delta \lambda] \right\}^T \cdot \left\{ {}^i[\Delta \mathbf{U}] + {}^{i+1}[\delta \hat{\mathbf{U}}] + {}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\text{TOT}} \cdot {}^{i+1}[\delta \lambda] \right\} - \Delta \ell^2 = 0 \\
& \Downarrow \\
& C_1 {}^{i+1}[\delta \lambda]^2 + C_2 {}^{i+1}[\delta \lambda] + C_3 = 0
\end{aligned} \tag{B3.65}$$

Donde los coeficientes de esta ecuación de segundo grado tienen la siguiente expresión,

$$\begin{aligned}
C_1 &= {}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\text{TOT}}^T \cdot {}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\text{TOT}} \\
C_2 &= 2 \left[{}^i[\Delta \mathbf{U}] + {}^{i+1}[\delta \hat{\mathbf{U}}] \right]^T \cdot {}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\text{TOT}} \\
C_3 &= \left[{}^i[\Delta \mathbf{U}] + {}^{i+1}[\delta \hat{\mathbf{U}}] \right]^T \cdot \left[{}^i[\Delta \mathbf{U}] + {}^{i+1}[\delta \hat{\mathbf{U}}] \right] - \Delta \ell^2
\end{aligned} \tag{B3.66}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado en ${}^{i+1}[\delta \lambda]$, se obtiene la corrección del factor de carga (ver Figura B3.13),

$${}^{i+1}[\delta \lambda] = -\frac{C_2}{2C_1} \pm \frac{(C_2^2 - 4C_1C_3)^{1/2}}{2C_1} \Rightarrow \begin{cases} {}^{i+1}[\delta \lambda]_1 \\ {}^{i+1}[\delta \lambda]_2 \end{cases} \tag{B3.67}$$

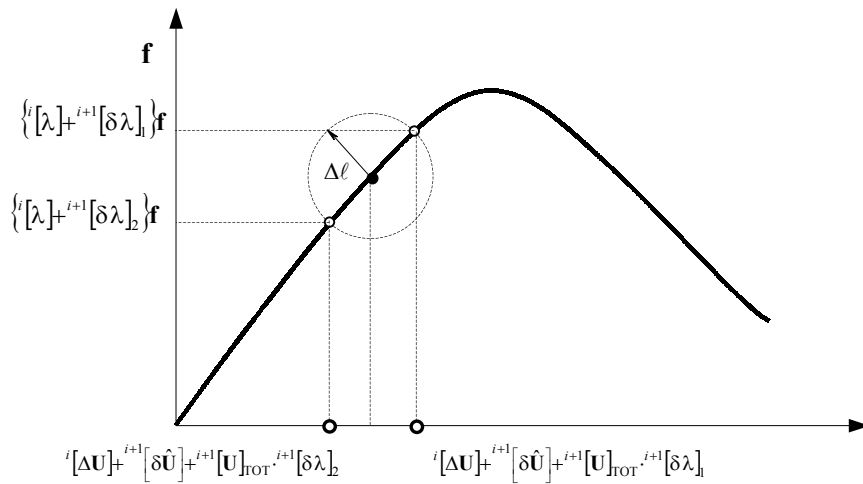


Figura B3.13 – “Arc-Length” camino esférico – Detalle de la búsqueda de la solución.

Una vez obtenido los dos factores de carga posible ${}^{i+1}[\delta \lambda]_{1,2}$, es necesario determinar cual de ellos es el correcto. Para esta finalidad se explora a cerca de la *dirección de avance* correcta, ${}^{i+1}[\delta \mathbf{U}] = {}^{i+1}[\delta \hat{\mathbf{U}}] + {}^{i+1}[\mathbf{U}]_{\text{TOT}} \cdot {}^{i+1}[\delta \lambda]_{1,2}$, que se supone que es aquella cuyo ángulo con el incremento de desplazamiento en el paso previo ${}^i[\Delta \mathbf{U}]$ es máximo (ver Figura B3.14).

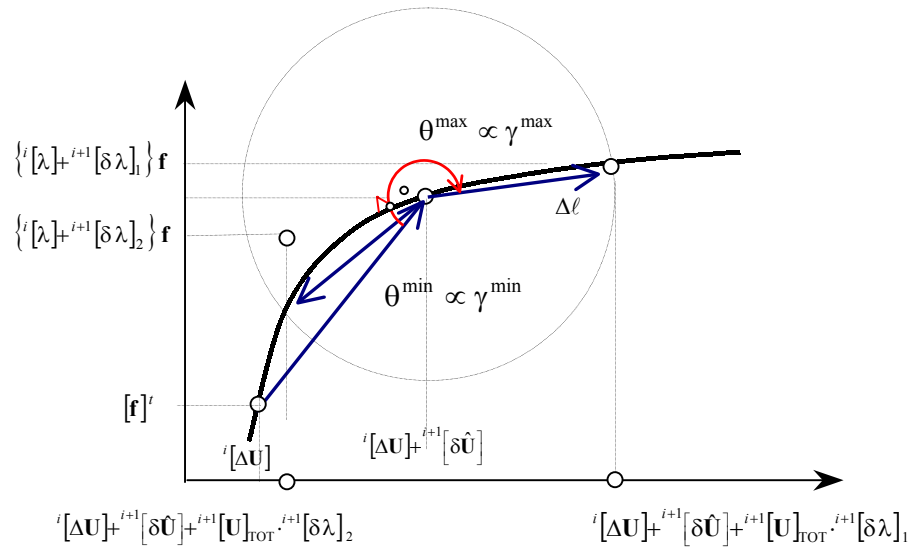


Figura B3.14 – “Arc-Length” camino esférico – Detalle de avance.

Esta dirección, resulta del siguiente producto escalar,

$$\begin{aligned}\gamma^1 &= {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_1^T \cdot {}^i[\Delta \mathbf{U}] \\ \gamma^2 &= {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_2^T \cdot {}^i[\Delta \mathbf{U}]\end{aligned}\tag{B3.68}$$

Tal que se elige el ${}^{i+1}[\delta \lambda]_{1,2}$ que da lugar al ${}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{1,2}$ que hace máximo γ_j .

B 4 Análisis de convergencia en la solución dinámica.

B4.1 Introducción.

En la primera parte de este capítulo se particulariza la ecuación del movimiento (B3.1) a problemas elásticos lineales con el objetivo de estudiar la convergencia de la solución para distintos métodos numéricos de resolución en el tiempo. El concepto de convergencia no puede garantizarse en el sentido estricto en las ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales, tal como la ecuación estudiada en el capítulo B3, debido a que la convergencia implica estabilidad en la solución y es precisamente ésta la que no puede garantizarse. No obstante, se estudia el concepto de “estabilidad linealizada”, que es el más utilizado y que garantiza sólo condiciones necesarias de estabilidad, pero no suficientes.

El análisis de *estabilidad* es importante en el estudio de la solución dinámica en el tiempo de un problema, porque junto a la condición de *consistencia*, determinan la *convergencia* del algoritmo de solución. Dicho de otra manera, cuando en un sistema dinámico lineal se cumplen las condiciones de estabilidad y consistencia, se tiene garantizada la convergencia de la solución.

Existen varios caminos para estudiar la estabilidad de un algoritmo de solución de la ecuación diferencial del equilibrio dinámico, pero el denominado estudio espectral de Fourier es el más utilizado y es también el que se presentará en este capítulo.

B4.2 Reducción al problema elástico lineal.

En esta sección se recordará muy brevemente la solución del problema elástico lineal mediante el análisis modal y el método de separación de variables. Esta técnica permite, a través del concepto de diagonalización, escribir un sistema de ecuaciones desacoplados a un grado de libertad^{1,2,3,4,5}. Se admitirá que la ecuación diferencial del equilibrio dinámico en el tiempo (t), es una ecuación a coeficientes constantes de la siguiente forma,

¹ R. Clough and J. Penzien (1977). Dynamics of Structures. Mc Graw-Hill - N. York.

² M. Paz (1992). Dinámica estructural. Reverté - Barcelona.

³ E. Car, F. López, S. Oller (2000). Estructuras sometidas a acciones dinámicas – CIMNE – Barcelona.

⁴ A. Barbat, J. Miquel (1994). Estructuras sometidas a acciones sísmicas - CIMNE -Barcelona.

⁵ A. Barbat, S. Oller (1997). Conceptos de cálculo de estructuras en las normativas de diseño sismorresistente - CIMNE IS-24 – Barcelona.

$$\mathbb{M} \ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbb{D} \dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbb{K} \mathbf{U}(t) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) = \mathbf{0} \quad \in \Omega \quad (\text{B4.1})$$

además se exige en esta ecuación que la matriz de masa $\mathbb{M}$ sea simétrica y definida positiva, en tanto las matrices de amortiguamiento $\mathbb{D}$ y rigidez $\mathbb{K}$ deberán ser simétricas y semi-definidas positiva. Al igual que en el capítulo anterior, este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a coeficientes constantes ya contiene la discretización espacial, tal que el campo de desplazamientos $\mathbf{U}(t)$, velocidades $\dot{\mathbf{U}}(t)$ y aceleraciones $\ddot{\mathbf{U}}(t)$, están definidos sólo en algunos puntos del medio continuo (nodos), más precisamente en aquellos puntos donde se soporta el polinomio de aproximación local o también denominado función de forma de un elemento finito (ver apartado B2.5). Es necesario puntualizar que en la ecuación (B4.1) el campo temporal es continuo. Dentro del espacio discreto elástico lineal, aproximado mediante funciones polinómicas, se representan las siguientes magnitudes (ver ecuación B2.77),

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La matriz de Masa :} \quad \mathbb{M} = \mathbf{A} \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N} : \mathbf{N} dV \quad , \text{ siendo } \rho \text{ la densidad} \\ \text{Las fuerzas internas (ver ec. B3.2): } \mathbf{f}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t + \Delta t) = \mathbf{A} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}(\nabla^S \mathbf{N}) dV = \\ = \left[\mathbf{A} \int_{\Omega^e} (\nabla^S \mathbf{N}) : \boldsymbol{\xi} : (\nabla^S \mathbf{N}) dV \right] : \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \left[\mathbf{A} \int_{\Omega^e} (\nabla^S \mathbf{N}) : \mathbb{C}^0 : (\nabla^S \mathbf{N}) dV \right] : \mathbf{U}(t + \Delta t) = \\ = \mathbb{D} \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \mathbb{K} \mathbf{U}(t + \Delta t) \\ \text{Las fuerzas externas :} \quad \mathbf{f}^{\text{ext}}(t + \Delta t) = \mathbf{A} \left[\oint_{S^e} \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} dS + \int_{V^e} \rho \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} dV \right] \end{array} \right. \quad (\text{B4.2})$$

las magnitudes que intervienen en esta ecuación han sido definidas en los capítulos previos.

La filosofía preponderante para la resolución de este problema clásico en dinámica lineal se basa en admitir el “concepto de separación de variables” en el cual se admite que los problemas temporales y espaciales son independientes entre sí. Por esta razón, como ya se ha dicho, se establece una estrategia diferente de resolución para cada una de los problemas, así para la solución del problema espacial se adopta el método de los elementos finitos, en tanto el problema temporal suele resolverse mediante diferencias finitas. Dicho de otra manera, se resuelve en cada instante de tiempo t la ecuación semi-discreta (B4.1) que representa el equilibrio espacial en dicho instante de tiempo.

Mediante la técnica de *superposición modal* se escribe el campo de desplazamientos como,

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{h=1}^{n-\text{modos}} \mathbf{U}_h(t) \quad (\text{B4.3})$$

Donde $\mathbf{U}_h(t)$ representa el vector de desplazamientos del modo “ h^{esimo} ”, que describe la “forma del movimiento” de las “ n ” coordenadas normales de Lagrange $\varphi_h(t)$ o grados de libertad del sistema, cuando se perturba el grado “ h^{esimo} ”. A través del método de separación de variables se escribe el desplazamiento del modo “ h^{esimo} ”, como el producto entre su forma de vibrar $\mathbf{U}_h$, y la amplitud en el tiempo de su coordenada normal $\varphi_h(t)$,

$$\mathbf{U}_h(t) = \mathbf{U}_h \cdot \varphi_h(t) \quad (\text{B4.4})$$

De esta manera, puede describirse la ecuación (B4.3) como,

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{h=1}^{n-\text{modos}} \mathbf{U}_h(t) = \sum_{h=1}^{n-\text{modos}} \mathbf{U}_h \cdot \varphi_h(t)$$

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Phi}(t) = [\mathbf{U}_1 \quad \dots \quad \mathbf{U}_h \quad \dots \quad \mathbf{U}_n] \cdot \begin{Bmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_h(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{B4.5})$$

donde $\mathbf{U}$ es la matriz modal que contiene los n vectores modales $\mathbf{U}_h$ normalizados respecto a la masa, y $\mathbf{\Phi}(t)$ es el vector de coordenadas normales $\phi_h(t)$, cuya misión es representar el comportamiento en el tiempo de todas las coordenadas normales del sistema. Sustituyendo la ecuación (B4.5) en la ecuación (B4.1), resulta la siguiente ecuación de equilibrio dinámico^{1,2,4,5},

$$\mathbb{M} \mathbf{U} \cdot \ddot{\mathbf{\Phi}}(t) + \mathbb{D} \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{\Phi}}(t) + \mathbb{K} \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Phi}(t) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) = 0 \quad (\text{B4.6})$$

pre-multiplicando la ecuación anterior por la matriz modal $\mathbf{U}^T$, y haciendo uso de las condiciones de ortogonalidad de los autovectores^{*}, se obtiene el siguiente sistema desacoplado de ecuaciones diferenciales de segundo orden a coeficientes constantes,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{\Phi}}(t) + \mathbb{N} \dot{\mathbf{\Phi}}(t) + \mathbb{L} \mathbf{\Phi}(t) - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) &= 0 \\ \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{\phi}_h(t) \\ \vdots \\ \ddot{\phi}_n(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2\xi_h\omega_h & \\ & & & \ddots \\ & & & & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\phi}_h(t) \\ \vdots \\ \dot{\phi}_n(t) \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \omega_h^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_h(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1^1 & \dots & U_1^h & \dots & U_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_h^1 & \dots & U_h^h & \dots & U_h^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^1 & \dots & U_n^h & \dots & U_n^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1^{\text{ext}}(t) \\ \vdots \\ f_h^{\text{ext}}(t) \\ \vdots \\ f_n^{\text{ext}}(t) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B4.7})$$

cada una de estas ecuaciones desacopladas $\ddot{\phi}_h(t) + 2\xi_h\omega_h\dot{\phi}_h(t) + \omega_h^2\phi_h(t) - [a_h^{\text{ext}}(t)] = 0$, con $[a_h^{\text{ext}}(t)] = \sum_{i=1}^{n-GL} \mathbf{U}_h^i \cdot f_i^{\text{ext}}(t)$, representa el movimiento de un *oscilador equivalente a un grado de libertad*, donde pueden aplicarse las técnicas de resolución en el tiempo de la ecuación diferencial del equilibrio dinámico a un grado de libertad. Recordar que las pulsaciones naturales $\omega_h = \sqrt{\lambda_h}$, o también denominadas frecuencias angulares, resultan de la obtención de los autovalores λ_h a partir de la ecuación algebraica $\det[\mathbb{K} - \lambda_h \mathbb{M}] = 0$, de grado $n-GL$ (número de grados de Libertad). Sus correspondientes autovectores $\mathbf{U}_h$, se obtienen de la solución del sistema de ecuaciones $[\mathbb{K} - \lambda_h \mathbb{M}] \cdot \mathbf{U}_h = 0$.

El camino alternativo al método modal es la utilización de los algoritmos de “un-paso” o “múltiple-paso”, descrito en el capítulo anterior y que pueden utilizarse en problemas no lineales. Tanto el método de “superposición modal” como los algoritmos de solución “paso a paso” en el

^{*} Nota: Las propiedades de ortogonalidad de los autovectores establece,

$$\mathbf{U}_i^T \mathbb{M} \mathbf{U}_j = \begin{cases} 0 & \forall i \neq j \\ 1 & \forall i = j \end{cases} ; \quad \mathbf{U}_i^T \mathbb{K} \mathbf{U}_j = \begin{cases} 0 & \forall i \neq j \\ \omega_i^2 = \lambda_i & \forall i = j \end{cases}$$

siempre que estos autovectores estén normalizados respecto a la masa.

tiempo permiten alcanzar satisfactoriamente la solución en el tiempo de osciladores dinámicos lineales de “n-Grados de Libertad” (n-GL). En la Figura 4.1 se presenta en forma sintética ambos caminos para la ecuación diferencial.

B4.3 Procedimientos de solución de sistemas simétricos “lineales” de segundo orden.

Como se ha visto en el apartado anterior, hay dos caminos para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden a coeficientes constantes. Uno basado en la “descomposición modal” y el otro en la integración directa de la ecuación diferencial del movimiento a través de “algoritmos de uno o más pasos”. En el caso de la descomposición modal se diagonaliza el sistema y por lo tanto toma la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado, siendo posible resolver una a una las ecuaciones diferenciales para cada grado de libertad. La solución puede obtenerse, al igual que se hace con el sistema acoplado completo, mediante técnicas numéricas de uno o más pasos (ver Figura 4.1), por lo tanto se escoge el camino más simple y se estudiará en este apartado la estabilidad de dichos algoritmos aplicados a un sistema dinámico de un grado de libertad.

Para la explicación conceptual del estudio de estabilidad será suficiente entonces con considerar una ecuación genérica correspondiente a un grado de libertad “/” del sistema de ecuaciones diagonalizado (B4.7),

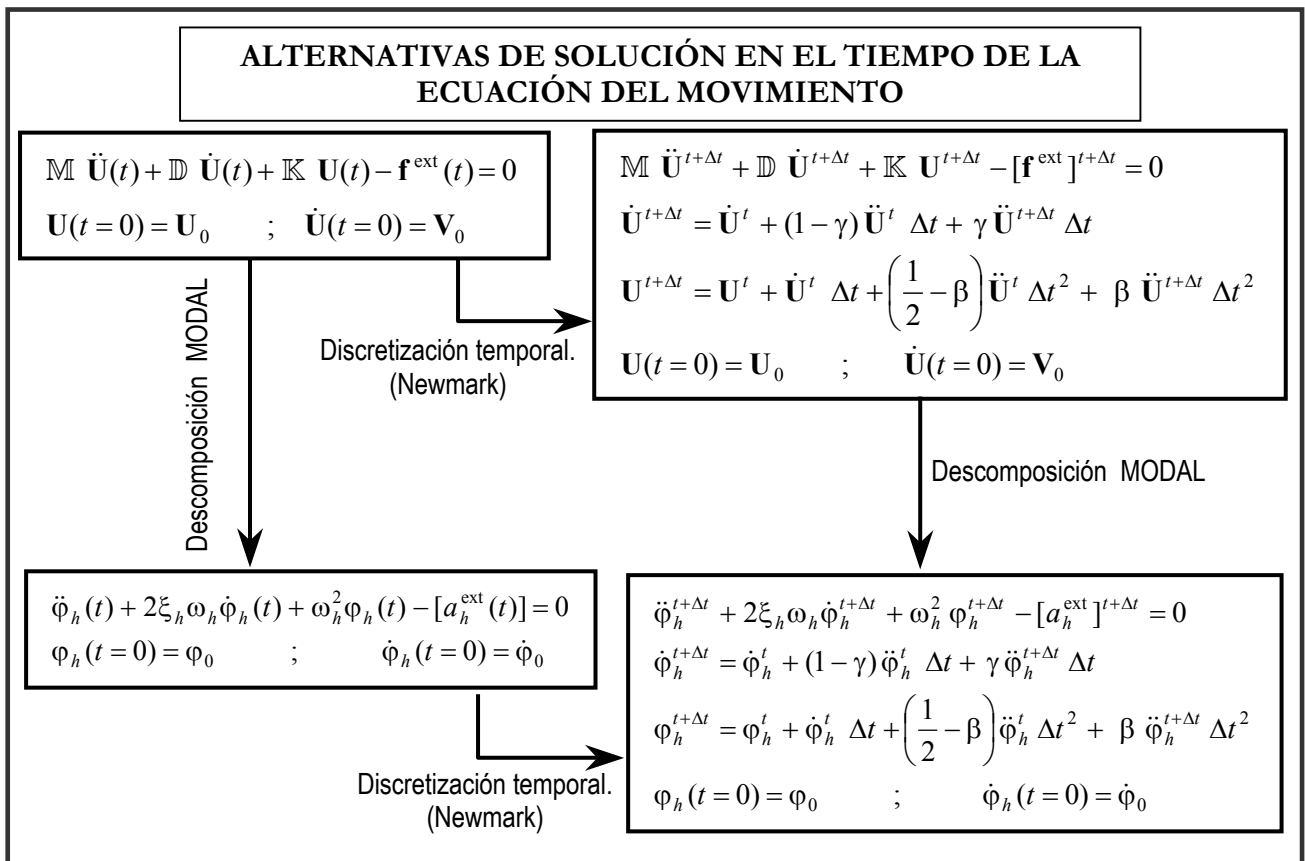


Figura 4.1 – Alternativas de solución en el tiempo de la ecuación del movimiento para un problema elástico lineal.

$$\ddot{\phi}_h(t) + 2\xi_h \omega_h \dot{\phi}_h(t) + \omega_h^2 \phi_h(t) - [a_h^{\text{ext}}(t)] = 0 \quad , \quad \forall \quad 1 \leq h \leq n - \text{GL} \quad (\text{B4.8})$$

La solución de este sistema de ecuaciones, mediante una técnica numérica de integración directa de un paso, tiene la siguiente forma general conocida como fórmula *recurrente*⁶,

$$\mathbf{X}^{t+\theta\Delta t} = \mathbf{A}^\theta \cdot \mathbf{X}^t + \mathbf{L}^{t+\theta\Delta t} \quad , \text{con} \quad 0 \leq \theta \leq \infty \quad (\text{B4.9})$$

siendo $\mathbf{X} = \{\ddot{\phi}_h, \dot{\phi}_h, \phi_h\}$ y la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{L}$ son los operadores de integración y fuerza respectivamente, tal que cada uno de estos operadores debe definirse para cada algoritmo de resolución utilizado. En la Figura 4.1, luego de realizar la discretización temporal por el método de Newmark, se obtiene un sistema algebraico que siempre puede escribirse en la forma general de la ecuación (B4.9).

B4.4 La ecuación de equilibrio dinámico y su Convergencia - Consistencia y Estabilidad.

Dada una ecuación de equilibrio dinámico en forma de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden diagonalizado, y escrita esta ecuación en la forma (B4.9), se dice que: *el procedimiento numérico de solución será convergente si satisface a la vez las condiciones de consistencia y estabilidad*⁷. Dicho esto de otro modo, la condición de convergencia de un algoritmo de solución, exige como condición necesaria y suficiente el cumplimiento de las condiciones de consistencia y estabilidad en la solución.

La **condición de estabilidad** resulta del cumplimiento de ciertas condiciones algebraicas por la matriz de amplificación $\mathbf{A}$ (ecuación (B4.9)) y será tratado en el apartado siguiente.

En este apartado se tratará con más detalle la **condición de consistencia**, cuyo cumplimiento está relacionado con el error de truncamiento local que se introduce en la solución, como consecuencia del método de diferencias finitas utilizado en la discretización temporal de la ecuación diferencial ordinaria del equilibrio dinámico.

Suponiendo una solución aproximada del problema dinámico $^*\mathbf{X}^{t+\theta\Delta t}$, en el tiempo $(t + \theta\Delta t)$, el error de truncamiento contenido en esta solución se valora a partir de la solución general de la ecuación diferencial del movimiento (B4.9). Esto es,

$$^*\mathbf{X}^{t+\theta\Delta t} - \mathbf{A}^\theta \cdot ^*\mathbf{X}^t - \mathbf{L}^{t+\theta\Delta t} = \boldsymbol{\tau}^t \quad , \text{con} \quad 0 \leq \theta \leq \infty \quad (\text{B4.10})$$

donde $\boldsymbol{\tau}^t$ representa la matriz de error local y el asterisco (*) implica que se trata de una magnitud aproximada. Se dice que el algoritmo de solución cumple con la *condición de consistencia*, si la matriz $\mathbf{A}$ es espectralmente estable y para un tiempo $t + \theta\Delta t$, con $\theta = 1$, se cumple la siguiente condición,

$$\|\boldsymbol{\tau}^t\| = c \cdot \Delta t^{K+1} \quad \forall \quad t \in [0, T] \quad (\text{B4.11})$$

donde c es una constante independiente del incremento de tiempo Δt y $K > 0$ es la relación de convergencia.

La ecuación que expresa el error, en la solución obtenida por diferencias finitas, surge de establecer la diferencia entre la solución correcta y la aproximada, esto es, restando miembro a miembro ambas soluciones se tiene,

⁶ T. Belytschko and T. Hughes (1983). *Computational methods for transient analysis*. North-Holland.

⁷ M. Greenberg (1978). *Foundation of applied mathematics*. Prentice-Hall.

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{t+\theta\Delta t} - \mathbf{A}^\theta \cdot \mathbf{X}^t - \mathbf{L}^{t+\theta\Delta t} = \mathbf{0} \\ {}^*\mathbf{X}^{t+\theta\Delta t} - \mathbf{A}^\theta \cdot {}^*\mathbf{X}^t - \mathbf{L}^{t+\theta\Delta t} - \boldsymbol{\tau}^t = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{B4.12})$$

de donde surge la siguiente expresión del error en el instante actual, es decir en el tiempo $(t + \theta\Delta t)$,

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}^{t+\theta\Delta t} - {}^*\mathbf{X}^{t+\theta\Delta t}) - \mathbf{A}^\theta \cdot (\mathbf{X}^t - {}^*\mathbf{X}^t) - \boldsymbol{\tau}^t &= \mathbf{0} \\ \mathbf{e}^{t+\theta\Delta t} - \mathbf{A}^\theta \cdot \mathbf{e}^t - \boldsymbol{\tau}^t &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{B4.13})$$

Siguiendo la misma idea conceptual, se obtiene el error en el paso de tiempo previo, es decir en (t) ,

$$\mathbf{e}^t - \mathbf{A}^\theta \cdot \mathbf{e}^{t-\theta\Delta t} - \boldsymbol{\tau}^{t-\theta\Delta t} = \mathbf{0} \quad (\text{B4.14})$$

Sustituyendo esta última ecuación, que define el error en el paso previo (B4.14), en la ecuación del error en el instante actual (B4.13), con el objetivo de eliminar $\mathbf{e}^t$ de esta última, se tiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{t+\theta\Delta t} - \mathbf{A}^\theta \cdot [\mathbf{A}^\theta \cdot \mathbf{e}^{t-\theta\Delta t} + \boldsymbol{\tau}^{t-\theta\Delta t}] - \boldsymbol{\tau}^t &= \mathbf{0} \\ \mathbf{e}^{t+\theta\Delta t} - [\mathbf{A}^\theta]^2 \cdot \mathbf{e}^{t-\theta\Delta t} - [\mathbf{A}^\theta] \cdot \boldsymbol{\tau}^{t-\theta\Delta t} - \boldsymbol{\tau}^t &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{B4.15})$$

Repitiendo ahora el proceso deductivo para eliminar el error $\mathbf{e}^{t-\theta\Delta t}$ de la ecuación anterior, resulta,

$$\mathbf{e}^{t+\theta\Delta t} - [\mathbf{A}^\theta]^3 \cdot \mathbf{e}^{t-2\theta\Delta t} - [\mathbf{A}^\theta]^2 \cdot \boldsymbol{\tau}^{t-2\theta\Delta t} - [\mathbf{A}^\theta] \cdot \boldsymbol{\tau}^{t-\theta\Delta t} - \boldsymbol{\tau}^t = \mathbf{0} \quad (\text{B4.16})$$

Y siguiendo así sucesivamente se puede llegar a escribir el error acumulado hasta el tiempo actual, $(t_n = n \cdot \Delta t)$. Es decir durante todo el proceso de solución,

$$\mathbf{e}^{t+\theta\Delta t} - [\mathbf{A}^\theta]^{n+1} \cdot \mathbf{e}^{t=0} - \sum_{i=1}^n [\mathbf{A}^\theta]^i \cdot \boldsymbol{\tau}^{t-i\theta\Delta t} = \mathbf{0} \quad (\text{B4.17})$$

Puesto que el segundo término es mucho menor que la acumulación del error en los restantes, $[\mathbf{A}^\theta]^{n+1} \cdot \mathbf{e}^{t=0} \ll \sum_{i=1}^n [\mathbf{A}^\theta]^i \cdot \boldsymbol{\tau}^{t-i\theta\Delta t}$, puede despreciarse y directamente obtener el error acumulado en (t) en vez de $(t + \theta \cdot \Delta t)$, cuya norma debe estar acotada en la siguiente forma,

$$\|\mathbf{e}^t\| = \left\| \sum_{i=1}^{n-1} [\mathbf{A}^\theta]^i \cdot \boldsymbol{\tau}^{t-(i-1)\theta\Delta t} \right\| \leq t \cdot c \cdot \Delta t^K \quad (\text{B4.18})$$

Esta conclusión, conocida también como “teorema de equivalencia de Lax” para problemas de valores iniciales⁷, conduce a un hecho obvio, pues cuando el incremento de tiempo tiende a cero desaparece el error en la solución aproximada por diferencias finitas ($\|\mathbf{e}^t\| \rightarrow 0$, si $\Delta t \rightarrow 0$).

B4.5 Estabilidad en la solución de sistemas simétricos “lineales” de segundo orden.

B4.5.1 Procedimiento para el análisis de estabilidad.

El análisis de estabilidad juntamente con el de consistencia, de un método de solución en el tiempo de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden a coeficientes constantes, permitirá escoger el incremento de tiempo adecuado para garantizar una solución convergente en el tiempo, independientemente de las condiciones iniciales del problema.

El estudio de estabilidad del método se realiza examinando el comportamiento numérico de la solución, exigiendo que esta sea acotada para cualquier condición inicial arbitraria. Habitualmente la estabilidad de un método de integración en el tiempo se estudia en sistemas de ecuaciones homogéneos, es decir libre de acciones externas $[a_h^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} = 0$, que en el caso particular que aquí se trata implica un estudio en vibración libre. Bajo esta situación, la solución de la ecuación de equilibrio dinámico (B4.9) se escribe como,

$$\mathbf{X}^{t+\theta\Delta t} = \mathbf{A}^\theta \cdot \mathbf{X}^t, \text{ con } 0 \leq \theta \leq \infty \quad (\text{B4.19})$$

Para que esta solución sea estable debe ocurrir que la matriz $\mathbf{A}^\theta$ este acotada para $\theta \rightarrow \infty$, y para ello el máximo autovalor $\max_k |\mu_k|$ de la matriz $\mathbf{A}$ (o radio espectral $\rho(\mathbf{A})$), debe ser menor o igual que la norma de dicha matriz $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$. Así, la estabilidad está relacionada con la relación de crecimiento, o disminución de $\mathbf{A}^\theta$ en función de la potencia θ y recibe también el nombre de condición de estabilidad espectral. Para probar la convergencia es entonces necesario que se cumpla la siguiente condición,

$$\|\mathbf{A}^\theta\| \leq \text{const.}, \quad \forall \theta \quad (\text{B4.20})$$

Este requerimiento se satisface si se cumple:

1. que el radio espectral sea menor que la unidad, $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$; siendo el radio espectral de la matriz $\mathbf{A}$, la magnitud de su máximo autovalor. Esto es,

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_k |\mu_k| \quad \text{con } k = 1, 2, 3 \quad (\text{B4.21})$$

2. que los módulos de los autovalores de $\mathbf{A}$ sean menores que la unidad.

Una matriz $\mathbf{A}$ que cumple con estas dos condiciones se dice que es estable o espectralmente estable.

B4.5.2 Determinación de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{L}$ para “Newmark”.

En el método de Newmark, el equilibrio se realiza en $(t + \Delta t)$ y por lo tanto la ecuación (B4.8) se establece como,

$$\ddot{\phi}_h^{t+\Delta t} + 2\xi_h \omega_h \dot{\phi}_h^{t+\Delta t} + \omega_h^2 \phi_h^{t+\Delta t} - [a_h^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} = 0 \quad (\text{B4.22})$$

tal que su solución en desplazamientos y velocidades tiene la siguiente forma (ver capítulo B3 y Figura 4.1),

$$\begin{cases} \dot{\phi}_h^{t+\Delta t} = \dot{\phi}_h^t + (1-\gamma)\ddot{\phi}_h^t \Delta t + \gamma \ddot{\phi}_h^{t+\Delta t} \Delta t \\ \phi_h^{t+\Delta t} = \phi_h^t + \dot{\phi}_h^t \Delta t + \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\phi}_h^t \Delta t^2 + \beta \ddot{\phi}_h^{t+\Delta t} \Delta t^2 \end{cases} \quad (B4.23)$$

Donde γ y β son parámetros que permiten controlar la estabilidad del método, tal que este se vuelve incondicionalmente estable para valores de $\gamma=0.5$ y $\beta=0.25$, que son a la vez parámetros consistentes con el método de aceleración lineal (B3.3.2.1).

La eliminación de la aceleración $\ddot{\phi}_h^t$ y $\ddot{\phi}_h^{t+\Delta t}$ a través de la sustitución de la ecuación (B4.23) en la (B4.22), permite encontrar una expresión condensada para la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{L}$ tal que la solución tenga implícita la aceleración y sólo esté expresada en función de la velocidad y del desplazamiento $\mathbf{X} = \{\phi_h, \dot{\phi}_h\}$. Esto permite obtener el radio espectral de una matriz de (2×2) , en vez de una (3×3) , cuya solución es relativamente más simple*. De esta forma, se tiene,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{L}^t = \mathbf{A}_1^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta)[a_h^{\text{ext}}]^t + 2\beta[a_h^{\text{ext}}]^{t+\Delta t}] \\ \Delta t [(1-\gamma)[a_h^{\text{ext}}]^t + \gamma[a_h^{\text{ext}}]^{t+\Delta t}] \end{array} \right\} \quad (B4.24)$$

Donde las matrices que componen la matriz de integración $\mathbf{A}$, tienen las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 1 + \Delta t^2 \beta \omega_h^2 & 2\Delta t^2 \beta \xi_h \omega_h \\ \Delta t \gamma \omega_h^2 & 1 + 2\Delta t \gamma \xi_h \omega_h \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta t^2}{2} (1-2\beta) \omega_h^2 & \Delta t [1 - \Delta t (1-2\beta) \xi_h \omega_h] \\ -\Delta t (1-\gamma) \omega_h^2 & 1 - 2\Delta t (1-\gamma) \xi_h \omega_h \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (B4.25)$$

De esta forma, los autovalores de $\mathbf{A}$ se determinan a partir de la siguiente ecuación característica,

$$0 = \det(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}) = \mu^2 - (A_{11} + A_{22})\mu + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \quad (B4.26)$$

tal que las raíces de esta ecuación resultan,

* NOTA: Un camino alternativo es no eliminar la aceleración y sustituir las ecuaciones (B4.23) en la (B4.8), de donde se obtiene la aceleración $\ddot{\phi}_h^{t+\Delta t}$ y luego sustituir nuevamente ésta en la (B4.23), de donde se obtiene $\phi_h^{t+\Delta t}$ y $\dot{\phi}_h^{t+\Delta t}$. Reordenando estas ecuaciones así obtenidas y sustituyendola en (B4.9), para $\theta=1$, se tiene,

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\phi}_h^{t+\Delta t} \\ \dot{\phi}_h^{t+\Delta t} \\ \phi_h^{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)x - 2(1-\gamma)y\right] & [-x-2y]\frac{1}{\Delta t} & -\frac{x}{\Delta t^2} \\ \Delta t \left[1-\gamma-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\gamma x - 2(1-\gamma)\gamma y\right] & [1-x\gamma-2\gamma y] & -\frac{x\gamma}{\Delta t} \\ \Delta t^2 \left[\frac{1}{2}-\beta-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\beta x - 2(1-\gamma)\beta y\right] & \Delta t [1-x\beta-2\beta y] & (1-\beta x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}_h^t \\ \dot{\phi}_h^t \\ \phi_h^t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\beta}{\omega_h^2 \Delta t^2} \\ \frac{\beta \gamma}{\omega_h^2 \Delta t} \\ \frac{\beta x}{\omega_h^2} \end{Bmatrix} \cdot [a_h^{\text{ext}}]^{t+\Delta t}$$

Siendo $x = \left(\frac{1}{\omega_h^2 \Delta t^2} + \frac{2\xi_h \gamma}{\omega_h \Delta t} + \beta\right)^{-1}$ e $y = \frac{\xi_h x}{\omega_h \Delta t}$. El inconveniente de este procedimiento es que la

obtención del radio espectral resulta de una ecuación cúbica, siendo más simple utilizar un procedimiento que condense la aceleración y permita obtener una ecuación cuadrática para el radio espectral.

$$\mu_{1,2} = \left(\frac{A_{11} + A_{22}}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{A_{11} + A_{22}}{2} \right)^2 - (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} = a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - a_2} \quad (\text{B4.27})$$

con $a_1 = (A_{11} + A_{22})/2$ y $a_2 = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})$. De esta última ecuación y de la condición de estabilidad $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$, puede establecerse gráficamente el dominio donde hay estabilidad de la solución y cuya frontera queda delimitada a partir de hacer $\mu = 1$ y adoptar el signo negativo en la ecuación (B4.27) (ver Figura 4.2). De esto resulta la siguiente relación,

$$0 = 1 - 2a_1 + a_2 \quad (\text{B4.28})$$

Graficando las posibles soluciones en el espacio $a_1 - a_2$, se observa que se tiene estabilidad en la solución de este algoritmo cuando la ecuación (B4.27) tiene raíces dentro de la zona gris de la Figura 4.2. Es decir, para que sea incondicionalmente estable debe cumplirse la siguiente relación, que establece los vértices de la Figura 4.2,

$$-\frac{a_2 + 1}{2} \leq a_1 \leq \frac{a_2 + 1}{2} \quad (\text{B4.29})$$

Sustituyendo en la ecuación (B4.28) $2a_1 = (A_{11} + A_{22})$ y $a_2 = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})$ por los coeficientes de la matriz $\mathbf{A}$ (ecuación (B4.24)), resultan las magnitudes γ y β que garantizan una solución estable con el algoritmo de Newmark. Los extremos de variación de estos coeficientes cumplen con la siguiente desigualdad,

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (\text{B4.30})$$

Un ejemplo de la resolución numérica de este problema puede verse en el “Apéndice 1”, de este capítulo, donde se describe un pequeño programa en FORTRAN sobre la obtención del radio espectral y con el que puede verificarse la condición expresada por la ecuación (B4.30).

Expresión del equilibrio en el tiempo para Newmark con: $\beta = 1/4$ y $\gamma = 1/2$:

De un estudio de estabilidad sobre el método de Newmark se observa que es incondicionalmente estable para $\beta = 1/4$ y $\gamma = 1/2$. Sustituyendo estos coeficientes en la ecuación (B4.23), resulta,

$$\begin{cases} \varphi_h^{t+\Delta t} = \varphi_h^t + \dot{\varphi}_h^t \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4} [\ddot{\varphi}_h^t + \ddot{\varphi}_h^{t+\Delta t}] \\ \dot{\varphi}_h^{t+\Delta t} = \dot{\varphi}_h^t + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{\varphi}_h^t + \ddot{\varphi}_h^{t+\Delta t}] \\ \ddot{\varphi}_h^{t+\Delta t} = \ddot{\varphi}_h^t + \frac{4}{\Delta t^2} [\Delta \varphi_h^{t+\Delta t} - \dot{\varphi}_h^t \Delta t] \end{cases} \quad (\text{B4.31})$$

Sustituyendo la segunda en la primera puede escribirse el desplazamiento a partir de la velocidad media durante el incremento de tiempo Δt ,

$$\varphi_h^{t+\Delta t} = \varphi_h^t + \frac{\Delta t}{2} [\dot{\varphi}_h^t + \dot{\varphi}_h^{t+\Delta t}] \quad (\text{B4.32})$$

Sustituyendo estas magnitudes en la ecuación de equilibrio (B4.22), resulta

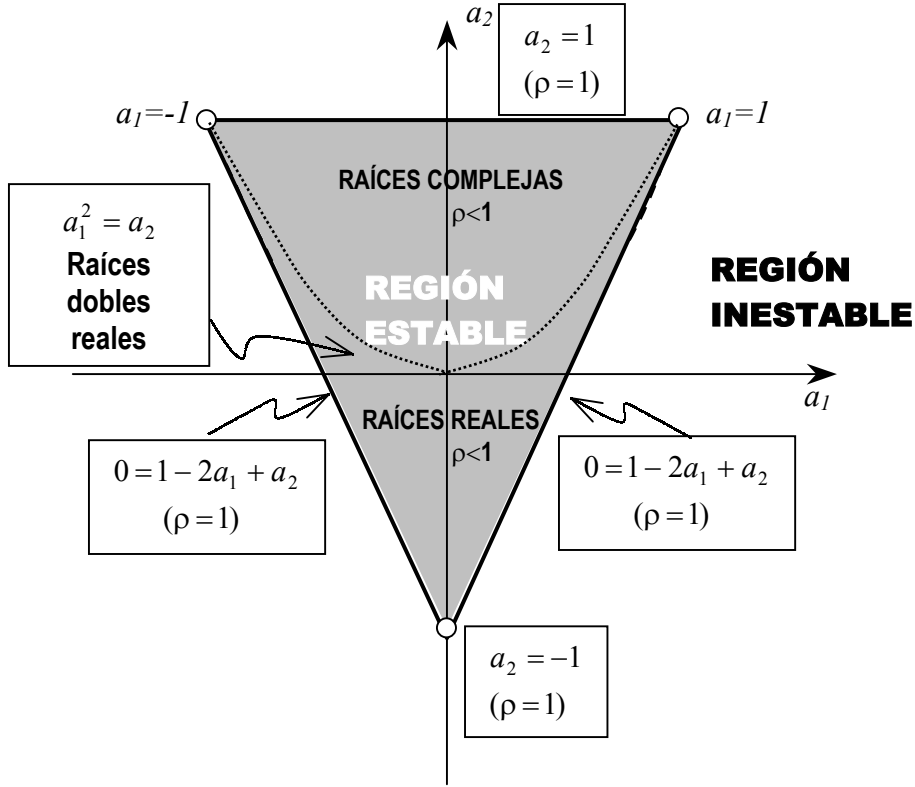


Figura 4.2 – Regiones de estabilidad en el plano $a_1 - a_2$.

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\phi}_h^{t+\Delta t} + 2\xi_h \omega_h \dot{\phi}_h^{t+\Delta t} + \omega_h^2 \phi_h^{t+\Delta t} - [a_h^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} = 0 \\
 & \left\{ \ddot{\phi}_h^t + \frac{4}{\Delta t^2} [\Delta \phi_h^{t+\Delta t} - \dot{\phi}_h^t \Delta t] \right\} + 2\xi_h \omega_h \left\{ \dot{\phi}_h^t + \frac{\Delta t}{2} \left[\ddot{\phi}_h^t + \ddot{\phi}_h^t + \frac{4}{\Delta t^2} [\Delta \phi_h^{t+\Delta t} - \dot{\phi}_h^t \Delta t] \right] \right\} + \\
 & + \omega_h^2 \left\{ \phi_h^t + \dot{\phi}_h^t \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4} \left[\ddot{\phi}_h^t + \ddot{\phi}_h^t + \frac{4}{\Delta t^2} [\Delta \phi_h^{t+\Delta t} - \dot{\phi}_h^t \Delta t] \right] \right\} - [a_h^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} = 0
 \end{aligned} \quad (\text{B4.33})$$

Ordenando los términos resulta la siguiente ecuación para la solución que garantiza la solución estable del problema dinámico elástico lineal

$$\begin{aligned}
 0 &= \hat{a}_h^{t+\Delta t} + J_h^{t+\Delta t} \cdot \Delta \phi_h^{t+\Delta t} \\
 J_h^{t+\Delta t} &= \left[\frac{4}{\Delta t^2} + 4\xi_h \omega_h + \omega_h^2 \right]_h^{t+\Delta t} \\
 \hat{a}_h^{t+\Delta t} &= \left\{ \left[2\xi_h \omega_h \Delta t + 2\omega_h^2 \Delta t^2 \right] \ddot{\phi}_h^t - \left[\frac{4}{\Delta t} + 2\xi_h \omega_h \Delta t^2 \right] \dot{\phi}_h^t \right\} + \\
 &+ \underbrace{\left\{ \ddot{\phi}_h^t + 2\xi_h \omega_h \dot{\phi}_h^t + \omega_h^2 \phi_h^t \right\}}_{a_h^t} - [a_h^{\text{ext}}]^{t+\Delta t}
 \end{aligned} \quad (\text{B4.34})$$

También podría haberse obtenido el sistema de ecuaciones de equilibrio elástico lineal sin que sea necesario el proceso previo de diagonalización a partir de la ecuación (B4.1), o mediante un procedimiento análogo al que se ha seguido en el capítulo cap-B-3 con las ecuaciones B4.23 y B3.24,

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \hat{\mathbf{f}}^{t+\Delta t} + \mathbb{J}^{t+\Delta t} \cdot \Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t} \\
\text{con: } \mathbb{J}^{t+\Delta t} &= \left[\mathbb{M} \frac{4}{\Delta t^2} + \mathbb{D}^T \frac{2}{\Delta t} + \mathbb{K}^T \right]^{t+\Delta t} \\
\text{y: } \hat{\mathbf{f}}^{t+\Delta t} &= \mathbb{M} \left[\frac{4}{\Delta t^2} (\Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{U}}^t \Delta t) - \ddot{\mathbf{U}}^t \right] + \\
&\quad + [\mathbf{f}^{\text{int}}]^{t+\Delta t} - [\mathbf{f}^{\text{ext}}]^{t+\Delta t}
\end{aligned} \tag{B4.35}$$

B4.5.3 Determinación de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{L}$ para “Diferencias centradas” – Forma explícita de Newmark.

Las constantes β y γ permiten que el método de Newmark pase de ser un método implícito, tal como se ha visto en el capítulo B3, a uno totalmente explícito como lo es el de *diferencias centradas*⁸. Con el cambios en las constantes de Newmark, se consigue una metodología muy versátil que puede ajustarse a la solución de distintos problemas particulares.

La ecuación del movimiento (B4.8) para oscilación libre del grado de libertad h , establece el siguiente equilibrio dinámico en el tiempo (t),

$$\ddot{\varphi}_h^t + 2\xi_h \omega_h \dot{\varphi}_h^t + \omega_h^2 \varphi_h^t = 0 \tag{B4.36}$$

La aceleración y la velocidad escritas en término de diferencias finitas centradas en el tiempo (t) resultan^{1,2,4,8},

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_h^t = \frac{1}{\Delta t^2} (\varphi_h^{t+\Delta t} - 2\varphi_h^t + \varphi_h^{t-\Delta t}) \\ \dot{\varphi}_h^t = \frac{1}{2\Delta t} (\varphi_h^{t+\Delta t} - \varphi_h^{t-\Delta t}) \end{cases} \tag{B4.37}$$

sustituyendo las (B4.37) en la (B4.36) se obtiene el desplazamiento $\varphi_h^{t+\Delta t}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t^2} (\varphi_h^{t+\Delta t} - 2\varphi_h^t + \varphi_h^{t-\Delta t}) + 2\xi_h \omega_h \frac{1}{2\Delta t} (\varphi_h^{t+\Delta t} - \varphi_h^{t-\Delta t}) + \omega_h^2 \varphi_h^t &= 0 \\
\varphi_h^{t+\Delta t} = \left[\frac{2 - \omega_h^2 \Delta t^2}{1 + \xi_h \omega_h \Delta t} \right] \cdot \varphi_h^t - \left[\frac{1 - \xi_h \omega_h \Delta t}{1 + \xi_h \omega_h \Delta t} \right] \cdot \varphi_h^{t-\Delta t}
\end{aligned} \tag{B4.38}$$

que puede ser escrita en la forma (B4.19), para $\theta = 1$, de la siguiente forma

$$\mathbf{X}^{t+\Delta t} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^t \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_h^{t+\Delta t} \\ \varphi_h^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2 - \omega_h^2 \Delta t^2}{1 + \xi_h \omega_h \Delta t} & -\frac{1 - \xi_h \omega_h \Delta t}{1 + \xi_h \omega_h \Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_h^t \\ \varphi_h^{t-\Delta t} \end{Bmatrix} \tag{B4.39}$$

tal que los autovalores μ_k de la ecuación característica de la matriz de amplificación $\mathbf{A}$, para un problema no amortiguado $\xi_h = 0$, se obtienen de la siguiente expresión

⁸ S. Oller (1998). Notas de clases de dinámica lineal.

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} 2 - \omega_h^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \mu_k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (B4.40)$$

$$\mu_k^2 - \mu_k (2 - \omega_h^2 \Delta t^2) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \frac{(2 - \omega_h^2 \Delta t^2)}{2} \pm \sqrt{\frac{(2 - \omega_h^2 \Delta t^2)^2}{4} - 1}$$

Imponiendo a los autovalores previamente obtenidos la condición de radio espectral menor o igual que la unidad (apartado B4.5.1), se obtiene la medida del incremento de tiempo Δt que garantiza la estabilidad de la solución para el método de diferencias finitas centradas con amortiguamiento nulo $\xi_h = 0$. Esto es,

$$\rho(\mathbf{A}) = \max |\mu_1, \mu_2| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \leq \frac{2}{\omega_h} \quad \text{o también} \quad \frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{\pi} \quad (B4.41)$$

Estas mismas ecuaciones en diferencias centradas pueden obtenerse luego de considerar $\beta = 0$ y $\gamma = 1/2$ en el método de Newmark, seguida de una cierta manipulación matemática. Este enfoque más general permite estudiar la estabilidad de este método, utilizando toda la estructura conceptual descrita en el apartado B4.5.2. Así, luego de sustituir $\beta = 0$ y $\gamma = 1/2$ en (B4.23) se obtiene,

$$\begin{cases} \dot{\phi}_h^{t+\Delta t} = \dot{\phi}_h^t + \ddot{\phi}_h^t \frac{\Delta t}{2} + \ddot{\phi}_h^{t+\Delta t} \frac{\Delta t}{2} \\ \phi_h^{t+\Delta t} = \phi_h^t + \dot{\phi}_h^t \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\phi}_h^t \Delta t^2 \end{cases} \quad (B4.42)$$

Utilizando estas ecuaciones (B4.42) junto con la (B4.22), puede eliminarse los términos de aceleración y escribir la solución general a partir de una expresión condensada para la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{L}$. De esta forma la solución sólo estará expresada en velocidad y desplazamiento $\mathbf{X} = \{\dot{\phi}_h, \phi_h\}$, resultando la siguiente expresión para la matriz $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \left(1 - \frac{x}{2} - y \right) & \left(1 - \frac{x}{2} - y \right) \\ \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t \end{bmatrix} \quad (B4.43)$$

Siendo en esta última $x = \left(\frac{1}{\omega_h^2 \Delta t^2} + \frac{\xi_h}{\omega_h \Delta t} \right)^{-1}$ e $y = \frac{\xi_h x}{\omega_h \Delta t}$.

También podría haberse obtenido la matriz $\mathbf{A}$ en diferencias centradas, sustituyendo los coeficientes $\beta = 0$ y $\gamma = 1/2$ en la ecuación (B4.25). Esto es,

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\Delta t}{2} \omega_h^2 & 1 + \Delta t \xi_h \omega_h \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta t^2}{2} \omega_h^2 & \Delta t [1 - \Delta t \xi_h \omega_h] \\ -\frac{\Delta t}{2} \omega_h^2 & 1 - \Delta t \xi_h \omega_h \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta t^2}{2} \omega_h^2 & \Delta t [1 - \Delta t \xi_h \omega_h] \\ \frac{\omega_h^2 \Delta t (-2 + \omega_h^2 \Delta t^2 - 2 \Delta t)}{4 [1 + \Delta t \xi_h \omega_h]} & \frac{(-\omega_h^2 \Delta t^2 + \omega_h^3 \Delta t^3 \xi_h + 2 - 2 \omega_h \Delta t \xi_h)}{2 [1 + \Delta t \xi_h \omega_h]} \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (\text{B4.44})$$

Tal que luego de obtener el radio espectral, se concluye que sólo se consigue estabilidad en la solución siempre que se cumpla un incremento de tiempo en función de la máxima frecuencia angular y del término de amortiguación,

$$(\omega_h)^{\max} \Delta t \leq 2(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi) \quad (\text{B4.45})$$

Esta condición comporta un coste elevado de cálculo cuando se resuelve un problema de elementos finitos, por ejemplo, en un problema con viscosidad nula $\xi = 0$, primero habrá que obtener la máxima frecuencia angular de la estructura para cada modo “ h ” y luego exigir que el paso de tiempo cumpla con $(\omega_h)^{\max} \Delta t \leq 2$ (ver este mismo resultado en la ecuación (B4.41)). Esto podría solucionarse a través de una forma simple, obteniendo las frecuencias para cada elemento finito y buscando la máxima de ellas, pues esta siempre cumplirá con la condición⁹,

$$(\omega_h)^{\max} \leq \max_{\forall e} (\omega^e)^{\max} \leq \frac{2(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi)}{\Delta t} \quad (\text{B4.46})$$

Expresión del equilibrio en el tiempo para Newmark con: $\beta = 0$ y $\gamma = 1/2$ (diferencias centradas)

Sustituyendo las ecuaciones (B4.42) en la ecuación diferencial de equilibrio dinámico en el tiempo $(t + \Delta t)$, escrita en términos de fuerza, resulta la forma linealizada en el tiempo de esta ecuación. Esto es,

$$\begin{aligned}
m_h \ddot{\phi}_h^{t+\Delta t} + d_h \dot{\phi}_h^{t+\Delta t} + k_h \phi_h^{t+\Delta t} - [f_h^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} &= 0 \\
m_h \ddot{\phi}_h^{t+\Delta t} + d_h \left[\dot{\phi}_h^t + \ddot{\phi}_h^t \frac{\Delta t}{2} + \ddot{\phi}_h^{t+\Delta t} \frac{\Delta t}{2} \right] + k_h \left[\phi_h^t + \dot{\phi}_h^t \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\phi}_h^t \Delta t^2 \right] - [f_h^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} &= 0
\end{aligned} \quad (\text{B4.47})$$

Agrupando términos puede escribirse la siguiente ecuación linealizada en el tiempo, para el grado de libertad “ h ”,

$$\begin{aligned}
\left[m_h + d_h \frac{\Delta t}{2} \right] \ddot{\phi}_h^{t+\Delta t} + \underbrace{\left\{ d_h \left[\dot{\phi}_h^t + \ddot{\phi}_h^t \frac{\Delta t}{2} \right] + k_h \left[\phi_h^t + \dot{\phi}_h^t \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\phi}_h^t \Delta t^2 \right] - [f_h^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} \right\}}_{\hat{f}_h^{t+\Delta t}} &= 0 \\
\left[m_h + d_h \frac{\Delta t}{2} \right] \ddot{\phi}_h^{t+\Delta t} + \hat{f}_h^{t+\Delta t} &= 0
\end{aligned} \quad (\text{B4.48})$$

⁹ F. Cesari (1982). *Metodi di calcolo nella dinamica delle strutture*. Ed. Pitagora, Bologna.

También podría haberse obtenido el sistema de ecuaciones de equilibrio dinámico elástico lineal a partir de la ecuación (B4.1), sin que sea necesario el proceso de diagonalización del sistema (ecuación (B4.7)). Esto queda escrito como,

$$\left[\mathbb{M} + \mathbb{D} \frac{\Delta t}{2} \right] \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \underbrace{\mathbb{D} \left[\dot{\mathbf{U}}^t + \ddot{\mathbf{U}}^t \frac{\Delta t}{2} \right] + \mathbb{K} \left[\mathbf{U}^t + \dot{\mathbf{U}}^t \Delta t + \ddot{\mathbf{U}}^t \frac{\Delta t^2}{2} \right]}_{\hat{\mathbf{f}}^{t+\Delta t}} - [\mathbf{f}^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} = 0 \quad (\text{B4.49})$$

B4.6 Estabilidad en la solución de sistemas simétricos “no-lineales” de segundo orden.

B4.6.1 Estabilidad de la ecuación linealizada.

Estudiado ya el concepto de estabilidad en la solución de sistemas lineales, se considera a continuación el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, cuya no linealidad radica en la evolución de las fuerzas internas,

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbb{M} \ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t + \Delta t) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t + \Delta t) = \mathbf{0} \quad (\text{B4.50})$$

Cuya linealización puede escribirse, como se deduce en (B2.77), mediante una aproximación en serie de Taylor truncada en el segundo término,

$$\begin{aligned} 0 = {}^{i+1}[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} &\cong {}^i[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right)_{\Omega}^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = \\ &= {}^i[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + \underbrace{\left[\mathbb{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} + \mathbb{K}^T + \mathbb{D}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{ext}}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\Omega}^{t+\Delta t}}_{{}^i \mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}} \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{B4.51})$$

Recordar que en esta ecuación (i) representa el contador de iteración y (t) el tiempo. La solución de la misma resulta por inversión del operador jacobiano ${}^i \mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t}$. Esto es,

$${}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t} = - \left[{}^i \mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t} \right]^{-1} \cdot {}^i[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \quad (\text{B4.52})$$

Diversos algoritmos en el tiempo pueden utilizarse para la solución de esta última ecuación, pero con ninguno de ellos puede garantizarse la estabilidad en la solución. Se supone en esta formulación que $\mathbb{M}$ es constante; $\mathbb{M}$, $\mathbb{K}$ y $\mathbb{D}$ son simétricas; $\mathbb{M}$ y $\mathbb{K}$ son definidas positivas; y $\mathbb{D}$ es semi definida positiva.

La utilización del concepto de “estabilidad de la ecuación linealizada” es sin duda el método mas difundido para probar estabilidad en la solución en problemas no lineales. En este caso, el concepto de estabilidad para un algoritmo lineal, estudiado en apartados previos, sólo puede garantizarse la condición necesaria, pero no suficiente, para que exista estabilidad.

B4.6.2 Algoritmos de conservación de la energía.

En régimen lineal, la noción de estabilidad implica que la ley de conservación de la energía impone un límite al crecimiento desmedido de la solución (ecuación (B4.20)). Por otro lado, en

un problema no lineal, el concepto de linealización del equilibrio en el tiempo no necesariamente implica conservación de la energía. Normalmente ocurre un crecimiento patológico de la energía, que se ha observado en algunas situaciones para algoritmos que son incondicionalmente estables durante la linealización; un ejemplo de este caso ocurre al utilizar la regla del trapecio o algoritmo de Newmark con $\beta = 1/4$ y $\gamma = 1/2$. Con este razonamiento se hace más evidente la cuestión si son o no adecuadas las nociones de estabilidad previamente propuestas para problemas lineales.

El objetivo de este apartado es presentar un algoritmo de solución en el tiempo, diferente a los anteriormente definidos, cuyo objetivo sea garantizar permanentemente la condición de conservación de la energía con lo que automáticamente se cumplirá la condición de estabilidad de la solución.

Estos algoritmos de conservación de la energía se basan en una modificación de la regla del trapecio (Newmark con $\beta = 1/4$ y $\gamma = 1/2$), que se utiliza en la solución de problemas no lineales (ver cap-B-3). En particular, es necesario observar que cuando no hay fuerzas externas, necesariamente el sistema conserva la energía, ya sea en problemas no lineales como así también en elasto-dinámica. Esto quiere decir que las condiciones de estabilidad en la solución automáticamente se cumplen.

La técnica que se utiliza para la modificación de la regla del trapecio es estableciendo una condición adicional de conservación, mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

El algoritmo de la regla del trapecio se escribe en la forma de la ecuación de Euler-Lagrange ligada a un funcional natural (ver Apéndice-2), además, a continuación se supone que el amortiguamiento es nulo, es decir que se cumple que $\mathbf{f}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}) \equiv \mathbf{f}_{\sigma}^{\text{int}}(\mathbf{U})$, donde $\mathbf{f}_{\sigma}^{\text{int}}(\mathbf{U})$ puede interpretarse como el gradiente de una función de energía de deformación,

$$\mathbf{f}_{\sigma}^{\text{int}}(\mathbf{U}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left[\int_t P_{\text{int}} dt \right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \underbrace{\left[\int_V \rho \omega dV + \int_t \dot{K} dt \right]}_{E(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}})} \Rightarrow \mathbb{K}^T = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{f}_{\sigma}^{\text{int}}(\mathbf{U}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left[\int_V \rho \omega dV \right] \quad (\text{B4.53})$$

Donde P_{int} es la potencia introducida, $\dot{\mathbf{U}}$ la densidad de energía interna, $\dot{K}$ la potencia cinética (ver cap-B-2) y $E(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = \int_V \rho \omega dV + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T : \mathbb{M} : \dot{\mathbf{U}}$ que es la energía total del sistema.

Se supone que $\int_V \rho \omega dV \geq 0$ y que $\mathbb{K}$ es simétrica y que la solución del problema dinámico satisface la *identidad fundamental en energía*, que establece,

$$E(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = E(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0) + \underbrace{\int_0^t \dot{\mathbf{U}}(\tau) : \mathbf{f}^{\text{ext}}(\tau) d\tau}_{\text{Impulso de la fuerza acumulada } 0 \leq \tau \leq t} \quad (\text{B4.54})$$

En esta última puede verse que para una fuerza exterior nula la energía se conserva y es constante,

$$\text{Sí } \mathbf{f}^{\text{ext}}(\tau) = \mathbf{0} \Rightarrow E(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = E(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0) \quad (\text{B4.55})$$

En esta situación, la regla del trapecio puede escribirse como,

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbb{M} \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \left[\mathbf{f}_{\sigma}^{\text{int}}(\mathbf{U}) \right]^{t+\Delta t} - \left[\mathbf{f}^{\text{ext}} \right]^{t+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (\text{B4.56})$$

que linealizada conduce a la forma (B4.35). En la ecuación (B4.56), según la regla del trapecio, la velocidad y el desplazamiento se expresan como,

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \frac{\Delta t}{2} [\dot{\mathbf{U}}^t + \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}] \\ \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{\mathbf{U}}^t + \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}] \end{cases} \quad (\text{B4.57})$$

Cuyos valores iniciales son,

$$\begin{cases} \mathbf{U}(t=0) = \mathbf{U}_0 \\ \dot{\mathbf{U}}(t=0) = \dot{\mathbf{U}}_0 \\ \ddot{\mathbf{U}}(t=0) = \ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbb{M}^{-1} [\mathbf{f}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\sigma}^{\text{int}}(\mathbf{U}_0)] \end{cases} \quad (\text{B4.58})$$

El problema algebraico no lineal en $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$ se obtiene por sustitución de las ecuaciones (B4.57) en (B4.56).

En lo que sigue conviene observar el problema algebraico no-lineal, linealizado en el tiempo mediante el procedimiento de Newmark como un funcional de Euler-Lagrange. Esta forma coincide también con el denominado funcional de Hamilton⁷ expresado en $(t + \Delta t)$, cuya expresión es,

$$\pi(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = E(\mathbf{U}^{t+\Delta t}, \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}) - [\mathbf{U}^{t+\Delta t}]^T \cdot \{ \hat{\mathbf{f}}^{t+\Delta t} - [\mathbf{f}^{\text{int}}]^{t+\Delta t} \} \quad (\text{B4.59})$$

Donde $\hat{\mathbf{f}}^{t+\Delta t}$ es la expresión de la fuerza externa linealizada para el algoritmo de Newmark, cuya expresión se muestra en la ecuación (B4.35). Sustituyendo en la ecuación (B4.59) la expresión de $E(\mathbf{U}^{t+\Delta t}, \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t})$ y $\hat{\mathbf{f}}^{t+\Delta t}$, resulta el funcional buscado,

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = & \frac{2}{\Delta t^2} [\mathbf{U}^{t+\Delta t}]^T \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{U}^{t+\Delta t} + \left[\int_V \rho \omega dV \right]^{t+\Delta t} - \\ & - [\mathbf{U}^{t+\Delta t}]^T \cdot \left\{ [\mathbf{f}^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} + \mathbb{M} \cdot \left[\ddot{\mathbf{U}}^t + \frac{4}{\Delta t^2} (\Delta \mathbf{U}^t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^t) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B4.60})$$

Cuya primera variación, que hace estacionario el funcional, resulta

$$\begin{aligned} \delta \pi(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = & \delta [\mathbf{U}^{t+\Delta t}]^T \cdot \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{t+\Delta t} = \delta [\mathbf{U}^{t+\Delta t}]^T \left\{ \frac{4}{\Delta t^2} \mathbb{M} \cdot \mathbf{U}^{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{\sigma}^{\text{int}}(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) - \right. \\ & \left. - [\mathbf{f}^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} - \mathbb{M} \cdot \left[\ddot{\mathbf{U}}^t + \frac{4}{\Delta t^2} (\Delta \mathbf{U}^t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^t) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B4.61})$$

Tal que esta última es nula para cualquier variación de $\delta [\mathbf{U}^{t+\Delta t}] \neq 0$.

Regla del trapecio modificada.

Se modifica la regla del trapecio con la condición de satisfacer la siguiente ecuación de conservación de la energía durante un paso de tiempo Δt ,

$$E^{t+\Delta t} - E^t = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t})^T \cdot [\Delta \mathbf{f}^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} \quad (\text{B4.62})$$

Donde $E^{t+\Delta t} = E(\mathbf{U}^{t+\Delta t}, \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t})$. Como puede observarse en la ecuación anterior, la energía se conserva y se mantiene constante para $\mathbf{f}^{\text{ext}} = \text{cte}$.

Para formular el algoritmo buscado, es decir respetando la “condición de conservación de la energía” en $(t + \Delta t)$, se impone el siguiente funcional, obtenido a partir de la (B4.62), que servirá de ecuación de restricción,

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = E(\mathbf{U}^{t+\Delta t}, \frac{2}{\Delta t} (\Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{U}}^t)) - E^t - \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t})^T \cdot [\Delta \mathbf{f}^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} = 0 \quad (\text{B4.63})$$

Esta condición $\mathcal{L}(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = 0$, combinada con las ecuaciones (B4.57), implica que la condición de conservación de la energía, $E^{t+\Delta t} - E^t = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t})^T \cdot [\Delta \mathbf{f}^{\text{ext}}]^{t+\Delta t}$, queda satisfecha.

Considerando ahora el funcional de Euler-Lagrange $\pi(\mathbf{U}^{t+\Delta t})$, que define el problema algebraico no lineal mediante la regla del trapecio, y la ecuación de restricción $\mathcal{L}(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = 0$; se formula a continuación un *funcional de Euler-lagrange con restricción de conservación de la energía* a través del uso del multiplicador de Lagrange m_λ . Esto es,

$$\bar{\pi}(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = \underbrace{\pi(\mathbf{U}^{t+\Delta t})}_{\text{funcional}} + m_\lambda \underbrace{\mathcal{L}(\mathbf{U}^{t+\Delta t})}_{\text{restricción}} \quad (\text{B4.64})$$

Haciendo nula la primera variación, se encuentra el campo de desplazamiento que hace estacionario este funcional.

$$\delta \bar{\pi}(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = \delta [\mathbf{U}^{t+\Delta t}]^T \cdot \left\{ \left. \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{U}} \right|^{t+\Delta t} + m_\lambda \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{U}} \right|^{t+\Delta t} \right\} + \delta m_\lambda \mathcal{L}(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = 0 \quad (\text{B4.65})$$

Sustituyendo en esta los respectivos funcionales, y haciendo nula la expresión para cualquier variación no nula de $\delta [\mathbf{U}^{t+\Delta t}]^T$ y δm_λ , resulta el siguiente sistema algebraico que representa la ecuación del movimiento con la condición de conservación de la energía,

$$\begin{aligned} 0 = (1 + m_\lambda) \left\{ \frac{4}{\Delta t^2} \mathbb{M} \cdot \mathbf{U}^{t+\Delta t} + \mathbf{f}_\sigma^{\text{int}}(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) \right\} - \left(1 - \frac{m_\lambda}{2} \right) [\mathbf{f}^{\text{ext}}]^{t+\Delta t} - \frac{m_\lambda}{2} [\mathbf{f}^{\text{ext}}]^t - \\ - \mathbb{M} \cdot \left[\mathbf{U}^t + \frac{4}{\Delta t^2} \left((1 + m_\lambda) \mathbf{U}^t + \Delta t \left(1 + \frac{m_\lambda}{2} \right) \mathbf{U}^t \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B4.66})$$

La solución simultánea de las ecuaciones (B4.63) y (B4.66), mediante un algoritmo iterativo, permiten obtener el multiplicador de Lagrange m_λ que controla la fuerza introducida al sistema, y los campos de desplazamiento, velocidad y aceleración buscados.

APÉNDICE - 1

Programa para la obtención del radio espectral de una matriz.

A continuación se muestra un programa escrito en FORTRAN que permite obtener el radio espectral de una matriz. Si éste se utiliza para estudiar el concepto de estabilidad en la solución del método de Newmark, presentado en el apartado B4.5.1, resulta la siguiente relación entre radio espectral $\rho(\mathbf{A})$ y el cociente entre incremento de tiempo y período $\Delta t / T$.

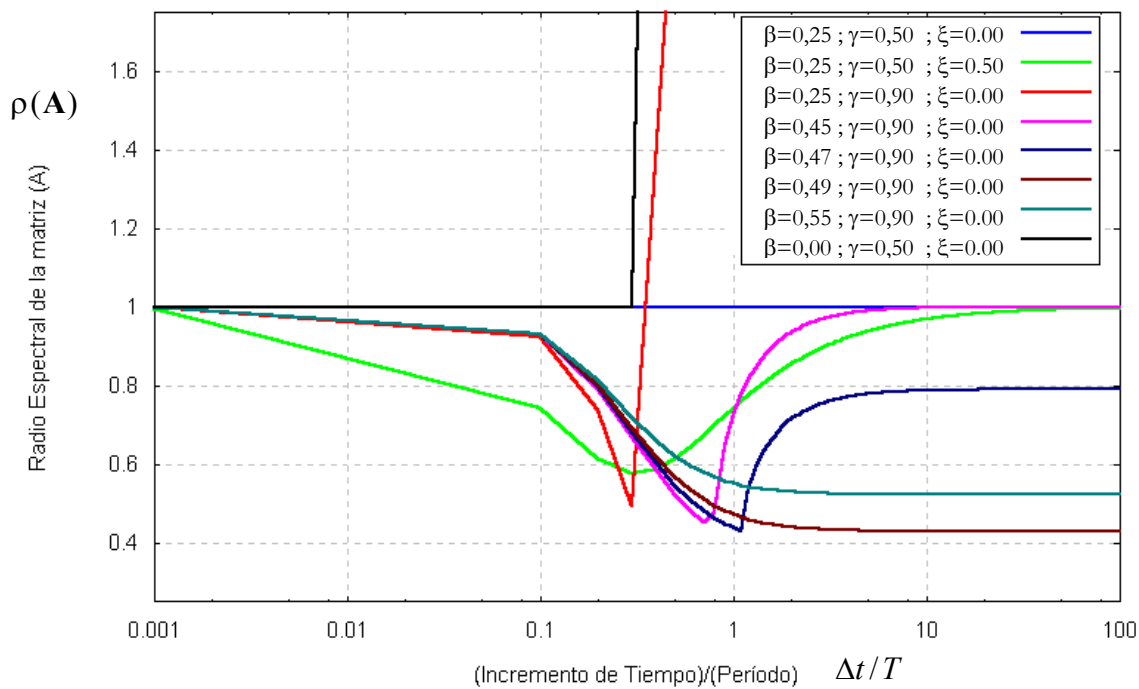


Figura 4.3 – Estudio de estabilidad de la solución para el método de Newmark.

Esta última figura puede verse como la estabilidad de la solución de Newmark está garantizada para $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.5$, en tanto para cualquier otro caso la estabilidad de la solución estará condicionada a la relación $\Delta t / T$ y hay alguna zona del dominio donde el radio espectral $\rho(\mathbf{A}) \neq 1$.

```

PROGRAM estabilidad
C-----
C
C   ESTE PROGRAMA RESUELVE EL PROBLEMA DE ESTABILIDAD
C   POR EL METODO DEL RADIO ESPECTRAL
C
C   ESTA APLICADO SOBRE EL METODO DE NEWMARK
C
C   Entrada de datos:                                archivo.dts
C   Salida de resultados RADIO ESPECTRAL vs DT/T:    archivo.res
C   Salida de resultados de Vect. y Val. propios:     archivo.sal
C
C   MANUAL DE ENTRADA DE DATOS
C
C   Ng           : Numero de grados de libertad del sistema,
C   Dtini        : Incremento de tiempo inicial
C   Dtfin        : Incremento de tiempo final
C   T            : Periodo
C   B            : Beta Newmark
C   G            : Gama Newmark
C   Psi          : Amortiguamiento
C   Iread        : 1 (calcula para la matriz de Newmark)
C                 2 (calcula para la matriz de Dif. Centrada)
C-----
C   si Iread = 2, entonces:
C
C COEFICIENTES PARA MONTAR LA matriz
C
C COEFmatrix(1 : 1)
C COEFmatrix(1 : 2)
C COEFmatrix(1 : 3)
C      .
C      .
C COEFmatrix (Ng:Ng)
C-----
C
C IMPLICIT INTEGER*4 (I - N)
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C complex (8) RAIZ,vl1,vl2
C PARAMETER (NP=2)
C
C DIMENSION AUX1 (NP,NP) ,AUX2 (NP,NP) ,AUX3 (NP,NP) ,
C      . COEFmatrix (NP,NP) ,A1 (NP,NP) ,A2 (NP,NP) ,
C      . A1inv (NP,NP)
C DIMENSION DVAL (NP) ,DVEC (NP,NP) ,RES (NP)
C DIMENSION IEIG (NP)
C CHARACTER ARCH1*20,ARCH2*20,ARCH3*20,CN*20
C
C PI=DACOS (-1.0D00)
C
C*** PUESTA A CERO DE ALGUNAS MATRICES
C
C DO Ig=1,NP
C   DO Jg=1,NP
C     AUX1 (Ig,Jg)=0.0
C     AUX2 (Ig,Jg)=0.0
C     AUX3 (Ig,Jg)=0.0
C     IF (Jg.EQ.Ig) AUX2 (Ig,Jg)=1.0
C   ENDDO
C ENDDO

```

```

C*** LECTURA DEL NOMBRE DE ARCHIVO

      WRITE(6,*) ' CARGUE EL NOMBRE DEL ARCHIVO, SIN RAIZ >>>>'
      READ(5,111)CN
111  FORMAT(1A20)
C
C*** ELIMINACION DE BLANCOS EN EL NOMBRE DEL ARCHIVO
C
      DO 444 IN1=1,20
444  IF (CN(IN1:IN1).EQ.' ') GOTO 445
445  IN1=IN1-1
C
      IN2=IN1+4
C
      ARCH1=CN(1:IN1)//'.dts'
      ARCH2=CN(1:IN1)//'.res'
      ARCH3=CN(1:IN1)//'.sal'
C
      OPEN(UNIT=1,FILE=ARCH1(1:IN2),STATUS='OLD') ! Todos los Datos
      OPEN(UNIT=2,FILE=ARCH2(1:IN2),STATUS='NEW') ! Radio espectral
      OPEN(UNIT=3,FILE=ARCH3(1:IN2),STATUS='NEW') !Res.Autoval. Autovec

C*** LECTURA DE DATOS
C  Lectura de todos los datos del problema
C
      READ(1,*)Ng,Dtini,Dtfin,T,B,G,Psi,Iread
      W=2.0*Pi/T
      Dinc=(Dtfin-Dtini)/1000.0
      Dt=Dtini
C
      IF(Ng.GT.NP) THEN
        WRITE(6,*) ' ORDEN MATRIZ  > QUE EL MAXIMO DIMENSIONADO'
        STOP
      ENDIF
C
C*** IMPRIME LA CABECERA DEL ARCHIVO DEL RADIO ESPECTRAL
C
      WRITE(2,910)B,G,Psi
910  FORMAT('# Curva Dt/T vs Rad. Espectral. ( Newmark: Beta:',1F5.3,
.      1x,' ,Gamma:',1F5.3,
.      1x,' ,Psi:',1F5.3,')' )

1111 CONTINUE
      IF(Iread.EQ.1)THEN      !NEWMARK
        Dt2=Dt*Dt
        W2=W*W
C
        matriz A1

        A1(1,1)=1.0+(Dt2*B*W2)
        A1(1,2)=2.0*Dt2*B*Psi*W
        A1(2,1)=Dt*G*W2
        A1(2,2)=1.0+(2.0*Dt*G*Psi*W)

C
        matriz A2

        A2(1,1)=1.0-((0.5*Dt2)*(1.0-2*B)*W2)
        A2(1,2)=Dt*(1.0-(Dt*(1.0-2.0*B)*Psi*W))
        A2(2,1)=-Dt*(1.0-G)*W2

```

```

      A2(2,2)=1.0-(2.0*Dt*(1.0-G)*Psi*W)

C      Inversión de la matriz A1

      CALL INGAUS(A1,A1inv,NP,NG)

C      CALCULO DE LA MATRIZ ESPECTRAL DE NEWMARK

      DO Ig=1,Ng
      DO Jg=1,Ng
      COEFmatrix(Ig,Jg)=0.0
      DO Kg=1,Ng
      COEFmatrix(Ig,Jg)=COEFmatrix(Ig,Jg)+
      .      A1inv(Ig,Kg)*A2(Kg,Jg)
      ENDDO
      ENDDO
      ELSE ! Diferencias Centradas
      Dt2=Dt*Dt
      W2=W*W

C      matriz A1

      x=1.0/((1.0/(W2*Dt2))+(Psi/(W*Dt)))
      y=Psi*x/(W*Dt)

      A1(1,1)=0.5*Dt*(1.0-x*0.5-y)
      A1(1,2)=(1.0-x*0.5-y)
      A1(2,1)=0.5*Dt2
      A1(2,2)=Dt

C      CALCULO DE LA MATRIZ ESPECTRAL DE NEWMARK

      DO Ig=1,Ng
      DO Jg=1,Ng
      COEFmatrix(Ig,Jg)=A1(Ig,Jg)
      ENDDO
      ENDDO
      ENDIF

c      ESCRIBE LA MATRIZ A ANALIZAR

      WRITE(3,903)Dt
903  FORMAT(' Matriz Espectral a Analizar, para',1F12.5)
      DO 3 Ig=1,Ng
      WRITE(3,999) (COEFmatrix(Ig,Jg),Jg=1,Ng)
      DO 3 Jg=1,Ng
      AUX1(Ig,Jg)=COEFmatrix(Ig,Jg)
3    CONTINUE

C*** CALCULO DE AUTOVALORES Y AUTOVECTORES y RADIO ESPECTRAL

      Alcoef=0.5*(AUX1(1,1)+AUX1(2,2))
      A2coef=AUX1(1,1)*AUX1(2,2)-AUX1(1,2)*AUX1(2,1)
      DIS=(Alcoef*Alcoef)-A2coef

cc      RAIZ=CDSQRT(DCMPLX(DIS))
      v11=(Alcoef+RAIZ)
      v12=(Alcoef-RAIZ)

c

```

```

      Pent1=DREAL(v11)
      Pima1=DIMAG(v11)
      vmod1=dsqrt(Pent1*Pent1+Pima1*Pima1)
C
      Pent2=DREAL(v12)
      Pima2=DIMAG(v12)
      vmod2=dsqrt(Pent2*Pent2+Pima2*Pima2)
C
      RADIO=vmod1
      IF(vmod2.ge.radio) RADIO=vmod2

C
C*** IMPRESION DE LA RESPUESTA
C
C      WRITE(3,850)1,Pent1,Pima1
C      WRITE(3,850)2,Pent2,Pima2
      WRITE(2,100) (Dt/T),radio
C
      Dt=Dt+Dinc
      IF(Dt.LT.Dtfin)GOTO 1111
C
      STOP
100  FORMAT(3(1X,F12.5))
850  FORMAT(/,5X,I5,2X,' Auto VALOR  -- w=',1X,1E12.5,'i',1E12.5)
999  FORMAT( 30(1X,1E12.5))
      END
C-----

      SUBROUTINE INGAUS (A,B,NP,N)
C*****
C      SUBROUTINA PARA INVERSION DE MATRICES POR ELIMINACION GAUSIANA
C      PARAMETROS:
C
C          A ==>  MATRIZ A INVERTIR
C          B ==>  MATRIZ INVERTIDA
C          N ==>  ORDEN DE LA MATRIZ
C*****
      IMPLICIT INTEGER*4 (I - N)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

      DIMENSION A(NP,NP),B(NP,NP)
C
      DATA TOLSL /1.0E-30/

      DO I=1,N
         IF(DABS(A(I,I)).LT.TOLSL) A(I,I)=1.0E-15
      ENDDO

      DO I=1,N
         DO J=1,N
            B(I,J)=0.0
            IF(I.EQ.J) THEN
               B(I,J)=1.0D0
            ENDIF
         ENDDO
      ENDDO

      DO I=1,N
         P=A(I,I)
         IF(ABS(P).LT.TOLSL) THEN
            PRINT '(A72)',
.              ' ERROR EN LA RUTINA DE INVERSION DE MATRICES'

```

```
      STOP
      ENDIF
      TEMP=1.0D0/P
      DO J=1,N
        B(I,J)=B(I,J)*TEMP
        A(I,J)=A(I,J)*TEMP
      ENDDO
      DO K=1,N
        IF(K.NE.I) THEN
          P=A(K,I)
          DO J=1,N
            A(K,J)=A(K,J)-P*A(I,J)
            B(K,J)=B(K,J)-P*B(I,J)
          ENDDO
        ENDIF
      ENDDO
      ENDDO
      RETURN
C
      END
C-----
```

APÉNDICE - 2

Ecuación diferencial vinculada a un funcional – Funcional natural de Euler-Lagrange.

Dado un funcional que depende de una función $f = f(x)$, de su derivada $f_x = df/dx$ y de la propia variable x , y cuya expresión matemática tiene la siguiente forma,

$$\pi = \int_{x=a}^{x=b} I(f, f_x, x) dx \quad (\text{B4.67})$$

y haciendo estacionaria su primera variación,

$$\delta\pi = 0 = \int_{x=a}^{x=b} \left[\frac{\partial I}{\partial f} \delta f + \frac{\partial I}{\partial f_x} \delta f_x \right] dx \quad (\text{B4.68})$$

se obtiene, luego de hacer la siguiente integral por partes $\int_{x=a}^{x=b} \frac{\partial I}{\partial f_x} \delta f_x dx = \frac{\partial I}{\partial f_x} \delta f_x \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial f_x} \right) \delta f dx$, la siguiente expresión para la primera variación,

$$\delta\pi = 0 = \int_{x=a}^{x=b} \left[\frac{\partial I}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial f_x} \right) \right] \delta f dx + \frac{\partial I}{\partial f_x} \delta f_x \Big|_{x=a}^{x=b} \quad (\text{B4.69})$$

Puesto que $\delta f \neq 0$, entonces se obtienen las siguientes relaciones,

- a) La ecuación de Euler - Lagrange $\frac{\partial I}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial f_x} \right) = 0$, $\forall a \leq x \leq b$,
- b) La condición de contorno $\frac{\partial I}{\partial f_x} \delta f_x \Big|_{x=a}^{x=b} = 0$ en : $x = a$ y $x = b$

(B4.70)

B 5 Modelos independientes del tiempo^(*).

B 5.1 Introducción.

En este capítulo se hace un recordatorio de algunos conceptos básicos de la *teoría de la elasticidad* y sus variables mecánicas, y principalmente se presenta en forma breve la *teoría de la plasticidad clásica* y una modificación de la misma que la hace más general y también se hace una breve presentación de la *teoría de daño continuo*. Todos estos desarrollos se harán dentro del marco de una cinemática con pequeños movimientos, que supondremos también que introduce pequeñas deformaciones. Es aconsejable apoyar estas lecturas con consultas a las referencias básicas de la mecánica de medios continuos^{1,2,3}, donde se encuentran las respuestas a cuestiones más profundas sobre este tema. No obstante es obligado establecer los criterios, hipótesis y notaciones, y recordar aquellos conceptos que se consideran de mayor importancia para el tema que se desarrolla en este trabajo.

B 5.2 Comportamiento Elástico.

Es conveniente recordar que un punto de un sólido sometido a un comportamiento elástico en pequeñas deformaciones debe cumplir las siguientes condiciones básicas para mantener su estabilidad y ser admisible dentro del conjunto de leyes de la mecánica,

1 - Condición de equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\rho b_i \quad (\text{B5.1})$$

2 - Condiciones de equilibrio en el contorno

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad ; \quad \sigma_{ij} n_j = t_i \quad (\text{B5.2})$$

^(*) Nota: Este capítulo es un resumen de los capítulos 6, 9 y 10 del libro:

S.Oller (2001). *Fractura mecánica – Un enfoque global*. CIMNE – Ediciones UPC. Barcelona.

¹ Malvern, L. (1969). *Introduction to the mechanics of continuous medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

² Lubliner, J. (1990). *Plasticity theory*. MacMillan, New York.

³ Maugin, G. A. (1992). *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press.

3 - Condición de deformación infinitesimal

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0^T \mathbf{u}) \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = \nabla_j^S u_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{B5.3})$$

tal que en estas tres últimas ecuaciones t_i es la fuerza de superficie aplicada sobre el contorno S , σ_{ij} es el tensor de tensiones de Cauchy, n_j el vector normal a la superficie S que envuelve el sólido^{1,2,3}, b_i fuerzas de volumen por unidad de masa; $\rho = \partial M / \partial V$ la densidad de masa, M la masa y V el volumen; u_i es el campo de desplazamientos y ε_{ij} el tensor de deformación infinitesimal.

Las ecuaciones que definen los modelos constitutivos elásticos clásicos están bien establecidas y son las siguientes:

“**Modelo elástico de Cauchy**”, que es el clásico de los modelos elásticos, en cuya formulación la variable del problema se establece a través de una función tensorial lineal de argumentos tensoriales, cuya expresión es la que a continuación se muestra,

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = f_{ij}^{-1}(\sigma_{kl}) \quad (\text{B5.4})$$

Así resulta la tensión a partir de un modelo cuya variable libre es la deformación, o se obtiene la deformación en los modelos basados en variables libres de tensión. Estas relaciones son invertibles y también reversibles, por lo que en elasticidad no hay disipación de energía.

“**Modelo elástico de Green**”, o también llamado hiperelástico, en el cual la variable del problema depende de una densidad de potencial $\Psi = \Psi(\varepsilon_{ij})$, o de su complemento $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\sigma_{ij})$, que debe ser preestablecida,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \bar{\Psi}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{B5.5})$$

Al igual que en el modelo de Cauchy, la tensión resulta a partir de un potencial basado en la variable libre de deformación, o en forma inversa, se obtiene la deformación a partir de un potencial basado en la variable libre de tensión. También estas relaciones son invertibles y reversibles, por lo tanto no hay disipación de energía. Este modelo contiene al anterior y es la forma más general y amplia para definir el comportamiento elástico de un punto de un sólido.

“**Modelos Hipoelásticos**”, se basan en una definición que proviene normalmente de la observación experimental. Estos modelos no son apropiados cuando se define el comportamiento de un material elástico no-lineal, porque pueden violar las leyes básicas de la termodinámica. Esto se debe a la arbitrariedad con que pueden ser establecidos. Normalmente se pueden escribir en la siguiente forma,

$$\dot{\sigma}_{ij} = f_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij}; \sigma_{mn}) \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = g_{ij}(\varepsilon_{ij}; \dot{\sigma}_{mn}) \quad (\text{B5.6})$$

En todos los modelos antes citados siempre debe cumplirse el concepto de reversibilidad termodinámica e independencia entre tensiones y trayectoria.

Una relación lineal muy establecida y que cumple con las tres definiciones anteriores es la ley de Hooke generalizada,

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{B5.7})$$

donde aparece un operador mecánico, denominado tensor constitutivo $\mathbb{C}_{ijkl}$. Este tensor es de cuarto orden y tiene 81 componentes en su expresión más general, pero para el caso de elasticidad lineal e isotrópica se reduce a dos componentes independientes. Estas componentes son el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν . En este caso de isotropía y haciendo uso de las condiciones de simetría del tensor constitutivo de cuarto orden², puede escribirse como un tensor de segundo orden (matriz cuadrada) de 36 componentes.

Otras formas de escribir la relación elástica lineal (B5.7), es a partir de las constantes de Lamé¹, en cuyo caso la tensión suele descomponerse en la contribución de dos sumandos, uno que se refiere al efecto de los cambios volumétricos y otro al efecto de las desviaciones o distorsiones. Esto es,

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \underbrace{(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij})}_{e_{ij}} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{B5.8})$$

donde $\lambda = E/3(1-2\nu)$ y $\mu = E/2(1+\nu)$ son las constantes de Lamé. También puede definirse esta misma ley constitutiva elástica en la siguiente forma,

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{3\nu\kappa}{1+\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{3\kappa(1-2\mu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{B5.9})$$

Donde $\kappa = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \frac{p}{\varepsilon_v}$ es el módulo volumétrico y en el se identifica la deformación volumétrica $\varepsilon_v = \text{tr}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{kk} \delta_{ij} = 3\varepsilon_{oct}$ y la presión o tensión octaédrica $p = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \sigma_{oct}$. Además, en la ecuación (B5.9) se tiene $G = \mu = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}}$, en la cual se identifica $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$; $\tau_{ij} = \sigma_{ij}$.

También puede expresarse la misma ley constitutiva expresada en la ecuación anterior en la siguiente forma,

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{B5.10})$$

donde $E = \frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon_{ij}}$, $\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$, representan el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson.

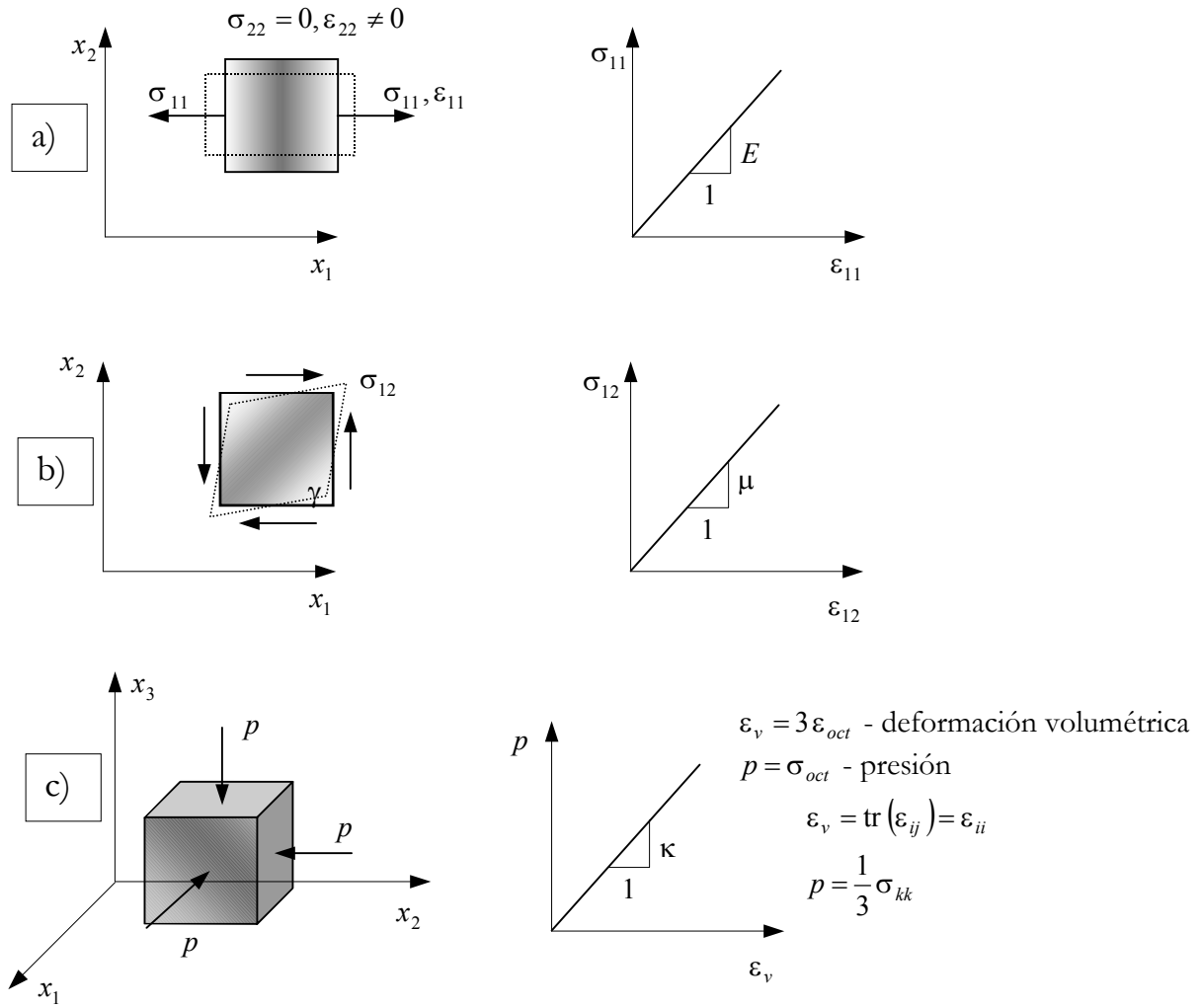


Figura B5.1 – Comportamiento elástico: a) Tracción simple, b) Cortante puro, c) Estado hidrostático.

B 5.2.1 Cálculo de los Invariantes de un Tensor.

Se denomina invariante de un tensor a una entidad escalar cuya magnitud no varía al cambiar el sistema de coordenadas. Sean así dos entidades mecánicas, el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones

$$\sigma_{ij} = \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad \epsilon_{ij} = \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B5.11})$$

Como se sabe, esta forma tensorial es sólo una representación convencional del estado tensional y deformacional de un punto de un sólido a través de sus componentes, según tres planos ortogonales. Así pues, puede darse la paradoja de observar como el estado de tensión o deformación en un punto varía según el plano que se considere, pero esto no es real pues sólo varía la forma en que se representa dicho estado tensional. No obstante hay un modo inequívoco de independizarse de esta forma inobjetiva de medición y esto es a

través de los denominados invariantes de los tensores de tensión y deformación. A continuación se muestran las expresiones más usuales para representar estos invariantes.

A partir del tensor de tensiones y del tensor de deformaciones, pueden obtenerse sus invariantes, cuyas formas más utilizadas para su definición son las siguientes:

Invariantes de los tensores de tensión y deformación,

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{kk}^2) \\ I_3 &= \det[\sigma_{ij}] = |\sigma_{ij}| \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} I'_1 &= \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\ I'_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}^2) \\ I'_3 &= \det[\varepsilon_{ij}] = |\varepsilon_{ij}| \end{aligned} \right\} \quad (B5.12)$$

Invariantes de los tensores de desviadores de tensión y deformación:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= 0 \\ J_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{s}_{ij}\mathbf{s}_{ij} \\ J_3 &= \frac{1}{3}\mathbf{s}_{ij}\mathbf{s}_{jk}\mathbf{s}_{ki} \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} J'_1 &= \varepsilon_{ii} = 0 \\ J'_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{ij} \\ J'_3 &= \frac{1}{3}\mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{jk}\mathbf{e}_{ki} \end{aligned} \right\} \quad (B5.13)$$

donde el tensor desviador de tensiones se representa mediante la siguiente expresión, $\mathbf{s}_{ij} = \sigma_{ij} - \phi\delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij}$, y el tensor desviador de deformación se expresa como, $\mathbf{e}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}$. Existen también otras formas matemáticas de expresar estos invariantes y algunas de ellas también se verán en otras secciones de este libro.

B 5.3 Elasticidad No-Lineal.

B 5.3.1 Introducción.

A continuación se muestra una forma de representar el comportamiento constitutivo elástico no-lineal —reversible— de un material ideal. Para ello es conveniente partir desde una formulación hiperelástica que depende de la densidad de energía, cuya definición puede realizarse en función del campo de deformación (variable libre del problema), como

$$\Psi = \int_{t=0}^t \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dt \quad (B5.14)$$

o a partir de su forma complementaria, densidad de energía complementaria, en función del campo de tensión (variable libre del problema), como

$$\bar{\Psi} = \int_{t=0}^t \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} dt \quad (B5.15)$$

También podría definirse una ley constitutiva elástica no-lineal siguiendo los conceptos de la hipoeelasticidad, es decir, generalizando las ecuaciones lineales.

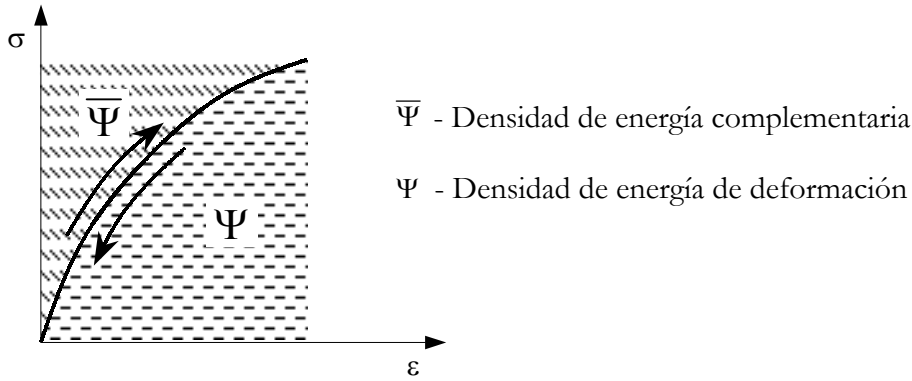


Figura B5.2 – Energía complementaria y de deformación.

B 5.3.2 Modelo Hiperelástico No-Lineal.

Se parte de la definición general de los potenciales a partir de los invariantes,

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi(I'_1; I'_2; I'_3) \Rightarrow \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} && \text{Basado en deformación} \\ \bar{\Psi} &= \bar{\Psi}(I_1; I_2; I_3) \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \sigma_{ij}} && \text{Basado en tensión} \end{aligned} \quad (\text{B5.16})$$

B 5.3.2.1 Modelo Hiperelástico Basado en Tensiones.

Se escoge el siguiente potencial basado en la tensión $\bar{\Psi}(I_1; J_2) = aJ_2 + bI_1J_2$, y se considera hipotéticamente que en el material tienen especial influencia el primer invariante del tensor de tensión y el segundo invariante del desviador de tensión. De aquí resulta la siguiente ley constitutiva,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial I_1} \delta_{ij} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial J_2} \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= bJ_2 \delta_{ij} + (a + bI_1) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B5.17})$$

Suponiendo un problema uniaxial a tracción, el modelo previamente definido, luego de sustituir el primer invariante del tensor de tensiones y el segundo invariante del desviador, se reduce a la siguiente ley constitutiva,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma \quad ; \quad J_2 = \frac{1}{3} \sigma^2 \\ s_{11} &= \frac{2}{3} \sigma \quad ; \quad s_{22} = s_{33} = -\frac{\sigma}{3} \quad ; \quad s_{12} = s_{13} = s_{23} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B5.18})$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon = \frac{b}{3} \sigma^2 + (a + b\sigma) \frac{2}{3} \sigma = \sigma^2 b + \frac{2a}{3} \sigma \quad (\text{B5.19})$$

donde es necesario parametrizar el modelo (obtener los parámetros a y b) y para ello debe realizarse un ensayo de laboratorio, del tipo del que se muestra en la Figura B5.3.

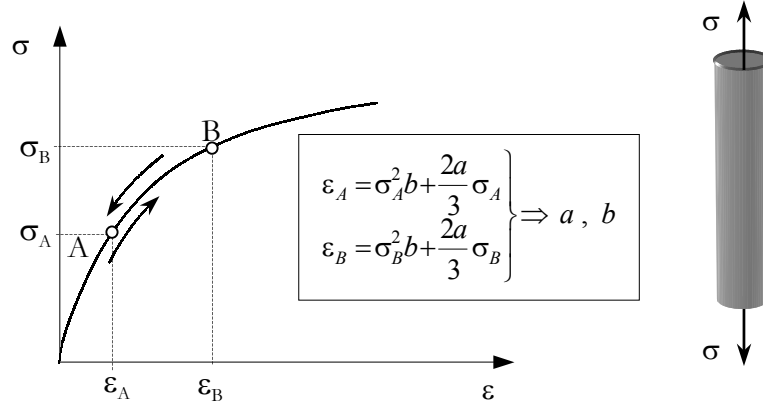


Figura B5.3 – Modelo elástico no-lineal trabajando a tracción.

B 5.3.2.2 Postulados de Estabilidad.

En todas estas formulaciones es conveniente tener en cuenta el criterio de estabilidad o postulados de Drucker¹, porque garantizan indirectamente el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica. Este postulado ha sido deducido originalmente para problemas de plasticidad, que se verán más adelante, pero cuya aplicación es inmediata a los problemas de elasticidad no-lineal.

Considérese un sólido de volumen V y superficie externa S , bajo cargas externas de superficie $\mathbf{t}$ y cargas de volumen $\mathbf{b}$, que producen un estado de desplazamiento $\mathbf{u}$, deformación $\boldsymbol{\epsilon}$ y tensión $\boldsymbol{\sigma}$, en cada punto del sólido. Considérese ahora un cambio arbitrario en la magnitud de dichas cargas, $\dot{\mathbf{t}}$ y $\dot{\mathbf{b}}$, que producen un incremento en los estados de desplazamiento $\dot{\mathbf{u}}$, deformación $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ y tensión $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$. Se dice ahora que el comportamiento de este material será estable, si se cumplen las dos condiciones siguientes (Postulados de Drucker).

Requisitos de Estabilidad:

1. El trabajo realizado por el cambio de magnitud en los agentes externos, debe ser siempre positivo.

$$\int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, dV = \int_S \dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dS + \int_V \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV > 0 \quad (\text{B5.20})$$

2. El trabajo realizado por un cambio de magnitud cíclico experimentado por los agentes externos, debe ser no negativo

$$\oint_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, dV = \oint_S \dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dS + \oint_V \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV \geq 0 \quad , \quad \text{Estabilidad Cíclica} \quad (\text{B5.21})$$

Existencia de la energía libre:

Estos criterios de estabilidad aplicados a materiales elásticos, donde todas las deformaciones son recuperables, constituyen una condición necesaria y suficiente que garantiza la existencia de una energía libre $\Psi(\boldsymbol{\epsilon})$ y de su complementaria $\bar{\Psi}(\boldsymbol{\sigma})$, y por la tanto la existencia de dos leyes constitutivas, una cuya variable libre es la deformación $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon})$ y la otra cuya variable libre es la tensión $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\sigma})$. Esto es,

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{\epsilon}) &= \int_{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \\ \Psi(\boldsymbol{\sigma}) &= \int_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\epsilon} : d\boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\end{aligned}\tag{B5.22}$$

Condición necesaria y suficiente de estabilidad:

Toda relación constitutiva del tipo hiperelástica o de Green, cumple los criterios de estabilidad antes citados, siempre que los potenciales de energía sean definidos positivos. Para probar esto, considérese una relación constitutiva del tipo $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}) = \partial \Psi(\boldsymbol{\epsilon}) / \partial \boldsymbol{\epsilon}$, tal que cualquier variación en los agentes externo provoca el siguiente cambio en la tensión,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial^2 \Psi(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\tag{B5.23}$$

La condición necesaria y suficiente para que se cumpla el criterio de estabilidad de cargas para todo el volumen, ecuación (B5.20) y también para cargas cíclicas, ecuación (B5.21), es que todos y cada uno de los punto de este sólido realicen un trabajo específico de segundo orden positivo,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0\tag{B5.24}$$

Sustituyendo la ecuación (B5.23) en la (B5.24), resulta la siguiente forma cuadrática,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial^2 \Psi(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0\tag{B5.25}$$

tal que su cumplimiento de la condición de estabilidad se garantiza siempre que el Hessiano sea definido positivo. Esto es,

$$H_{ijkl} = \mathbf{H} \quad ; \quad \det(\mathbf{H}) = \det \left| \frac{\partial^2 \Psi(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\epsilon}} \right| > 0\tag{B5.26}$$

En forma alternativa, la condición de estabilidad en aquellos modelos basados en tensiones se garantiza si se cumple que el Hessiano complementario es también definido positivo,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \det(\bar{\mathbf{H}}) = \det \left| \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} \right| > 0\tag{B5.27}$$

Estas dos últimas ecuaciones garantizan la existencia de la energía libre y su carácter positivo, hecho que garantiza que una ecuación constitutiva tenga inversa única.

Condición de convexidad:

La convexidad del potencial garantiza el cumplimiento de los criterios de estabilidad expresados por las ecuaciones (B5.26) y (B5.27). Se entiende que una función es convexa, cuando ninguna tangente a la curva $\Psi(\boldsymbol{\epsilon}) = cte$ o $\bar{\Psi}(\boldsymbol{\sigma}) = cte$, corta a la misma en otro punto de dicha curva.

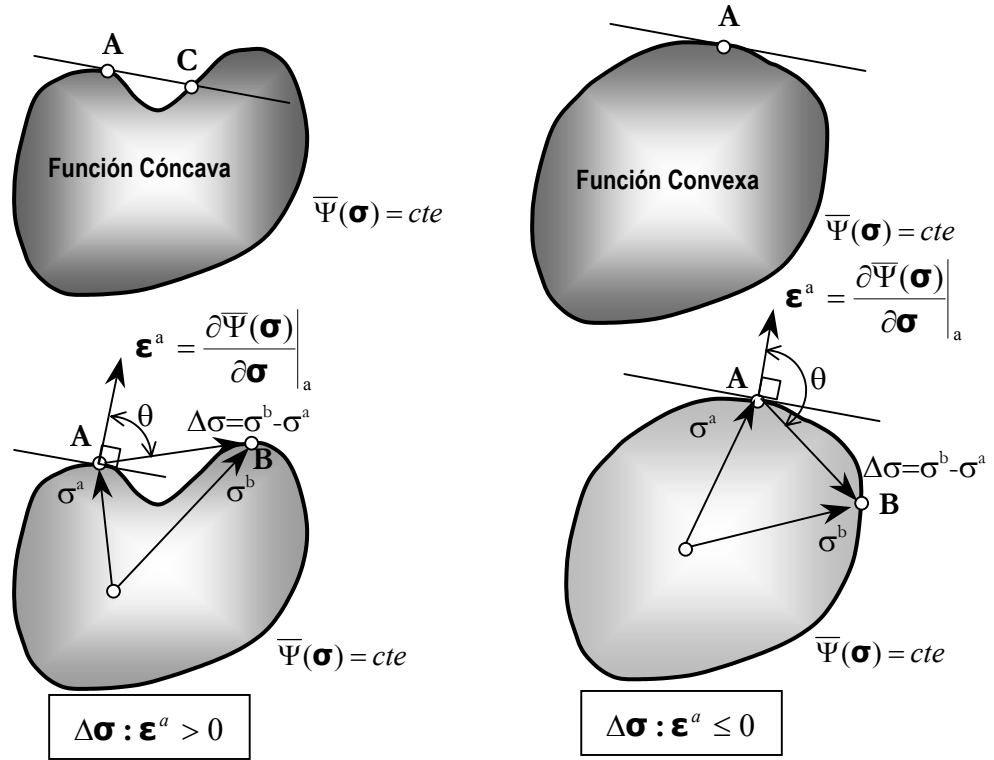


Figura B5.4 – Función cóncava y función convexa.

Matemáticamente se dice que una función potencial es convexa si siempre cumple la siguiente relación entre dos estados cualquiera de tensión, $\Delta\sigma : \epsilon^a = (\sigma^b - \sigma^a) : \epsilon^a \leq 0$.

Se dice que hay concavidad en la función potencial, si al menos hay dos estados de tensión σ^a y σ^b que cumplen la siguiente relación, $\Delta\sigma : \epsilon^a = (\sigma^b - \sigma^a) : \epsilon^a > 0$.

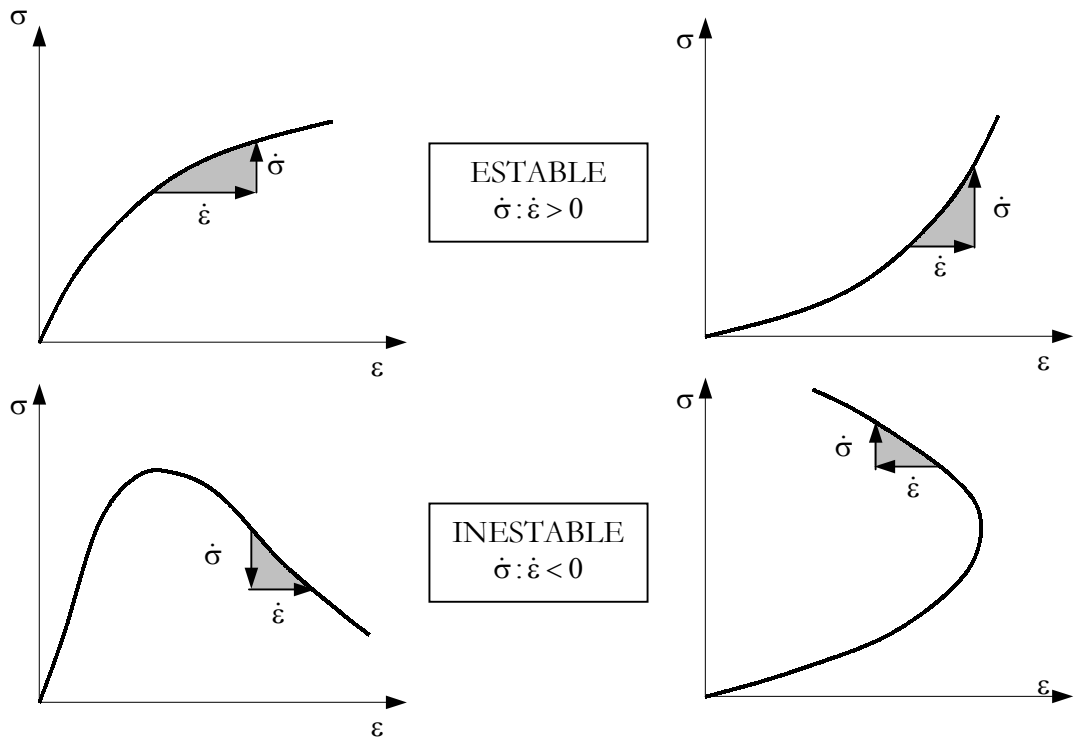


Figura B5.5 – Postulados de estabilidad de Drucker.

Básicamente para cumplir con el postulado de Drucker es conveniente tener en cuenta las siguientes recomendaciones,

- Los potenciales $\Psi(\boldsymbol{\epsilon})$ y $\bar{\Psi}(\boldsymbol{\sigma})$ deben ser definidos positivos,
- Que exista una relación elástica directas y su inversa,

$$\sigma_{ij} = F(\epsilon_{ij}) \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_{ij} = f(\sigma_{ij}) \quad (\text{B5.28})$$

- Que los potenciales $\Psi(\boldsymbol{\epsilon})$ y $\bar{\Psi}(\boldsymbol{\sigma})$ sean funciones convexas.

B 5.4 Plasticidad en Pequeñas Deformaciones.

B 5.4.1 Introducción.

La teoría de la plasticidad representa el comportamiento mecánico de los sólidos cargados dentro de un rango de aplicación que va más allá del que define la teoría de la elasticidad. Existen varias teorías que, sin ser la plasticidad, cumplen con esta idea, por lo tanto su definición necesita mayor precisión y para ello será presentada brevemente en este apartado. Esta teoría matemática fue inicialmente formulada en 1872 para representar el fenómeno de distorsión que sufre la red cristalina de los metales⁴ cuando son sometidos a deformaciones. Actualmente se utiliza su estructura matemática para representar el comportamiento macroscópico de un punto sólido sin que necesariamente, a escala microscópica, se esté desarrollando un fenómeno de plasticidad de metales en el sentido estricto^{1,2,3}. La plasticidad en pequeñas deformaciones se caracteriza por suponer que las deformaciones en un punto, $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$, se descomponen en una parte elástica $\boldsymbol{\epsilon}^e$ y otra plástica $\boldsymbol{\epsilon}^p$ irreversible. Esta última es la que induce a un comportamiento energético no conservativo dependiente del camino recorrido. La formulación de la teoría de la plasticidad se basa en la mecánica de los sólidos continuos y representa el comportamiento físico macroscópico de un sólido ideal, con los siguientes rasgos característicos:

- Un período inicial elástico, lineal o no-lineal (tramo OA' de la Figura B5.6).
- Un comportamiento, denominado elasto-plástico que sigue al período inicial (tramo A'E de la Figura B5.6), donde el campo de tensiones no crece en forma proporcional al campo de deformaciones y en el cual las deformaciones resultan de la adición de una parte recuperable $\boldsymbol{\epsilon}^e$ (cuota elástica) y otra parte irrecuperable $\boldsymbol{\epsilon}^p$ (cuota plástica). Esta parte inelástica de la deformación se manifiesta al iniciar un proceso de descarga, que por hipótesis será siempre elástico.

El punto A' que marca la separación entre estos dos estados mecánicos se lo conoce como límite de fluencia para los materiales metálicos, y como límite de discontinuidad para los materiales friccionales, quedando definido a través de una función en el espacio de tensiones que recibe el nombre de función de fluencia plástica o función de discontinuidad, respectivamente.

⁴ Tresca, H. E. (1872). Mémoire sur l'écoulement des corps solides. Acad. Sci. Paris, 20, 75-135.

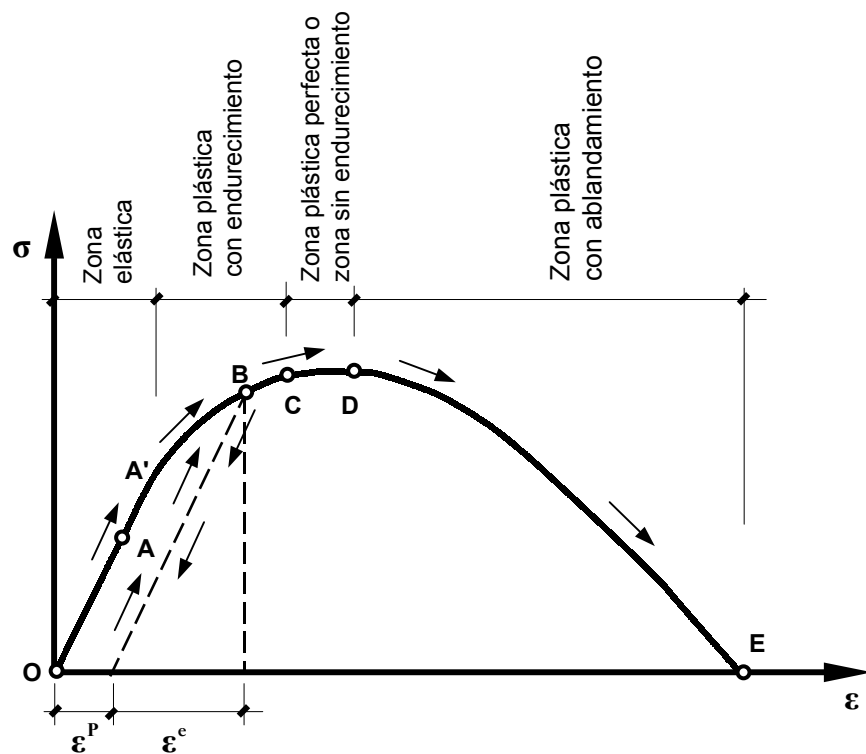


Figura B5.6 – Comportamiento uniaxial esquemático de un material elasto-plástico ideal.

La Figura B5.6, muestra en forma esquemática el comportamiento uniaxial de un punto correspondiente a un material elasto-plástico ideal. Al comenzar el proceso de carga presenta una zona elástica lineal que se mantiene hasta el punto A, llamado límite de proporcionalidad. Seguidamente inicia un proceso elástico no-lineal hasta alcanzar el punto A' llamado límite de elasticidad, a partir del cual comienza el comportamiento elasto-plástico caracterizado por un decrecimiento sostenido del módulo de rigidez tangente debido a la acción de los mecanismos inelásticos irreversibles. Si durante el comportamiento elasto-plástico del punto se inicia un proceso de descarga, se observa que sólo se recupera la parte elástica ϵ^e del total de la deformación ϵ , quedando la deformación plástica ϵ^p como la parte no recuperable. Dentro del período elasto-plástico se pueden distinguir tres regiones (ver Figura B5.6):

- Una donde hay crecimiento de la tensión, tramo (A'-C), que recibe el nombre de zona elasto-plástica con endurecimiento.
- Otra donde el punto que se analiza no experimenta cambio de tensión, tramo (C-D), y recibe el nombre de zona elasto-plástica perfecta o de endurecimiento nulo.
- Por último, una zona donde la tensión decrece bajo crecimiento sostenido de las deformación, tramo (D-E), período elasto-plástico con ablandamiento.

Este material elasto-plástico ideal permite representar bastante bien el comportamiento macroscópico de distintos materiales reales (metálicos y no-metálicos), mediante una simple modificación de los límites definidos anteriormente.

De los conceptos detallados, se puede observar que hay dos grandes aspectos a tratar dentro de la teoría matemática de la plasticidad:

- El criterio de fluencia o de discontinuidad $F(\sigma; q) = 0$, que permite establecer, durante el proceso de carga, el inicio del comportamiento inelástico y posterior

evolución de las fronteras del dominio elástico dentro del espacio de tensiones (ver Figura B5.7).

- El comportamiento más allá del límite elástico, denominado comportamiento elasto-plástico, queda definido a partir de la formulación de: (i) una descomposición de deformaciones en una parte elástica y otra plástica $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$; (ii) una regla de flujo plástica $\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma})$; (iii) y unas variables internas $\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$, que dependen de la evolución del proceso elasto-plástico. Se verá más adelante que la deformación plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ puede también ser tratada como una variable interna, por lo tanto la regla de flujo plástica puede ser entendida como su regla de evolución explícita de esta variable interna.

En los apartados subsiguientes se detallan estos dos conceptos básicos.

B 5.4.2 Criterios de Discontinuidad de Comportamiento o Criterio de Fluencia Plástica.

El *criterio de discontinuidad o Fluencia* es una función escalar de argumentos tensoriales que delimita el dominio elástico. Este criterio está normalmente representado por una función que en adelante se denominará función de fluencia plástica (ver Figura B5.7) y tiene la siguiente forma matemática

$$F(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{B5.29})$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es tensor de tensiones de Cauchy, $\mathbf{q}$ el conjunto de variables internas agrupadas en forma de matriz columna (“back stress”). Esta función establece el límite a partir del cual se inicia el comportamiento no-lineal. Cualquier estado tensional fuera del recinto encerrado por esta superficie es inadmisibles, por lo tanto el proceso de resolución elasto-plástico consiste en forzar a que el estado tensional se sitúe en la frontera o en el interior de la función elasto-plástica (ver Figura B5.7). En un proceso uniaxial esta función está perfectamente establecida por tratarse de un escalar que se compara con otro escalar que representa el umbral entre un comportamiento elástico y otro plástico. Para comportamientos multiaxiales, la función de fluencia se comporta como un traductor de estados multiaxiales a uniaxiales. Un vez obtenida la tensión uniaxial equivalente al estado multiaxial, se compara con un escalar que representa el umbral obtenido en laboratorio para un problema uniaxial.

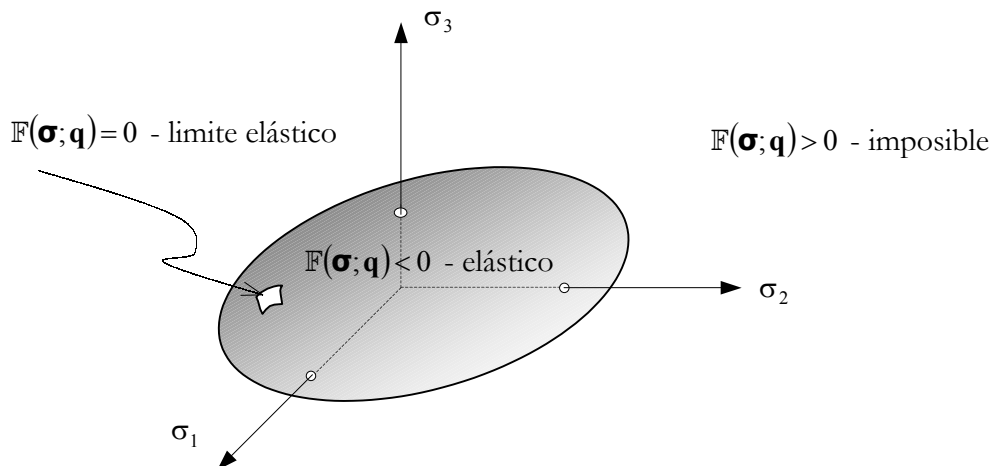


Figura B5.7 – Dominio elástico.

La ley de evolución de las variables internas $\mathbf{q}$ pueden escribirse en forma general dependiendo del estado de la variable libre, tensión en este caso, y magnitud actual de todas las variables internas, de la siguiente forma,

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) \quad (\text{B5.30})$$

donde $\dot{\lambda}$ es un escalar no negativo denominado factor de consistencia plástica, $\mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q})$ es una función tensorial que describe la forma en que evoluciona cada variable interna.

La teoría de la plasticidad sólo admite dos posibles estados de comportamiento mecánico para cada punto de sólido ideal: “El estado elástico” o “el estado elasto-plástico”. La situación de un punto cualquiera, en un determinado instante t del proceso de carga cuasi-estático, queda inequívocamente definido a partir de la condición de consistencia plástica, también llamada condición de consistencia de Prager, que se detallará más adelante. Esto es:

- El proceso de deformación de un punto es elástico si cumple con la siguiente condición,

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) < 0 \quad \text{o si} \quad \dot{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbf{q}} : \dot{\mathbf{q}} < 0 \quad (\text{descarga}) \quad (\text{B5.31})$$

- El proceso de deformación de un punto es elasto-plástico si ocurre,

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbf{q}} : \dot{\mathbf{q}} < 0 \quad (\text{carga}) \quad (\text{B5.32})$$

Estas funciones son simétricas para los materiales isótropos, en el espacio de tensiones, y en ellas suele definirse el estado tensional a través de sus invariantes. Estudios experimentales realizados sobre sólidos no porosos (ej.: materiales metálicos), prueban que la influencia de la presión hidrostática sobre la deformación plástica es despreciable y que la deformación plástica depende fundamentalmente de la tensión desviadora. Esto asegura que la deformación volumétrica será siempre elástica, caso de los sólidos incompresibles. Para este caso particular de materiales metálicos e isótropos, el criterio de fluencia plástica (ecuación (B5.29)), se reduce a:

$$\begin{array}{l} \text{Material Metálico} \\ \text{Isótropo} \end{array} \quad \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = \mathbb{F}(J_2, J_3; \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{B5.33})$$

donde J_2 y J_3 representan respectivamente, el segundo y tercer invariante del tensor desviador de tensiones.

Para los materiales friccionales es necesario tener en cuenta que las fuerzas de rozamiento entre partículas aumentan con la presión entre sus caras. Este efecto se refleja en la importancia que cobra la tensión esférica o hidrostática (primer invariante del tensor de tensiones I_1), que debe ser tenida en cuenta en la formulación del modelo a través de un criterio límite de discontinuidad. Esto es:

$$\begin{array}{l} \text{Material Friccional} \\ \text{Isótropo} \end{array} \quad \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = \mathbb{F}(I_1, J_2, J_3; \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{B5.34})$$

La representación general de las funciones de fluencia o discontinuidad expresadas en las ecuaciones (B5.33) y (B5.34), se realiza mediante una superficie en el espacio de tensiones, donde las direcciones principales de este espacio configuran los ejes de referencia. A este espacio se lo denomina espacio de tensiones de High-Westergaard^{1,2} (ver Figura B5.8 y Figura B5.9). Otra forma de describir estas funciones es a través de su descomposición en planos (ver Figura B5.9). Esto es:

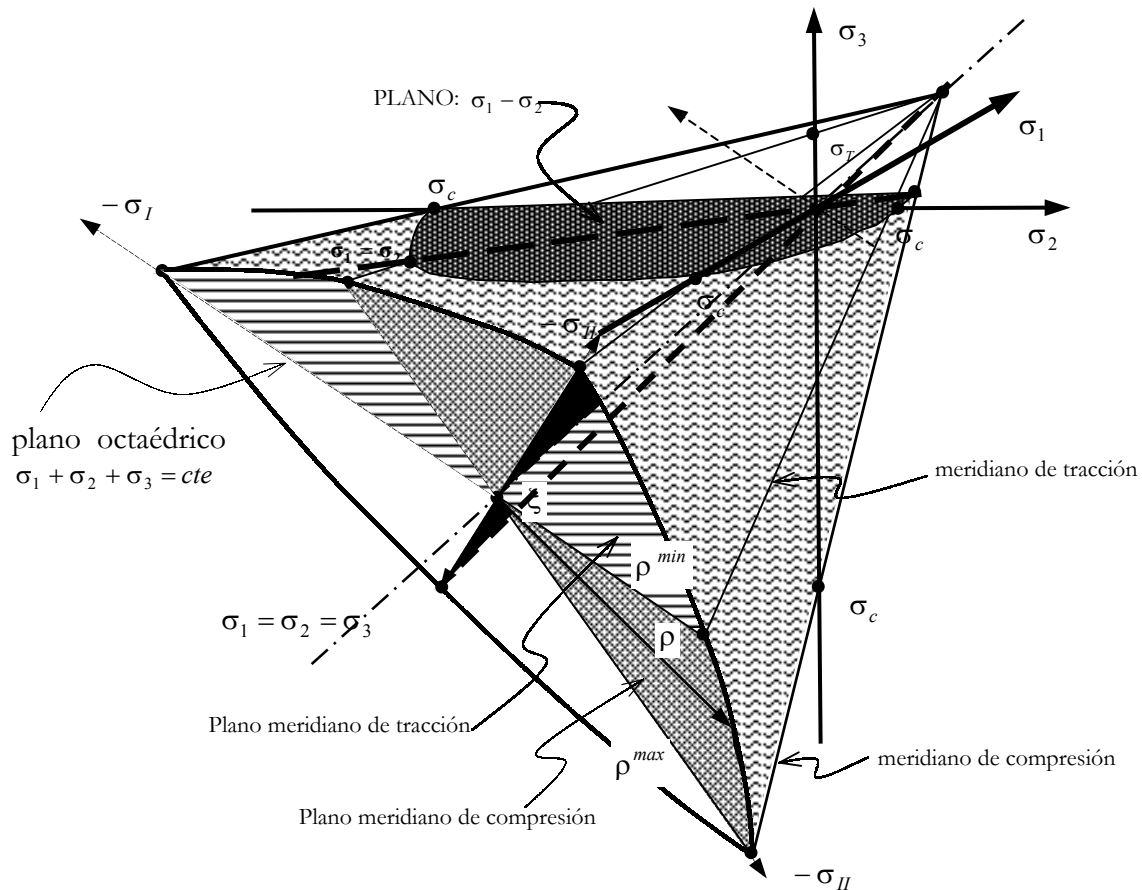


Figura B5.8 – Representación de un genérico criterio de fluencia plástico en el espacio de tensiones principales.

Planos octaédricos: Estos planos cortan en forma ortogonal al espacio diagonal de tensiones (recta definida por $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) y por lo tanto forman igual ángulo con los tres ejes principales de tensión ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) que definen el octante de compresión o tracción total. En estos planos el primer invariante del tensor de tensiones se mantiene constante $I_1 = cte$; así, a través de este invariante se puede conocer *su posición* a partir del origen del espacio de tensiones $\xi = \sqrt{3} \sigma_{oct} = \sqrt{3} (I_1/3) = I_1/\sqrt{3}$. *Su forma* depende de otros dos invariantes, del radio octaédrico $\rho = \sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{2J_2}$, y del ángulo de similitud de Lode $\theta = \arcsen\left[\frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}}\right]$. Se denomina plano Π al plano octaédrico que pasa por el origen del espacio diagonal $\xi = 0$. La intersección de estos planos con la superficie de fluencia, define curvas en el espacio de tensiones principales, que se denominan *funciones de fluencia según planos octaédricos*.

Planos meridianos de compresión máxima: Estos planos son ortogonales a los planos octaédricos, y quedan inequívocamente definidos por la recta que describe el espacio diagonal ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), y por cada una de las rectas que describen el radio octaédrico ρ , para $\theta = 1\pi/6, 5\pi/6, 9\pi/6$. Estos planos cortan a los ejes de tensiones principales σ_i , en puntos de igual valor de tensión uniaxial de compresión σ_c . La intersección de estos planos con la superficie de fluencia, define curvas en el espacio de tensiones, que se denominan *funciones de fluencia según planos meridianos de compresión*.

Planos meridianos de tracción máxima: Estos planos son ortogonales a los planos octaédricos, y quedan inequívocamente definidos por la recta que describe el espacio diagonal ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), y por cada recta que describe el radio octaédrico ρ , cuando $\theta = -1\pi/6, -5\pi/6, -9\pi/6$. Dichos planos cortan a los ejes de tensiones principales σ_i , en puntos de igual valor al de la tensión de tracción uniaxial σ_T . La intersección de estos planos con la superficie de fluencia, define curvas en el espacio de tensiones, que se denominan *funciones de fluencia según planos meridianos de tracción*.

Planos principales: Son aquellos que quedan definidos por la intersección de dos, de las tres direcciones de tensión principal. La intersección de estos planos con la superficie de fluencia, define curvas en el espacio de tensiones que se denominan *funciones de fluencia según planos de tensión principal*.

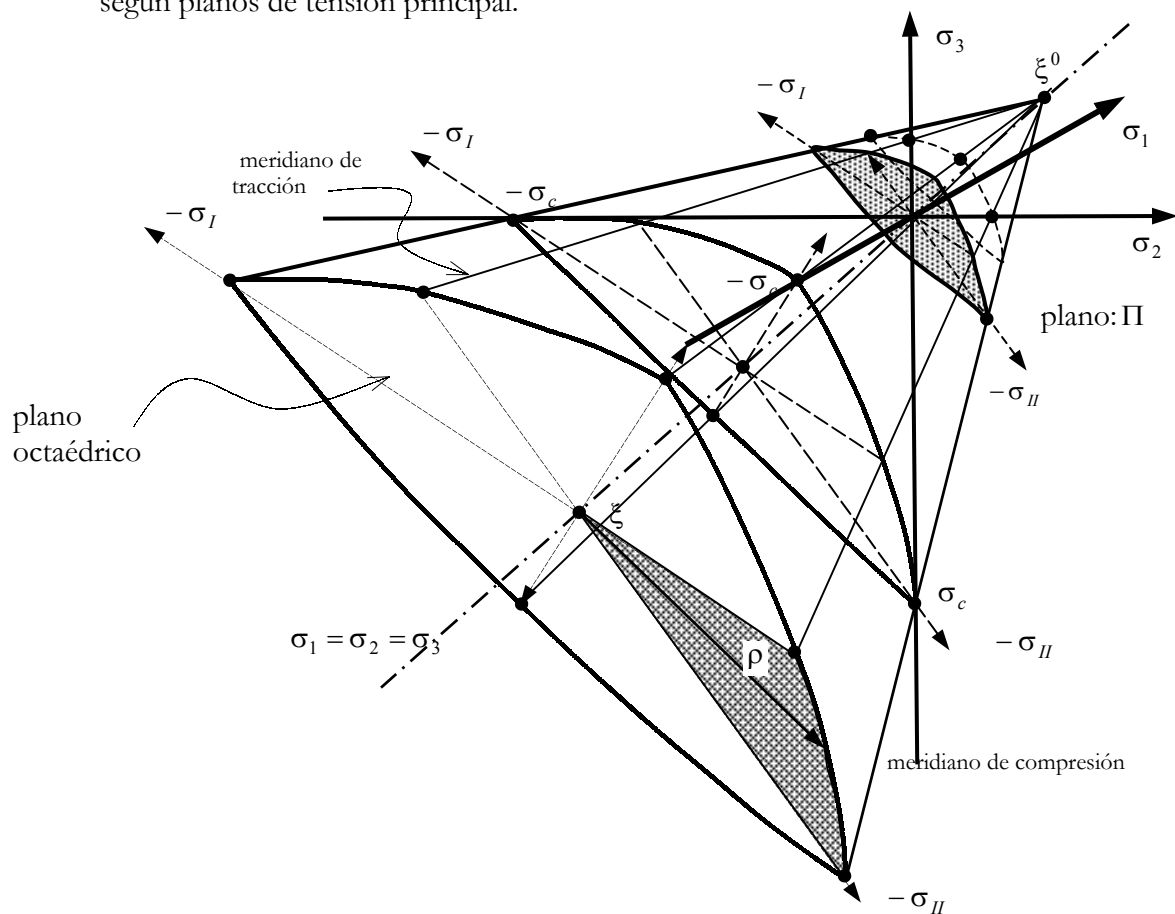


Figura B5.9 – Representación de un genérico criterio de fluencia plástico, descompuesto en planos octaédricos, meridianos y principales.

B 5.5 Comportamiento Elasto-Plástico.

No hay una teoría única para representar el comportamiento elasto-plástico de los materiales. Existen distintas aproximaciones al problema según el objetivo para el que fuera formulado. A continuación se mencionarán aquellas aproximaciones al problema elasto-plástico que se consideran más clásicas.

B 5.5.1 Teoría de Levy-Mises.

Una forma de modelar el comportamiento elasto-plástico de un punto del sólido es mediante la teoría de Levy-Mises. Esta admite, como *primera hipótesis*, que el incremento temporal de deformación total es igual el incremento temporal de deformación plástica durante el proceso elasto-plástico. Esta suposición comporta que la deformación elástica es próxima a cero, o también que el módulo de Young se hace muy grande en este período^{1,2}. Esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \cong \mathbf{0} \quad \text{o bien,} \quad E \rightarrow \infty \quad (\text{B5.35})$$

Esta teoría también supone, como *segunda hipótesis*, que el sólido ideal que se modela es plásticamente incompresible $\epsilon_v^P = 0$; resultando de aquí y de la hipótesis anterior, que el incremento temporal del tensor desviador de deformación plástica, es igual al incremento temporal del tensor de deformación plástica total. Esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\epsilon}_{oct}^P \mathbf{1} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \equiv \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \quad \text{o bien,} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \equiv \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{B5.36})$$

donde la deformación octaédrica es nula y se define como $3\epsilon_{oct}^P = \epsilon_v^P = 0$ y el vector unidad es igual a $\mathbf{1} = \{1,1,1,0,0,0\}^T$. De estas dos hipótesis se deduce que el material se comporta como un rígido plástico no influenciado por los cambios de volumen debido a la presión hidrostática. Esto se identifica bastante bien con los materiales metálicos.

La teoría de Levy-Mises propone que los ejes principales de deformación plástica coincidan con los de tensión, lo que conduce a la tercera hipótesis que define la denominada regla de flujo,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \equiv \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\lambda} \mathbf{s} \quad (\text{B5.37})$$

donde $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{I} \cdot \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$, es el tensor desviador de tensiones.

B 5.5.2 Teoría de Prandtl-Reus.

Es una generalización de la teoría de Levy-Mises. La diferencia fundamental con la teoría antes citada es que se considera que la deformación total resulta de la contribución de una parte elástica y otra plástica,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \quad (\text{B5.38})$$

donde el incremento temporal de deformación elástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ sigue las leyes de la teoría de la elasticidad y el incremento temporal del tensor de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ se obtendrá como una escala del tensor desviador de tensiones $\mathbf{s}$, con lo cual la parte volumétrica del tensor de deformaciones plásticas será nula. Esta hipótesis se conoce como regla de flujo de Prandtl-Reus:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\lambda} \mathbf{s} \Rightarrow \dot{\epsilon}_v^P = 0 \quad (\text{B5.39})$$

El factor de consistencia plástico $\dot{\lambda}$ se obtiene en este caso a partir del espacio de tensiones y deformaciones principales.

$$\dot{\epsilon}_i^P = \dot{\lambda} s_i \longrightarrow (\dot{\epsilon}_i^P - \dot{\epsilon}_j^P) = \dot{\lambda} (s_i - s_j) \quad \{i, j \in 1,2,3\} \quad (\text{B5.40})$$

elevando al cuadrado ambos miembros y sumando componente a componente se obtiene,

$$(\dot{\epsilon}_1^P - \dot{\epsilon}_2^P)^2 + (\dot{\epsilon}_2^P - \dot{\epsilon}_3^P)^2 + (\dot{\epsilon}_1^P - \dot{\epsilon}_3^P)^2 = \dot{\lambda}^2 [(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)^2 + (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_3)^2 + (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)^2] \quad (\text{B5.41})$$

pero recordando que $(s_i - s_j) = (\sigma_i - \sigma_j)$, resulta de la ecuación anterior el factor de consistencia plástico,

$$6\dot{J}_2^P = \dot{\lambda} 6J_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} = \sqrt{\frac{\dot{J}_2^P}{J_2}} \quad (\text{B5.42})$$

donde $\dot{J}_2^P = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{e}}^P : \dot{\mathbf{e}}^P)$ es el segundo invariante del incremento temporal del tensor desviador de deformaciones plásticas $\dot{\mathbf{e}}^P$ y $J_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{s} : \mathbf{s})$ el segundo invariante del tensor desviador de tensiones $\mathbf{s}$. Sustituyendo (B5.42) en (B5.39), se obtiene el tensor de deformación plástica para la teoría de Prandtl-Reus,

$$\dot{\mathbf{e}}^P = \sqrt{\frac{\dot{J}_2^P}{J_2}} \mathbf{s} = \sqrt{\frac{\dot{J}_2^P}{J_2}} \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{J_2}} \quad (\text{B5.43})$$

B 5.6 Teoría Clásica de Plasticidad.

Cuando el estado tensional de un punto del sólido ideal alcanza el criterio de discontinuidad inicial $\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = 0$, y a la vez cumple con la condición de consistencia plástica $\dot{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = 0$, se admite por hipótesis que este punto se encuentra en estado elasto-plástico. La teoría de la plasticidad clásica en pequeñas deformaciones², adoptar como válida la hipótesis de Prandtl-Reus respecto a la descomposición de la deformación total,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\epsilon}^P = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^P \quad (\text{B5.44})$$

donde la deformación plástica $\boldsymbol{\epsilon}^P$ representa la variable interna fundamental del problema elasto-plástico, cuya definición tiene la siguiente forma,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\lambda} \mathbf{H}_{\boldsymbol{\epsilon}^P} = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbb{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{g} \quad (\text{B5.45})$$

esta expresión, que también recibe el nombre de regla de normalidad —normal a la superficie de potencial plástico $\mathbb{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \text{cte.}$ —, es una generalización de la ecuación (B5.39), y $\dot{\lambda}$ es un escalar no negativo denominado parámetro de consistencia plástica que se determina a partir de la propia condición de consistencia de Prager que se presentará más adelante y que da la magnitud del incremento temporal de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$. La función de potencial plástico se determina a partir de estudios experimentales y es la que define la dirección del incremento temporal de deformación plástica.

Un caso particular de flujo plástico se produce cuando por hipótesis se adopta la superficie de fluencia plástica como superficie de potencial plástico $\mathbb{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \equiv \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$. En este caso particular la ecuación (B5.45) se reduce a

$$\dot{\mathbf{e}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{f} \quad (\text{B5.46})$$

y se dice que la regla de flujo es asociada a la superficie de fluencia plástica. En caso contrario se dice que el flujo es no-asociado.

Si se adopta la función de von Mises como función de potencial, se tiene el caso particular del flujo de Prandtl-Reus (ecuación (B5.39)),

$$\text{si } \mathbb{G} = [\mathbb{G}]^{\text{von Mises}} \Rightarrow \mathbf{g} \equiv \mathbf{s} \quad (\text{B5.47})$$

B 5.6.1 Trabajo Plástico Unitario o Específico.

El trabajo total desarrollado en una unidad de volumen de un sólido elasto-plástico ideal, en un proceso cuasi estático y durante un pseudo incremento de tiempo $(t \rightarrow t + dt)$, se le denomina incremento temporal de trabajo unitario o trabajo específico,

$$\dot{\omega} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{e}}^e + \dot{\mathbf{e}}^P) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}}^P = \dot{\omega}^e + \dot{\omega}^P \quad (\text{B5.48})$$

Se conoce esta forma de escribir la variación temporal de la energía como *elasticidad desacoplada* y sólo vale para problemas elasto-plásticos cuyas deformaciones elásticas son infinitesimales y por lo tanto se acepta la hipótesis de aditividad de las deformaciones (ecuación (B5.44)).

Concentrando la atención en la parte plástica de la energía, se desarrolla a continuación la expresión que define el trabajo plástico para un material metálico ideal de Prandtl-Reus,

$$\begin{aligned} \dot{\omega}^P = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}}^P &= \left(\frac{1}{3} I_1 \mathbf{1} + \mathbf{s} \right) : \dot{\mathbf{e}}^P = \sigma_{oct} \underbrace{\dot{\epsilon}_v^P}_0 + \tau_{oct} \dot{\gamma}_{oct}^P = \underbrace{\dot{\omega}_k^P}_{\text{volumétrica}} + \underbrace{\dot{\omega}_G^P}_{\text{desviadora}} \\ \dot{\omega}^P = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}}^P &= \dot{\omega}_G^P = \tau_{oct} \dot{\gamma}_{oct}^P = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \sqrt{\frac{8}{3} J_2'^P} = \dot{\lambda} (\mathbf{s} : \mathbf{s}) \end{aligned} \quad (\text{B5.49})$$

donde $\sigma_{oct} = p = I_1 / 3$ es la tensión normal octaédrica o presión, $\tau_{oct} = \sqrt{2 J_2 / 3}$ es la tensión tangencial octaédrica o desviación, $\epsilon_{oct}^P = \epsilon_v^P / 3 = I_1'^P / 3$ es la deformación normal octaédrica, y $\gamma_{oct}^P = \sqrt{8 J_2'^P / 3}$ es la desviación octaédrica.

Sustituyendo la regla de flujo de Prandtl-Reus ec. (B5.43) y se tiene que:

$$\dot{\omega}^P = \dot{\lambda} (\mathbf{s} : \mathbf{s}) = \frac{1}{\dot{\lambda}} (\dot{\mathbf{e}}^P : \dot{\mathbf{e}}^P) = \sqrt{\frac{J_2}{J_2'^P}} (\dot{\mathbf{e}}^P : \dot{\mathbf{e}}^P) \quad (\text{B5.50})$$

siendo:

$$J_2'^P = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}^P : \dot{\mathbf{e}}^P) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^P = \dot{\epsilon}_{ij}^P - \underbrace{\frac{1}{3} \dot{\epsilon}_v^P \delta_{ij}}_0 \quad (\text{B5.51})$$

Tal que en metales puede escribirse el segundo invariante del tensor desviador de deformaciones como $J_2'^P = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P)$, con lo que el trabajo plástico, ecuación (B5.50), resulta

$$\dot{\omega}^P = \sqrt{2J_2} \cdot \frac{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P)}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P}} = \sqrt{2J_2} \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P} \quad (\text{B5.52})$$

La función potencial $\mathbb{G}$ que sustituida en (B5.45) da un flujo plástico equivalente a Prandtl-Reus, es la función de von Mises, $\mathbb{G} = [\mathbb{G}]^{\text{von Mises}}$,

$$\mathbf{g} = \mathbf{s} = \frac{\partial [\mathbb{G}]^{\text{von Mises}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{B5.53})$$

donde,

$$[\mathbb{G}]^{\text{von Mises}} = J_2 - \mathcal{K}^2 = 0 \xrightarrow{\text{o también}} [\mathbb{G}]^{\text{von Mises}} = \sqrt{3J_2} - \sqrt{3}\mathcal{K} = 0 \quad (\text{B5.54})$$

siendo $\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2}$ la *tensión efectiva* o uniaxial equivalente de von Mises, que sustituida en la ecuación (B5.52), permite expresar la variación temporal del trabajo plástico en la siguiente forma

$$\dot{\omega}^P = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma} \cdot \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P} = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^P \quad (\text{B5.55})$$

Esta expresión permite escribir en forma general la *deformación plástica efectiva*, como:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^P = \sqrt{\gamma \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P} \quad (\text{B5.56})$$

tal que en el caso particular de la plasticidad de Prandtl-Reus (o von Mises) $\gamma \equiv 2/3$. En los casos restantes hay que determinar su magnitud.

Es más general utilizar como variable de endurecimiento el trabajo plástico u obtener la deformación plástica efectiva a partir de este trabajo,

$$\bar{\epsilon}^P = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}}^P dt = \int_0^t \frac{\dot{\omega}^P}{\bar{\sigma}} dt = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P) dt \quad (\text{B5.57})$$

La ecuación anterior puede simplificarse en el caso particular de un problema de carga radial, es decir cuando todas las componentes del tensor de tensión mantienen su proporción a lo largo del proceso de carga $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^0} = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^0} = \dots$. Esto es,

$$\bar{\epsilon}^P = \sqrt{\frac{2}{3}} (\boldsymbol{\epsilon}^P : \boldsymbol{\epsilon}^P) \quad (\text{B5.58})$$

B 5.6.2 Superficie de Carga Plástica. Variable de Endurecimiento Plástico.

En la Figura B5.6 se describe el comportamiento uniaxial esquemático de un sólido elasto-plástico ideal. En ella se reconocen cuatro zonas de comportamiento muy distinto, de las cuales una sigue estrictamente las leyes de la teoría de la elasticidad y las otras tres se rigen por la teoría de la plasticidad. El límite entre la zona elástica y la plástica se establece mediante la *superficie de fluencia* o *superficie de discontinuidad*, y a partir de dicho límite esta superficie adquiere movilidad en el espacio de tensiones, siguiendo la evolución del proceso plástico, transformándose en la denominada *superficie de carga plástica*. Esta función, que

representa la superficie de carga plástica, no es otra cosa que la actualización de la función límite de discontinuidad o fluencia (B5.29) para cada valor de las variables internas $\mathbf{q}$ en cada instante de pseudo tiempo t del proceso elasto-plástico. El fenómeno que gobierna este cambio de posición de la *superficie de fluencia* en el espacio de tensiones, es conocido como *endurecimiento plástico*. Este endurecimiento puede ser isótropo o cinemático y sus características serán presentadas a continuación.

Una manera simple de introducir el endurecimiento en el comportamiento elasto-plástico es a través de la *función de carga plástica* $\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = 0$. Esta puede definirse mediante una función escalar de argumentos tensoriales y homogénea de primer grado en las tensiones^{*}.

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \mathcal{K} = 0 \quad (\text{B5.59})$$

Para ello se establece la función de tensión $f(\boldsymbol{\sigma})$ como un traductor de un estado tensorial de tensiones a otro escalar equivalente. Este escalar se utiliza para ser comparado con la evolución del endurecimiento plástico $\mathcal{K}$, que inequívocamente se relaciona con la evolución de la tensión uniaxial equivalente $\bar{\sigma} = \mathcal{K}$.

B 5.6.2.1 Endurecimiento isótropo.

Se dice que hay endurecimiento isótropo cuando hay movimiento homotético de la superficie de carga plástica. A su vez este movimiento puede ser:

Positivo: Cuando el movimiento homotético de la superficie de carga plástica es de expansión (ver Figura B5.10). En este caso se dice de un proceso elasto-plástico isótropo con endurecimiento.

Nulo: Cuando la superficie de carga plástica no evoluciona durante el proceso elasto-plástico. En este caso se dice que el proceso elasto-plástico es isótropo perfecto.

Negativo: Cuando hay un movimiento homotético de contracción en la superficie de carga plástica. En este caso se dice de un proceso elasto-plástico isótropo con ablandamiento.

El endurecimiento isótropo, movimiento homotético de la función de carga plástica, queda controlado por la evolución de la *función de endurecimiento plástico* $\mathcal{K}$, que en el caso más general puede estar definida como una variable interna $\mathbf{q}$. La evolución de esta variable interna depende del proceso mecánico mismo y lo hace condicionada a través de una regla de evolución cuya formulación debe ajustarse al comportamiento del sólido (ver ecuación (B5.30)).

En plasticidad clásica es habitual expresar la variable interna de *endurecimiento plástico* como una *función de endurecimiento plástico* $\mathcal{K}(\kappa^p)$, que depende a su vez de la *variable interna de endurecimiento plástico* κ^p . Esto es

$$\mathcal{K}(\kappa^p) = f(\kappa^p) \quad \text{con:} \quad \begin{cases} \kappa^p = \bar{\epsilon}^p \\ \kappa^p = \omega^p \end{cases} \quad (\text{B5.60})$$

Definiendo la función de endurecimiento como una variable interna del proceso plástico, resulta una formulación mucho más general que permite mayores posibilidades de representación del comportamiento de una gran diversidad de sólidos,

^{*} NOTA: $f(\boldsymbol{\sigma})$ es una función homogénea de grado n en las tensiones, siempre que si, $f(\alpha, \boldsymbol{\sigma}) \equiv \alpha^n f(\boldsymbol{\sigma})$.

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\lambda} H_{\kappa}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = \dot{\lambda} \left[\mathbf{h}_{\kappa}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) : \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}; \kappa^p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \quad (\text{B5.61})$$

$$\dot{\mathcal{K}} = \dot{\lambda} H_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = h_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) \dot{\kappa}^p$$

donde la función tensorial $\mathbf{h}_{\kappa}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q})$ y la función escalar $h_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q})$, dependen del estado de tensiones actualizado y de las variables internas. En el caso más simple de la teoría de la plasticidad se identifican las siguientes relaciones,

$$\mathbf{h}_{\kappa} \equiv \boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \dot{\kappa}^p = \mathbf{h}_{\kappa} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \equiv \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\omega}^p = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{B5.62})$$

de donde resulta

$$\dot{\mathcal{K}} = h_{\mathcal{K}} \dot{\kappa}^p = \frac{\partial \mathcal{K}(\kappa^p)}{\partial \kappa^p} \dot{\kappa}^p$$

tal que en esta última $\mathcal{K}(\kappa^p) = f(\kappa^p)$ es una función tal como lo expresa la ecuación (B5.60).

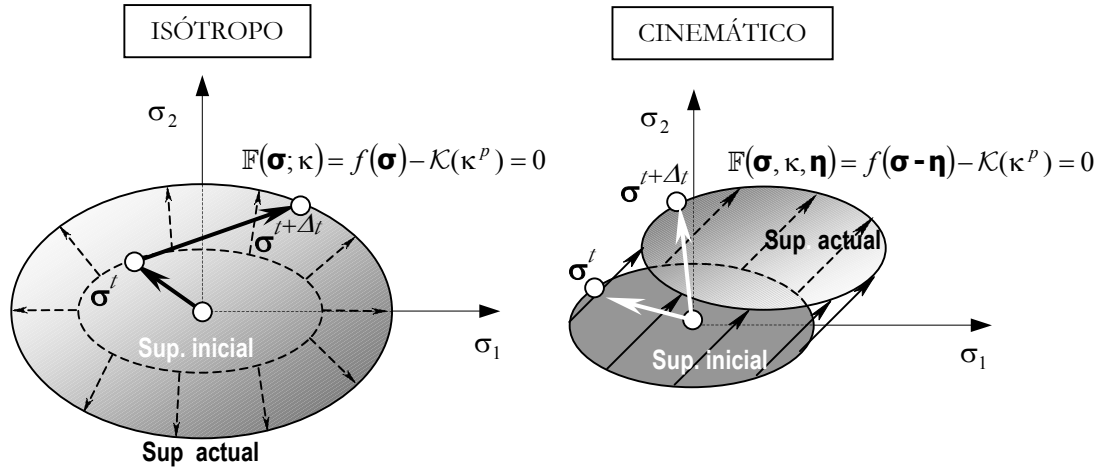


Figura B5.10 – Superficie de carga plástica. Movimiento isótropa y cinemática.

B 5.6.2.2 Endurecimiento Cinemático.

El endurecimiento cinemático, movimiento de traslación de la superficie de carga plástica, queda controlado por la *variable interna de endurecimiento plástico cinemático* $\boldsymbol{\eta}$, que define el origen del espacio de tensiones. El continuo cambio de posición de este origen de coordenadas, durante la evolución del proceso elasto-plástico, provoca un movimiento de traslación de la superficie de fluencia que puede o no combinarse con un movimiento isótropo de expansión o contracción de la misma. En el caso más general, se puede escribir la función de carga plástica como:

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\eta}) - \mathcal{K} = 0 \quad (\text{B5.63})$$

donde el endurecimiento plástico puede definirse, según Prager y Melan¹, como $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\beta} \dot{\kappa}^p = c_k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$, con $\boldsymbol{\beta} = \sqrt{c_k} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p / \dot{\bar{\epsilon}}^p$. La expresión de c_k depende del tipo de función de potencial plástico que se utilice. En el caso más simple, para una función potencial de von Mises, tiene la siguiente forma,

$$c_k = \frac{2}{3} h_k \quad (\text{B5.64})$$

donde h_k representa una propiedad del material a determinar mediante ensayos. Utilizando esta misma propiedad, puede definirse la siguiente expresión más general para c_k , que ajusta mejor el comportamiento de los metales con endurecimiento cinemático⁵,

$$c_k = \left[\frac{1}{\dot{\epsilon}_{rs}^p \dot{\epsilon}_{rs}^p} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{ij} \epsilon_{ij}^p}{f(\sigma_{kl} - \eta_{kl})}} \right] \cdot h_k \quad (\text{B5.65})$$

El origen de la función de carga plástica puede también ajustarse para representar el efecto Bauschinger, siguiendo una expresión que descomponga el comportamiento cinemático en la siguiente forma^{2,6},

$$\dot{\eta}_{ij} = c_k \dot{\epsilon}_{ij}^p - a_k \eta_{ij} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{B5.66})$$

Donde la deformación plástica efectiva $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ se la obtiene a partir de la ecuación (B5.56) y c_k y a_k son dos parámetros a determinar.

B 5.6.3 Relación Tensión-Deformación. Consistencia Plástica y Rigidez Tangente.

La ley constitutiva elasto-plástica tangente $\dot{\sigma} = \mathbf{C}_T : \dot{\epsilon}$ y el parámetro de consistencia plástica λ pueden obtenerse a partir del criterio general de fluencia plástica y de la condición de consistencia de Prager¹. Esto es,

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{F}(\sigma; \mathbf{q}) = f(\sigma - \eta) - \mathcal{K} &= 0 \\ \dot{\mathbb{F}} = \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \eta} : \dot{\eta} + \underbrace{\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathcal{K}}}_{-1} \dot{\mathcal{K}} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \eta} : \dot{\eta} - \dot{\mathcal{K}} = 0 \quad (\text{B5.67})$$

Sustituyendo en esta la ecuación (B5.61) y la ecuación $\dot{\eta} = \beta \dot{\kappa}^p = c_k \dot{\epsilon}^p$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) + c_k \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \eta} : \dot{\epsilon}^p - h_k (\mathbf{h}_k : \dot{\epsilon}^p) &= 0 \\ \left[\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \right] - \lambda \left[\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \sigma} - c_k \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \eta} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \sigma} + h_k \mathbf{h}_k : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \sigma} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B5.68})$$

De esta última expresión se puede obtener el factor de consistencia plástica λ , que puede interpretarse como el factor que evalúa la distancia que hay entre un estado tensional inadmisibles, fuera del dominio elástico y la superficie de carga plástica. Esto es

⁵ Chaboche J. L. (1983). On the constitutive equations of materials under monotonic or cyclic loading. *Rech. Aérop. 1983-5*. France

⁶ Ohno N. and Wang J. (1993). Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part I: Formulation and basic features for ratcheting behavior. *International Journal of Plasticity*. Vol. 9 pp. 375-390.

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\underbrace{\left[-c_k \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\eta}} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h_{\kappa} \mathbf{h}_{\kappa} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]}_A + \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)} \quad \text{donde } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (\text{B5.69})$$

donde A es el parámetro de endurecimiento plástico. En un caso simple de la teoría de la plasticidad clásica sin endurecimiento cinemático $c_k = 0$, este parámetro resulta ser la pendiente de la curva tensión uniaxial equivalente $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^p) = \mathcal{K}(\bar{\epsilon}^p)$ vs. $\bar{\epsilon}^p$. Para demostrar esto, se considera una función de endurecimiento $\mathcal{K}(\bar{\epsilon}^p) = f(\bar{\epsilon}^p)$ y se define su pendiente,

$$A = \frac{d\mathcal{K}(\bar{\epsilon}^p)}{d\bar{\epsilon}^p} = \frac{d\mathcal{K}(\bar{\epsilon}^p)}{d\kappa^p} \frac{d\kappa^p}{d\bar{\epsilon}^p} \quad (\text{B5.70})$$

De esta última y la ecuación (B5.62), se verifica el denominador de la ecuación (B5.69)

$$A = - \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \kappa^p} \bar{\sigma} = h_{\kappa} \mathbf{h}_{\kappa} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{B5.71})$$

Sustituyendo la ecuación (B5.69) en la ecuación constitutiva tangente,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \quad (\text{B5.72})$$

Resulta la ley elasto-plástica tangente,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \mathbb{C} - \frac{\left[\mathbb{C} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \otimes \left[\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} \right]}{-c_k \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\eta}} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h_{\kappa} \mathbf{h}_{\kappa} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)} \right\} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_T : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{B5.73})$$

donde $\mathbb{C}_T$ es el tensor constitutivo tangente continuo.

En la Tabla 5.1 se presenta el algoritmo de Euler implícito que permite integrar la ecuación constitutiva en un modo eficiente.

1. Cálculo de la tensión predictora para el tiempo actual “ $t + \Delta t$ ”, iteración de equilibrio “ i ”, contador de convergencia del modelo constitutivo “ $k = 1$ ”

$${}_{k-1}^i [\boldsymbol{\sigma}]^{t+\Delta t} = \mathbf{C} : \left([\boldsymbol{\epsilon}]^{t+\Delta t} - {}^{i-1} [\boldsymbol{\epsilon}^p]^{t+\Delta t} \right)$$

$${}_{k-1}^i [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} = {}^{i-1} [\mathbf{q}]^{t+\Delta t}$$

2. Verificación de la condición de fluencia plástica:

$$\text{a. Si: } \mathbb{F} \left({}_{k-1}^i [\boldsymbol{\sigma}]^{t+\Delta t}, {}_{k-1}^i [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} \right) < 0, \text{ entonces } \left\{ \begin{array}{l} {}_{k-1}^i [\boldsymbol{\sigma}]^{t+\Delta t} = {}_{k-1}^i [\boldsymbol{\sigma}]^{t+\Delta t} \\ {}_{k-1}^i [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} = {}_{k-1}^i [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} \end{array} \right\} \text{ y va a la SALIDA}$$

$$\text{b. Si: } \mathbb{F} \left({}_{k-1}^i [\boldsymbol{\sigma}]^{t+\Delta t}, {}_{k-1}^i [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} \right) \geq 0, \text{ entonces inicia la integración de la ec. constitutiva}$$

3. Integración de la ecuación propiamente dicha,

$$\Delta \lambda = \frac{\mathbb{F} \left({}_{k-1}^i [\boldsymbol{\sigma}]^{t+\Delta t}, {}_{k-1}^i [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} \right)}{\underbrace{\left[-c_k \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\eta}} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h_K \mathbf{h}_K : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]}_{{}_{k-1}^i \mathbf{A}^{t+\Delta t}} + \left[\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{t+\Delta t}}$$

$${}_k^i [\boldsymbol{\sigma}]^{t+\Delta t} = {}_{k-1}^i [\boldsymbol{\sigma}]^{t+\Delta t} - \Delta \lambda \mathbf{C} : \left(\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{t+\Delta t}$$

4. Actualiza las variables internas y el tensor constitutivo tangente con la nueva tensión

$${}_k^i [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} = {}_{k-1}^i [\mathbf{q}]^{t+\Delta t}$$

$${}_k^i [\mathbf{C}_T]^{t+\Delta t} = \left[\mathbf{C} - \frac{\left[\mathbf{C} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \otimes \left[\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} \right]}{-c_k \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\eta}} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h_K \mathbf{h}_K : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)} \right]^{t+\Delta t}$$

5. Hace $k = k + 1$ y regresa al punto 2

Tabla 5.1 – Integración de la ecuación constitutiva elasto-plástica mediante un algoritmo de Euler implícito.

B 5.7 Postulado de Estabilidad de Drucker y Axioma de la Máxima Disipación Plástica.

El segundo postulado de Drucker define la estabilidad local del comportamiento de un punto de un sólido sometido a un estado tenso-deformacional (ver apartado B 5.3.2.2). En el problema no-lineal éste postulado está relacionado con el axioma de la máxima disipación plástica.

Considérese un punto de un sólido sometido a un estado de tensiones $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}; \boldsymbol{\epsilon}^p; \mathbf{q})$ y deformación $\boldsymbol{\epsilon}$, tal que en el instante previo sus magnitudes eran $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}^*; \boldsymbol{\epsilon}^{p*}; \mathbf{q})$ y $\boldsymbol{\epsilon}^*$. Se dice que el comportamiento ha sido estable si se cumple la siguiente desigualdad,

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq \boldsymbol{\sigma}^* : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rightarrow (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0 \quad (\text{B5.74})$$

donde puede verse que necesariamente se exige que el estado tensional posterior $\boldsymbol{\sigma}$, sea siempre mayor que el anterior $\boldsymbol{\sigma}^*$.

Haciendo ahora la siguiente aproximación,

$$\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^* \approx \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dt \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dt \quad (\text{B5.75})$$

y sustituyendo esta última en la ecuación (B5.76), resulta la siguiente forma particular del 2º postulado de Drucker

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0 \quad (\text{B5.76})$$

A esta misma conclusión se llega mediante la forma local del axioma de la máxima disipación plástica (M.D.P.)², que se escribe,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \left(\frac{\partial \Xi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right) \geq 0 \quad (\text{B5.77})$$

donde la disipación plástica Ξ , para problemas sin degradación de rigidez, se escribe como,

$$\Xi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (\text{B5.78})$$

Sustituyendo ésta última en la expresión de la M.D.P., se tiene

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0 \quad (\text{B5.79})$$

De esta última y de la ecuación (B5.76) se deduce que el postulado de estabilidad de Drucker, coincide plenamente con el axioma de la máxima disipación plástica.

B 5.8 Condición de Estabilidad.

La condición de estabilidad de Drucker es también conocida como *condición de estabilidad local* y sólo se refiere a la estabilidad del comportamiento de un punto del sólido. El cumplimiento de esta condición en todos los puntos del sólido es suficiente para garantizar la estabilidad del conjunto, sin embargo, no es necesario que se verifique en todos y cada uno de los puntos para asegurar la estabilidad del conjunto. Este hecho puede comprobarse en materiales con ablandamiento, en los cuales puede no cumplirse la condición de estabilidad local en algunos puntos, sin que por esto el sólido global pierda estabilidad. La estabilidad de todo el sólido se prueba mediante una condición más débil, que es conocida como *condición de estabilidad global*. A continuación se hace una breve presentación de estos dos conceptos.

B 5.8.1 Estabilidad local.

El segundo postulado de Drucker, ecuación (B5.74), constituye una condición de estabilidad necesaria y suficiente para problemas de plasticidad con endurecimiento y regla de flujo asociada, pero es sólo una condición suficiente para problemas de plasticidad con ablandamiento y/o regla de flujo no asociada. A continuación se prueba que exigiendo convexidad en las funciones de fluencia, potencial plástico y flujo asociado en materiales

con endurecimiento, queda garantizado el cumplimiento del segundo postulado de Drucker.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : (\mathbf{C}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : (\mathbf{C}) : \left(\dot{\lambda} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \geq 0 \quad (\text{B5.80})$$

Pero el factor de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ es un escalar no negativo. Por ello la desigualdad anterior puede también escribirse, como

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : (\mathbf{C}) : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \geq 0 \quad (\text{B5.81})$$

Además, analizando el propio factor de consistencia plástica, se deduce que,

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{A + \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \geq 0 \quad (\text{B5.82})$$

si el endurecimiento es positivo $A > 0$, y $\mathbb{G}$ y $\mathbb{F}$ son funciones convexas, para que el factor de consistencia plástico sea negativo, debe cumplirse necesariamente que

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{C} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \geq 0 \quad (\text{B5.83})$$

Para garantizar que las desigualdades (B5.81) y (B5.83) se cumplan a la vez, debe ocurrir que el flujo plástico sea asociado. Es decir,

$$\frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \propto \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad \text{Flujo asociado} \quad (\text{B5.84})$$

B 5.8.2 Estabilidad Global.

Como ya se ha mencionado, para materiales con ablandamiento, el postulado de Drucker se transforma en una condición suficiente de estabilidad, pero no necesaria.

La condición de estabilidad necesaria, debe formularse a nivel global, es decir, de todo el sólido. Sea una *configuración estable* $\Omega_* \subset \mathbb{R}^3$ donde la energía potencial total vale $\Pi^* = P_d^* - P_m^*$, donde intervienen las variables de tensión $\boldsymbol{\sigma}^*$, deformación $\boldsymbol{\epsilon}^*$, fuerzas de superficie $\mathbf{t}^*$, volumen $\mathbf{b}^*$ y desplazamiento $\mathbf{u}^*$, y donde se cumple el equilibrio del sólido. Dando un desplazamiento virtual $\delta \mathbf{u}$ sobre esta configuración estable, se obtiene una nueva configuración $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$, cuyas variables son $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \delta \mathbf{u} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^* + \delta \boldsymbol{\epsilon} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* + \delta \boldsymbol{\sigma}$; $\mathbf{b} = \mathbf{b}^*$; $\mathbf{t} = \mathbf{t}^*$, y la energía total será, $\Pi = P_d - P_m \cong \Pi^* + \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi$. Se dice que esta nueva configuración estará en equilibrio, si durante la aplicación del desplazamiento virtual se desarrolla una variación de energía potencial total nula. Esto es

$$\Pi = \Pi^* + \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi + \dots \Rightarrow \Delta \Pi = \Pi - \Pi^* \cong \underbrace{\delta \Pi}_0 + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi + \dots \quad (\text{B5.85})$$

donde la primera variación de la energía o condición de estacionalidad del funcional vale $\delta\Pi = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon} dV - \oint_S \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} dS - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} dV = 0$. Dado que el desplazamiento virtual $\delta\mathbf{u}$ y sus campos derivados $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ son arbitrarios, resulta entonces la ecuación de equilibrio. La segunda variación de la energía potencial total, o condición de estabilidad del funcional, puede escribirse como $\delta^2\Pi = \int_V \delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon} dV - \oint_S \delta\mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} dS - \int_V \rho \delta\mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} dV$. A pesar que en plasticidad no siempre es posible conocer la expresión del funcional de energía potencial total⁷, si que es posible conocer sus respectivas variaciones, por ejemplo mediante el principio de los trabajos virtuales que es lo que se ha establecido en las ecuaciones anteriores. Sustituyendo en (B5.85) la condición de equilibrio, se tiene que el incremento total de trabajo virtual es igual a la segunda variación del funcional y que es a la vez la condición de estabilidad (concavidad o convexidad del funcional),

$$\Delta\Pi \cong \underbrace{\delta\Pi}_0 + \frac{1}{2!} \delta^2\Pi \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{La configuración original es estable} \\ & \text{para cualquier desplazamiento virtual.} \\ < 0 \Rightarrow \text{La configuración original es inestable} \\ & \text{para este desplazamiento virtual.} \end{cases} \quad (\text{B5.86})$$

Sustituido el estado definido anteriormente ($\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^* + \delta\boldsymbol{\epsilon}$ $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* + \delta\boldsymbol{\sigma}$; $\mathbf{b} = \mathbf{b}^*$; $\mathbf{t} = \mathbf{t}^*$), en la segunda variación del funcional, se obtiene,

$$\Delta\Pi \cong \frac{1}{2} \int_V \delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon} dV \Rightarrow \begin{cases} > 0 \text{ Configuración original estable} \\ < 0 \text{ Configuración original inestable} \end{cases} \quad (\text{B5.87})$$

Según Bažant⁸, esta condición aplicada a materiales con ablandamiento, permite definir un tamaño límite, de volumen V_p , de la zona donde puede ocurrir un comportamiento plástico inestable, entendido según el postulado de estabilidad local de Drucker (zona donde se produce ablandamiento). Así, en el resto del sólido, donde el comportamiento es elástico y cuyo volumen es $V_0 = V - V_p$, este trabajo de segundo orden es positivo tal que permite compensar el trabajo negativo dando una segunda variación del funcional no nula. Así se consigue una nueva configuración estable para un sólido cuyo comportamiento es de endurecimiento en una parte del dominio V_0 y de ablandamiento en la otra V_p . Esto es,

$$\Delta\Pi \cong \frac{1}{2} \int_V \delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon} dV = \left[\frac{1}{2} \int_{V_0} \delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon} dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} \delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon} dV \right] \cong \left[\Delta\Pi_{V_0} + \Delta\Pi_{V_p} \right] > 0 \quad (\text{B5.88})$$

De todo esto se puede concluir que, en un punto del sólido es posible que se viole la condición de estabilidad de Drucker (ecuación (B5.83)), sin que necesariamente la respuesta global sea inestable.

⁷ Washizu, K. (1974). *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Press.

⁸ Bažant, Z. (1986). Mechanics of distributed cracking. *Applied Mech. Rev.* - Vol. 39, No. 5 pp. 675-705.

B 5.9 Condición de Unicidad en la Solución.

Dado un punto del sólido en estado de equilibrio (configuración de origen), sobre el que se aplican dos desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u}_1$ y $\delta \mathbf{u}_2$, y a continuación se mide la diferencia de energía potencial entre estas dos configuraciones. Puede observarse que esta diferencia de energía es igual a la que se obtiene al aplicar un único desplazamiento virtual de magnitud $\Delta(\delta \mathbf{u}) = \delta \mathbf{u}_2 - \delta \mathbf{u}_1$, que provoca un cambio de deformaciones $\Delta(\delta \boldsymbol{\epsilon})$ y de tensiones $\Delta(\delta \boldsymbol{\sigma})$. De este campo de tensiones y deformaciones resulta un trabajo virtual de segundo orden igual a

$$\Delta(\delta^2 \Pi) = \int_V \Delta(\delta \boldsymbol{\sigma}) : \Delta(\delta \boldsymbol{\epsilon}) dV \quad \begin{cases} = 0 & \text{no hay unicidad en la solución,} \\ \neq 0 & \text{hay unicidad en la solución.} \end{cases} \quad (\text{B5.89})$$

Si esta segunda variación es nula $\Delta(\delta^2 \Pi) = 0$ durante el cambio de desplazamiento virtual $\Delta(\delta \mathbf{u})$, significa que la tensión en las dos configuraciones finales son iguales $\delta \boldsymbol{\sigma}_2 = \delta \boldsymbol{\sigma}_1$, es decir $\Delta(\delta \boldsymbol{\sigma}) = \delta \boldsymbol{\sigma}_2 - \delta \boldsymbol{\sigma}_1 = 0$. Por lo tanto se tienen dos estados cinemáticamente admisibles e independientes entre sí $\delta \mathbf{u}_2 \neq \delta \mathbf{u}_1$, pero el mismo incremento de tensión $\delta \boldsymbol{\sigma}_2 = \delta \boldsymbol{\sigma}_1$, lo que implica que la solución no es única y hay bifurcación en la respuesta.

Dadas las mismas configuraciones cinemáticas antes mencionadas, si se obtiene una segunda variación no nula $\Delta(\delta^2 \Pi) \neq 0$, se dice que la unicidad de la solución está garantizada.

B 5.10 Condición de carga-descarga. Kuhn-Tucker.

La condición de carga-descarga y la condición de consistencia plástica de Prager, se satisfacen simultáneamente mediante las tres condiciones de Kuhn-Tucker³, que es otra forma de presentar el axioma de la máxima disipación plástica M.D.P (B 5.7). Esto es,

$$\begin{cases} \dot{\lambda} \geq 0 \\ \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) \leq 0 \\ \dot{\lambda} \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = 0 \end{cases} \quad (\text{B5.90})$$

de estas tres condiciones se deduce brevemente lo siguiente,

$$\begin{cases} \mathbb{F} < 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 & \text{comportamiento elástico o descarga,} \\ \mathbb{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda} > 0 & \text{comportamiento plástico o carga,} \\ \dot{\lambda} = 0 & \text{carga plástica neutra,} \end{cases} \\ \mathbb{F} > 0 \Rightarrow & \text{estado incompatible.} \end{cases} \quad (\text{B5.91})$$

B 5.11 Criterios Clásicos de Fluencia o Discontinuidad Plástica.

A continuación se hace una breve presentación, casi enumerativa, de los criterios de fluencia o discontinuidad plástica. El objetivo de esta presentación es destacar los rasgos más importantes que se debe tener en cuenta de cada uno de ellos.

En los últimos años se ha formulado una gran cantidad de criterios de fluencia, o discontinuidad plástica, con el fin de representar mejor el comportamiento plástico de los sólidos ideales. Hay criterios más apropiados para representar el comportamiento de los materiales metálicos y otros que funcionan mejor para los geomateriales. En general la formulación y/o utilización de estos criterios exigen considerar las siguientes características básicas de comportamiento:

- Los **materiales metálicos** tienen una resistencia a tracción y compresión del mismo orden de magnitud. La presión hidrostática, primer invariante del tensor de tensiones I_1 , influye muy poco en la determinación del estado de fluencia plástica. Los cambios de volumen permanente son despreciables (incremento temporal de deformación volumétrica permanente, dilatación, nula $\dot{\epsilon}_v^p = 0$); lo que significa que la forma y tamaño de una sección transversal de la superficie de fluencia (plano octaédrico), se mantiene inalterada tanto a bajas como altas tensiones (no depende del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3), ej.: la forma cilíndrica de la superficie de von Mises. El incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}^p$ depende del tensor desviador de tensiones $\mathbf{s}$ en cada instante del proceso de carga cuasi-estático, pudiéndose utilizar satisfactoriamente la regla de flujo de Prandtl-Reus, que es lo mismo que utilizar la forma general de la regla de flujo (ecuación (B5.46)), con una función de potencial plástico de von Mises.
- Los **materiales friccionales** del tipo de los hormigones pétreos, suelos, cerámicos, etc., tienen menor resistencia a tracción que a compresión. La presión hidrostática $p = I_1 / 3$, influye mucho en la condición de fluencia plástica para tensiones bajas y moderadas, en cambio comienza a perder importancia para tensiones hidrostáticas elevadas. El sólido sufre cambios de volumen irreversibles exhibiendo fenómenos de dilatación $\dot{\epsilon}_v^p \neq 0$. La forma y dimensión de una sección transversal de la superficie de fluencia (plano octaédrico), es distinta para bajas que para altas tensiones, pasando de una forma casi triangular a otra circular, respectivamente (para bajas presiones hidrostáticas depende del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 y se independiza de él en altas presiones). La deformación plástica tiene una dirección distinta a la que da el gradiente de la superficie de fluencia, siendo necesario formular una superficie de potencial plástico distinta a la de fluencia plástica (plasticidad no-asociada). En estos materiales, y a diferencia de los metales, el criterio de fluencia depende, entre otras, de tres variables: la cohesión interna entre partículas c , el ángulo de rozamiento interno entre partículas ϕ y la dilatación interna ψ . Estas pueden ser tratadas como variables internas del proceso mismo, o también expresadas como una función dependiente en forma explícita de la evolución de las variables internas $\mathbf{q}$.

De esta breve descripción resulta la necesidad de formular distintos criterios de fluencia y potencial plástico que permitan considerar los requisitos exigidos por cada tipo de material en particular.

B 5.11.1 Criterio de Rankine. De la Máxima Tensión de Tracción.

Este criterio fue formulado por Rankine en 1876 y se caracteriza por depender de un solo parámetro, la máxima resistencia uniaxial de tracción σ_T^{max} . Además está influenciado por el primer invariante del tensor de tensiones I_1 y el segundo y tercer invariantes del tensor desviador de tensiones J_2 , J_3 , respectivamente. Es apropiado para establecer en forma sencilla el límite donde comienza el proceso de fractura en un punto del sólido. Esta hipótesis que conduce a suponer que la fractura ocurre cuando la máxima tensión principal alcanza el valor de la resistencia uniaxial a tracción $\mathcal{K}(\kappa) = \sigma_T^{max}(\kappa)$. Las diversas formas de expresar matemáticamente este criterio son las siguientes,

- En función de las tensiones principales,

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \sigma_T^{max}) = \max[\sigma_i] - \sigma_T^{max}(\kappa) = 0 \quad (\text{B5.92})$$

- En función de los invariantes del tensor de tensiones y sus desviadores,

$$\mathbb{F}(I_1; J_2; \theta; \sigma_T^{max}) = 2\sqrt{3J_2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + I_1 - 3\sigma_T^{max}(\kappa) = 0 \quad (\text{B5.93})$$

- En función de coordenadas cilíndricas,

$$\mathbb{F}(\rho; \xi; \theta; \sigma_T^{max}) = \sqrt{2}\rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \xi - \sqrt{3}\sigma_T^{max}(\kappa) = 0 \quad (\text{B5.94})$$

donde $\xi = \sqrt{3}\sigma_{oct} = \sqrt{3}(I_1/3) = I_1/\sqrt{3}$, el radio octaédrico $\rho = \sqrt{3}\tau_{oct} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{2J_2}{3}} = \sqrt{2J_2}$,

y el ángulo de similitud de Lode $\theta = \arcsen\left[\frac{3\sqrt{3}J_3}{(2J_2^{3/2})}\right]$.

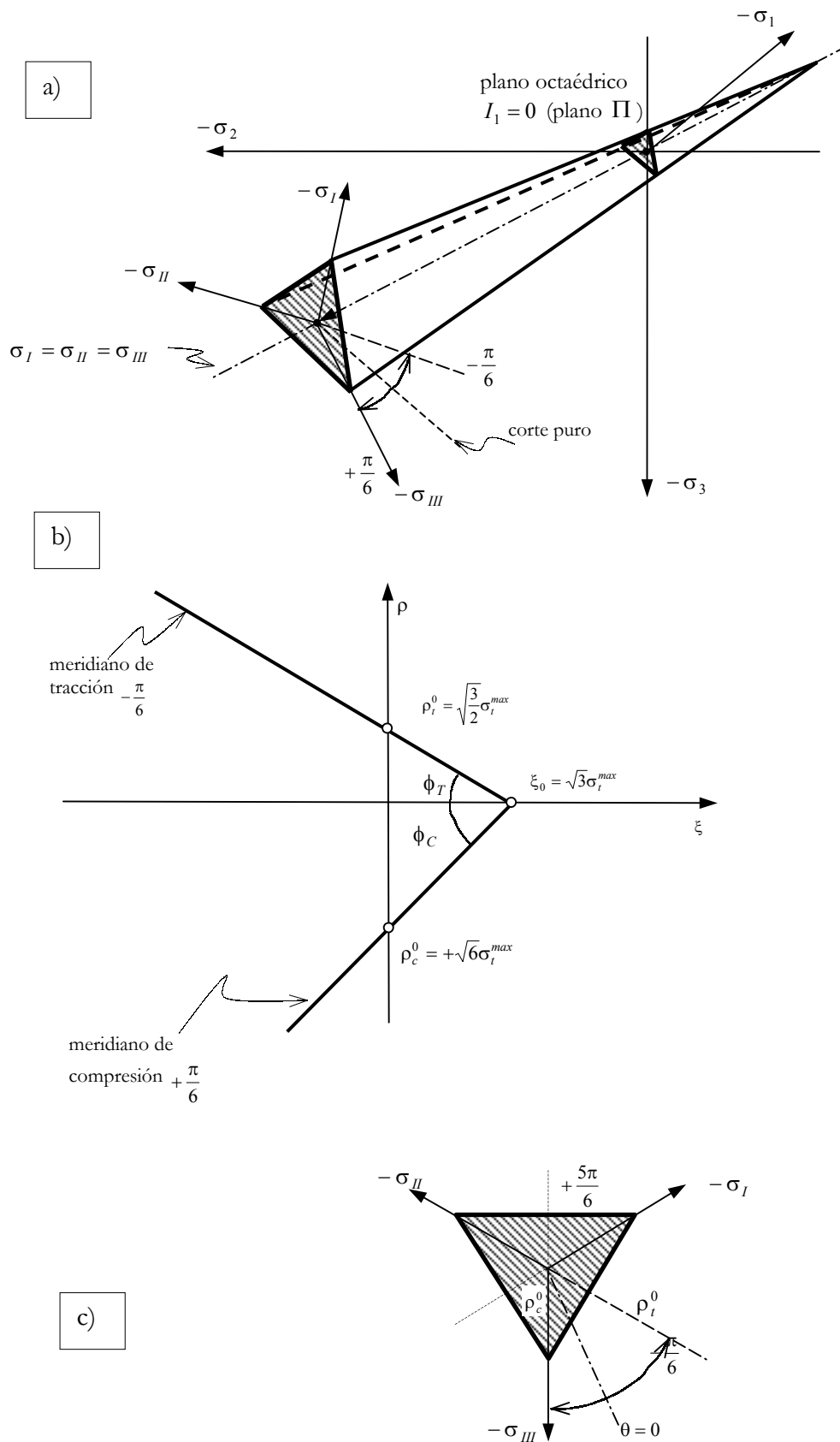


Figura B5.11 – Superficie de fluencia de Rankine: a) En el espacio de tensiones principales, b) Según los meridianos de tracción y compresión Máxima, c) Según el plano octaédrico $I_1=0$ o plano Π .

B 5.11.2 Criterio de Tresca. De la Máxima Tensión de Cortante.

Este criterio fue formulado por Tresca en 1864, y al igual que el criterio de Rankine, depende de un solo parámetro que es la máxima resistencia a las tensiones tangenciales $\tau^{\max}$. Además considera el segundo y tercer invariantes del tensor desviador de tensiones J_2 , J_3 , respectivamente, ignorando la influencia del primer invariante del tensor de tensiones I_1 . Es apropiado para representar el comportamiento de los metales y su mayor limitación viene dada por la falta de continuidad en la definición de sus derivadas que describen la normal saliente a la superficie. De acuerdo con este criterio, se alcanza la fluencia plástica cuando el valor de la función de endurecimiento plástico $\mathcal{K}(\kappa) = \tau^{\max}(\kappa)$, que tiene significado de una resistencia al cortante, alcanza la máxima resistencia a las tensiones tangenciales $\tau^{\max}$. Las diversas formas de expresar matemáticamente este criterio son las siguientes,

- En función de las tensiones principales,

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \tau^{\max}) = \max \left[\frac{1}{2} |\sigma_i - \sigma_j| \right] - \tau^{\max}(\kappa) = 0 \quad (\text{B5.95})$$

- En función de los invariantes del tensor desviador de tensiones,

$$\mathbb{F}(J_2; \theta; \tau^{\max}) = \sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos \theta - \tau^{\max}(\kappa) = 0 \quad (\text{B5.96})$$

o multiplicando por $2\sqrt{2}$, resulta en función de la tensión uniaxial efectiva,

$$\mathbb{F}(J_2; \theta; \bar{\sigma}) = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - \bar{\sigma}(\kappa) = 0$$

- En función de coordenadas cilíndricas,

$$\mathbb{F}(\rho; \theta; \bar{\sigma}) = \rho \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \quad (\text{B5.97})$$

siendo $\rho = \sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{2J_2}$, y el ángulo de similaridad de Lode $\theta = \arcsen \left[\frac{3\sqrt{3} J_3}{(2J_2)^{3/2}} \right]$.

La insensibilidad a la presión hace que el plano octaédrico se mantenga constante e igual al plano π . Este plano octaédrico representa un hexágono regular. De la intersección del plano meridiano de tracción ($\theta = -\pi/6$), con la superficie de fluencia, surge una recta de pendiente nula, paralela a la que resulta de la intersección del plano meridiano de compresión ($\theta = +\pi/6$), con la superficie de fluencia. Ambas rectas meridianas cortan al eje de tensión de corte octaédrico en $\rho_c^0 = \rho_r^0 = \pm \sqrt{2/3} \bar{\sigma}(\kappa)$. En el plano principal $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2 = 0$, representa un hexágono deformado según el eje de tensiones $\sigma_1 = \sigma_3$.

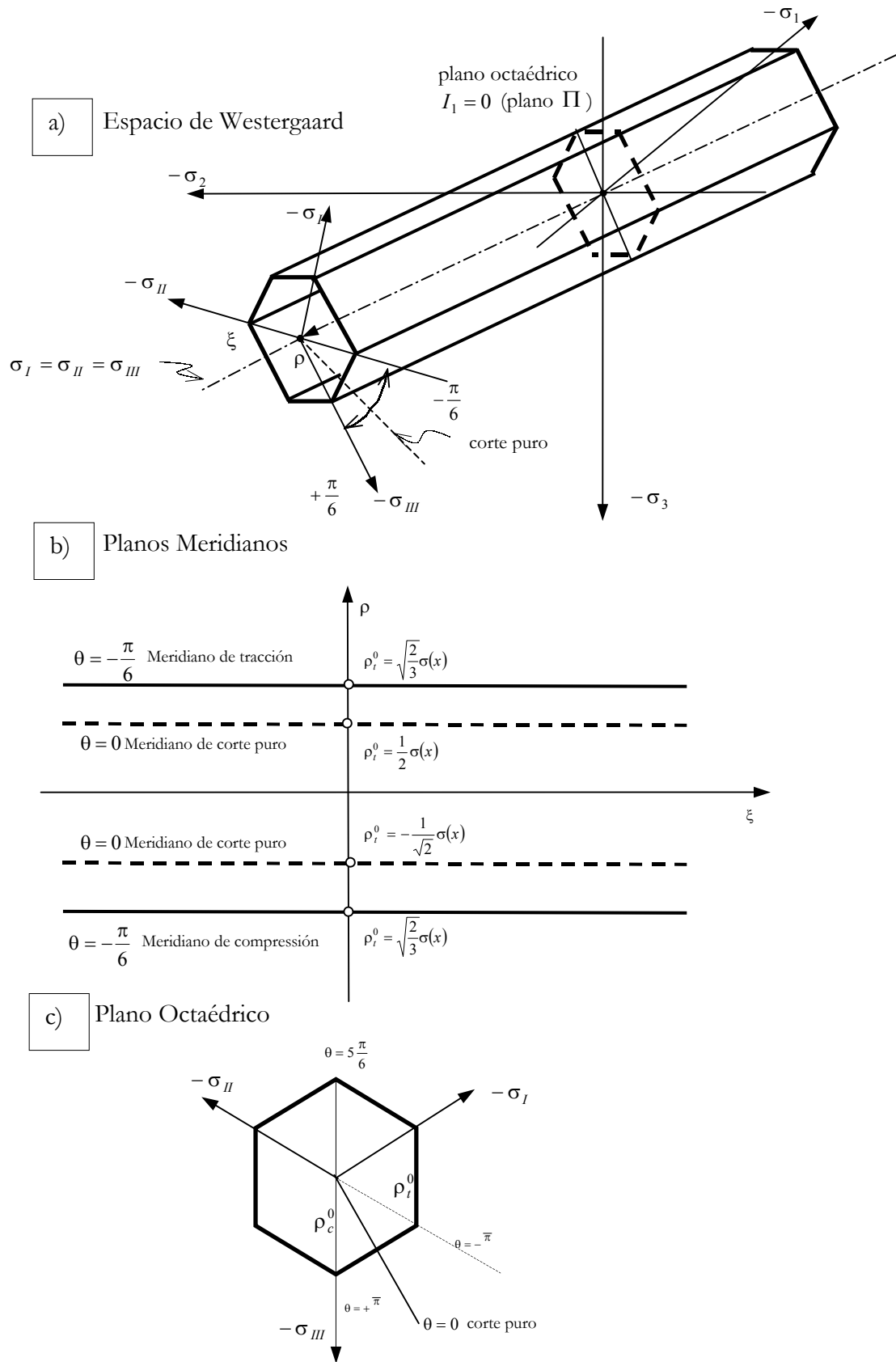


Figura B5.12 – Superficie de fluencia de Tresca: a) En el espacio de tensiones principales, b) Según los meridianos de tracción y compresión Máxima, c) Según el plano octaédrico $I_1=0$ o plano Π .

B 5.11.3 Criterio de von Mises. De Tensión Cortante Octaédrica.

Este criterio fue formulado por von Mises en 1913 y también, al igual que los dos anteriores, depende de un solo parámetro, la máxima resistencia tangencial octaédrica τ_{oct}^{max} . Además, considera sólo el segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 , despreciando así la influencia del primer invariante del tensor de tensiones I_1 y del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 . Es el criterio más apropiado para representar el comportamiento de los materiales metálicos. De acuerdo con este criterio, se alcanza la fluencia plástica cuando el valor de la función de endurecimiento plástico $\mathcal{K}(\kappa) = \tau_{oct}^{max}(\kappa)$, que tiene significado de una resistencia al cortante, alcanza la máxima resistencia a la tensión tangencial octaédrica τ_{oct}^{max} . Las diversas formas de expresar matemáticamente este criterio son las siguientes,

En función de las tensiones principales,

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \tau_{oct}^{max}) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - [\tau_{oct}^{max}(\kappa)]^2 = 0 \quad (5.98)$$

- En función del segundo invariante del tensor desviador de tensiones,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(J_2; \tau_{oct}^{max}) &= J_2 - [\tau_{oct}^{max}(\kappa)]^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{F}(J_2; \tau_{oct}^{max}) = \sqrt{J_2} - \tau_{oct}^{max}(\kappa) = 0 \\ \text{o bien en función de la tensión uniaxial efectiva } \bar{\sigma}(\kappa) &= \sqrt{3} \tau_{oct}^{max}(\kappa), \\ \mathbb{F}(J_2; \bar{\sigma}) &= \sqrt{3J_2} - \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \end{aligned} \quad (5.99)$$

- En función de coordenadas cilíndricas,

$$\mathbb{F}(\rho; \bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \rho - \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \quad (5.100)$$

siendo $\rho = \sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{2J_2}$.

La insensibilidad a la presión hace que el plano octaédrico se mantenga constante e igual al plano Π . Este plano octaédrico representa un círculo. De la intersección del plano meridiano de tracción ($\theta = -\pi/6$), con la superficie de fluencia, surge una recta de pendiente nula, paralela a la que resulta de la intersección del plano meridiano de compresión ($\theta = +\pi/6$), con la superficie de fluencia. Ambas rectas meridianas cortan al eje de tensión de corte octaédrico en $\rho_C^0 = \rho_T^0 = \pm \sqrt{2/3} \bar{\sigma}(\kappa)$ al igual que el criterio de Tresca. En el plano principal $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2 = 0$, representa una elipse cuyo eje mayor coincide con el eje de tensiones $\sigma_1 = \sigma_3$.

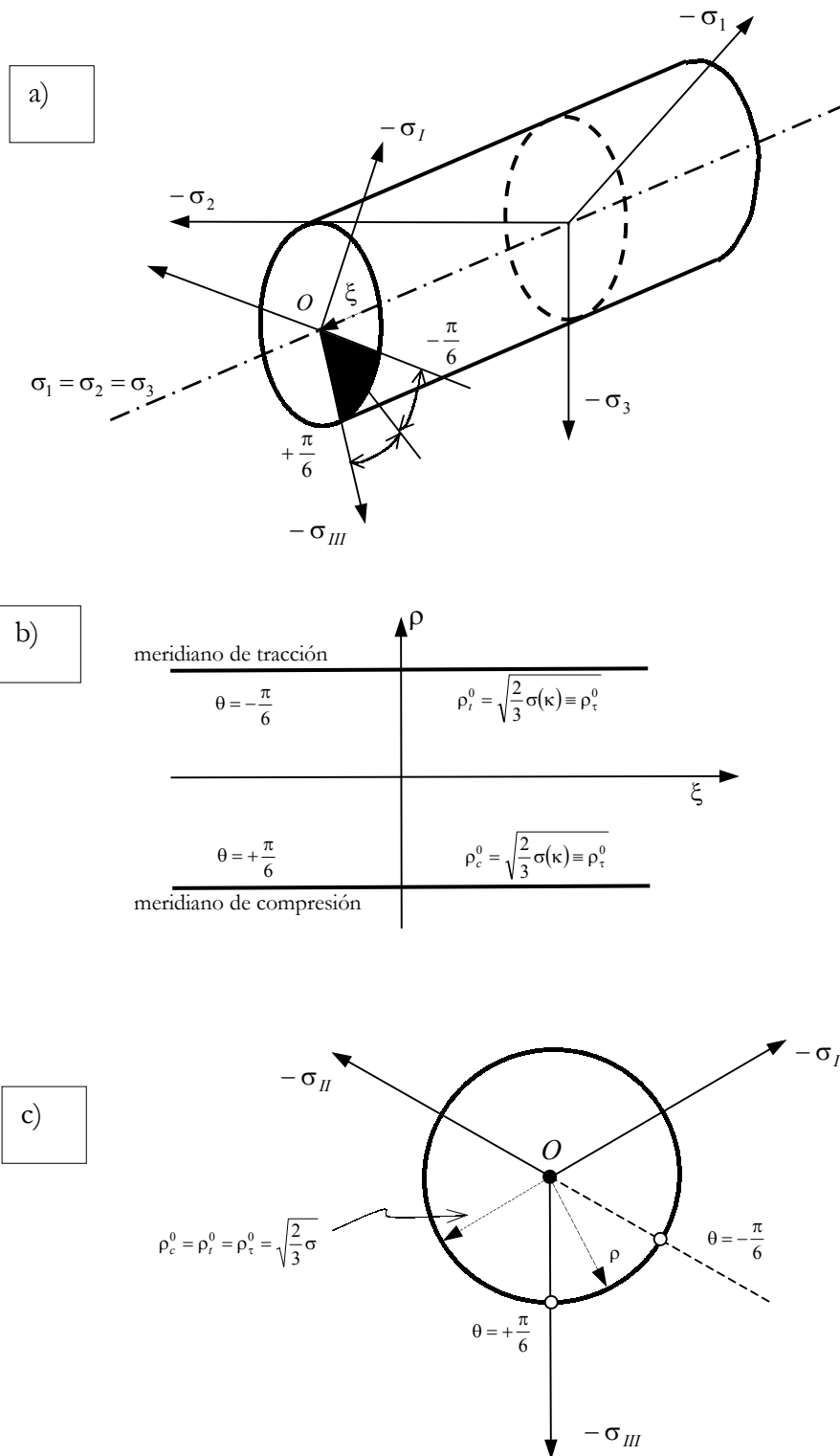


Figura B5.13 – Superficie de fluencia de von Mises: a) En el espacio de tensiones principales, b) Según los meridianos de tracción y compresión Máxima, c) Según el plano octaédrico $I_1=0$ o plano Π .

B 5.11.4 Criterio de Mohr-Coulomb. De Tensión Cortante Octaédrica.

Este criterio fue formulado por Coulomb en 1773 y desarrollado con más profundidad por Mohr en 1882. Este criterio depende de dos parámetros, la cohesión c y el ángulo de rozamiento interno ϕ entre partículas. Incluye en su expresión matemática el primer invariante del tensor de tensiones I_1 y el segundo y tercer invariantes del tensor desviador de tensiones J_2 , J_3 , respectivamente. Es apropiado para establecer en forma sencilla el límite donde comienza el proceso de fractura en materiales friccionales o geomateriales. La resistencia en un punto crece con el rozamiento entre partículas τ y esta a su vez depende de la tensión normal σ_n y de la cohesión c entre ellas. Así, puede presentarse la siguiente forma simple del criterio de Mohr Coulomb (ver Figura B5.14),

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; c; \phi) = |\tau| - c - \sigma_n \tan \phi = 0 \quad (\text{B5.101})$$

En el caso extremo que $\phi = 0$, el criterio de Mohr-Coulomb tiende al criterio de Tresca, en cuyo caso se cumple que $\tau = c = \mathcal{K}$.

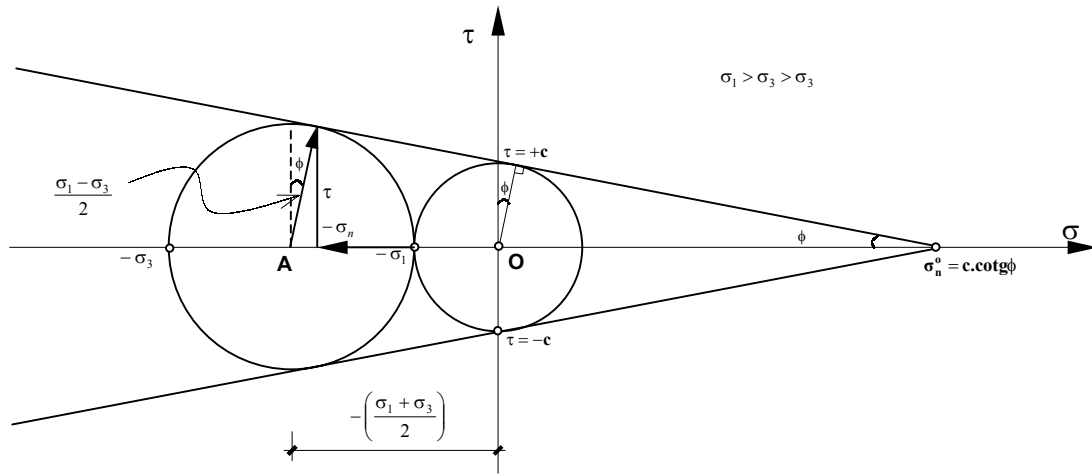


Figura B5.14 – Representación plana del estado tensional en un punto, según el criterio de Mohr-Coulomb.

Observando la Figura B5.14, se puede describir la ecuación (B5.101) en función de las tensiones principales,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; c; \phi) &= \left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \cos \phi \right] - c - \left[- \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \sin \phi \right] = 0 \\ \Rightarrow \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; c; \phi) &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \sin \phi - c \phi \cos = 0 \end{aligned} \quad (\text{B5.102})$$

donde σ_1 y σ_3 representan la tensión principal mayor y menor respectivamente. De esta se deduce que el criterio de Mohr-Coulomb ignora el efecto de la tensión principal intermedia σ_2 , lo que es una gran limitación. No obstante, este problema se soluciona si se expresa su formulación en función de los invariantes, del tensor de tensiones y sus desviadores,

$$\mathbb{F}(I_1; J_2; \theta; c; \phi) = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_2} \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{6} c(\kappa) \cos \phi = 0 \quad (\text{B5.103})$$

En coordenadas cilíndricas queda expresado como,

$$\mathbb{F}(\rho; \xi; \theta; c; \phi) = \sqrt{2} \xi \sin \phi + \sqrt{3} \rho \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{6} c(\kappa) \cos \phi = 0 \quad (\text{B5.104})$$

donde $\xi = \sqrt{3} \sigma_{oct} = \sqrt{3} (I_1/3) = I_1/\sqrt{3}$, el radio octaédrico $\rho = \sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{2J_2}$, y el ángulo de similitud de Lode $\theta = \arcsen\left[\left(3\sqrt{3} J_3\right)/\left(2J_2^{3/2}\right)\right]$.

Estas funciones describen en el espacio de tensiones principales una pirámide de base hexagonal distorsionada, cuyo eje coincide con el de presiones isostáticas $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. El aumento de presión hace que el plano octaédrico crezca. Este plano octaédrico representa un hexágono deformado. De la intersección del plano meridiano de tracción ($\theta = -\pi/6$), con la superficie de fluencia, surge una recta de pendiente $(2\sqrt{2} \sin \phi)/(3 + \sin \phi)$, que corta el eje de tensión tangencial octaédrica en $\rho_T^0 = (2c\sqrt{6} \cos \phi)/(3 + \sin \phi)$ y el eje de presiones en $\xi^0 = \sqrt{3} c \cotg \phi$. De la intersección del plano meridiano de compresión ($\theta = +\pi/6$), con la superficie de fluencia, resulta una recta de pendiente $(2\sqrt{2} \sin \phi)/(3 - \sin \phi)$, mayor que la del meridiano de tracción y que corta el eje de tensión tangencial octaédrica en $\rho_C^0 = (2c\sqrt{6} \cos \phi)/(3 - \sin \phi)$. En el plano principal $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2 = 0$, representa una hexágono deformado cuyo eje mayor coincide con el eje de tensiones $\sigma_1 = \sigma_3$.

De las funciones que describen el criterio de fluencia de Mohr-Coulomb, resulta claro que su principal característica es la capacidad para distinguir el comportamiento a tracción del de compresión. De aquí resulta que el criterio admite implícitamente que la relación de resistencia a tracción y compresión, cumplen con la siguiente expresión (ver Figura B5.15),

$$R_{Mohr} = \left| \frac{\sigma_C^0}{\sigma_T^0} \right| = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (\text{B5.105})$$

Esta definición establece una limitación importante en la adaptación de este criterio a un material en particular, pues normalmente no se da esta correlación en los materiales reales. Para conseguir una buena correlación entre relación de resistencias y ángulo de fricción interna, es necesario modificar el criterio de Mohr-Coulomb⁹.

⁹ Oller, S. (1991). *Modelización numérica de materiales friccionales*. CIMNE Nro. 3.

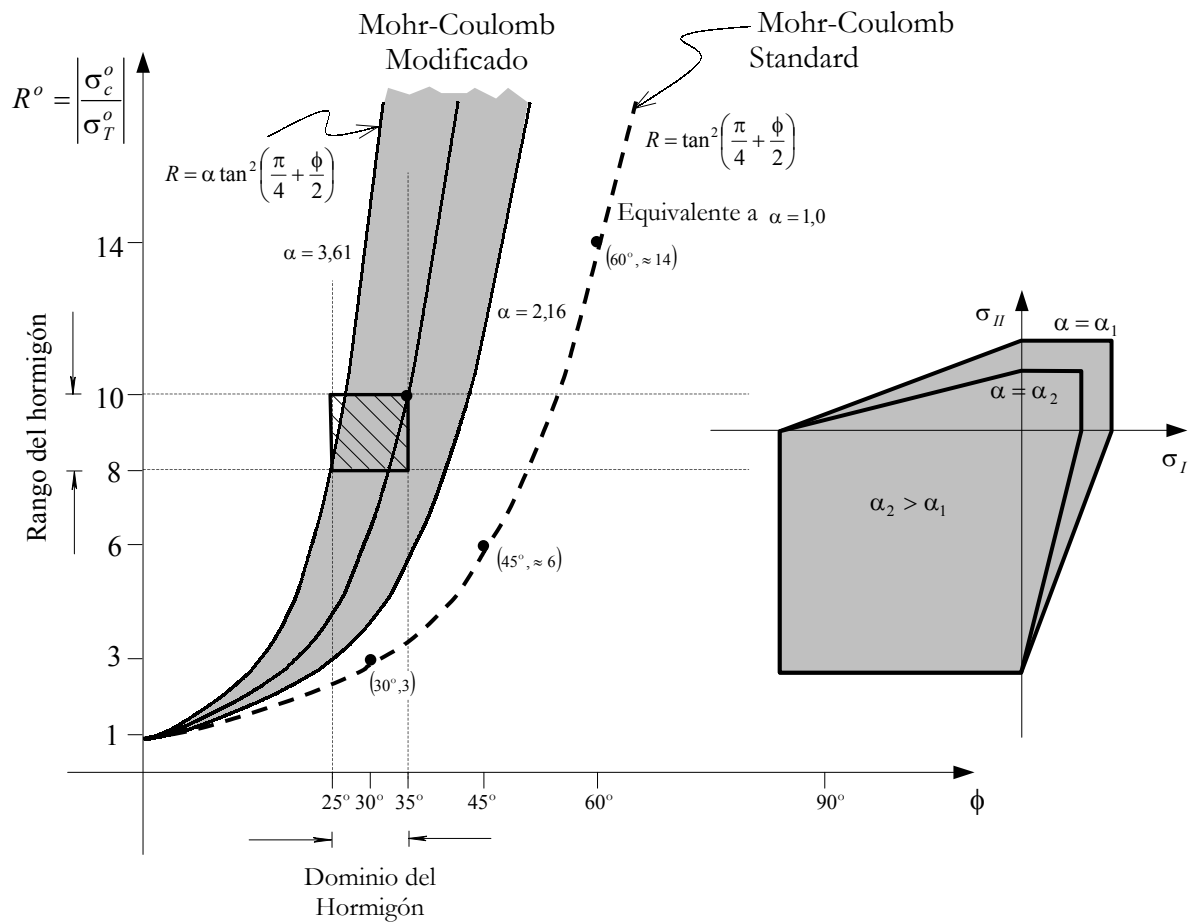


Figura B5.15 – Relación entre ϕ y R_{Mohr}

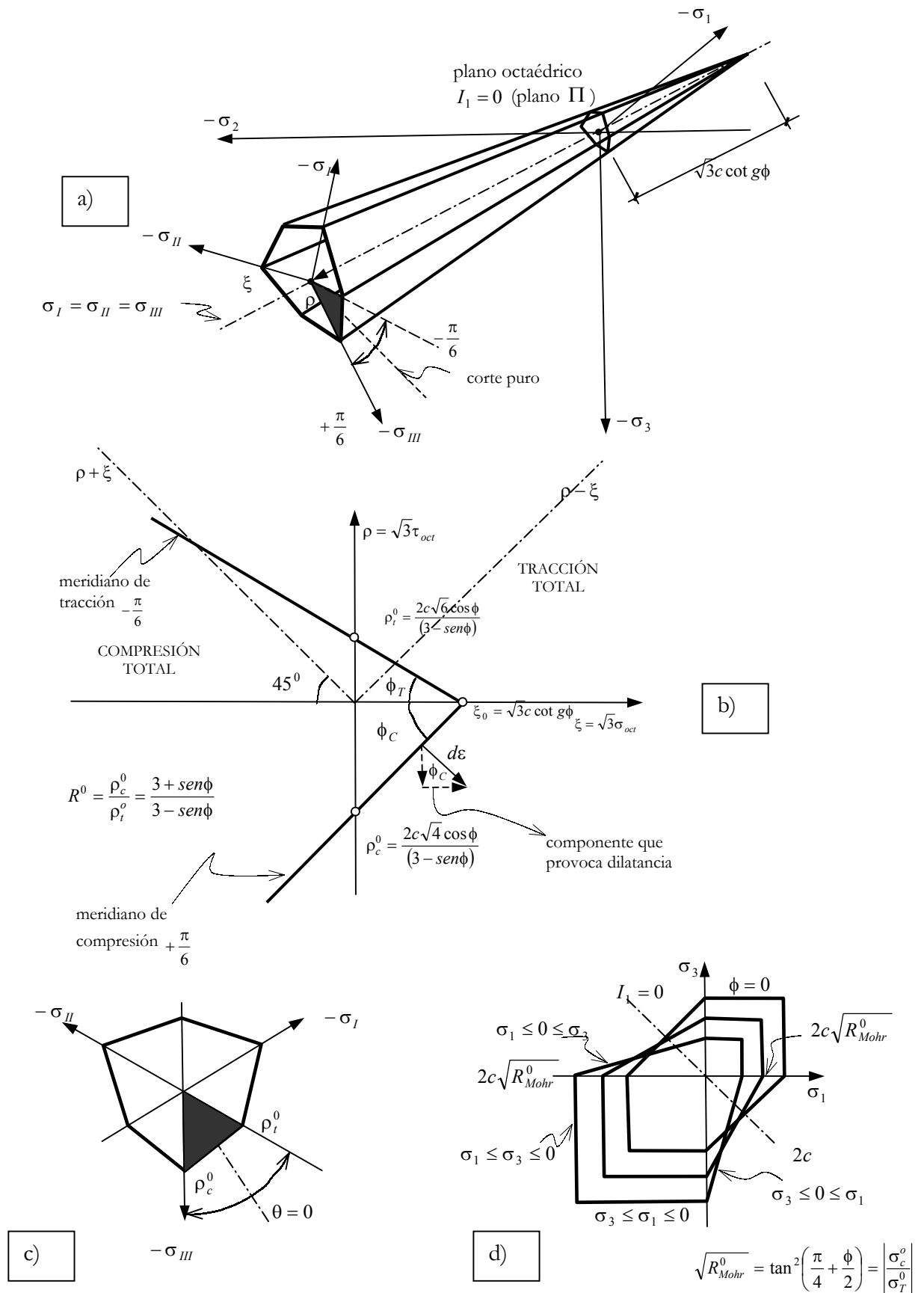


Figura B5.16 – Superficie de fluencia de Mohr-Coulomb: a) En el espacio de tensiones principales, b) Según los meridianos de tracción y compresión Máxima, c) Según el plano octaédrico $I_1=0$ o plano Π .

B 5.11.5 Criterio de Drucker-Prager.

Este criterio, formulado por Drucker y Prager en 1952, es considerado como una aproximación alisada del criterio de Mohr-Coulomb, pero la formulación matemática surge de una generalización del criterio de von Mises, para incluir la influencia de la presión, a través del primer invariante del tensor de tensiones I_1 y del ángulo de rozamiento interno ϕ . También depende del segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 , despreciando la influencia del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 . Este criterio depende de dos parámetros, el ángulo de rozamiento entre partículas ϕ y la cohesión c . Las diversas formas de expresar matemáticamente este criterio son las siguientes,

- En función de los invariantes del tensor de tensiones y su desviador,

$$\mathbb{F}(I_1; J_2; c; \phi) = \bar{\alpha}(\phi) I_1 + \sqrt{J_2} - \bar{\mathcal{K}}(\kappa; \phi) = 0 \quad (\text{B5.106})$$

- En función de coordenadas cilíndricas,

$$\mathbb{F}(\rho; \xi; c; \phi) = \bar{\alpha}(\phi) \sqrt{6} \xi + \rho - \sqrt{2} \bar{\mathcal{K}}(\kappa; \phi) = 0 \quad (\text{B5.107})$$

siendo la variable dependiente de la presión $\xi = \sqrt{3} \sigma_{oct} = \sqrt{3} (I_1/3) = I_1/\sqrt{3}$, el radio octaédrico $\rho = \sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{2J_2}$ y las funciones de endurecimiento que luego de ser ajustadas con el criterio de Mohr-Coulomb, resultan $\bar{\mathcal{K}}(\kappa; \phi) = 6 c(\kappa) \cos \phi / (3\sqrt{3} + \sqrt{3} \sin \phi)$ y $\bar{\alpha}(\phi) = 2 \sin \phi / (3\sqrt{3} + \sqrt{3} \sin \phi)$. Estas dos funciones describen un cono inscrito en la pirámide de Mohr-Coulomb, coincidiendo ambos criterios en los meridianos de tracción. En el caso en que el cono circunscriba la pirámide de Mohr-Coulomb, se tiene coincidencia en los meridianos de compresión de ambas superficies, y de ello resultan las siguientes funciones $\bar{\mathcal{K}}(\kappa; \phi) = 6 c(\kappa) \cos \phi / (3\sqrt{3} - \sqrt{3} \sin \phi)$ y $\bar{\alpha}(\phi) = 2 \sin \phi / (3\sqrt{3} - \sqrt{3} \sin \phi)$. Ambos casos particulares describen dos comportamientos muy diferenciados.

El plano octaédrico representa un círculo, cuyo radio varía en función de la presión. De la intersección del plano meridiano de tracción ($\theta = -\pi/6$), con la superficie de fluencia, surge una recta de pendiente $\sqrt{\bar{\alpha}}$, que corta el eje de tensión tangencial octaédrica en $\rho_T^0 = \sqrt{2} \bar{\mathcal{K}}$ y el eje de presiones en $\xi^0 = \bar{\mathcal{K}} / \sqrt{3} \bar{\alpha}$. De la intersección del plano meridiano de compresión ($\theta = +\pi/6$), con la superficie de fluencia, resulta una recta con igual pendiente que la obtenida para meridiano de tracción. En el plano principal $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2 = 0$, representa una elipse desplazada de su centro (influencia de la presión), cuyo eje mayor coincide con el eje de tensiones $\sigma_1 = \sigma_3$.

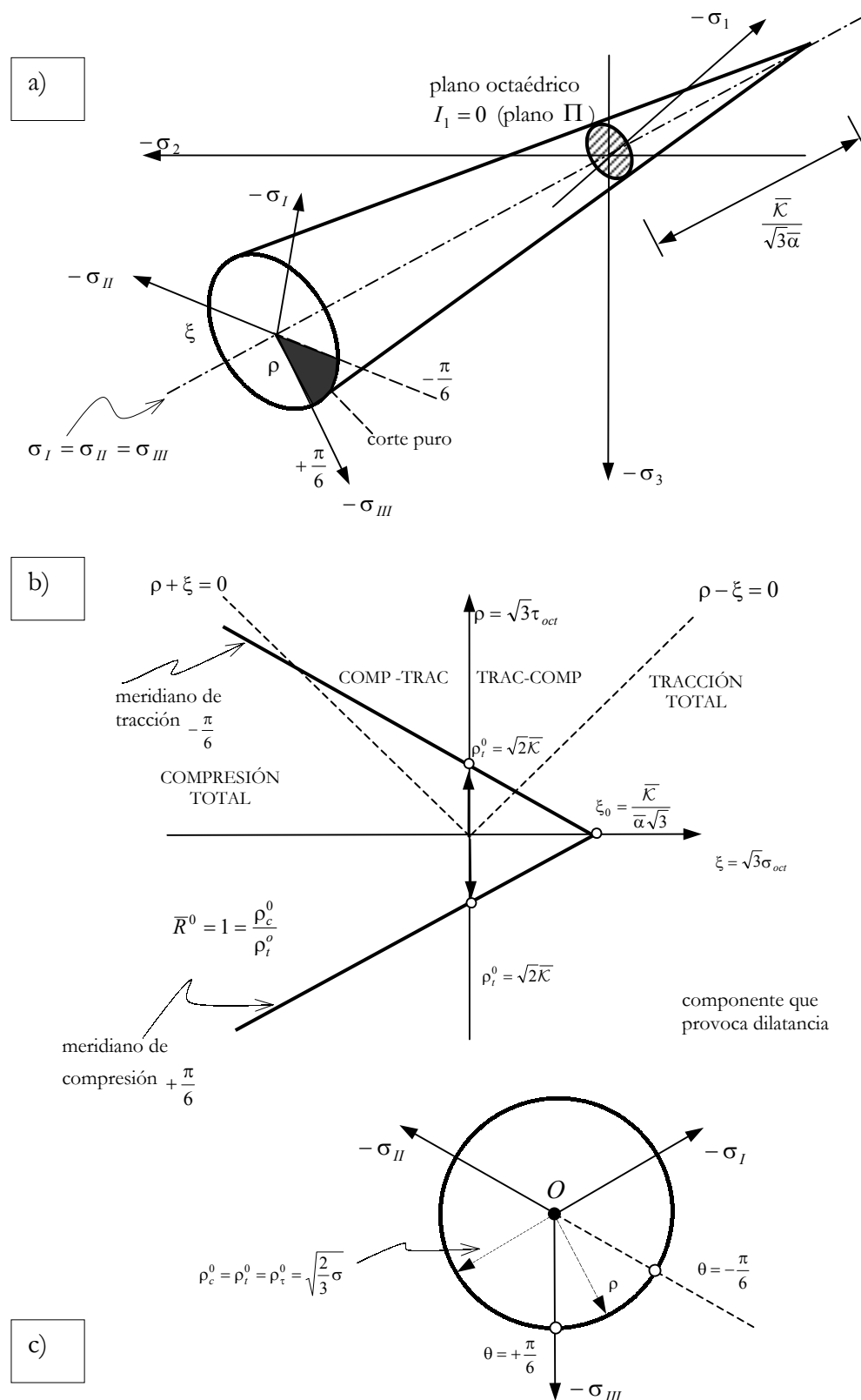


Figura B5.17 – Superficie de fluencia de Drucker-Prager: a) En el espacio de tensiones principales, b) Según los meridianos de tracción y compresión Máxima, c) Según el plano octaédrico $I_1=0$ o plano Π .

B 5.12 Plasticidad Para Geomateriales.

En este apartado se presenta un modelo constitutivo general, muy apropiado para representar el comportamiento de materiales dúctiles y frágiles. Es habitual encontrar modelos para el tratamiento de los materiales dúctiles del tipo de los metales, pero no siempre es posible conseguir modelos con la misma eficiencia para representar el comportamiento de los geomateriales frágiles. Por este motivo, el modelo que a continuación se describe ha sido formulado inicialmente para materiales frágiles^{10,11}, sin embargo puede utilizarse para representar el comportamiento de materiales dúctiles luego de hacer algunas particularizaciones en los parámetros que lo definen (Figura B5.19). Dentro de los materiales frágiles se ha concentrado la atención sobre aquellos denominados “Materiales Friccionales” (ver Figura B5.18). Entre los materiales que encajan en esta calificación puede citarse todos los cerámicos, suelos constituidos por componentes friccional como arena entre otros y el Hormigón, sobre el cual será hará mayor énfasis.

Materiales Friccionales son aquellos cuya relación entre su resistencia y la presión, depende del ángulo de rozamiento interno. Exhiben dilatancia, es decir, cambio de volumen aparente, cuando están sujeto a tensiones tangenciales.

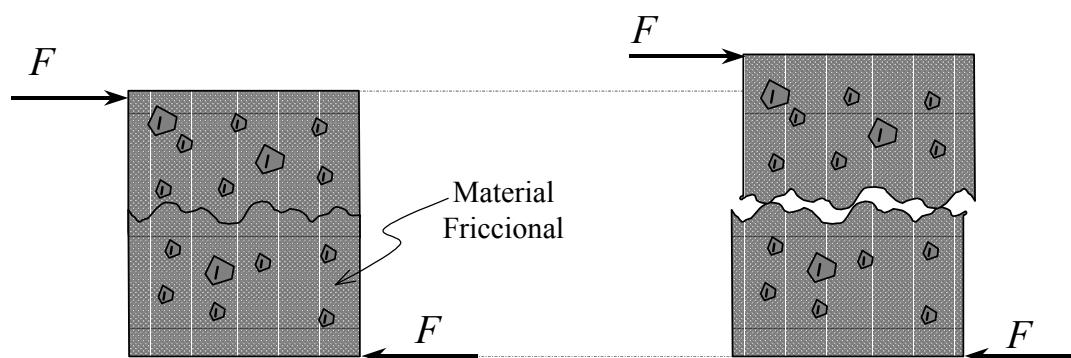


Figura B5.18 – Fenómeno de Dilatancia.

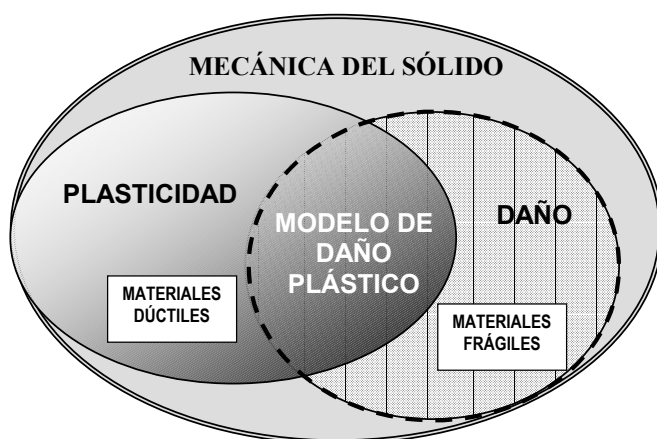


Figura B5.19 – Representación simple de las teorías que contribuyen a la definición del “modelo de daño plástico”.

¹⁰ Oller, S. (1991). *Modelización de materiales friccionales*. CIMNE No. 3. Barcelona.

¹¹ Luccioni, B. (1993). *Formulación de un Modelo Constitutivo para Materiales Ortótropos*, Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

B 5.13 Bases del modelo de “daño-plástico”.

El nombre de *modelo de daño plástico*¹² se debe a la hipótesis que considera que el comportamiento no-lineal inelástico que sufre un sólido cohesivo-friccional, es consecuencia de la formación y desarrollo de micro-fisuras. La posibilidad de utilizar la *teoría matemática de la plasticidad* para representar el comportamiento de un material friccional fracturable, parte de suponer que la deformación no recuperable, o deformación por micro-fisuración en este caso, puede ser aceptada tal como se entiende en la plasticidad clásica, aunque el significado físico de este fenómeno plástico es distinto en uno y otro caso.

La teoría matemática de la plasticidad clásica está basada en una formulación isótropa para cada punto del sólido (ver apartados anteriores), lo que significa que la función de fluencia plástica, o umbral de discontinuidad, está sometida a un movimiento homotético gobernado por la evolución de la variable de endurecimiento plástico κ^p .

Aquí se entenderá el vocablo *daño* como sinónimo de *deterioro*, aunque más adelante se verá que su significado está también asociado al fenómeno de *pérdida de rigidez*. La interpretación física de este daño (deterioro) isótropo puede entenderse a partir del fenómeno de daño adireccional que sufre cada punto del sólido real cuando sobreviene la fractura. Así, en un primer análisis, el concepto de daño adireccional resulta contrapuesto al de daño macroscópico (fractura), debido a que este último constituye un fenómeno direccional (ver Figura B5.20).

Aproximando el comportamiento a fractura mediante una formulación continua¹³, se puede ahora admitir como hipótesis que el *daño macroscópico direccional* (fisura), proviene de un comportamiento *microscópico adireccional* de los puntos situados en una cierta zona del sólido, que se denominará *zona de daño*. Con base en esto, *una fisura quedará definida por el lugar geométrico de los puntos que han sufrido un daño adireccional* (ver Figura B5.20).

La concentración del daño en un sólido cargado, dentro de una zona cuyas dimensiones son reducidas respecto del tamaño total del mismo, se debe al fenómeno de localización o concentración de deformaciones que se desarrolla en dicha zona del sólido. En ésta, una cierta cantidad de puntos se encuentran sometidos a un comportamiento tensión deformación con endurecimiento negativo o ablandamiento, es decir con pérdida de tensión y crecimiento de la deformación (ablandamiento). Por el contrario, los puntos que están fuera de la zona de localización del daño y que experimentan un proceso de descarga, mantienen constante su nivel de daño en caso de que haya ocurrido.

El modelo constitutivo de daño-plástico es capaz de memorizar la macro-direccionalidad del deterioro que ha sufrido el sólido durante todo el proceso de carga, aun admitiendo condiciones de carga no-radial*.

En virtud de lo antes dicho, se considera que el *fenómeno de localización de deformaciones* posibilita el uso de la teoría de la plasticidad, y también otras teorías continuas, como base para formular un “modelo constitutivo que representa el deterioro por micro-fisuras en los materiales friccionales”. Esto ofrece, una herramienta que representa en buen modo los

¹² Lubliner, J.; Oliver J.; Oller S. and Oñate E. (1989). A Plastic-Damage Model for Concrete. International Journal of Solids and Structures, Vol.25, No.3, pp. 299,326.

¹³ Oller S. (2001). *Fractura mecánica – Un enfoque global*. CIMNE – Ediciones UPC. Barcelona

* **Nota:** Se dice que el comportamiento de un punto del sólido es “radial” o “proporcional”, si durante todo el proceso de carga se cumple la relación $\sigma_{11}/\sigma_{11}^0 = \sigma_{12}/\sigma_{12}^0 = \dots = \sigma_{33}/\sigma_{33}^0$, entre las componentes del tensor de tensiones en el estado actual y el estado inicial, respectivamente.

mecanismos de daño muchos materiales frágiles (ej.: el hormigón), y que cumple rigurosamente con los principios básicos de la mecánica de medios continuos¹⁴.

El modelo de daño plástico basa su formulación en la *mecánica de sólidos*, particularmente en la *teoría de la plasticidad* y en la *teoría de daño continuo*, y utiliza como vehículo para la resolución del problema estructural el *método de los elementos finitos* y diversas *técnicas numéricas* necesarias para controlar y garantizar la solución del problema (ver Figura B5.21).

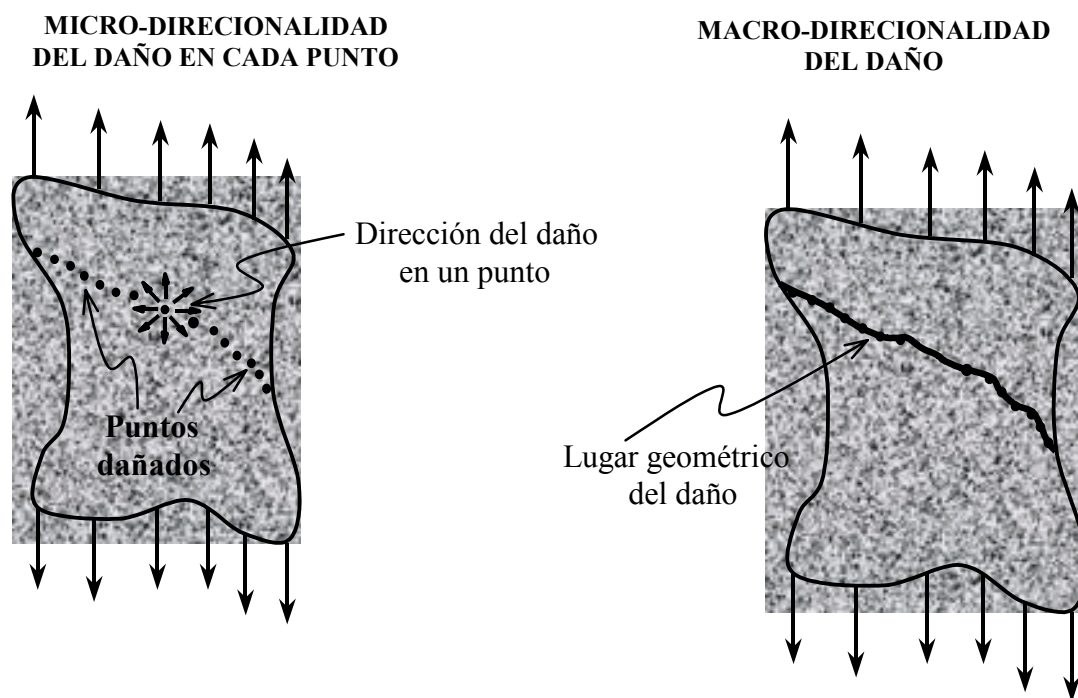


Figura B5.20 – Micro y macro direccionalidad del daño.

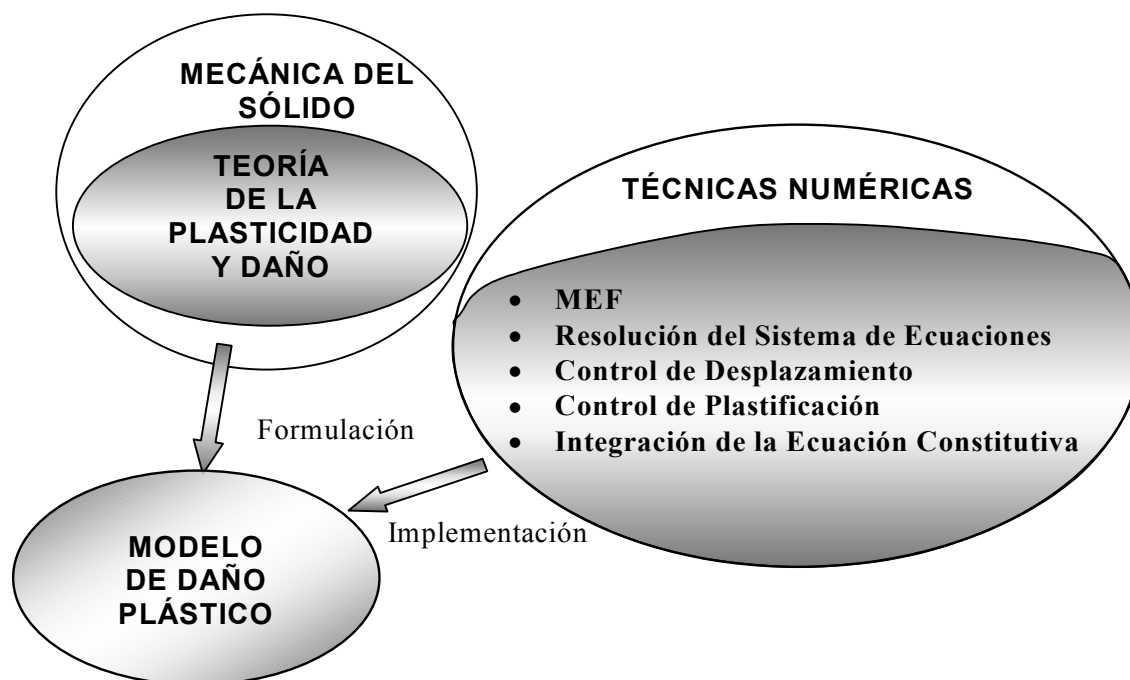


Figura B5.21 – Formulaciones de las que surge el modelo de daño plástico.

¹⁴ Malvern, L. (1969). *Introduction to the mechanics of continuous medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

B 5.13.1 Hipótesis sobre el comportamiento del material a representar.

La formulación de un modelo constitutivo, orientado a tratar el comportamiento mecánico de un material en particular, debe hacerse luego de establecer algunas hipótesis simplificativas en dicho material. Se trata entonces de crear un material ideal, tan cercano al real como sea posible y práctico. A continuación se hace una enumeración de alguna de estas hipótesis simplificativas que han sido consideradas dentro del modelo de *daño plástico* a modo de premisas.

- Admitir que el material friccional tiene un marcado comportamiento inelástico, que da lugar a deformaciones permanentes que pueden interpretarse como micro fisuras.
- En cada punto se produce un deterioro adireccional que se entenderá como un comportamiento isótropo local.
- El lugar geométrico de los puntos deteriorados, marca una dirección macroscópica que será interpretada como una fisura.
- Los puntos deteriorados se concentran en una zona delgada que se denominará zona dañada, cuya existencia se debe al fenómeno de localización de deformación. Esto da lugar a una anisotropía inducida por el comportamiento no lineal del sólido.
- Durante el proceso inelástico el material puede tener un comportamiento de cambio de volumen que puede identificarse con el fenómeno de dilatación.
- La resistencia máxima, su evolución y la deformación última dependen de las características del proceso evolutivo de carga, tracción-tracción, tracción-compresión, compresión-compresión. Es decir, que la resistencia evoluciona con el proceso mismo.
- Durante todo el proceso de carga cuasi-estática y monótona creciente, incluido el rango de comportamiento en el que las deformaciones son reversibles, se produce una continua y creciente degradación de la rigidez.

Como puede observarse, todos los ítem aquí nominados no son simples, pero si posibles, de conseguir dentro de una formulación mecánica.

B 5.13.2 Algunas Características del Modelo de Daño Plástico.

Establecer las características mecánicas fundamentales que debe reunir un modelo constitutivo, es otro de los pasos iniciales previo a establecer la formulación. Es por ello necesario decidir sobre la teoría básica sobre la que se fundamentará su formulación y también sobre el grupo de variables internas que precisarán los mecanismos a representar en la formulación.

La teoría de la plasticidad proporciona una adecuada estructura físico-matemática, que permite formular el comportamiento de los materiales friccionales sometidos a estados de carga. De la extensión de sus principios básicos y de la reinterpretación de sus variables fundamentales, ha surgido el *modelo de daño plástico*. Así, a partir de la clásica variable de endurecimiento plástico ω^p definida en apartados previos, se ha formulado una nueva variable de daño plástico κ^p a modo de variable interna. Esta variable está tratada como una magnitud adimensional, normalizada a la unidad, que varía entre $0 \leq \kappa^p \leq 1$. Para $\kappa^p = 0$ no hay daño plástico y para $\kappa^p = 1$ se define el límite de daño total del punto del sólido. Este estado último puede ser interpretado como una pérdida total de la resistencia en el punto del sólido, y desde un punto de vista físico, como un desmembramiento de la

masa del sólido en el punto de análisis (discontinuidad física). A continuación se hace una breve presentación, que para mayor detalle pueden consultarse las fuentes^{1,15,16}.

El criterio de fluencia plástica presentado en apartados anteriores, es ahora tratado en este modelo a través de una expresión matemática que puede ser escrita en la siguiente forma general,

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{c}) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{c} = 0 \quad (\text{B5.108})$$

donde $f(\boldsymbol{\sigma})$ es una función escalar homogénea de primer grado en las componentes del tensor de tensiones, que permite definir la cohesión $\mathbf{c}$, o una tensión uniaxial escalada, como una función de endurecimiento plástico o como una variable interna dependiente de la evolución del proceso mecánico.

Los criterios de plasticidad de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager, también pueden representarse por una expresión similar a la ecuación (B5.108), pero no aproximan adecuadamente el comportamiento real de muchos de los materiales friccionales. Numerosos criterios de fluencia plástica han tratado de mejorar esta aproximación para los materiales cohesivos-friccionales. Hay algunas funciones $f(\boldsymbol{\sigma})$ no-homogéneas y de grado superior en las componentes del tensor de tensiones, característica que impide definir una función de endurecimiento plástico $\mathbf{c}$ con una interpretación física directa.

El modelo constitutivo de daño plástico puede utilizarse cualquier criterio de fluencia, pero para mejorar la aproximación del comportamiento particular del hormigón se pueden definir criterios apropiados a cada caso¹.

La cohesión $\mathbf{c}$ es tratada como una magnitud escalada con la resistencia inicial a compresión uniaxial del hormigón σ_c^0 (umbral de discontinuidad tensional), que es el nivel de tensiones para el cual la deformación volumétrica ϵ_v es máxima. Consecuentemente se define la *cohesión inicial*, o cohesión del material virgen, como $\mathbf{c}^0 \propto \sigma_c^0$ para $\kappa^p = 0$, situación que establece la posición inicial del criterio de fluencia, y la *cohesión final*, o cohesión del material totalmente deteriorado, $\mathbf{c}^u = 0$ para $\kappa^p = 1$, situación que define la posición final del criterio de fluencia.

A diferencia de la plasticidad clásica con endurecimiento isótropo, la cohesión no es una simple función de la *variable de endurecimiento plástico* $\mathbf{c}(\kappa^p)$, sino una *variable interna* que depende de la evolución del proceso elasto-plástico, gobernada por una ecuación de evolución (ecuación diferencial).

El ángulo de rozamiento interno ϕ también podría definirse como una variable interna a partir de una ley de evolución que dependa del proceso elasto-plástico, pero dada la evidencia del comportamiento físico de este fenómeno en hormigones¹⁷, sólo se plantea una simple función explícita de la variable de daño plástico $\phi(\kappa^p)$. Con esta hipótesis se obtiene una fricción inicial nula $\phi^0 = 0$ cuando aún la cohesión $\mathbf{c}^0$ no permite la movilización de la fricción, y máxima al final del proceso elasto-plástico

¹⁵ Lubliner, J.; Oliver J.; Oller S. and Oñate E. (1989). A Plastic-Damage Model for Concrete. International Journal of Solids and Structures, Vol.25, No.3, pp. 299,326.

¹⁶ Oller, S.; Oñate E.; Oliver, J. and Lubliner J. (1990). Finite Element Non-Linear Analysis of Concrete Structures Using a "Plastic-Damage Model". Engineering Fracture Mechanics, Vol 35; pp 219-231.

¹⁷ Borst, R. De and Vermeer, P. (1984). *Non associated plasticity for soils, concrete and rock*. Heron. Vol. 29, Delf. Netherlands.

$\phi^u = \phi(\kappa^p = 1) = \phi^{\max}$. En este último estado, cuando el hormigón se ha descohesionado, la fricción coincide con la correspondiente a una arena.

El ángulo de dilatancia ψ , que al igual que el ángulo de rozamiento interno podría definirse como una variable interna, también en este caso es suficiente expresarlo como una función de la variable de daño plástico $\psi(\kappa^p)$, dado que con esta hipótesis también se ha obtenido una buena aproximación al comportamiento real del hormigón. Este ángulo vale $\psi(\kappa^p = 0) = \psi^0 = 0$ al iniciar el proceso plástico, y $\psi^{\max} = \psi(\kappa^p = 1)$ al finalizar el proceso.

En resumen, para un proceso plástico sin degradación de rigidez, *el modelo de daño plástico* utiliza en su definición el siguiente conjunto de variables internas $\mathbf{q} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^p, \kappa^p, \mathbf{c}\}$, cuyas definiciones y reglas de evolución serán presentadas a continuación como parte de las ecuaciones fundamentales que gobiernan el modelo,

1. Una **descomposición de la deformación** en una parte elástica y otra plástica,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{B5.109})$$

Donde $\mathbb{C}$ es el tensor constitutivo elástico inicial.

2. Un **criterio de fluencia plástica y potencial plástico** análogo al definido por la ecuación (B5.108).

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{c}) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{c} = 0 \quad ; \quad \mathbb{G}(\boldsymbol{\sigma}) = g(\boldsymbol{\sigma}) - \text{cte} = 0 \quad (\text{B5.110})$$

tal que $f(\boldsymbol{\sigma})$ y $g(\boldsymbol{\sigma})$ son dos funciones escalares de argumentos tensoriales, denominadas función de fluencia y potencial plástico, respectivamente.

6. Una **regla de flujo plástica no asociada** y un grupo de **variables internas**,

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \kappa^p \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \kappa^p \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Deformación Plástica} \\ \text{Variable de Daño Plástico} \\ \text{Variable de Cohesión} \end{array} \quad (\text{B5.111})$$

todas ellas definidas mediante las siguientes ecuaciones de evolución (ver apartado de plasticidad clásica),

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ \dot{\kappa}^p \\ \dot{\mathbf{c}} \end{Bmatrix} \equiv \dot{\lambda} \cdot \mathbf{H} = \dot{\lambda} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{h}_\kappa : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ h_c \cdot \mathbf{h}_\kappa : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ \mathbf{h}_\kappa : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ h_c \cdot \mathbf{h}_\kappa : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \end{Bmatrix} \quad (\text{B5.112})$$

donde $\mathbf{h}_\kappa$ y h_c es un tensor de segundo orden y una función escalar respectivamente y que se definirán más adelante, que dependen del estado actual de la variable libre $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ y del resto de las variables internas $\mathbf{q}$. Como puede verse en la ecuación anterior, la variable interna fundamental es la deformación plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ y a partir de ella se obtienen las otras. El factor de consistencia plástica λ se obtiene tal como se ha mostrado en apartados anteriores, a partir de la condición de consistencia de la función de fluencia plástica.

7. **Una ecuación constitutiva secante y tangente**, definida en forma análoga a la plasticidad clásica,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \mathbb{C} - \frac{\left[\mathbb{C} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \otimes \left[\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} \right]}{-c_k \cdot \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\eta}} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h_k \mathbf{h}_k : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)} \right\} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B5.113})$$

tal que la notación utilizada puede consultarse en el mencionado en el apartado dedicado a la plasticidad clásica y aquella que tenga una definición particular será presentada a continuación.

El modelo constitutivo que resulta de estas definiciones básicas, consigue una muy buena respuesta durante el proceso de fractura. A modo de resumen puede decirse que el modelo reúne las siguientes características,

- Definición de una ley constitutiva que depende de las variables internas de cohesión y daño plástico, permitiendo así representar situaciones de carga complejas no-radiales.
- Trata en forma unificada los estados complejos de tensión multiaxial.
- Admite que los materiales tienen distintos límites de resistencia máxima y de deformación última, dependiendo del proceso mecánico que este desarrollándose.
- Admite la posibilidad de considerar distintos criterios de fluencia plástica, no siendo esta una característica del modelo, sino una variable más del mismo que necesita ser preestablecida.
- Considera un flujo plástico no-asociado, que permite el control del fenómeno de dilatación.
- Permite obtener toda la información relacionada con el deterioro de un punto a través de un post-proceso de la información mecánica del punto.

B 5.14 Variables fundamentales del modelo de “daño-plástico”.

Las definiciones establecidas en el apartado anterior son muy generales y necesitan ser precisadas con más detalle. Para ello a continuación se establecen las expresiones que definen la regla de evolución de las variables internas contenidas en aquellas definiciones básicas.

B 5.14.1 Definición de la variable de daño plástico.

La plasticidad clásica establece una variable de endurecimiento en función de la deformación plástica efectiva $\kappa^p = \bar{\varepsilon}^p$, o también en función del trabajo plástico específico $\kappa^p = \omega^p = \bar{\sigma} \bar{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p$ (ver apartados sobre la plasticidad clásica). Estas definiciones son apropiadas para materiales cuya deformación última (estado de deterioro total en el punto), es igual a tracción que a compresión o para cualquier proceso mixto en general. En muchos materiales esto no se cumple y es necesario encontrar una variable de endurecimiento

plástico que contemple la posibilidad de tener una deformación última diferenciada para cada proceso en particular. Esto se consigue estableciendo una variable interna que define una disipación normalizada a la unidad, es decir que se trata de la relación que hay entre la densidad de energía disipada en un determinado instante del proceso respecto del máximo que podría disipar el punto del sólido. Así, puede decirse que la *variable de daño plástico* es una “medida relativa” de la energía disipada durante el proceso plástico. Por simplicidad y orden en la presentación, es conveniente definir esta variable para procesos uniaxiales simples y luego generalizarla a procesos multiaxiales.

Definición de la variable de daño plástico para estados de tensión uniaxial.

De un ensayo experimental uniaxial a tracción y otro a compresión, se obtienen las curvas que describen la evolución de la tensión vs. la deformación en cada instante. A partir de ellas puede deducirse las curvas $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}^p$ que encierran las energías de fractura g_f^p y aplastamiento g_c^p , por unidad de volumen, respectivamente.

En función de estas curvas se obtiene la *energía específica* disipada al final de un proceso elasto-plástico cuasi-estático, que en el caso de un proceso de tracción uniaxial resulta,

$$g_f^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt \quad (B5.114)$$

donde σ_T es la tensión uniaxial de tracción y ϵ_T^p deformación plástica uniaxial de tracción. A partir de ésta última expresión, se define la *variable de daño plástico* para un proceso cuasi-estático de tracción uniaxial, como la disipación plástica normalizada, acotada entre cero y la unidad,

$$0 \leq \left[\kappa^p = \frac{1}{g_f^p} \int_{t=0}^t \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt \right] \leq 1 \quad (B5.115)$$

Resultando así una variable normalizada con respecto a la energía específica máxima a tracción, con valores comprendido entre $0 \leq \kappa^p \leq 1$ para el inicio y fin del proceso plástico, respectivamente. Con κ^p como variable puede ahora transformarse las curvas de respuesta uniaxial de tensión-deformación plástica en otras curvas que dependan de esta variable de daño plástico, en la cual que se cumplen los siguientes extremos, $\sigma_T(\kappa^p = 0) = \sigma_T^0$ y $\sigma_T(\kappa^p = 1) = \sigma_T^{Ultima}$ en el intervalo $[0, 1]$.

En el problema de compresión uniaxial, al igual que en el problema de tracción, la variable de daño plástico resulta

$$0 \leq \left[\kappa^p = \frac{1}{g_c^p} \int_{t=0}^t \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p dt \right] \leq 1 \quad (B5.116)$$

siendo $g_c^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p dt$ la energía disipada en el proceso de compresión. Al igual que en el proceso de tracción pura, puede ahora definirse la respuesta uniaxial de tensión-deformación plástica mediante otra curva que dependa del daño plástico en lugar de la deformación plástica, en la cual que se cumplen los siguientes extremos, $\sigma_C(\kappa^p = 0) = \sigma_C^0$ y $\sigma_C(\kappa^p = 1) = \sigma_C^{Ultima}$ en el intervalo $[0, 1]$ (ver Figura B5.22).

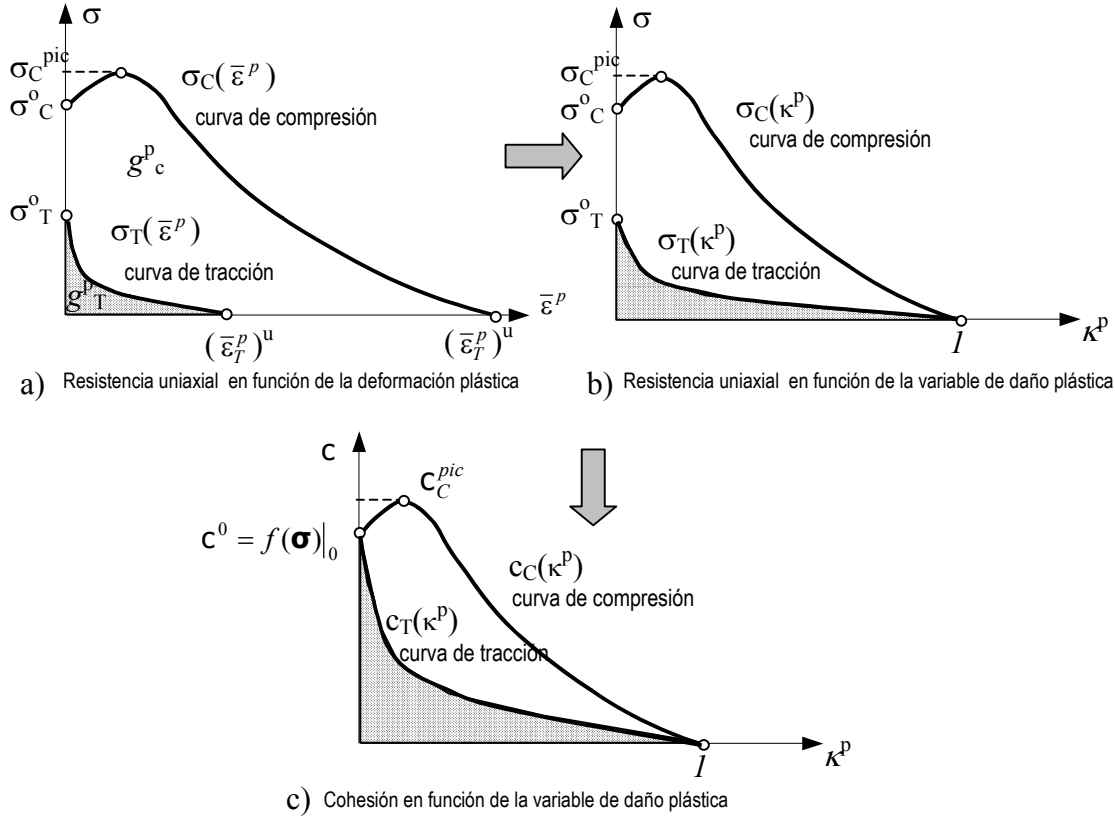


Figura B5.22 – Transformación de la resistencia uniaxial medida en laboratorio en la resistencia uniaxial utilizada en el modelo de daño plástico.

La variable de daño plástico es objetiva y evoluciona dentro de los mismos límites cualquiera sea el proceso mecánico que se haya desarrollado. De esta forma, el daño total en un punto se alcanza cuando $\kappa^p = 1$, pero la energía disipada será g_f^p si se desarrolla un proceso a tracción pura y g_C^p si es a compresión pura.

Definición de la variable de daño plástico para estados de tensión multiaxial.

De modo general, para un proceso de carga genérico, se define la variable de daño plástico para un proceso mecánico multiaxial, como

$$\dot{\kappa}^p = \mathbf{h}_\kappa : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (\text{B5.117})$$

donde $\mathbf{h}_\kappa$ es un tensor de segundo orden que, para los casos particulares de tracción y compresión uniaxial da lugar a una variable de daño plástico que cumple con las ecuaciones (B5.115) y (B5.116) respectivamente, y para los restantes casos es capaz de desarrollar una magnitud de daño consecuente con el proceso de carga. Para recuperar la variable de endurecimiento plástico de la teoría clásica de la plasticidad, este tensor resulta igual al tensor de tensiones $\mathbf{h}_\kappa = \boldsymbol{\sigma}$ y para materiales isotrópicos en general puede ser definido como una disipación normalizada a la unidad,

$$\dot{\kappa}^p = \mathbf{h}_\kappa : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \left[\frac{r(\boldsymbol{\sigma})}{g_f^p} + \frac{1-r(\boldsymbol{\sigma})}{g_c^p} \right] \cdot \Xi_m \quad (\text{B5.118})$$

donde $\Xi_m = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ es la disipación plástica y $r(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{\mathbf{I}=1}^3 \langle \sigma_{\mathbf{I}} \rangle / \sum_{\mathbf{I}=1}^3 |\sigma_{\mathbf{I}}|$ una función escalar que define los estado de comportamiento de un punto en función del estado tensional, siendo $\langle x \rangle = 0,5 [x + |x|]$ la función de McAully. Obsérvese los siguientes casos particulares, $r(\boldsymbol{\sigma})=1$ para problemas de tracción pura, $r(\boldsymbol{\sigma})=0$ para compresión pura y $r(\boldsymbol{\sigma})=0,5$ para estado de corte puro. De esta manera, la disipación plástica siempre estará normalizada respecto de la máxima energía correspondiente al proceso que está realizando en cada momento.

B 5.14.2 Definición de la ley de evolución de la cohesión $c - \kappa^p$.

Este modelo de daño plástico, supone que la micro-fisuración de los materiales friccionales se debe a una *pérdida de cohesión intergranular* instantánea, producida por el movimiento relativo entre granos, o partículas. Esta pérdida de cohesión intergranular se inicia en los puntos cuya tensión efectiva supera el umbral de la cohesión límite o cohesión inicial (ver Figura B5.18). A medida que evoluciona el proceso de carga crece la cantidad de partículas descohesionadas hasta llegar a conformar un lugar geométrico de dimensiones considerables (fractura), que conduce a la ruptura de todo el sólido. Debido a este mecanismo de fallo, se produce un *ablandamiento*, en el comportamiento tensión deformación, inexistente a nivel intergranular, que sólo se manifiesta como un efecto macroscópico provocado por el comportamiento promedio de un conjunto de partículas.

El modelo constitutivo de daño plástico realiza un análisis numérico del comportamiento de una región de dimensiones finitas (punto de integración de la ecuación constitutiva), mediante la técnica de aproximación funcional de los elementos finitos. Por esta razón, cada punto en análisis representa infinitos puntos materiales contenidos en su área de influencia. Por ello, a escala macroscópica sí tiene sentido considerar al fenómeno de ablandamiento por deformación como una propiedad del material y en tal caso es necesario definir una *función de endurecimiento plástico* que tenga en cuenta este *fenómeno de conjunto*, que para este modelo constitutivo no es más que la cohesión entre partículas. Esta función de endurecimiento esta representada por la cohesión, escrita como una variable interna para darle mayor generalidad, cuya ecuación de evolución para cualquier proceso de carga cuasi-estático se define como,

$$\dot{c} = h_c \cdot \dot{\kappa}^p = h_c \cdot \mathbf{h}_\kappa : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (\text{B5.119})$$

donde $h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)$ es una función escalar del estado actual de la variable libre de tensión $\boldsymbol{\sigma}$ y de las variables internas κ^p y c . La expresión adoptada para la ley de evolución de la variable interna de cohesión resulta de elegir la siguiente expresión para h_c ,

$$h_c = c \cdot \left[\frac{r(\boldsymbol{\sigma})}{c_T} \frac{dc_T}{d\kappa^p} + \frac{1-r(\boldsymbol{\sigma})}{c_C} \frac{dc_C}{d\kappa^p} \right] \quad (\text{B5.120})$$

donde $r(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{\mathbf{I}=1}^3 \langle \sigma_{\mathbf{I}} \rangle / \sum_{\mathbf{I}=1}^3 |\sigma_{\mathbf{I}}|$ es la función antes comentada que establece el tipo de comportamiento (tracción o compresión o tracción-compresión), que se desarrollo a cada instante en un punto del sólido. La función de cohesión $c_c(\kappa^p)$ (ver Figura B5.22) puede

obtenerse en forma explícita y representa la evolución de la cohesión durante un ensayo uniaxial de compresión simple. La relación entre cohesión y tensión uniaxial de compresión viene dada por la siguiente expresión

$$c_c(\kappa^p) = \frac{1}{\aleph} \sigma_c(\kappa^p) \quad (B5.121)$$

Tal que $\aleph$ es un coeficiente que depende del tipo de criterio de umbral de fluencia y representa el factor de escala entre cohesión y tensión uniaxial de compresión¹. A modo de ejemplo para Tresca y von-Mises vale $\aleph = 1$, para Mohr Coulomb $\aleph = 2\sqrt{R_{Mohr}}$ donde R_{Mohr} es la relación de resistencias (ver ecuación 6.111), para Drucker-Prager inscrita en la superficie de Mohr-Coulomb $\aleph = 6\cos\phi/(\sin\phi - 3)$ y para Drucker-Prager circunscrita en la superficie de Mohr-Coulomb $\aleph = 6\cos\phi/(3\sin\phi - 3)$. Así, para cualquier criterio umbral de fluencia, debe definirse este coeficiente.

La función $c_T(\kappa^p)$ (ver Figura B5.22) puede obtenerse en forma explícita y representa la evolución de la cohesión durante un ensayo uniaxial de tracción simple. La relación entre cohesión y tensión uniaxial de tracción viene dada por la siguiente expresión

$$c_T(\kappa^p) = \frac{R^0}{\aleph} \sigma_T(\kappa^p) \quad (B5.122)$$

donde $R^0 = [f_c^0/f_t^0] = [\sigma_c(\kappa^p = 0)/\sigma_T(\kappa^p = 0)]$ es la relación entre resistencias uniaxiales. A modo de ejemplo para Tresca y von-Mises vale $R^0/\aleph = 1$, para Mohr Coulomb $R^0/\aleph = \sqrt{R_{Mohr}}/2$ donde R_{Mohr} es la relación de resistencias (ver ecuación 6.111), para Drucker-Prager inscrita en la superficie de Mohr-Coulomb $R^0/\aleph = (3 + 3\sin\phi)/6\cos\phi$ y para Drucker-Prager circunscrita en la superficie de Mohr-Coulomb $R^0/\aleph = (3 + \sin\phi)/6\cos\phi$.

Algunos investigadores sostienen que las curvas de resistencia a tracción y compresión simple del hormigón, que resultan de ensayos experimentales uniaxiales, tienen formas análogas^{18,19}, lo que equivale a afirmar que la relación de escalas entre ellas es una constante durante todo el proceso de carga cuasi-estático, y viene dado por

$$R(\kappa^p) = \frac{\sigma_c(\kappa^p)}{\sigma_T(\kappa^p)} = cte. \Rightarrow R(\kappa^p) = R^0 \quad (B5.123)$$

y en tal las funciones explícitas de la cohesión a tracción uniaxial y a compresión uniaxial coinciden.

B 5.14.3 Definición de la variable ϕ , ángulo de rozamiento interno.

A medida que se aumenta la carga sobre un sólido cohesivo-friccional, en su interior ocurren un movimientos entre partículas (micro-fisuración), que conduce a una pérdida de cohesión intergranular, haciendo que el sólido tienda a comportarse, cada vez más, como un simple material friccional no-cohesivo. Así, la pérdida de cohesión implica una ganancia de rozamiento interno, dando lugar a un comportamiento más dúctil a compresión debido

¹⁸ State of the art report on : Finite Element Analysis of Reinforced Concrete. ASCE (1982).

¹⁹ Tasuji, E.; Slate F. and Nilson A. (1978). Stress strain response and fracture of concrete. *Journal of the structural division. ASCE - Vol 75, No 7, pp. 306-312.*

al incremento de la fuerza de rozamiento entre partículas y a una disminución de la resistencia a tracción por la pérdida de las fuerzas cohesivas. Esto conduce a un crecimiento de la relación entre resistencias uniaxiales $R(\kappa^p) = \sigma_c(\kappa^p) / \sigma_t(\kappa^p)$ a medida que evoluciona el proceso plástico.

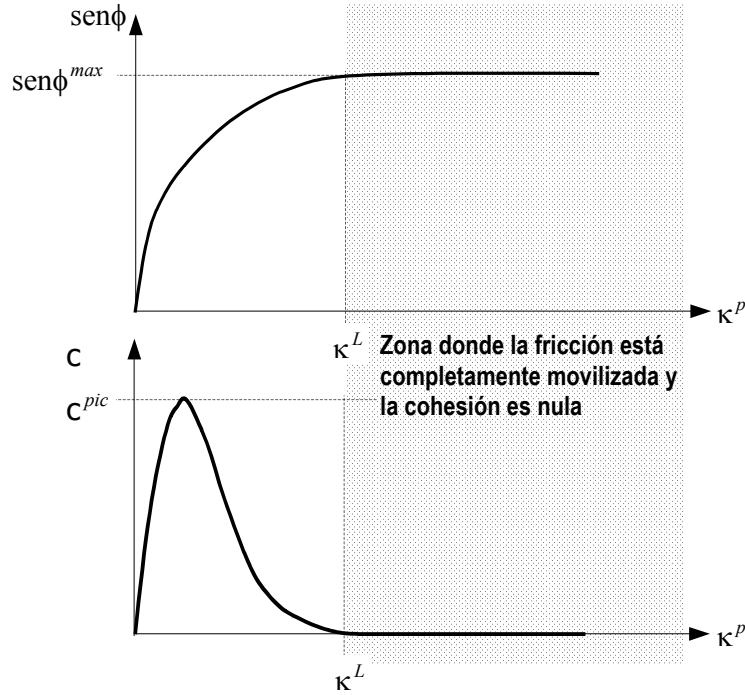


Figura B5.23 – Función que define la evolución del ángulo de rozamiento interno en función de la variable de daño plástico y su relación con la cohesión.

En forma general se podría formular una variable interna de fricción, con una ley de evolución del tipo $\dot{\phi} = \dot{\lambda} H_{\phi}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) = h_{\phi}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) \cdot \dot{\kappa}^p$, que represente el mecanismo de incremento de la fricción arriba mencionado. Sin embargo, hay evidencias experimentales^{1,20} que muestran que es suficiente proponer una simple función de la variable de daño plástico para representar la evolución del ángulo de fricción interna,

$$\text{sen } \phi(\kappa^p) = \begin{cases} 2 \frac{\sqrt{\kappa^p \kappa^L}}{\kappa^p + \kappa^L} \text{sen } \phi^{\max} & ; \forall \kappa^p \leq \kappa^L \\ \text{sen } \phi^{\max} & ; \forall \kappa^p > \kappa^L \end{cases} \quad (\text{B5.124})$$

donde κ^p es la variable de endurecimiento, denominada variable de daño plástico y κ^L es el límite de daño, a partir del cual la cohesión se anula y el rozamiento interno se mantiene constante e igual a su valor máximo $\phi^{\max}$, por lo tanto este límite coincide con el de daño total $\kappa^p = \kappa^L = 1$.

²⁰ Borst, R. De and Vermeer, P. (1984). *Non associated plasticity for soils, concrete and rock*. Heron. Vol. 29, Delf. Netherlands.

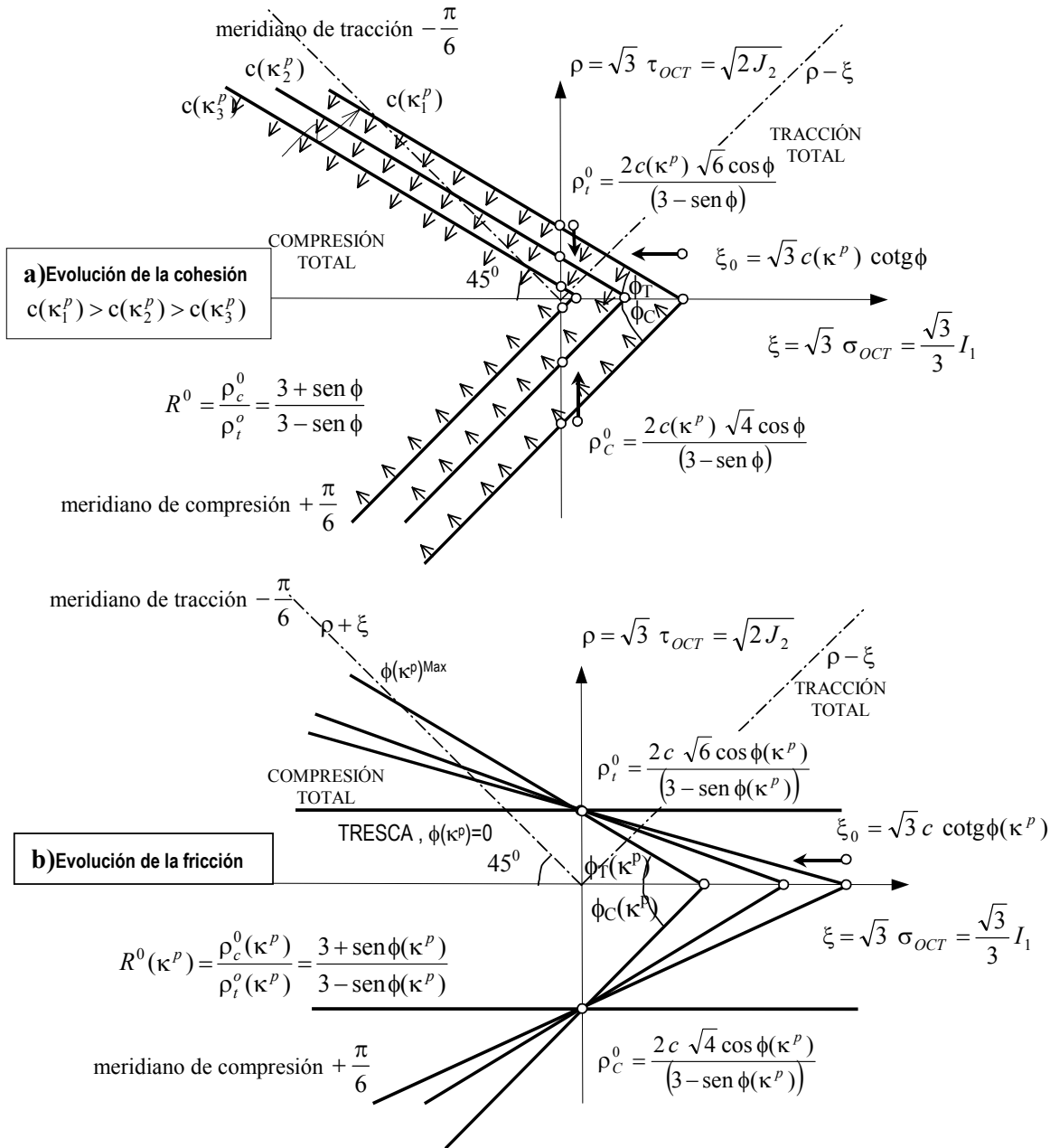


Figura B5.24 – Movilidad del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb según sus planos meridianos. a) Movilidad isótropa por evolución de la cohesión. b) Movilidad anisótropa por cambio en el rozamiento interno.

Utilizando la función de rozamiento interno expresada por la ecuación (B5.124) y suponiendo en un primer momento la hipótesis de que la cohesión $c = cte$, se puede observar que se desarrolla un proceso elasto-plástico que pasa de un estado inicial $\phi = \phi^0 = 0$, donde la presión hidrostática es despreciable, a otro final $\phi = \phi^{max}$ donde es muy importante la influencia de la presión. Para ejemplificar la influencia del ángulo de rozamiento interno sobre el umbral de plasticidad, se adopta una superficie de fluencia del

tipo de la de Mohr-Coulomb, en la cual puede verse una movilidad isotrópica por efecto de la evolución de la cohesión y otra movilidad anisótropa provocada por el incremento del rozamiento interno. Este último fenómeno provoca un movimiento de acercamiento de la cúspide de la superficie hacia el origen, acompañada de un crecimiento de su base (ver Figura B5.24 y Figura B5.25). Este efecto se presenta como un fenómeno de endurecimiento para procesos de compresión y como un ablandamiento para procesos de tracción.

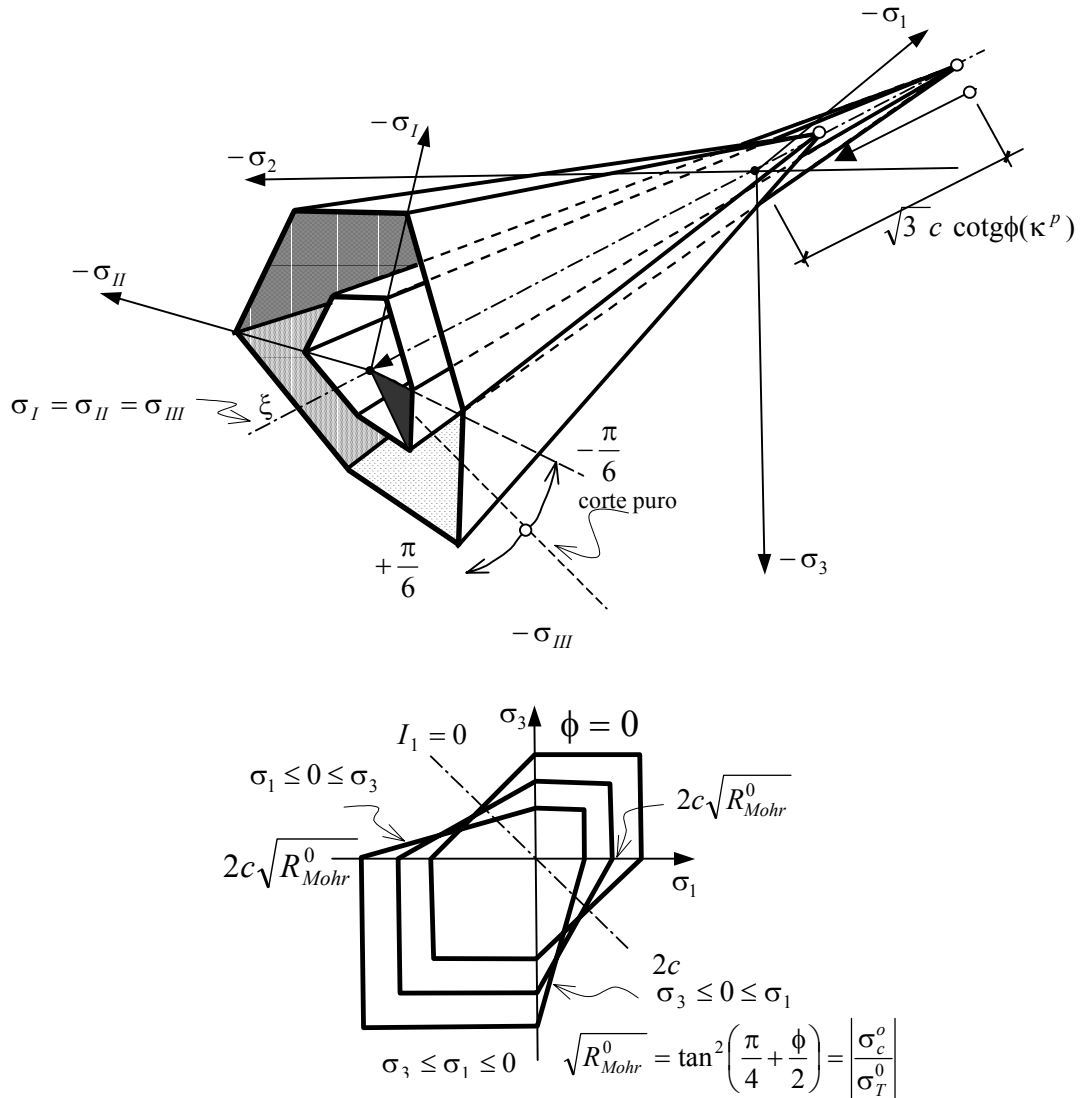


Figura B5.25 – Movilidad del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb cuando cambia la fricción interna. a) Movilidad de la función en 3-D. b) Movilidad de la función en uno de sus planos principales.

En materiales frágiles con alta cohesión inicial, como los hormigones, cerámicos, etc., es posible utilizar durante todo el proceso plástico un ángulo de rozamiento interno constante y máximo sin que esto induzca a resultados insatisfactorios en la resolución de problemas multiaxiales.

B 5.14.4 Definición de la variable ψ , ángulo dilatancia.

Un fenómeno que caracteriza a los materiales friccionales, es el cambio de volumen inelástico debido a la desviación plástica. Este fenómeno, denominado dilatancia, puede ser atribuido al crecimiento de los mecanismos de micro-fisuración que sufre el hormigón durante el período inelástico.

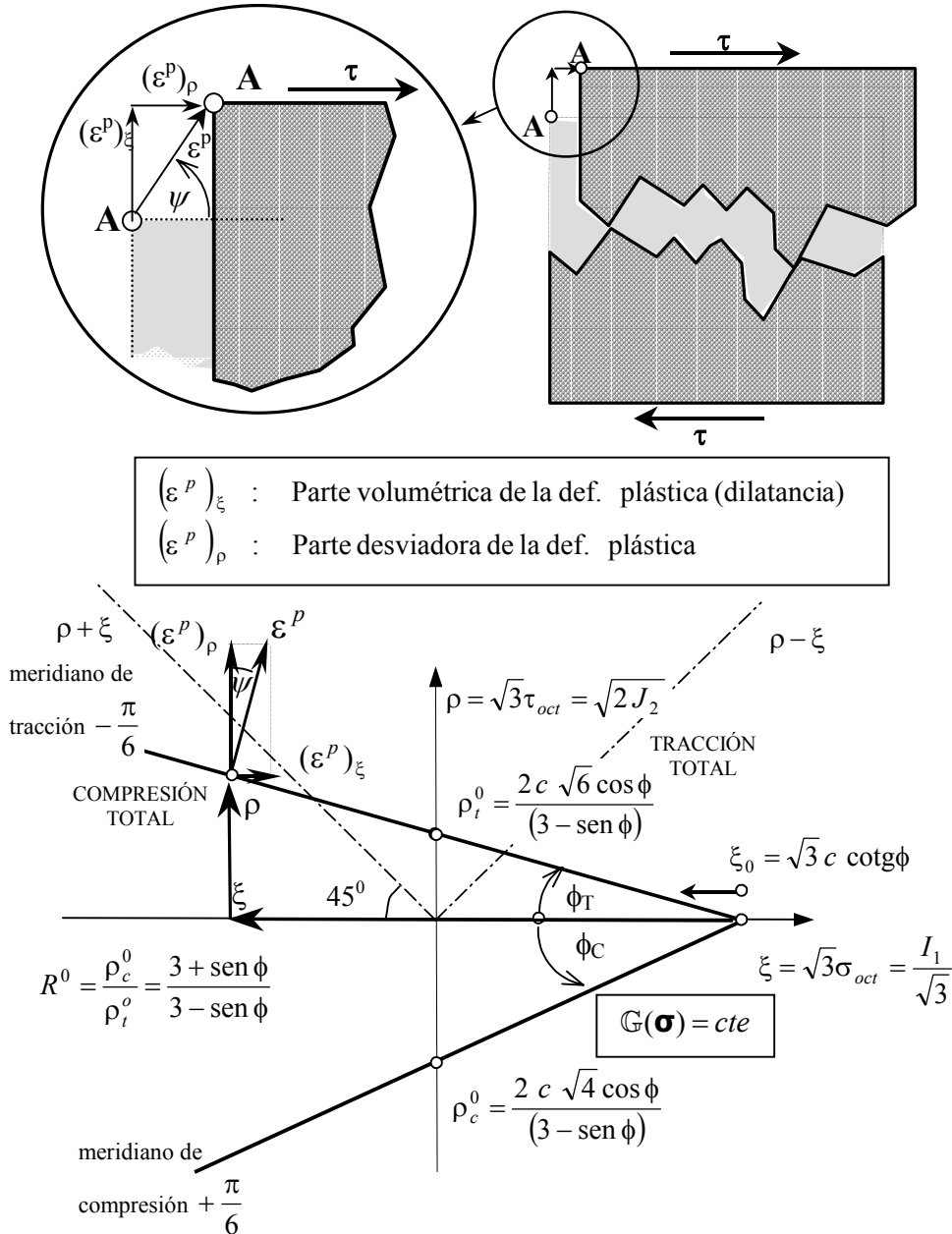


Figura B5.26 – Representación de la dilatancia en forma esquemática y su relación con la deformación plástica en el plano meridiano.

Una forma apropiada de evaluar este fenómeno, es mediante el *ángulo de dilatancia* ψ , que fue inicialmente introducido por B. Hansen²¹ y que representa la relación que hay entre el incremento de volumen plástico y la distorsión plástica.

²¹ Hansen, B. (1958). Line ruptures regarded as narrow ruptures zone – Basic equations based on kinematics considerations. *Proc. Brussels Conf. 58 on earth pressures problems*.

La dilatancia puede controlarse utilizando una plasticidad no-asociada, es decir cuando ocurre que la función de fluencia plástica es distinta a la de potencial plástico $\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}) \neq \mathbb{G}(\boldsymbol{\sigma})$. En este caso, la orientación del flujo plástico es normal a la superficie de potencial plástico $\mathbb{G}(\boldsymbol{\sigma})$, siendo esta la responsable del control de la orientación de dicho flujo (ver Figura B5.26). Así pues, este flujo podría tener componente desviadora y/o volumétrica y por lo tanto es posible controlar estas componentes tanto como sea necesario para ajustar la respuesta al problema en estudio.

Debido a que los sólidos friccionales no exhiben un ángulo de dilatancia constante durante todo el proceso elasto-plástico, es necesario formular una función de evolución de esta magnitud. Esta evolución también podría ser definido como una variable interna del proceso inelástico, pero dado que su variación puede ser descrita en forma simple y satisfactoria, se adopta una función explícita, cuasi-empírica de la variable de daño plástico $\psi(\kappa^p)$.

Entre las posibles formas de definir la evolución de la dilatancia se utiliza una modificación de la ecuación de P. Rowe²², que se adapta muy bien al comportamiento de diversos geomateriales con cohesión.

$$\psi(\kappa^p) = \arcsin \left[\frac{\sin \phi(\kappa^p) - \sin \phi_{cv}}{1 - \sin \phi(\kappa^p) \sin \phi_{cv}} \right] = \text{atan} \frac{\|(\boldsymbol{\epsilon}^p)_\xi\|}{\|(\boldsymbol{\epsilon}^p)_\rho\|} \quad (\text{B5.125})$$

donde $\phi(\kappa^p)$ es la función de rozamiento interno (ecuación (B5.124)) y ϕ_{cv} el ángulo de rozamiento interno para dilatancia nula, cuya expresión es,

$$\phi_{cv} = \arcsin \left[\frac{\sin \phi^{\max} - \sin \psi^{\max}}{1 - \sin \phi^{\max} \sin \psi^{\max}} \right] \quad (\text{B5.126})$$

siendo $\phi^{\max}$ la máxima fricción y $\psi^{\max}$ es la máxima dilatancia. Como valores orientativos, para el hormigón estas magnitudes valen $\phi^{\max} = 35^\circ$ y $\psi^{\max} = 13^\circ$.

B 5.15 Generalización del modelo de daño plástico con degradación de rigidez.

B 5.15.1 Introducción.

Los resultados experimentales muestran que los materiales cohesivos-friccionales tienen una pérdida de rigidez aún en el campo de comportamiento elástico. Este efecto se incrementa mucho más cuando se produce la descohesión entre partículas y por lo tanto cuando comienza el período plástico. Esta evidencia induce a pensar que hay dos fenómenos de degradación de rigidez que actúan sobre el material. Uno que depende de la energía acumulada, que se denomina *degradación elástica*, y otro que depende de la movilización de la fricción y que recibe el nombre de *degradación plástica*. Basado en estos dos fenómenos, se modificará en este apartado el *modelo de daño plástico* antes presentado.

²² Rowe, P. (1972). Theoretical meaning and observed values of deformation parameter for soil. Proc. Rascoe Memorial Symp. on stress-strain behavior of soils. Cambridge.

En la mayoría de las investigaciones llevadas a cabo se considera que la degradación sólo depende de la energía total acumulada, pero en ningún caso se atribuye que parte de este fenómeno está motivado por la descohesión entre partículas, plasticidad en este caso.

La degradación de rigidez, o daño como se lo conoce en muchas referencias, ha sido formulada por Kachanov y se basa en la representación mecánica de una pérdida de resistencia del material con deformaciones recuperables y disminución de la rigidez del material^{23,24} (se presentará más adelante las bases de este modelo). Es decir, toda la no linealidad del problema se debe a la pérdida irreversible de las propiedades de rigidez (ver Figura B5.27). Esto junto a la teoría de la plasticidad ofrece una herramienta muy potente que permite representar el comportamiento de una gran cantidad de materiales cohesivos-friccionales y metales donde puede ocurrir también crecimiento de una porosidad interna.

Así, el tensor constitutivo secante $\mathbb{C}(d_i^e, d_i^p)$ dependerá en cada instante de las variables internas de daño elástico d_i^e y de las variables internas de daño plástico d_i^p , cuyas reglas de evolución toman la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \dot{d}_i^e &= \Phi_i \langle \mathbf{k}_i^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \rangle \\ \dot{d}_i^p &= \dot{\lambda} H_i = \mathbf{k}_i^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \end{aligned} \quad (\text{B5.127})$$

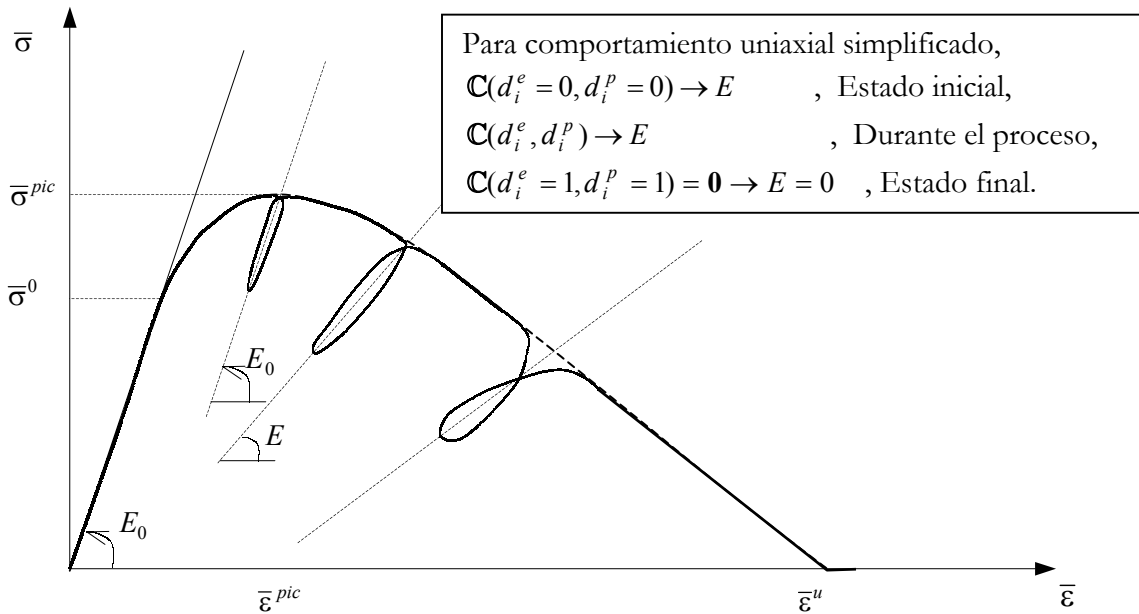


Figura B5.27 – Evolución de la resistencia uniaxial en un punto por efecto de la plasticidad y la degradación de rigidez.

donde “ i ” representa el índice del mecanismo de daño que se está desarrollando y el problema puede estar compuesto de un número finito de mecanismos distintos. El tensor $\mathbf{k}_i^e$ representa la dirección de degradación elástica del mecanismo i^{esimo} , Φ_i un escalar positivo a definir y $H_i = \mathbf{k}_i^p : (\partial \mathbb{G} / \partial \boldsymbol{\sigma})$ una función escalar elasto-plástica de argumentos tensoriales que tiene en cuenta la dirección de degradación $\mathbf{k}_i^p$ inducida por la plasticidad.

²³ Kachanov, L.M. (1958). Time Rupture Process under Creep Conditions, (in Russian). *Izv. Akad. SSSR Tekhn. Nauk.*, 8, 26-31.

²⁴ Kachanov, L.M. (1986). Introduction to Continuum Damage Mechanics. *Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht*.

B 5.15.2 Ecuación constitutiva elasto-plástica con degradación de rigidez.

El fenómeno de degradación de la rigidez modifica la ecuación constitutiva elasto-plástica presentada para plasticidad con pequeñas deformaciones. Para formular esta nueva ecuación constitutiva se partirá definiendo una *energía potencial libre* a temperatura constante, compuesta de una parte elástica y otra plástica,

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e, \mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta) = \Psi^e(\boldsymbol{\epsilon}^e, \mathbf{d}^p, \mathbf{q}_\beta) + \Psi^p(\mathbf{q}_\alpha) \quad (\text{B5.128})$$

Donde $\Psi^p(\mathbf{q}_\alpha)$ es una función de potencial plástico y $\Psi^e(\boldsymbol{\epsilon}^e, \mathbf{d}^p, \mathbf{q}_\beta)$ una función de potencial elástico o energía libre. Además, la deformación elástica $\boldsymbol{\epsilon}^e$ es la variable libre del proceso, $\mathbf{q}_\alpha$ las variables internas plásticas que incluyen la propia deformación plástica $\boldsymbol{\epsilon}^p$ y $\mathbf{q}_\beta$ es el grupo de variables internas no-plásticas, entre las que se incluye la degradación producida por la plasticidad.

A partir de los principios básicos de la mecánica se escribe la disipación mediante la siguiente expresión simplificada de la desigualdad de Clausius-Duhem (ver capítulo 2).

$$\Xi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (\text{B5.129})$$

Esta desigualdad expresa el balance de entropía para el continuo de Cauchy y es válida para cualquier proceso de carga admisible. Sustituyendo la derivada temporal de la energía libre (B5.128) en la ecuación (B5.129) resulta la siguiente expresión para la disipación,

$$\Xi = \left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_\alpha} \dot{\mathbf{q}}_\alpha - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_\beta} \dot{\mathbf{q}}_\beta \geq 0 \quad (\text{B5.130})$$

Para garantizar el cumplimiento de esta desigualdad ante cualquier incremento de deformaciones $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ para un proceso de carga no-degradable. Debe ocurrir que

$$\left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right] \geq 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{B5.131})$$

de donde se deduce que la tensión vale,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \quad (\text{B5.132})$$

tal que la energía libre para un sólido elasto-plástico con degradación de rigidez puede ser escrita en pequeñas deformaciones, como

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e, \mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) : \mathbb{C}(d_i^e, d_i^p) : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) + \Psi^p(\mathbf{q}_\alpha) \quad (\text{B5.133})$$

Sustituyendo esta última en la ecuación (B5.132) queda expresada la ecuación constitutiva secante para un sólido elasto-plástico con degradación de rigidez, como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(d_i^e, d_i^p) : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) \quad (\text{B5.134})$$

A partir de esta ecuación se obtiene la variación temporal de la tensión,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial d_i^e} d_i^e + \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial d_i^p} d_i^p \right] : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) + \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \quad (\text{B5.135})$$

Se considera ahora un caso particular de daño simple, con un único mecanismo de daño ($i=1$), entonces las reglas de evolución (B5.127) pueden simplificarse de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \dot{d}^e &= \Phi \langle \mathbf{k}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle = \Phi \langle \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \rangle \\ \dot{d}^p &= \mathbf{k}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \left[\frac{1-d^p}{c} h_c \mathbf{h}_k \right] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \end{aligned} \quad (\text{B5.136})$$

sustituidas estas ecuaciones en la (B5.135), resulta la siguiente evolución temporal de la tensión (ver apartado B 5.14 y referencia¹),

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_T^e(d^e, d^p) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbb{C}_T^p(d^e, d^p) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad \begin{cases} \mathbb{C}_T^e = \mathbb{C}(d^e, d^p) - \frac{\Phi}{1-d^e} (\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}) \\ \mathbb{C}_T^p = \mathbb{C}(d^e, d^p) - \frac{h_c}{c} (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{h}_k) \end{cases} \quad (\text{B5.137})$$

donde Φ se define constante durante todo el proceso y representa la máxima densidad de energía elástica que puede acumular un punto del sólido,

$$d^e = \Phi \omega^e \quad (\text{B5.138})$$

La magnitud de Φ resulta de un proceso de carga en el que se congela la variable de degradación plástica y se deja que sólo evolucione la degradación elástica. Esto es,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(d^e) : \boldsymbol{\epsilon}^e = (1 - \Phi \omega^e) \cdot \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon}^e \Rightarrow \dot{\omega}^e = \boldsymbol{\epsilon}^e : \left[(1 - \Phi \omega^e) \mathbb{C}^0 \right] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (\text{B5.139})$$

de donde puede obtenerse,

$$\int_{t=0}^t \frac{\dot{\omega}^e}{(1 - \Phi \omega^e)} dt = \int_{t=0}^t \boldsymbol{\epsilon}^e : \left[\mathbb{C}^0 \right] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e dt \Rightarrow d^e = \Phi \omega^e = 1 - e^{-(\Phi \boldsymbol{\epsilon}^e : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon}^e) / 2} \quad (\text{B5.140})$$

Conocida la ecuación (B5.140) y la respuesta uniaxial tensión-deformación obtenida en laboratorio, se obtiene la magnitud de la constante Φ :

$$E = (1 - d^e) E^0 \Rightarrow \frac{E}{E^0} = e^{-(\Phi \epsilon^e E^0 \epsilon^e) / 2} \Rightarrow \Phi = -\frac{2}{E^0 (\epsilon^e)^2} \ln \frac{E}{E^0} \quad (\text{B5.141})$$

donde E^0 representa el módulo de elasticidad inicial y E el módulo de elasticidad secante para un nivel de deformación ϵ^e . Se considerará convencionalmente que en este punto concluye el proceso de degradación elástica.

La energía disipada durante este proceso con degradación resultará de la ecuación (B5.129), es decir

$$\omega^d = \int_t \Xi^e dt = \frac{1}{\Phi} \left[1 - e^{-(\Phi \boldsymbol{\epsilon}^e : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon}^e) / 2} \right] - \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^e : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (\text{B5.142})$$

Esta degradación elástica puede también ajustarse más a la realidad de algunos procesos mecánicos, estableciendo una cuota de degradación para comportamientos volumétricos y otra distinta para el comportamiento desviador. Ejemplos de una formulación de este tipo pueden verse en la referencia¹.

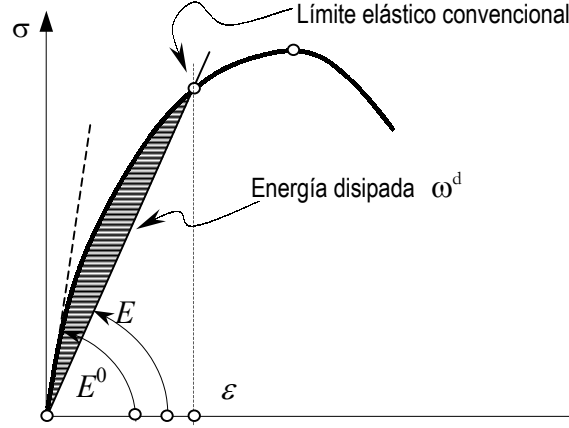


Figura B5.28 – Curva tensión-deformación con degradación durante el período elástico.

B 5.15.3 Ecuación constitutiva tangente para procesos con degradación de rigidez.

Siguiendo el mismo procedimiento establecido en la plasticidad clásica, se obtiene a continuación la ley constitutiva elasto-plástica con daño tangente, sin movimiento cinemático de la superficie de fluencia $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_T^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. También se obtiene el parámetro de consistencia plástica λ a partir de la condición de consistencia de Prager. Esto es,

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{c}) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{c} = 0 \\ \dot{\mathbb{F}} = \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbf{c}}}_{-\mathbf{I}} \dot{\mathbf{c}} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{c}} = 0 \quad (\text{B5.143})$$

Sustituyendo en esta la ecuación (B5.119) y la ecuación (B5.137), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left[\mathbb{C}_T^e(d^e, d^p) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbb{C}_T^p(d^e, d^p) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \right] - h_c (\mathbf{h}_\kappa : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = 0 \\ \left[\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_T^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right] - \dot{\lambda} \cdot \left[\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_T^p : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h_c \mathbf{h}_\kappa : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B5.144})$$

Resultando de esta última expresión el factor de consistencia plástica λ , que representa una medida de la distancia que hay entre un estado tensional inadmisibile, fuera del dominio elástico, y la superficie de carga plástica. Esto es

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_T^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\underbrace{h_c \mathbf{h}_\kappa : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}_A + \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_T^p : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)} \quad \text{con} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (\text{B5.145})$$

donde A es el parámetro de endurecimiento plástico. Sustituyendo la ecuación (B5.69) en la ecuación constitutiva tangente (B5.137), se tiene la siguiente ley elasto-plástica tangente con daño,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \mathbb{C}_T^e - \frac{\left[\mathbb{C}_T^p : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \otimes \left[\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_T^e \right]}{h_c \mathbf{h}_\kappa : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_T^p : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)} \right\} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_T^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B5.146})$$

donde $\mathbb{C}_T^{ep}$ es el tensor constitutivo tangente continuo. Como puede observarse, se tendrá rigidez tangente simétrica si se cumple la siguiente proporcionalidad, $\left[\mathbb{C}_T^p : \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \propto \left[\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_T^e \right]$. Con lo que puede verse que no es suficiente que se cumpla la clásica regla de flujo asociada para garantizar dicha simetría.

B 5.15.4 Funciones de Fluencia particulares.

Como parte de la generalización de la clásica teoría de la plasticidad, es necesario también la formulación de superficies de fluencia que se adapten mejor a distintos comportamientos de los materiales. En este sentido se muestran a continuación en forma breve la modificación de la clásica función de Mohr-Coulomb y también la de Drucker-Prager. Otra formulación particular para hormigones puede consultarse en S. Oller¹. En cada caso se mostrará las limitaciones de las clásicas funciones y sus ventajas e inconvenientes.

B 5.15.4.1 Función de Mohr-Coulomb Modificada.

La función de Mohr-Coulomb no es utilizable directamente en un material cohesivo friccional como el hormigón, el cual tiene un ángulo de fricción interna de $\phi \cong 32^\circ$. Según la formulación clásica de Mohr-Coulomb, se obtiene para este ángulo, una relación de resistencia límite entre un comportamiento a tracción y compresión uniaxial de $R_{Mohr}^0 = \|\boldsymbol{\sigma}_C^0 / \boldsymbol{\sigma}_T^0\| = \tan[(\pi/4) + (\phi/2)] = 3,25$ (ver (B5.30)). Esta magnitud está muy lejos de la que corresponde a un hormigón, $R_{Mohr}^0 = \|\boldsymbol{\sigma}_C^0 / \boldsymbol{\sigma}_T^0\| \cong 10,0$. La opción para solucionar este problema de disociación sería aumentar el ángulo de fricción, lo que provocaría un exceso de dilatancia, o bien formular una modificación del criterio original¹. Siguiendo éste último camino se obtiene la siguiente expresión

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{c}, \phi) - \mathbf{c} = 0 \quad (\text{B5.147})$$

Donde la función de la tensión se expresa como,

$$f(\boldsymbol{\sigma}; \phi) = \frac{1}{\cos \phi} \left\{ \frac{I_1}{3} \mathbb{K}_3 + \sqrt{J_2} \left[\mathbb{K}_1 \cos(\theta) - \mathbb{K}_2 \frac{\sin(\theta) \sin(\phi)}{3} \right] \right\} \quad (\text{B5.148})$$

Siendo los invariantes ya definidos en apartados previos y los factores $\mathbb{K}_i$, para la función de Mohr-Coulomb clásica, los que a continuación se presentan

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{K}_1 &= f_1(\alpha_R; \phi) \\ \mathbb{K}_2 &= f_2(\alpha_R; \phi) \\ \mathbb{K}_3 &= f_3(\alpha_R; \phi) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{si } \alpha_R=1} \left\{ \begin{aligned} \mathbb{K}_1 &= 1 \\ \mathbb{K}_2 &= \\ \mathbb{K}_3 &= \sin(\phi) \end{aligned} \right. \quad (\text{B5.149})$$

donde $\alpha_R = R'/R_{Mohr}$ representa el cociente entre la relación de resistencia requerida R' y relación de resistencia propia de la función clásica de Mohr-Coulomb R_{Mohr} .

Esta nueva función de Mohr-Coulomb Modificada, permite entonces establecer cualquier relación de resistencias requerida por los distintos materiales, con la sola modificación de los $\mathbb{K}_i$, sin que esto experimente un incremento de la dilatancia (ver aspecto de la función modificada en la Figura B5.31). A continuación se puede ver las expresiones que resultan de esta modificación y la forma que adquiere la función de Mohr al modificar la relación $\alpha_R = R'/R_{Mohr}$.

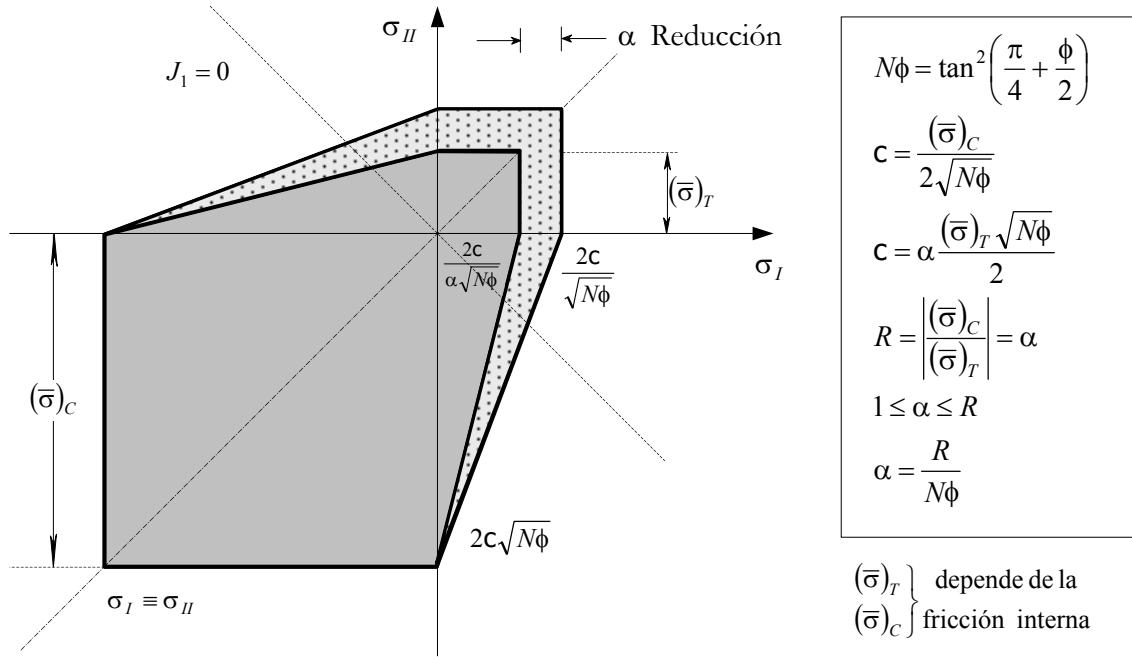


Figura B5.29 – Evolución de la función de Mohr-Coulomb en función de la relación de resistencias.

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{c}; \phi) = \left\{ \frac{I_1}{3} \mathbb{K}_3 + \sqrt{J_2} \left[\mathbb{K}_1 \cos(\theta) - \mathbb{K}_2 \frac{\sin(\theta) \sin(\phi)}{3} \right] \right\} - c \cos(\phi) = 0 \quad (\text{B5.150})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_1 &= \left[\frac{(1+\alpha)}{2} - \frac{(1-\alpha)}{2} \sin(\phi) \right] \\ \mathbb{K}_2 &= \left[\frac{(1+\alpha)}{2} - \frac{(1-\alpha)}{2} \frac{1}{\sin(\phi)} \right] \\ \mathbb{K}_3 &= \left[\frac{(1+\alpha)}{2} \sin(\phi) - \frac{(1-\alpha)}{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B5.151})$$

Para mayores detalles en la obtención de estos coeficientes, se recomienda consultar la referencia de origen¹.

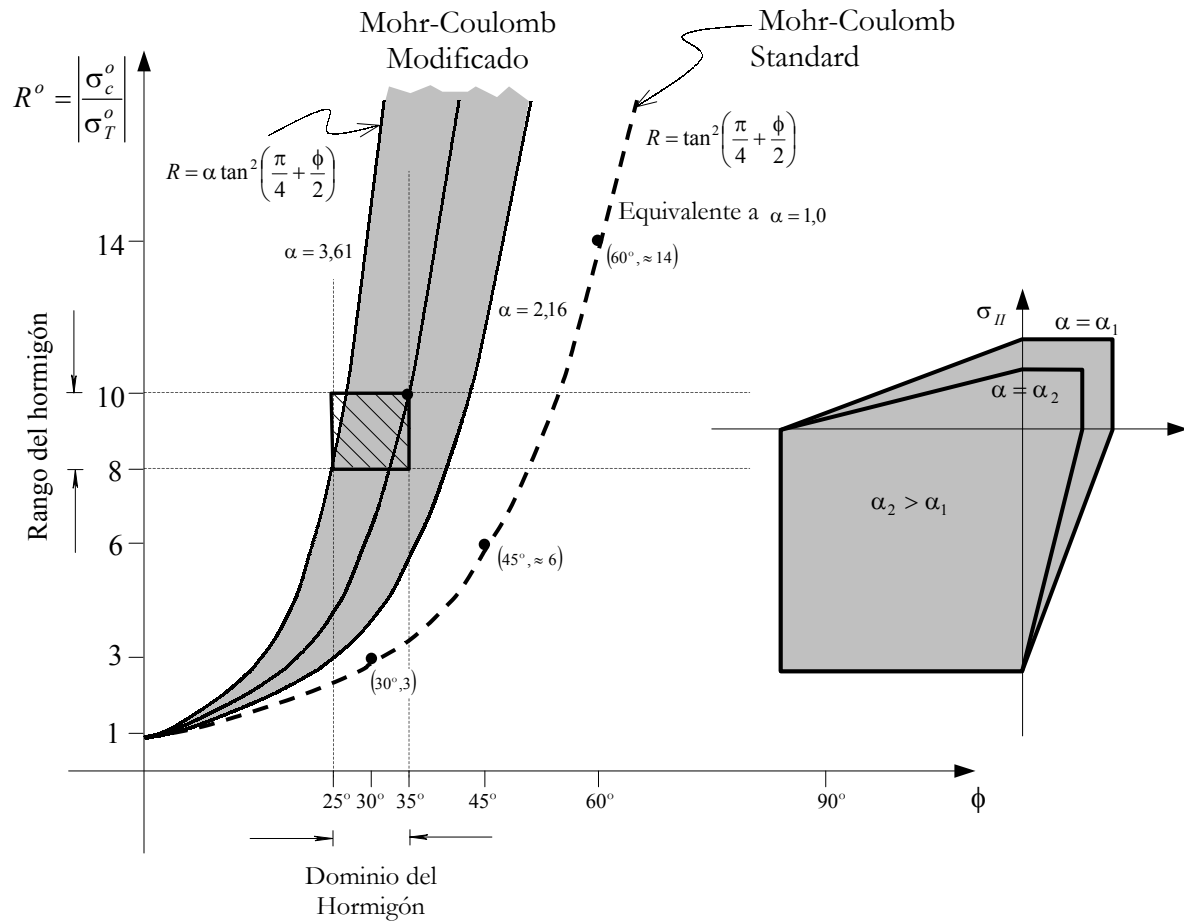
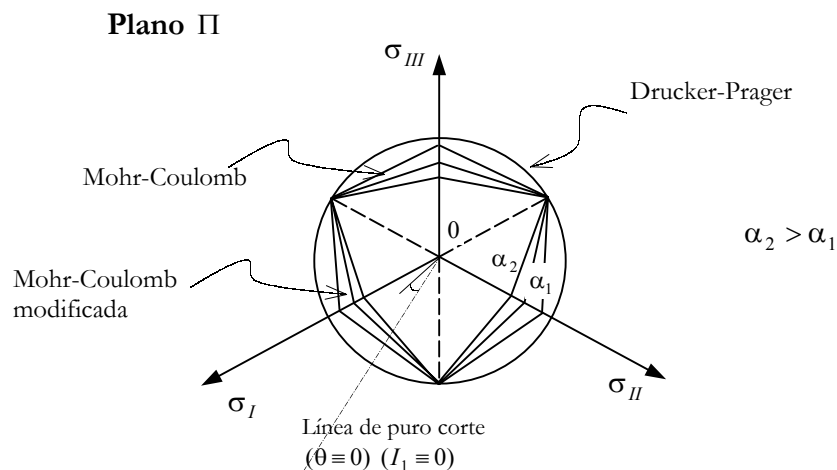


Figura B5.30 – Relación de resistencias para Mohr-Coulomb standard y modificado.



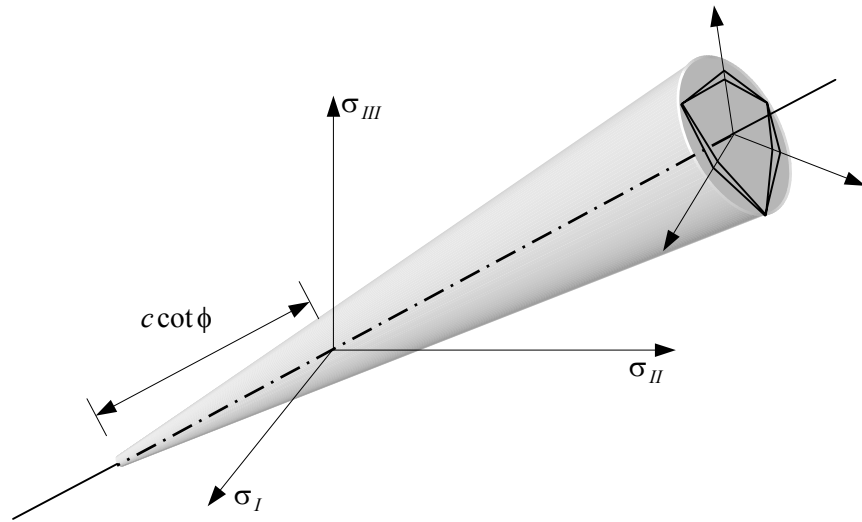
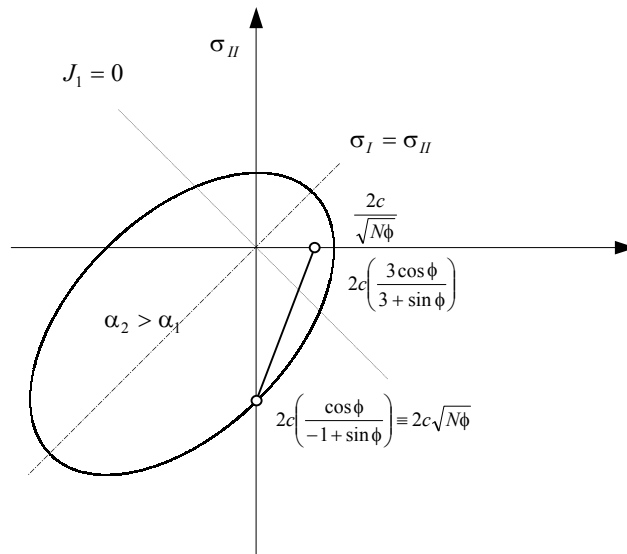


Figura B5.31 – Aspecto de la función de Mohr-Coulomb inscrita en la de Drucker Prager.

B 5.15.4.2 Función de Drucker-Prager Modificada.

La función de Drucker-Prager en su forma standard tiene también limitaciones para su utilización directa en aquellos materiales cuya relación de resistencia entre el comportamiento a tracción y compresión es mayor que 3 (ver Figura B5.32 y Figura B5.33).

La superficie de Drucker-Prager que circunscribe a la de Mohr-Coulomb, permite alcanzar mayores relaciones de resistencia uniaxial, con ángulos de rozamiento más bajos, pero presenta una indeterminación en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$, para tensiones $-\sigma_1 = -\sigma_3$ con ángulos de rozamiento interno de $\phi = \arcsin(3/5) \cong 36,8698\dots$. Esta indeterminación produce un crecimiento desmedido de la superficie de fluencia en la zona de compresión respecto de la de tracción¹.



$$N\phi = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$c = \frac{(\sigma)_C}{2} \left(\frac{-1 + \sin \phi}{\cos \phi} \right)$$

$$c = \frac{(\sigma)_T}{2} \left(\frac{3 + \sin \phi}{3 \cos \phi} \right)$$

$$R^1 = \left| \frac{(\sigma)_C}{(\sigma)_T} \right| \left(\frac{3 + \sin \phi}{3 \cos \phi} \right)$$

Figura B5.32 – Forma de la función de Drucker-Prager y relación con los valores característicos de la función de Mohr-Coulomb.

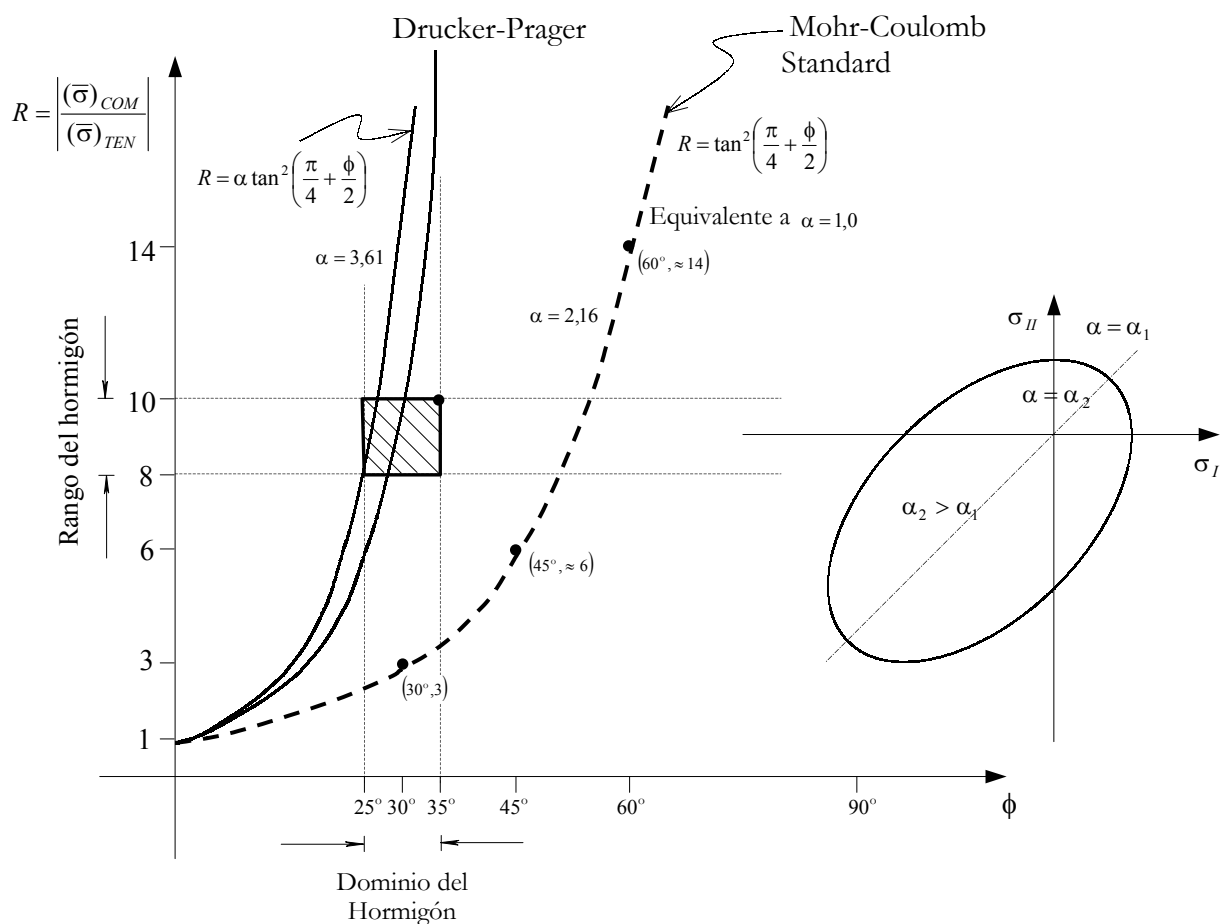


Figura B5.33 – Relación ángulo de fricción-relación de resistencia.

Esta situación puede verificarse si se analiza detenidamente la función de fluencia de Drucker-Prager, cuya forma matemática es,

$$\mathbb{F}(I_1; J_2; c; \phi) = \bar{\alpha}(\phi) I_1 + \sqrt{J_2} - \bar{K}(\kappa; \phi) = 0 \quad (\text{B5.152})$$

donde las funciones de endurecimiento $\bar{\alpha}(\phi)$ y $\bar{K}(\kappa; \phi)$, luego de ser ajustadas con el criterio de Mohr-Coulomb, resultan

Parámetros	$\bar{\alpha}$	$\bar{K}$
Aplicación		
Para compresión triaxial convencional	$\frac{2 \sin(\phi)}{\sqrt{3}[3 - 6 \sin(\phi)]}$	$\frac{\tan(\phi)}{[9 + 12 \tan^2(\phi)]^{1/2}}$
Para estado plano de deformación	$\frac{6c \cos(\phi)}{\sqrt{3}[3 - 6 \sin(\phi)]}$	$\frac{3c}{[9 + 12 \tan^2(\phi)]^{1/2}}$

B 5.16 Daño continuo isótropo - Introducción^(*).

El daño de un sólido continuo, en el sentido de degradación de rigidez, es una alteración de las propiedades elásticas durante la aplicación de la carga como consecuencia de una disminución del área efectiva resistente²⁵. Esta pérdida de área efectiva es normalmente causada por el crecimiento de vacíos y/o micro fisuras.

El fenómeno de daño sólo afecta a las propiedades elásticas del material, mientras la plasticidad se desarrolla como consecuencia de un crecimiento irrecuperable en la deformación, deformación plástica. Ambos fenómenos son complementarios y es normal observar en los materiales una pérdida de resistencia motivada por el *daño* –pérdida de elasticidad– y por la *plasticidad* –crecimiento en la deformación inelástica–.

La teoría del Daño Continuo fue presentada por primera vez por Kachanov²⁶ en el año 1958 en el contexto de problemas relacionados con la fluencia, pero ha sido aceptada con posterioridad como una alternativa válida para simular el comportamiento de diversos materiales. Entre las diferentes formulaciones posibles^{27,28,29,30,31,32}, en este capítulo se presenta un modelo de daño simple con una variable interna escalar que permite caracterizar el daño local. Este modelo a pesar de ser simple, tiene una gran potencialidad y puede utilizarse para representar el comportamiento no lineal de materiales metálicos y geomateriales.

Este tipo de modelo permite simular el comportamiento de materiales en los que ocurre una degradación en la rigidez del material una vez superada el umbral de daño del material.

B 5.17 Modelo de daño isótropo.

En los últimos años los modelos constitutivos conocidos como de daño continuo han sido ampliamente aceptados para simular el complejo comportamiento constitutivo de muchos materiales que se utilizan en ingeniería^{4,5,6,7}. Estos modelos se caracterizan por su simplicidad en la implementación, versatilidad y consistencia, ya que están basados en la mecánica de daño continuo.

(*) Este apartado ha sido escrito con la colaboración del Dr. Eduardo Car, investigador de la Universidad Politécnica de Cataluña.

²⁵ Maugin, G. A. (1992). *The thermodynamics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press.

²⁶ Kachanov, L. M. (1958). Time of rupture process under creep conditions. *Izvestia Akademi Nauk; Otd Tech Nauk*, 8 26-31.

²⁷ Lemaitre, J and Chaboche, J. L. (1978). Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement. *J. Appl.*, 2, 317-365.

²⁸ Chaboche, J. (1988). Continuum damage mechanics part I. General Concepts. *Journal of Applied Mechanics* 55, 59-64.

²⁹ Chaboche, J. (1988). Continuum damage mechanics part II. Damage Growth. *Journal of Applied Mechanics* 55, 65-72.

³⁰ Simo, J. and Ju, J. (1987). Strain and stress based continuum damage models – I Formulation. *Int. J. Solids Structures*, 23, 821-840.

³¹ Simo, J. and Ju, J. (1987). Strain and stress based continuum damage models – II Computational aspects. *Int. J. Solids Structures*, 23, 841-869.

³² Oliver, J.; Cervera, M.; Oller, S. and Lubliner, J. (1990). Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. *Second international conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*.

Kachanov (1958)² ha introducido el concepto de tensiones efectivas con el objetivo de simular la rotura por fenómenos viscosos³³. También se utiliza para representar el concepto de fatiga³⁴, fractura en materiales dúctiles y frágiles³⁵, etc.

Físicamente, el proceso de degradación de las propiedades de un material es el resultado de la presencia y crecimiento de pequeñas fisuras y micro vacíos presentes en la estructura de cualquier material. Este proceso de crecimiento se puede simular, en el contexto de la mecánica de medios continuos, teniendo en cuenta la teoría de variables internas de estado, introduciendo una variable interna de daño representada por un escalar, vector o un tensor. Esta variable interna de daño caracteriza el nivel de deterioro del material y transforma el tensor de tensiones real a otro tensor de tensiones efectivas de la siguiente forma,

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{M}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B5.153})$$

donde $\mathbf{M}$ es el tensor de cuarto orden del modelo de daño anisótropo. Para el caso del modelo de daño isótropo, la degradación del material se desarrolla en todas las direcciones por igual y sólo depende de una variable escalar de daño d , con lo que el tensor $\mathbf{M}$ se reduce a $\mathbf{M} = (1 - d)\mathbf{I}$ y la ecuación de daño anisótropo (B5.153) queda:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1 - d)} \quad (\text{B5.154})$$

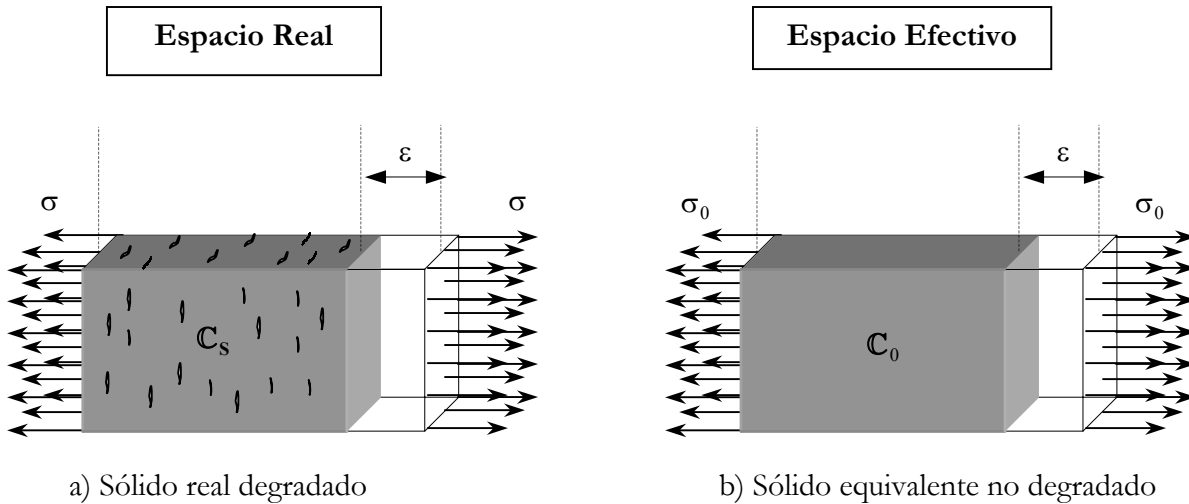


Figura B5.34 – Representación esquemática de la hipótesis de tensión efectiva.

donde d es la variable interna de daño, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy y $\boldsymbol{\sigma}_0$ es el tensor de tensiones efectivas, medido en el espacio “no-dañado”. Esta variable interna es una medida de la pérdida de rigidez del material y sus límites superior e inferior está dado por:

$$0 \leq d \leq 1 \quad (\text{B5.155})$$

³³ Rabotnov, I. (1963). On the equation of state for creep. *Progress in Applied Mechanics. The Prager Anniversary Volume*. Pp 307-315.

³⁴ Salomón, O.; Oller S.; Car E.; Oñate E. (1999). *Thermomechanical fatigue analysis based on continuum mechanics. Acta del VI congreso Argentino de mecánica computacional*.

³⁵ Lubliner, J.; Oliver, J.; Oller, S. and Oñate (1989). A plastic damage model for concrete. *Int. J. solids Structures*. Vol. 25, No.3, pp. 299-326.

donde $d=1$ representa un estado del material completamente degradado y define la rotura local completa y $d=0$ representa un material no dañado. El concepto de tensión efectiva se

formuló por primera vez en conexión con la hipótesis de equivalencia de deformaciones por Lemaitre-Chaboche³ en 1978 en la siguiente forma, "...la deformación asociada a un estado dañado bajo una tensión aplicada $\boldsymbol{\sigma}$ es equivalente a la deformación asociada con el estado no dañado sometido a una tensión efectiva $\boldsymbol{\sigma}_0$ ". En la Figura B5.34 se observa una representación esquemática de la hipótesis de tensión efectiva.

B 5.18 Energía libre de Helmholtz y ecuación constitutiva.

La energía libre de Helmholtz por unidad de volumen para el caso de un modelo de daño isótropo a temperatura constante está dada por:

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi(\boldsymbol{\epsilon}; p_i) \quad \text{con } p_i = \{d\} \\ \Psi &= \Psi(\boldsymbol{\epsilon}; d) = (1-d) \Psi_0(\boldsymbol{\epsilon})\end{aligned}\tag{B5.156}$$

donde $\Psi_0(\boldsymbol{\epsilon})$ es la energía libre de Helmholtz elástica inicial del material no dañado. En el caso de pequeñas deformaciones es suficiente caracterizar a la energía libre a través de una función cuadrática de las deformaciones del siguiente tipo,

$$\Psi_0(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}\tag{B5.157}$$

donde $\mathbb{C}_0$ es el tensor constitutivo elástico del material en estado no dañado. Para problemas térmicamente estables es válida la siguiente forma de la desigualdad de Clausius-Plank,

$$\Xi = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0\tag{B5.158}$$

Esta expresión de la potencia disipativa permite hacer las siguientes consideraciones:

- La inecuación (B5.158) debe cumplirse para cualquier variación temporal de la variable libre $\boldsymbol{\epsilon}$, con lo que el multiplicador $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ tiene que ser nulo (método de Coleman, ver Maugin¹). Esta condición proporciona la ley constitutiva hiperelástica para el problema de daño escalar,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial d} = -\Psi_0 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -\Psi_0 \text{ conjugada de } d\tag{B5.159}$$

- Considerando la ley constitutiva, el valor de la disipación del modelo de degradación resulta,

$$\Xi = \Psi_0 \dot{d} \geq 0\tag{B5.160}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (B5.159) se obtiene la siguiente forma de la ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = (1-d) \frac{\partial \Psi_0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = (1-d) \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}\tag{B5.161}$$

Esta es la ecuación constitutiva secante del modelo de daño y presenta la siguiente características:

1. el modelo de degradación es isótropo ya que las propiedades mecánicas del material están sólo afectadas por un escalar,
2. la integración de la ecuación constitutiva es explícita,
3. la ecuación (B5.161) se puede interpretar como una descomposición aditiva de las tensiones elásticas e inelásticas, esto es

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}] - [d\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_d \quad (\text{B5.162})$$

El modelo expresado en la ecuación (B5.161) exige el conocimiento de la variable de daño en cada instante del proceso mecánico. Para ello es necesario definir la evolución de esta variable interna de daño. En los apartados que a continuación se presenta se hace un detalle de los pasos necesarios para su evaluación.

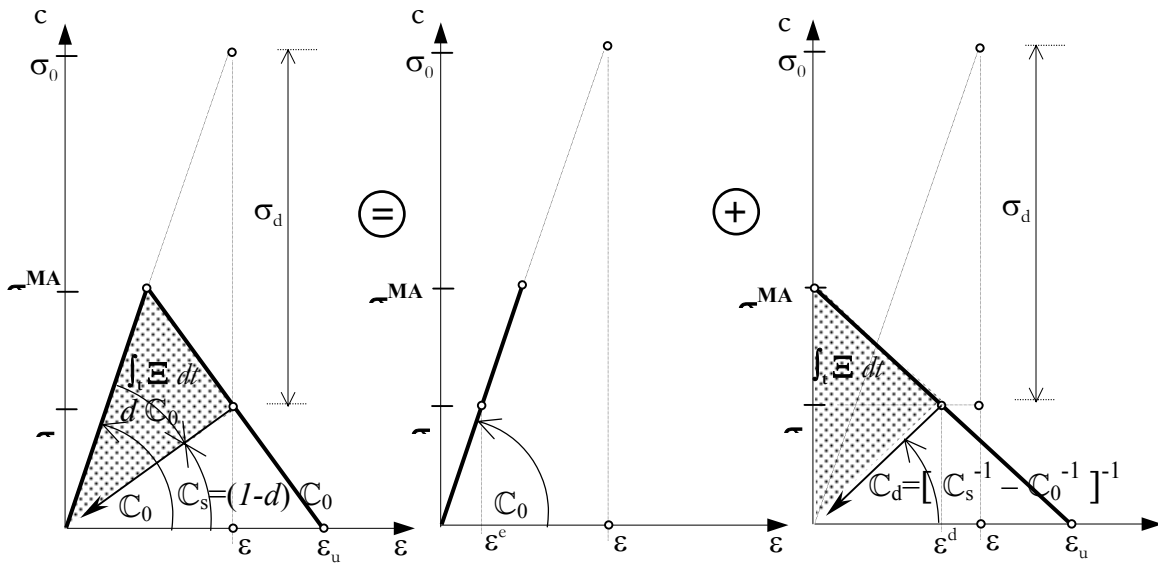


Figura B5.35 – Representación esquemática del modelo de daño uniaxial.

B 5.19 Criterio umbral de daño.

El criterio de daño distingue entre un estado de comportamiento elástico, que se encuentra en el interior del dominio delimitado por esta función de daño, y otro estado en el cual se verifica el proceso de degradación de las propiedades del material. Este criterio depende del tipo de material y se define en la misma forma que para problemas de plasticidad,

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{q}) = f(\boldsymbol{\sigma}_0) - c(d) \leq 0 \quad , \quad \text{con} \quad \mathbf{q} \equiv \{d\} \quad (\text{B5.163})$$

donde $f(\boldsymbol{\sigma}_0)$ es una función del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$ y $c(d)$ es la función que define la posición del umbral de daño. Esta función permite, además de establecer el inicio del comportamiento no lineal de daño, definir también los estados de carga, descarga y recarga. Es una función escalar, debe ser positiva y para un estado indeformado debe ser nula. El valor inicial del umbral de daño $c(d^0) = c^{max} = \sigma^{max}$ es una propiedad del material y

está relacionado con su resistencia a compresión según sea la función umbral de daño que se elija.

La ecuación (B5.33) representa una superficie límite en el espacio de las deformaciones o de las tensiones no dañadas. El daño en el material se verifica cuando el valor de $f(\boldsymbol{\sigma}_0)$ es igual o mayor que $c^{max} = \sigma^{max}$ por primera vez. Una expresión equivalente a la (B5.162) está dada por la siguiente expresión,

$$\bar{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{q}) = G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] - G[c(d)] \leq 0 \quad , \quad \text{con} \quad \mathbf{q} \equiv \{d\} \quad (\text{B5.164})$$

donde $G[\chi]$ es una función escalar, invertible, positiva y de derivada positiva y monótona creciente.

B 5.20 Ley de evolución de la variable interna de daño.

En los problemas de la mecánica en los que interviene la teoría de variables internas es necesario definir la ley de evolución de las mismas. En el problema de daño, la ley de evolución de la variable interna está dada por:

$$\dot{d} = \dot{\mu} \frac{\partial \bar{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{q})}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]} \equiv \dot{\mu} \frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]} \quad (\text{B5.165})$$

donde μ es un escalar no negativo denominado parámetro de consistencia de daño, análogo al factor de consistencia plástico λ , y se utiliza para definir las condiciones de carga, descarga y recarga a través de las condiciones de Kuhn-Tucker,

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad ; \quad \bar{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{q}) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\mu} \cdot \bar{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{B5.166})$$

Las condiciones expresadas en la ecuación anterior corresponden a problemas que poseen restricciones unilaterales. Si el valor de $\bar{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{q}) < 0$ el criterio de daño no se verifica y para que se cumplan las condiciones de Kuhn-Tucker necesariamente debe ocurrir que $\dot{\mu} = 0$. Esto lleva a deducir de la ecuación (B5.165) que la variación temporal del daño debe ser nula $\dot{d} = 0$ y por lo tanto el material no presenta fenómenos de daño y se está ante un proceso mecánico elástico.

Al igual que en la teoría de la plasticidad, la magnitud del factor de consistencia surge de imponer la condición de consistencia de daño de Il'ushim. De éstas y de las propiedades de la función $G[\chi]$, se obtiene,

$$\bar{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{q}) = 0 \Rightarrow G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] = G[c(d)] \Rightarrow f(\boldsymbol{\sigma}_0) = c(d) \Rightarrow \frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_0)} = \frac{\partial G[c(d)]}{\partial c(d)} \quad (\text{B5.167})$$

De la condición de permanencia sobre la superficie umbral de daño se deduce que,

$$\dot{\bar{\mathbb{F}}}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_0)} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}_0) - \frac{\partial G[c(d)]}{\partial c(d)} \dot{c}(d) = 0 \Rightarrow \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}_0) = \dot{c}(d) \quad (\text{B5.168})$$

Observando la variación temporal de $\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]/\partial t = \dot{G}[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]$ (ecuación (B5.168)) y haciendo una analogía con la ley de evolución de la variable interna $\dot{d}$ (ecuación (B5.165)), resulta el parámetro de consistencia de daño como,

$$\left. \begin{aligned} \dot{G}[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] &= \frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_0)} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}_0) \\ \dot{d} &= \dot{\mu} \frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{d} \equiv \dot{G}[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] \Rightarrow \dot{\mu} \equiv \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}_0) \quad (\text{B5.169})$$

Desarrollando más el parámetro de consistencia, puede escribirse,

$$\dot{\mu} = \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}_0) = \dot{d} = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_0)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_0} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_0)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_0} : \mathbb{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{B5.170})$$

Integrando en el tiempo la variación temporal de la variable de daño (ecuación (B5.169)), se concluye en la siguiente forma explícita para representar el daño en un punto del sólido,

$$d = \int_t \dot{d} dt = \int_t \dot{G}[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] dt = G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] \quad (\text{B5.171})$$

Sustituyendo en la disipación (ecuación (B5.160)), resulta la expresión que describe la evolución temporal de la disipación,

$$\Xi = \Psi_0 \dot{G}[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] = \Psi_0 \frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_0)} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_0)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_0} : \mathbb{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{B5.172})$$

De las definiciones previamente presentada se obtiene que el umbral de daño c en un tiempo $s = t$, resulta,

$$c = \max \{ c^{\max}, \max \{ f(\boldsymbol{\sigma}_0) \}_s \} \quad \forall \quad 0 \leq s \leq t \quad (\text{B5.173})$$

B 5.21 Tensor constitutivo de daño tangente.

El tensor constitutivo tangente de daño se obtiene considerando la variación temporal de la ecuación constitutiva secante (B5.161).

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d) \mathbb{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{d} \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{B5.174})$$

Reemplazando en la ecuación anterior la ley de evolución de la variable interna de daño $\dot{d}$ dada por ecuación (B5.165), se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d) \mathbb{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}_0) \cdot [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}] \quad (\text{B5.175})$$

Teniendo en cuenta que la variación temporal de la función umbral se escribe como

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}_0) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_0)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_0} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \frac{\partial f(\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{B5.176})$$

Reemplazando en la ecuación (B5.175) se tiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d) \mathbb{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]} \left[\frac{\partial f(\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right] \cdot [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}] \quad (\text{B5.177})$$

De la ecuación anterior se obtiene el tensor de daño tangente como,

$$\mathbb{C}^T = (1-d)\mathbb{C}_0 - \frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]} [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}] \otimes \left[\frac{\partial f(\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right] \quad (\text{B5.178})$$

B 5.22 Particularización del criterio de daño.

El tipo de ablandamiento a definir en el criterio de daño general depende del problema a resolver. Aquí se presenta un caso general y dos particulares, estos dos últimos corresponden a un caso con ablandamiento exponencial y otro con ablandamiento lineal.

B 5.22.1 Ablandamiento general.

La función escalar $G[\chi]$ que define la evolución del umbral de daño debe ser monótona y con un valor acotado entre 0 y 1. Una forma de expresar la evolución del umbral de daño es a través de una variable auxiliar κ , que se denominará *variable de disipación normalizada* a la unidad, y cuya expresión es análoga a la utilizada en plasticidad (ecuación (B5.118))

$$\dot{\kappa} = K(\boldsymbol{\sigma}_0) \cdot \Xi_m = \left[\frac{r(\boldsymbol{\sigma}_0)}{g_f} + \frac{1-r(\boldsymbol{\sigma}_0)}{g_c} \right] \cdot \Xi_m \quad (\text{B5.179})$$

donde $\Xi_m = \Psi_0 \dot{d}$ es la disipación de daño y $r(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{\mathbf{I}=1}^3 \langle \sigma_{\mathbf{I}} \rangle / \sum_{\mathbf{I}=1}^3 |\sigma_{\mathbf{I}}|$ una función escalar que define los estado de comportamiento de un punto en función del estado tensional, siendo $\langle x \rangle = 0,5 [x + |x|]$ la función de McAully. Las magnitudes g_f y g_c representan la máxima disipación de un punto sometido a tracción y a compresión respectivamente. De esta manera, la disipación de daño siempre estará normalizada respecto de la máxima energía correspondiente al proceso mecánico que esté realizando en cada momento.

Utilizando la variable κ como variable auxiliar, puede ahora definirse $G[\chi]$ en la siguiente forma general,

$$G[c(\kappa)] = 1 - \frac{c(\kappa)}{f(\boldsymbol{\sigma}_0)} \quad (\text{B5.180})$$

En esta formulación debe necesariamente cumplirse que el valor de $f^0(\boldsymbol{\sigma}_0) = c^{\max}$ y en este caso se obtiene el cumplimiento del criterio de daño para el primer umbral de degradación. Por otro lado, y de acuerdo a la ecuación (B5.169), (B5.171) la evolución del umbral de daño será $d \equiv G[c(\kappa)] = 1 - \frac{c(\kappa)}{f(\boldsymbol{\sigma}_0)}$.

En la Tabla 5.2 se presenta el algoritmo para la obtención de la tensión a través de éste modelo de daño general, apropiado para cualquier función $f(\boldsymbol{\sigma}_0)$ y $c(\kappa)$. Este modelo general necesita ser integrado numéricamente.

1. Cálculo de la tensión predictora y variables internas, para el tiempo actual " $t + \Delta t$ ", iteración de equilibrio " i ", contador de convergencia del modelo constitutivo " $k = 1$ "

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma}_0]^{t+\Delta t} &= \mathbb{C}_0 : [\boldsymbol{\epsilon}]^{t+\Delta t} \\ {}_{k-1}^i [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} &= {}^i [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} = {}^i \{\kappa, d\}^{t+\Delta t} \end{aligned}$$

2. Verificación de la condición umbral de daño:

$$\begin{aligned} \text{a. Si: } {}_{k-1}^i [\overline{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{q})]^{t+\Delta t} &= {}_{k-1}^i [G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] - G[c(\kappa)]]^{t+\Delta t} \leq 0, \\ \text{entonces } \left\{ \begin{array}{l} {}^i [\boldsymbol{\sigma}]^{t+\Delta t} &= [\boldsymbol{\sigma}_0]^{t+\Delta t} \\ {}^i [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} &= {}_{k-1}^i [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} \end{array} \right\} &\text{y va a la SALIDA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. Si: } {}_{k-1}^i [\overline{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{q})]^{t+\Delta t} &= {}_{k-1}^i [G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] - G[c(\kappa)]]^{t+\Delta t} > 0, \\ \text{entonces inicia la integración de la ec. constitutiva} \end{aligned}$$

3. Integración de la ecuación propiamente dicha,

$$\begin{aligned} {}_k^i [d]^{t+\Delta t} &= 1 - \frac{{}_{k-1}^i [c(\kappa)]^{t+\Delta t}}{{}_{k-1}^i [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]^{t+\Delta t}} \\ {}_k [\delta d] &= \left[\delta \mu \frac{\partial \overline{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{q})}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]} \right]^{t+\Delta t} \equiv {}_k [\delta \mu]^{t+\Delta t} \underbrace{\frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}}_1 \Rightarrow {}_k [\delta d] = {}_k^i [d]^{t+\Delta t} - {}_{k-1}^i [d]^{t+\Delta t} \\ {}_k [\delta \Xi] &= \underbrace{\left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon} \right]^{t+\Delta t}}_{\Psi_0^{t+\Delta t}} \cdot {}_k [\delta d] \Rightarrow \text{utilizando (B5.115): } {}_k [\delta \kappa]^{t+\Delta t} = K(\boldsymbol{\sigma}_0)^{t+\Delta t} \cdot {}_k [\delta \Xi] \end{aligned}$$

4. Actualiza la tensión, el tensor constitutivo tangente, la variable interna auxiliar de disipación normalizada κ y la disipación normalizada Ξ ,

$$\begin{aligned} {}_k^i [\Xi]^{t+\Delta t} &= {}_{k-1}^i [\Xi]^{t+\Delta t} + {}_k^i [\Xi]^{t+\Delta t} \\ {}_k^i [\kappa]^{t+\Delta t} &= {}_{k-1}^i [\kappa]^{t+\Delta t} + {}_k^i [\kappa]^{t+\Delta t} \\ {}^i [\boldsymbol{\sigma}]^{t+\Delta t} &= (1 - {}_k^i [d]^{t+\Delta t}) [\boldsymbol{\sigma}_0]^{t+\Delta t} \\ {}^i [\mathbb{C}^T]^{t+\Delta t} &= \left[(1 - d) \mathbb{C}_0 - \frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]} [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}] \otimes \left[\frac{\partial f(\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right] \right]^{t+\Delta t} \end{aligned}$$

5. Hace $k = k + 1$ y regresa al punto 2

Tabla 5.2 – Integración de la ecuación constitutiva de daño general

B 5.22.2 Ablandamiento Exponencial.

La función escalar $G[\chi]$ que define la evolución del umbral de daño debe ser monótona y con un valor acotado entre 0 y 1. En distintas publicaciones sobre el problema de daño escalar se encuentran diversas formas de representar el comportamiento tensional con ablandamiento. Particularmente, en el trabajo de Oliver *et al.* (1990)⁸, se propone la siguiente función,

$$G[c(d)] = 1 - \frac{c^{max}}{c(d)} e^{A \left(1 - \frac{c(d)}{c^{max}} \right)} \quad \text{con } 0 \leq c^{max} \leq c(d) \quad (\text{B5.181})$$

o también puede expresarse como,

$$G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] = 1 - \frac{f^0(\boldsymbol{\sigma}_0)}{f(\boldsymbol{\sigma}_0)} e^{A \left(1 - \frac{f^0(\boldsymbol{\sigma}_0)}{f(\boldsymbol{\sigma}_0)} \right)} \quad \text{con} \quad f^0(\boldsymbol{\sigma}_0) = c^{\max} \quad (\text{B5.182})$$

siendo A un parámetro que depende de la energía de fractura del material⁸. El valor de $f^0(\boldsymbol{\sigma}_0) = c^{\max}$ se obtiene a partir del cumplimiento del criterio de daño para el primer umbral de degradación, situación en que se cumple $G[f^0(\boldsymbol{\sigma}_0)] - G[c^{\max}] = 0$ y también que $G[f^0(\boldsymbol{\sigma}_0)] = G[c^{\max}] \equiv 0$.

En la Tabla 5.3 se presenta la algoritmia de este modelo ya integrado, siendo por lo tanto más simple su utilización, aunque menos general pues sólo utiliza un ablandamiento exponencial.

1. Cálculo de la tensión predictora y variable interna de daño para el tiempo actual " $t + \Delta t$ ", iteración de equilibrio " i ",

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma}_0]^{t+\Delta t} &= \mathbb{C}_0 : [\boldsymbol{\epsilon}]^{t+\Delta t} \\ {}^i[d]^{t+\Delta t} ; \tau &= {}^i[G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]]^{t+\Delta t} \end{aligned}$$

2. Verificación de la condición umbral de daño:

$$\text{a. Si: } \tau - \tau^{\max} \leq 0$$

$$\text{entonces } \left\{ \begin{array}{l} {}^i[\boldsymbol{\sigma}]^{t+\Delta t} = [\boldsymbol{\sigma}_0]^{t+\Delta t} \\ {}^i[d]^{t+\Delta t} ; \tau^{\max} = \tau \end{array} \right\} \text{ y va a la SALIDA}$$

$$\text{b. Si: } \tau - \tau^{\max} > 0$$

entonces inicia la integración de la ec. constitutiva

3. Integración de la ecuación propiamente dicha,

$$\tau^{\max} = \tau$$

$${}^i[d]^{t+\Delta t} = 1 - \left[\frac{f^0(\boldsymbol{\sigma}_0)}{\tau} e^{A \left(1 - \frac{\tau}{f^0(\boldsymbol{\sigma}_0)} \right)} \right]^{t+\Delta t}$$

4. Actualiza la tensión y el tensor constitutivo tangente

$${}^i[\boldsymbol{\sigma}]^{t+\Delta t} = (1 - {}^i[d]^{t+\Delta t}) [\boldsymbol{\sigma}_0]^{t+\Delta t}$$

$${}^i[\mathbb{C}^T]^{t+\Delta t} = \left[(1 - d) \mathbb{C}_0 - \frac{\partial G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]} [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}] \otimes \left[\frac{\partial f(\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right] \right]^{t+\Delta t}$$

Tabla 5.3 – Integración de la ecuación constitutiva de daño con ablandamiento exponencial

B 5.22.3 Ablandamiento lineal.

En este caso se realiza una nueva definición de la función escalar $G[\chi]$ que establece el umbral de daño. Al igual que en el subapartado anterior, esta función debe ser monótona creciente y acotada entre 0 y 1. Esto es,

$$G[c(d)] = \frac{1 - \frac{c^{max}}{c(d)}}{1 + A} \quad \text{con } 0 \leq c^{max} \leq c(d) \quad (B5.183)$$

o también puede expresarse como,

$$G[f(\sigma_0)] = \frac{1 - \frac{f^0(\sigma_0)}{f(\sigma_0)}}{1 + A} \quad \text{con } f^0(\sigma_0) = c^{max} \quad (B5.184)$$

siendo A un parámetro que depende de la energía de fractura del material. El valor inicial de $f^0(\sigma_0)$ se obtiene del criterio de daño expresado en la ecuación (B5.33) ó (B5.164) para el primer umbral de degradación, situación en que se cumple $G[f^0(\sigma_0)] - G[c^{max}] = 0$ y también que $G[f^0(\sigma_0)] = G[c^{max}] \equiv 0$.

B 5.23 Particularización de la Función Umbral de Tensión.

B 5.23.1 Modelo de Simo y Ju.

Este modelo^{6,7}, formulado en el año (1987) es uno de los mas difundidos, por lo que se recomienda recurrir a las fuentes para profundizar sobre sus conceptos. Aquí sólo se menciona la forma en que este modelo define la función umbral de daño expresada en el espacio de tensiones.

$$\tau = f(\sigma_0) = \sqrt{2 \Psi_0(\epsilon)} = \sqrt{\epsilon : \mathbb{C}_0 : \epsilon} \quad (B5.185)$$

En este caso el tensor constitutivo tangente resulta teniendo en cuenta la ecuación (B5.178), esto es:

$$\mathbb{C}^T = (1-d) \mathbb{C}_0 - \left[\frac{\partial G[\tau]}{\partial \tau} \frac{1}{\tau} [\mathbb{C}_0 : \epsilon] \right] \otimes [\mathbb{C}_0 : \epsilon] \quad (B5.186)$$

B 5.23.1.1 Deducción del parámetro A para el modelo de Simo-Ju.

El parámetro A se deduce a partir de la expresión de la disipación dada en la ecuación (B5.160), particularizada para un proceso uniaxial bajo carga monótona creciente. Teniendo en cuenta la función umbral de daño $\tau = f(\sigma_0)$ propuesta por Simo y Ju (1987), se tiene en el primer umbral:

$$\tau = f(\sigma_0) = \sqrt{2\Psi_0(\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon C_0} = \frac{\sigma_t^{max}}{\sqrt{C_0}} \Rightarrow \sigma_t^{max} = \tau\sqrt{C_0} \quad (B5.187)$$

donde σ_t^{max} es la tensión en el umbral de resistencia a tracción. Reemplazando esto en la expresión de la energía libre de Helmholtz (ecuación (B5.157)) se tiene:

$$\Psi_0 = \frac{1}{2}\varepsilon C_0 \varepsilon = \frac{1}{2}\sigma_t^{max} \varepsilon = \frac{1}{2}\frac{(\sigma_t^{max})^2}{C_0} = \frac{(\tau\sqrt{C_0})^2}{C_0} = \frac{1}{2}\tau^2 \quad (B5.188)$$

La disipación total se obtiene integrado la expresión de la disipación y teniendo en cuenta la ecuación (B5.171) y (B5.172),

$$\int_{t=0}^{\infty} \Xi dt = \int_{t=0}^{\infty} \Psi_0 \dot{d} dt = \int_{\tau^0}^{\infty} \frac{1}{2}\tau^2 \frac{\partial G[\tau]}{\partial \tau} d\tau \quad (B5.189)$$

Teniendo en cuenta la definición de $G[f(\sigma_0)] = G[\tau]$ en forma exponencial dada por la ecuación (B5.181) y aplicando el concepto de integración por partes, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\tau^0}^{\infty} \frac{1}{2}\tau^2 dG[\tau] &= \left[\frac{1}{2}\tau^2 G[\tau] \right]_{\tau^0}^{\infty} - \int_{\tau^0}^{\infty} \tau G[\tau] d\tau \\ &= \left[\frac{1}{2}\tau^2 G[\tau] \right]_{\tau^0}^{\infty} - \int_{\tau^0}^{\infty} \left(\tau - \tau^0 e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left(\tau^2 - \tau\tau^0 e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)} \right) \Big|_{\tau^0}^{\infty} - \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{\tau^0}^{\infty} + \frac{1}{A} \left(\tau^0 \right)^2 e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)} \Big|_{\tau^0}^{\infty} \\ &= \tau^2 - \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{(\tau^0)^2}{2} - \frac{(\tau^0)^2}{A} \right) = (\tau^0)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right) \end{aligned} \quad (B5.190)$$

donde $\tau^0 = f^0(\sigma_0)$ es el valor inicial del criterio de daño (ecuación (B5.33) ó (B5.164)) para el primer umbral de degradación.

La máxima energía disipada por cada punto será g_f y de aquí se tiene

$$(\tau^0)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right) = g_f \Rightarrow A = \frac{1}{\frac{g_f}{(\tau^0)^2} - \frac{1}{2}} \quad (B5.191)$$

Para el caso en que $G(\tau)$ sea una función lineal (ver ecuación (B5.183)), el extremo superior de la misma se obtiene teniendo en cuenta el valor máximo de la función (B5.171), de donde resulta

$$G[\tau \rightarrow \infty] = 1 = \frac{\left(1 - \frac{\tau^0}{\tau}\right)}{(1+A)} \Rightarrow \tau = -\frac{\tau^0}{A} \quad (B5.192)$$

La disipación total en este caso resulta entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{\infty} \Xi dt &= \int_{\tau^0}^{\frac{\tau^0}{A}} \frac{1}{2} \tau^2 \frac{\partial G[\tau]}{\partial \tau} d\tau \\
&= \left[\frac{1}{2} \tau^2 G[\tau] \right]_{\tau^0}^{\frac{\tau^0}{A}} - \int_{\tau^0}^{\frac{\tau^0}{A}} \frac{\tau - \tau^0}{1+A} d\tau \\
&= \left[\frac{1}{2} \tau^2 G[\tau] \right]_{\tau^0}^{\frac{\tau^0}{A}} - \frac{1}{1+A} \left(\frac{\tau^2}{2} - \tau^0 \tau \right) \Big|_{\tau^0}^{\frac{\tau^0}{A}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(\tau^0)^2}{A^2} - \frac{1}{2} (1+A) \frac{(\tau^0)^2}{A^2} = -\frac{1}{2} \frac{(\tau^0)^2}{A}
\end{aligned} \tag{B5.193}$$

De la misma forma que se hizo anteriormente, se admite que la máxima energía a disipar por un punto del sólido será g_f , por lo tanto igualando con la máxima disipación (ecuación (B5.193)), se tiene

$$-\frac{1}{2} \frac{(\tau^0)^2}{A} = g_f \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \frac{(\tau^0)^2}{g_f} \tag{B5.194}$$

Considerando un comportamiento post-pico (para $\tau \geq \tau^0$) exponencial (ecuación (B5.181)) o lineal (ecuación (B5.183)), el tensor constitutivo tangente para el modelo propuesto por Simo y Ju (1987), ecuación (B5.186), resulta

$$\begin{cases} \mathbb{C}^T = (1-d) \mathbb{C}_0 - e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)} \frac{\tau^0 + A\tau}{\tau^2} \left[\frac{1}{\tau} [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}] \right] \otimes [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}] & , \text{ Abland. Exponencial} \\ \mathbb{C}^T = (1-d) \mathbb{C}_0 - \frac{\tau^0}{\tau^2 (1+A)} \left[\frac{1}{\tau} [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}] \right] \otimes [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}] & , \text{ Abland. Lineal} \end{cases} \tag{B5.195}$$

Ambas formas del tensor constitutivo tangente son simétricas. La simetría de este tensor depende de la norma $\tau = f(\boldsymbol{\sigma}_0)$.

B 5.23.2 Modelo de Lemaitre y Mazars.

El modelo de Lemaitre y Mazars difiere del anteriormente presentado (Simo-Ju) en la forma en que se define la función umbral de daño. Este modelo utiliza una norma basada en el tensor de deformaciones dada por:

$$\tau = f(\boldsymbol{\sigma}_0) = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon}} \tag{B5.196}$$

Esta norma conduce a un tensor constitutivo tangente no simétrico, que para el caso de un comportamiento post-pico (para $\tau \geq \tau^0$) exponencial (ecuación (B5.181)) o lineal (ecuación (B5.183)), resulta

$$\begin{cases} \mathbb{C}^T = (1-d)\mathbb{C}_0 - e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)} \frac{\tau^0 + A\tau}{\tau^2} \left[\frac{1}{\tau} [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}] \right] \otimes [\boldsymbol{\varepsilon}] & , \text{ Abland.Exponencial} \\ \mathbb{C}^T = (1-d)\mathbb{C}_0 - \frac{\tau^0}{\tau^2(1+A)} \left[\frac{1}{\tau} [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}] \right] \otimes [\boldsymbol{\varepsilon}] & , \text{ Abland.Lineal} \end{cases} \quad (\text{B5.197})$$

B 5.23.3 Modelo general para distintas superficies de daño.

Este modelo ha comenzado a formularse con motivo de la Tesis Doctoral de B. Luccioni³⁶ (1993) y se ha concluido con la forma que aquí se presenta en la Tesis Doctoral de E. Car³⁷ (2000). Su característica fundamental se basa en admitir como función umbral de daño a cualquier función escalar de argumentos tensoriales, homogénea y de primer grado en las tensiones. Este es el caso de las funciones de fluencia utilizadas frecuentemente en plasticidad. Ejemplo de ellas son las funciones de Rankine, von Mises, Mohr-Coulomb, Tresca, Drucker-Prager y otras que se presentan en el apartado correspondiente a la plasticidad clásica.

B 5.23.4 Deducción del parámetro A

Al igual que para el modelo de Simó-Ju, presentado en el apartado anterior, el parámetro A se deduce a partir de la expresión de la disipación dada en la ecuación (B5.160), particularizada para un proceso uniaxial bajo carga monótona creciente. Teniendo en cuenta una función umbral de daño cualquiera, $\tau = f(\boldsymbol{\sigma}_0)$, se tiene en el primer umbral de daño:

$$\tau = f(\boldsymbol{\sigma}_0) = \sigma_t^{max} \quad (\text{B5.198})$$

donde σ_t^{max} es la tensión en el umbral de resistencia a tracción. Reemplazando esto en la expresión de la energía libre de Helmholtz (ecuación (B5.157)) se tiene:

$$\Psi_0 = \frac{1}{2} \varepsilon C_0 \varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_t^{max} \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{(\sigma_t^{max})^2}{C_0} = \frac{1}{2} \frac{(\tau)^2}{C_0} \quad (\text{B5.199})$$

La disipación total se obtiene integrado la expresión de la disipación en el tiempo, esto es teniendo en cuenta la ecuación (B5.171) y (B5.172),

$$\int_{t=0}^{\infty} \Xi dt = \int_{t=0}^{\infty} \Psi_0 \dot{d} dt = \int_{\tau^0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(\tau)^2}{C_0} \frac{\partial G[\tau]}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{B5.200})$$

Además, por la definición de $G[f(\boldsymbol{\sigma}_0)] = G[\tau]$ en forma exponencial, dada por la ecuación (B5.181), y aplicando el concepto de integración por partes, se tiene:

³⁶ Luccioni, B. (1993). *Formulación de un modelo constitutivo para materiales ortótropos* - Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

³⁷ Car, E. (2000). *Modelo Constitutivo para el Estudio del Comportamiento Mecánico de los Materiales Compuestos*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona. España.

$$\begin{aligned}
\int_{\tau^0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(\tau)^2}{C_0} dG[\tau] &= \left[\frac{1}{2} \frac{(\tau)^2}{C_0} G[\tau] \right]_{\tau^0}^{\infty} - \int_{\tau^0}^{\infty} \frac{(\tau)^2}{C_0} G[\tau] d\tau \\
&= \left[\frac{1}{2} \frac{(\tau)^2}{C_0} G[\tau] \right]_{\tau^0}^{\infty} - \int_{\tau^0}^{\infty} \frac{1}{C_0} \left(\tau - \tau^0 e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)} \right) d\tau \\
&= \frac{1}{2C_0} \left(\tau^2 - \tau\tau^0 e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)} \right) \Big|_{\tau^0}^{\infty} - \frac{1}{C_0} \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{\tau^0}^{\infty} + \frac{1}{A} (\tau^0)^2 e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)} \Big|_{\tau^0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{C_0} \tau^2 - \frac{1}{C_0} \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{(\tau^0)^2}{2} - \frac{(\tau^0)^2}{A} \right) = \frac{(\tau^0)^2}{C_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right)
\end{aligned} \tag{B5.201}$$

donde $\tau^0 = f^0(\sigma_0)$ es el valor inicial del criterio de daño (ecuación (B5.33) o (B5.164)) para el primer umbral de degradación.

Al igual que en los otros modelos, la máxima energía disipada por cada punto será g_f y de aquí se tiene la expresión del parámetro A que garantiza una disipación controlada,

$$\frac{(\tau^0)^2}{C_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right) = g_f \Rightarrow A = \frac{1}{\frac{C_0 g_f}{(\tau^0)^2} - \frac{1}{2}} \tag{B5.202}$$

Para el caso en que $G(\tau)$ sea una función lineal (ver ecuación (B5.183)), el extremo superior de la misma se obtiene teniendo en cuenta el valor máximo de la función (B5.171), de donde resulta al igual que en la ecuación (B5.192),

$$G[\tau \rightarrow \infty] = 1 = \frac{\left(1 - \frac{\tau^0}{\tau}\right)}{(1+A)} \Rightarrow \tau = -\frac{\tau^0}{A} \tag{B5.203}$$

La disipación total en este caso resulta entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{\infty} \Xi dt &= \int_{\tau^0}^{\tau^0} \frac{1}{2} \frac{(\tau)^2}{C_0} \frac{\partial G[\tau]}{\partial \tau} d\tau \\
&= \left[\frac{1}{2} \frac{(\tau)^2}{C_0} G[\tau] \right]_{\tau^0}^{\tau^0} - \int_{\tau^0}^{\tau^0} \frac{1}{C_0} \frac{\tau - \tau^0}{1+A} d\tau \\
&= \left[\frac{1}{2} \frac{(\tau)^2}{C_0} G[\tau] \right]_{\tau^0}^{\tau^0} - \frac{1}{C_0(1+A)} \left(\frac{\tau^2}{2} - \tau^0 \tau \right) \Big|_{\tau^0}^{\tau^0} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(\tau^0)^2}{A^2 C_0} - \frac{1}{2} (1+A) \frac{(\tau^0)^2}{A^2 C_0} = -\frac{1}{2} \frac{(\tau^0)^2}{A C_0}
\end{aligned} \tag{B5.204}$$

De la misma forma que se hizo anteriormente, se admite que la máxima energía a disipar por un punto del sólido será g_f , por lo tanto igualando con la máxima disipación (ecuación (B5.193)), se tiene

$$-\frac{1}{2} \frac{(\tau^0)^2}{AC_0} = g_f \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \frac{(\tau^0)^2}{g_f C_0} \quad (\text{B5.205})$$

En este caso, el tensor constitutivo tangente se obtiene teniendo en cuenta que,

$$\frac{\partial \tau}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma^0} : \frac{\partial \sigma^0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{C}_0 : \frac{\partial \sigma^0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{B5.206})$$

De donde se obtiene el tensor constitutivo tangente considerando un comportamiento post-pico (para $\tau \geq \tau^0$) exponencial (ecuación (B5.181)) o lineal (ecuación (B5.183)). Esto es,

$$\begin{cases} \mathbb{C}^T = (1-d) \mathbb{C}_0 - e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)} \frac{\tau^0 + A\tau}{\tau^2} [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}] \otimes \left[\mathbb{C}_0 : \frac{\partial \sigma^0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right] & , \text{ Abland. Exponencial} \\ \mathbb{C}^T = (1-d) \mathbb{C}_0 - \frac{\tau^0}{\tau^2 (1+A)} [\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}] \otimes \left[\mathbb{C}_0 : \frac{\partial \sigma^0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right] & , \text{ Abland. Lineal} \end{cases} \quad (\text{B5.207})$$

Ambas formas del tensor constitutivo tangente son no simétricas.

B 6 Modelos dependientes del tiempo.

B6.1 Introducción.

Se ha visto en los capítulos 3 y 4 que la no-linealidad en dinámica está motivada por cambios de orientación en las fuerzas exteriores debido a grandes movimientos y por no linealidades en las fuerzas interiores, causada por fenómenos independientes del tiempo, estudiados en el capítulo 5, y también por fenómenos sensibles al tiempo, que será presentado en éste capítulo.

Uno de los comportamientos que provoca no-linealidad en la respuesta en el tiempo de los materiales se debe a la viscoelasticidad, que estudia el comportamiento reológico de los materiales, es decir, aquellos comportamientos afectados por el transcurso del tiempo. Existe un gran un trabajo extenso sobre este tema, que puede consultarse en libros especialmente dedicados a estudiar la influencia del tiempo en los materiales^{1,2}.

En una primera parte de este capítulo, la presentación se limitará a estados que pueden ser descrito por una sola componente de tensión y deformación, esta forma simplificada permitirá introducir el concepto y luego se extenderá la formulación al comportamiento multiaxial. En estos modelos simplificados se hace un símil, tal que la fuerza representa la tensión y el desplazamiento representa la deformación, y de esta forma se puede explicar en forma simple el concepto fenomenológico que describe su ecuación de comportamiento.

B6.2 Ecuaciones constitutivas basadas en analogías “muelle-amortiguador”.

Hay dos familias de modelos de elasticidad dependientes del tiempo:

1. Una de ellas, en la cual la *variable libre del problema es la tensión*, recibe el nombre de modelos de *elasticidad retardada* o de *fluencia* en el tiempo, y representa físicamente lo mismo que el vocablo inglés “creep”. Un modelo representativo de esta familia es el modelo viscoelástico de Kelvin (ver Figura B6.1).

¹ G. Creus (1986). Viscoelasticity – Basic theory and applications to concrete structures. Ed. By C. Brebbia and S. Orszag. Springer-Verlag, Berlin.

² R. M. Christensen (1982). Theory of viscoelasticity. An introduction. Academic Press, Inc. N. York.

2. La otra, cuya *variable libre es la deformación*, recibe el nombre de *modelos de relajación*. Un modelo representativo de esta familia es el modelo viscoelástico de Maxwell (ver Figura B6.2)

Estos modelos tienen leyes constitutivas no invertibles, pero cada uno de estos modelos representan la forma inversa implícita del otro, es decir, que un modelo de elasticidad retardada es la forma inversa de representar un modelo de relajación.

B6.2.1 Modelo simplificado de Kelvin,

En este modelo de elasticidad retardada, o fluencia en el tiempo, se supone que la variable libre es la tensión. Por lo tanto, para escribir la ecuación se parte de un modelo en paralelo con compatibilidad de deformaciones y de allí se obtiene la ecuación de gobierno del problema. La tensión resulta entonces de la siguiente forma aditiva,

$$\sigma(t) = \sigma^e(t) + \sigma^{vis}(t) = \mathbb{C}\varepsilon(t) + \xi\dot{\varepsilon}(t) \quad (\text{B6.1})$$

donde σ^e y σ^{vis} representan la tensión elástica en el muelle y la tensión viscosa en el amortiguador, respectivamente; ε y $\dot{\varepsilon}$ son la deformación en el muelle y la velocidad de deformación en el amortiguador; $\mathbb{C}$ es la constante elástica del muelle y ξ la constante viscosa del amortiguador. El campo de deformaciones en cada instante cumple con la siguiente relación (ver Figura B6.1),

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) = \varepsilon^{vis}(t) \quad (\text{B6.2})$$

siendo ε^e la deformación elástica y ε^{vis} la deformación viscosa. Una imposición de tensión durante un tiempo, a partir del instante τ_0 da lugar al siguiente campo de deformaciones transitorio, obtenido a partir de la ecuación (B6.1),

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t) - \xi\dot{\varepsilon}(t)}{\mathbb{C}} = \frac{\sigma(t)}{\mathbb{C}} - \frac{\xi}{\mathbb{C}}\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 - r\dot{\varepsilon}(t) \quad (\text{B6.3})$$

Siendo ε_0 la deformación que tendrá el modelo para tiempo infinito, o en estado de régimen, y r el denominado tiempo de retardo, que como su nombre lo dice, es el tiempo que se retrasa el modelo en responder por influencia de la viscosidad. Este retraso se lo mide a partir de una respuesta instantánea que sufriría un material ideal sin viscosidad (ver Figura B6.1).

La resolución de esta ecuación diferencial de primer orden (B6.3) da lugar a una integral de convolución que describe el siguiente campo de deformaciones,

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\xi} e^{-(t-s)/r} \cdot \sigma(s) ds & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{B6.4})$$

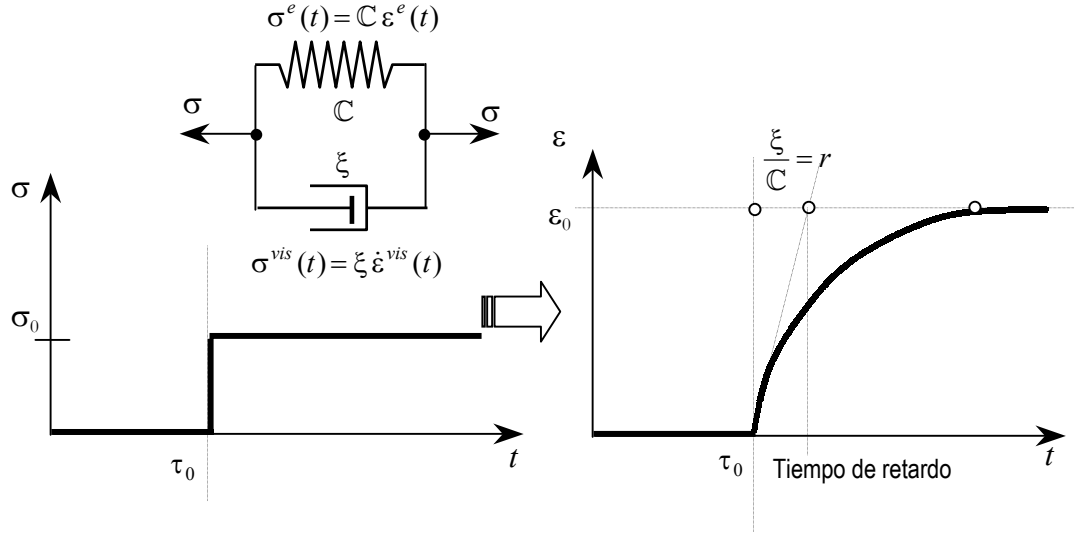


Figura B6.1 – Forma simplificada de representar el comportamiento viscosos del modelo de Kelvin.

B6.2.2 Modelo simplificado de Maxwell.

Se denomina también a la formulación de Maxwell modelo de relajación y en el se supone que la variable libre es la deformación. Este modelo dispone en serie el muelle y el amortiguador, situación que hace que la deformación total resulte de la composición de una parte elástica ε^e , más una viscosa ε^{vis} ,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^{vis}(t) = \frac{\sigma}{C} + \int_{t_0}^t \frac{\sigma(s)}{\xi} ds \quad (B6.5)$$

En tanto, y para garantizar la condición de equilibrio en el punto, la tensión es única y por lo tanto respeta la siguiente relación,

$$\sigma(t) = \sigma^e(t) = \sigma^{vis}(t) \quad (B6.6)$$

La resolución de la ecuación (B6.5) da lugar a la siguiente expresión de la tensión

$$\begin{cases} \sigma(t) = 0 & \forall t < \tau_0 \\ \sigma(t) = \int_{-\infty}^t C e^{-(t-s)/\tau} \varepsilon(s) ds & \forall t \geq \tau_0 \end{cases} \quad (B6.7)$$

Siendo esta, al igual que la ecuación (B6.4), una convolución en el tiempo, cuya solución exige un alto coste computacional.

En este modelo puede observarse que su respuesta se relaja en el tiempo si se mantiene constante la imposición de la deformación (ver Figura B6.2). En este sentido aparece un tiempo denominado de relajación r , cuya expresión es la misma que el tiempo de retardo introducido en el modelo de Kelvin. Aunque no es evidente en la formulación, como ya se ha dicho en la introducción, el modelo de Maxwell establece la forma mecánica inversa del modelo de Kelvin, pudiéndose probarse esto numéricamente.

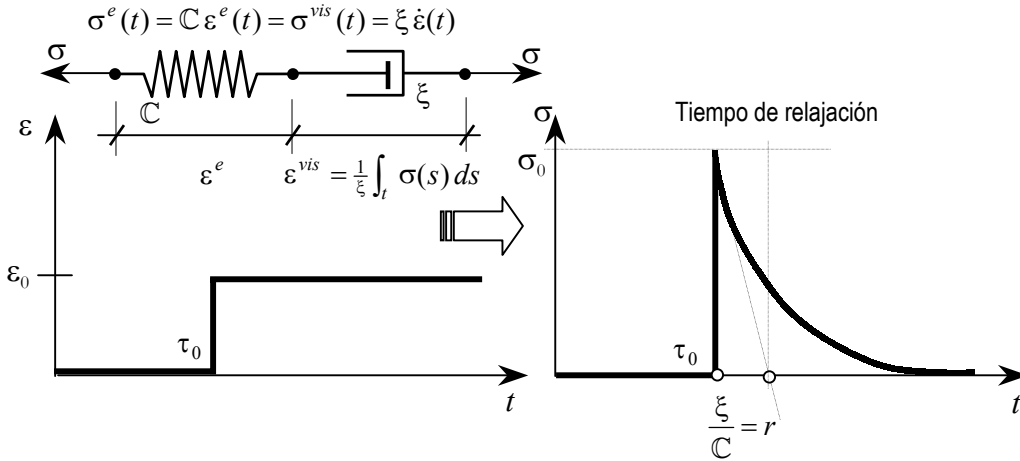


Figura B6.2 – Forma simplificada de representar el comportamiento viscosos del modelo de Maxwell.

B6.2.3 Modelo generalizado de Kelvin.

Este modelo resume las características del modelo de Kelvin y Maxwell previamente presentados. Su principal cualidad es su posibilidad de tender hacia el modelo de Maxwell cuando $C_1 \rightarrow 0$ y hacia el modelo de Kelvin cuando $C_0 \rightarrow \infty$ (ver Figura B6.3). Esta peculiaridad del aquí denominado “modelo de Kelvin generalizado”, hace de este una formulación útil y versátil para representar distintos tipos de comportamientos viscosos de los sólidos.

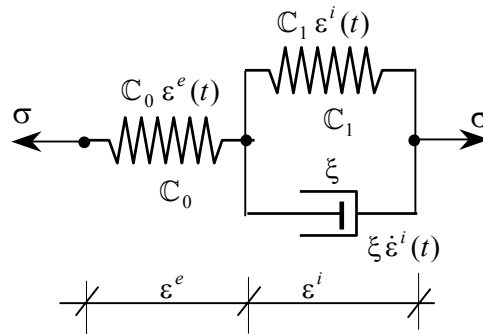


Figura B6.3 – Modelo de Kelvin Generalizado.

El estado tensional en un instante cualquiera de tiempo se expresa como

$$\begin{cases} \sigma(t) = C_0 \varepsilon^e(t) & , \text{ respuesta inicial, con } t \rightarrow 0 \\ \sigma(t) = C_1 \varepsilon^i(t) + \xi \dot{\varepsilon}^i(t) \end{cases} \quad (\text{B6.8})$$

Y la condición de equilibrio requiere que ambas tensiones sean iguales en cualquier instante de tiempo,

$$\sigma(t) = C_0 \varepsilon^e(t) = C_1 \varepsilon^i(t) + \xi \dot{\varepsilon}^i(t) \Rightarrow \dot{\varepsilon}^i(t) = \frac{\sigma(t) - C_1 \varepsilon^i(t)}{\xi} = \frac{C_0 \varepsilon^e(t) - C_1 \varepsilon^i(t)}{\xi} \quad (\text{B6.9})$$

Donde la deformación inelástica ε^i puede considerarse como una variable interna del modelo. Esta deformación resulta de la solución de la ecuación diferencial (B6.9), para una imposición tensional $\sigma(t)$ a partir de un tiempo $t \geq \tau_0$. Esto es,

$$\begin{cases} \varepsilon^i(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \varepsilon^i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\xi} e^{-(t-s)/r_1} \cdot \sigma(s) ds & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{B6.10})$$

Que comparada con la ecuación (B6.4), puede verse que el modelo clásico de Kelvin representa ahora, convencionalmente, la parte inelástica de la deformación de este modelo más general. Al igual que en aquella expresión, $r_1 = \xi / \mathbb{C}_1$ representa el tiempo de retardo.

La deformación total resulta entonces,

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^i(t) = \frac{\sigma(t)}{\mathbb{C}_0} + \int_{-\infty}^t \frac{1}{\xi} e^{-(t-s)/r_1} \cdot \sigma(s) ds & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{B6.11})$$

Definiendo ahora la *función uniaxial de fluencia* $J(t)$ como,

$$J(t) = \frac{1}{\mathbb{C}_0} + \frac{1}{\mathbb{C}_1} \left[1 - e^{-t/r_1} \right] \quad (\text{B6.12})$$

Y realizando una integración por partes en la ecuación (B6.11), suponiendo además que $\sigma(-\infty) = 0$, la deformación total puede escribirse como,

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-s) \cdot \frac{d\sigma(s)}{ds} ds & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{B6.13})$$

En el caso particular que la tensión impuesta $\sigma(t)$ cumpla con la siguiente simplificación (ver Figura B6.4),

$$\begin{cases} \sigma(t) = 0 & \forall t < \tau_0 = 0 \\ \sigma(t) = \sigma_0 & \forall t \geq \tau_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{B6.14})$$

la expresión de la deformación inelástica (B6.10) y la total se reduce a la siguiente forma simple,

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^i(t) = \frac{\sigma_0}{\mathbb{C}_0} + \underbrace{\frac{1}{\mathbb{C}_1} (1 - e^{-t/r_1}) \cdot \sigma_0}_{\varepsilon^i(t)} & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{B6.15})$$

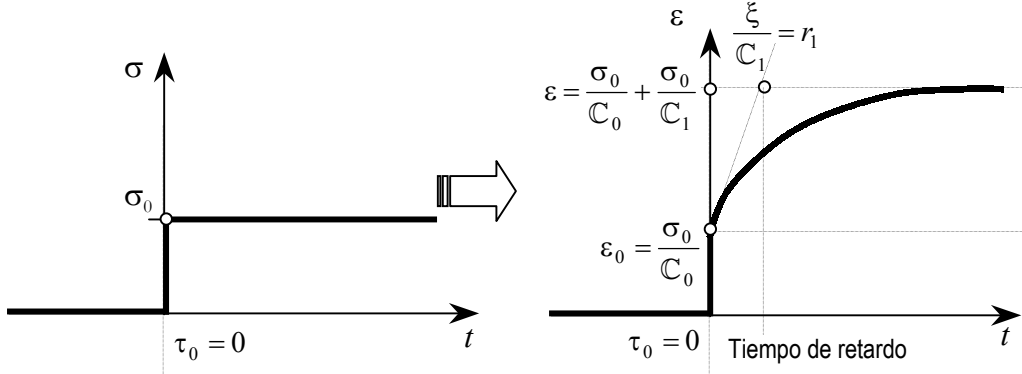


Figura B6.4 – Respuesta del modelo de Kelvin Generalizado para una tensión impuesta constante.

B6.2.4 Modelo múltiple de Kelvin generalizado.

Este modelo surge de una combinación de modelos de Kelvin generalizados (ver Figura B6.5), y permite un mejor control del comportamiento viscoso del material. En este modelo, la deformación inelástica total ε^i resulta de la suma de las deformaciones inelásticas ε_α^i que ocurren en cada sub-modelo “ α ” de los “ n ” modelos de Kelvin,

$$\begin{cases} \varepsilon^i(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \varepsilon^i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n-Kelvin} \varepsilon_\alpha^i(t) & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (B6.16)$$

Por analogía con las expresiones obtenidas previamente, en particular con la (B6.9), se tiene la variación temporal de la deformación inelástica para un sub-modelo α cualquiera. Esto es,

$$\sigma(t) = C_0 \varepsilon^e(t) = C_\alpha \varepsilon_\alpha^i(t) + \xi_\alpha \dot{\varepsilon}_\alpha^i(t) \Rightarrow \dot{\varepsilon}_\alpha^i(t) = \frac{\sigma(t) - C_\alpha \varepsilon_\alpha^i(t)}{\xi_\alpha} \quad (B6.17)$$

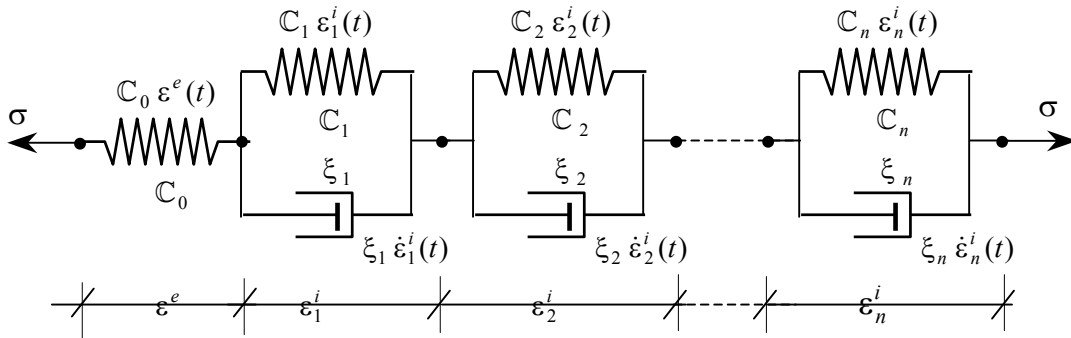


Figura B6.5 – Representación simplificada del modelo múltiple de Kelvin generalizado.

Resolviendo esta ecuación diferencial resulta la expresión de la deformación inelástica de un sub-modelo α cualquiera,

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha}^i(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \varepsilon_{\alpha}^i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\xi_{\alpha}} e^{-(t-s)/r_{\alpha}} \cdot \sigma(s) ds & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (B6.18)$$

Así, la deformación total tiene la siguiente expresión,

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \sum_{\alpha=1}^{n-Kelvin} \varepsilon_{\alpha}^i(t) = \frac{\sigma(t)}{\mathbb{C}_0} + \int_{-\infty}^t \left[\sum_{\alpha=1}^{n-Kelvin} \frac{1}{\xi_{\alpha}} e^{-(t-s)/r_{\alpha}} \right] \cdot \sigma(s) ds & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (B6.19)$$

Definiendo ahora la *función uniaxial de fluencia* $J(t)$ para este problema general, como

$$J(t) = \frac{1}{\mathbb{C}_0} + \sum_{\alpha=1}^{n-Kelvin} \frac{1}{\mathbb{C}_{\alpha}} \left[1 - e^{-t/r_{\alpha}} \right] \quad (B6.20)$$

y realizando una integración por partes en la ecuación (B6.19), suponiendo que $\sigma(-\infty) = 0$, la deformación total puede escribirse como,

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-s) \cdot \frac{d\sigma(s)}{ds} ds & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (B6.21)$$

Puede verse que esta ecuación coincide con la forma general de la ecuación (B6.13), pero que en este caso la función de fluencia $J(t)$ es distinta a aquella. En el caso particular que la tensión impuesta $\sigma(t)$ cumpla con la siguiente simplificación,

$$\begin{cases} \sigma(t) = 0 & \forall t < \tau_0 = 0 \\ \sigma(t) = \sigma_0 & \forall t \geq \tau_0 = 0 \end{cases} \quad (B6.22)$$

se obtiene la siguiente forma simplificada para la deformación total,

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \varepsilon(t) = J(t) \sigma_0 & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (B6.23)$$

B6.2.5 Modelo generalizado de Maxwell.

Al igual que el modelo generalizado de Kelvin antes descrito, este modelo presenta otra forma general de resumir en una única formulación las características de los modelos simplificados de Kelvin y Maxwell previamente presentados. Así pues, este modelo tiende al modelo de Kelvin básico cuando $\mathbb{C}_1 \rightarrow \infty$ y se transforma en el modelo de Maxwell básico cuando $\mathbb{C}_{\infty} \rightarrow 0$ (ver Figura B6.3). Al igual que el modelo de Kelvin generalizado, esta formulación es útil y apropiada para representar distintos tipos de comportamientos viscosos de los sólidos. La formulación inversa a esta que se presentará cae dentro de los modelos tipo Kelvin, aunque no es exactamente el que se acaba de presentar en el apartado B6.2.3.

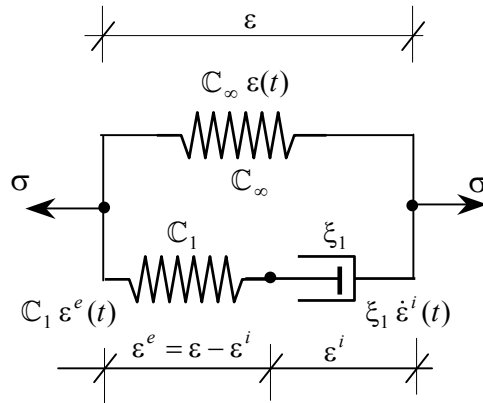


Figura B6.6 – Modelo de Maxwell Generalizado.

El estado tensional en un instante cualquiera de tiempo se expresa como

$$\begin{cases} \sigma^\infty(t) = C_\infty \varepsilon(t) \\ \sigma^i(t) = C_1 (\varepsilon(t) - \varepsilon^i(t)) = \xi_1 \dot{\varepsilon}^i(t) \end{cases} \quad (B6.24)$$

La condición de equilibrio requiere el cumplimiento de la siguiente relación,

$$\sigma(t) = \sigma^i(t) + \sigma^\infty(t) = C_1 (\varepsilon(t) - \varepsilon^i(t)) + C_\infty \varepsilon(t) = \xi_1 \dot{\varepsilon}^i(t) + C_\infty \varepsilon(t) \quad (B6.25)$$

Denominando $C_0 = C_\infty + C_1$ y operando algebraicamente en la última ecuación, resulta la ecuación de la tensión, cuya expresión es

$$\sigma(t) = C_0 \varepsilon(t) - C_1 \varepsilon^i(t) \quad (B6.26)$$

Mediante la utilización de la segunda ecuación de las (B6.24), se obtiene la siguiente ecuación diferencial en la deformación inelástica,

$$C_1 \varepsilon(t) = C_1 \varepsilon^i(t) + \xi_1 \dot{\varepsilon}^i(t) \Rightarrow \frac{\varepsilon(t)}{r_1} = \frac{\varepsilon^i(t)}{r_1} + \dot{\varepsilon}^i(t) \quad (B6.27)$$

Imponiendo una deformación $\varepsilon(t)$, a partir de $t \geq \tau_0$, esta última ecuación diferencial puede ser resuelta para $\varepsilon^i(t)$ como,

$$\begin{cases} \varepsilon^i(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \varepsilon^i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{r_1} e^{-(t-s)/r_1} \cdot \varepsilon(s) ds & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (B6.28)$$

Sustituyendo esta ecuación en la (B6.26), resulta la siguiente expresión para la tensión

$$\begin{cases} \sigma(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \sigma(t) = C_0 \varepsilon(t) - \frac{C_1}{r_1} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/r_1} \cdot \varepsilon(s) ds & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (B6.29)$$

Definiendo ahora la *función uniaxial de relajación* $G(t)$, como la inversa de la función uniaxial de fluencia,

$$G(t) = [J(t)]^{-1} = \mathbb{C}_\infty + \mathbb{C}_1 e^{-t/r_1} \quad (\text{B6.30})$$

Considerando la inversión de la función de relajación para este modelo particular, se obtiene la siguiente función de fluencia uniaxial,

$$J(t) = \frac{1}{\mathbb{C}_\infty} \left[1 - \frac{\mathbb{C}_1}{\mathbb{C}_0} e^{-\left(\frac{\mathbb{C}_\infty}{r_1 \mathbb{C}_0}\right)t} \right] \quad (\text{B6.31})$$

Y realizando una integración por partes en la ecuación (B6.29), la tensión puede escribirse en la siguiente forma compacta,

$$\begin{cases} \sigma(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \cdot \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{B6.32})$$

La tensión así expresada es la función inversa de la deformación obtenida en la ecuación³ (B6.13), siempre que $G(t)$ sea doblemente diferenciable y que $G(t=0) \neq 0$. Esto es,

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \cdot \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds \Rightarrow \varepsilon(t) = [\sigma(t)]^{-1} = \int_{-\infty}^t J(t-s) \cdot \frac{d\sigma(s)}{ds} ds \quad (\text{B6.33})$$

En el caso particular que la deformación impuesta $\varepsilon(t)$, cumpla con la siguiente simplificación (ver Figura B6.4),

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = 0 & \forall t < \tau_0 = 0 \\ \varepsilon(t) = \varepsilon_0 & \forall t \geq \tau_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{B6.34})$$

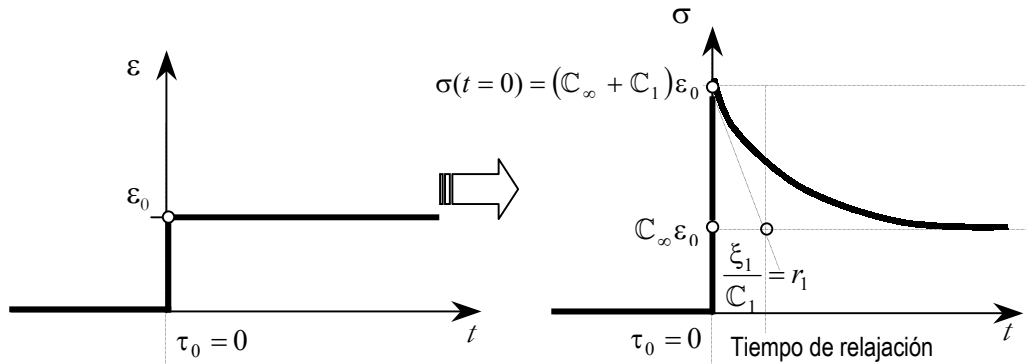


Figura B6.7 – Respuesta del modelo de Maxwell Generalizado para una deformación impuesta constante.

la expresión de la tensión (B6.11) se reduce a la siguiente forma simple,

$$\begin{cases} \sigma(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \sigma(t) = \left(\mathbb{C}_\infty + \mathbb{C}_1 e^{-t/r_1} \right) \varepsilon_0 & \forall \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{B6.35})$$

³ Y. C. Fung (1965). Foundations of solid mechanics. Prentice-Hall international series in dynamics.

B6.2.6 Modelo múltiple de Maxwell generalizado.

Este modelo es el resultado de la participación conjunta de varios modelos de Maxwell generalizados (ver apartado B6.2.5). Al igual que el modelo de Kelvin generalizado, descrito anteriormente, esta forma general de formular el modelo de Maxwell permite un mejor control del comportamiento viscoso del material. En este modelo, la tensión total resulta de la composición del aporte de cada cadena de Maxwell más la tensión en el muelle que da la respuesta en tiempo infinito, o también siguiendo los pasos del apartado anterior para una simple cadena (ecuación (B6.26)). Esto es,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \sigma(t) = \mathbb{C}_\infty \varepsilon(t) + \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \mathbb{C}_\alpha [\varepsilon(t) - \varepsilon_\alpha^i(t)] = \\ = \mathbb{C}_0 \varepsilon(t) - \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \mathbb{C}_\alpha \varepsilon_\alpha^i(t) & \forall \tau \geq \tau_0 \end{array} \right. \quad (B6.36)$$

Siendo $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_\infty + \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \mathbb{C}_\alpha$. Por otro lado la deformación ε es única para todas las cadenas de Maxwell y la deformación inelástica en la cadena α^{esima} es ε_α^i , cuya expresión resulta de la resolución de la siguiente ecuación diferencial (ver ecuación (B6.27)) que deriva del equilibrio en cada cadena de Maxwell,

$$\mathbb{C}_\alpha \varepsilon(t) = \mathbb{C}_\alpha \varepsilon^i(t) + \xi_\alpha \dot{\varepsilon}_\alpha^i(t) \Rightarrow \frac{\varepsilon(t)}{r_\alpha} = \frac{\varepsilon_\alpha^i(t)}{r_\alpha} + \dot{\varepsilon}_\alpha^i(t) \quad (B6.37)$$

siendo $r_\alpha = \xi_\alpha / \mathbb{C}_\alpha$ el tiempo de relajación en la cadena α^{esima} . La solución de esta última ecuación diferencial conduce a la siguiente expresión para la deformación inelástica,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_\alpha^i(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \varepsilon_\alpha^i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{r_\alpha} e^{-(t-s)/r_\alpha} \cdot \varepsilon(s) ds & \forall \tau \geq \tau_0 \end{array} \right. \quad (B6.38)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (B6.36), resulta la siguiente expresión para la tensión

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(t) = 0 & \forall \tau < \tau_0 \\ \sigma(t) = \mathbb{C}_0 \varepsilon(t) - \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \mathbb{C}_\alpha \varepsilon_\alpha^i(t) = \\ = \mathbb{C}_0 \varepsilon(t) - \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \frac{\mathbb{C}_\alpha}{r_\alpha} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/r_\alpha} \cdot \varepsilon(s) ds & \forall \tau \geq \tau_0 \end{array} \right. \quad (B6.39)$$

Resultando la siguiente *función uniaxial de relajación* $G(t)$,

$$G(t) = [J(t)]^{-1} = \mathbb{C}_\infty + \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \mathbb{C}_\alpha e^{-t/r_\alpha} \quad (B6.40)$$

Y de aquí que la tensión puede escribirse en la siguiente forma compacta,

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \cdot \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds \quad (\text{B6.41})$$

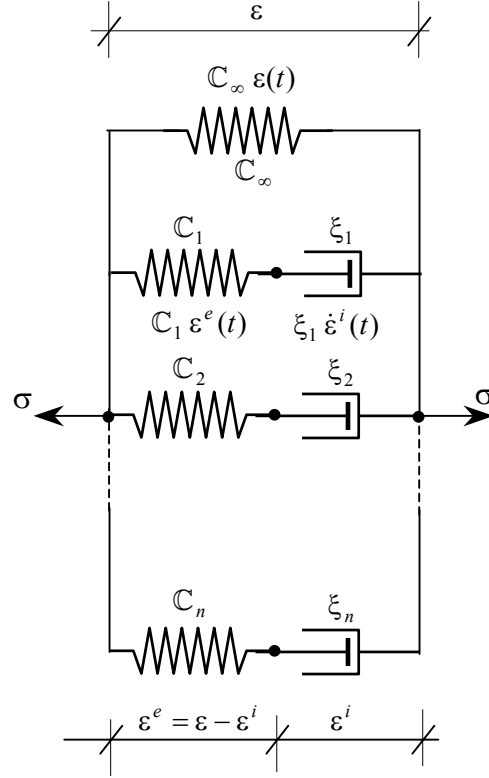


Figura B6.8 – Modelo Múltiple de Maxwell Generalizado.

Al igual que en los modelos previamente presentados, se tiene un caso particular de respuesta si se impone una deformación, $\varepsilon(t)$ que cumpla con la siguiente simplificación,

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = 0 & \forall \quad t < \tau_0 = 0 \\ \varepsilon(t) = \varepsilon_0 & \forall \quad t \geq \tau_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{B6.42})$$

De donde se obtiene la siguiente forma simplificada para la tensión total,

$$\begin{cases} \sigma(t) = 0 & \forall \quad \tau < \tau_0 \\ \sigma(t) = G(t) \varepsilon_0 & \forall \quad \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{B6.43})$$

B6.2.6.1 Evaluación de la disipación.

Este modelo resulta muy utilizado para la representación del comportamiento viscoelástico de diversos materiales y es por ello que en este apartado presentará un breve estudio sobre la termodinámica del mismo y particularmente sobre su disipación.

La energía libre (ver Capítulo 2), puede definirse como,

$$\Psi(\varepsilon, \varepsilon_\alpha^i, t) = \frac{1}{2} C_\infty \varepsilon(t)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n-\text{Maxw}} C_\alpha [\varepsilon(t) - \varepsilon_\alpha^i(t)]^2 \quad (\text{B6.44})$$

y de aquí, luego de aplicar la deducción de Coleman^{4,5} (ecuaciones B2.48 y B2.55), resulta la siguiente ecuación constitutiva secante,

$$\sigma(t) = \frac{\partial \Psi(\varepsilon, \varepsilon_\alpha^i, t)}{\partial \varepsilon} = \mathbb{C}_\infty \varepsilon(t) + \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \mathbb{C}_\alpha [\varepsilon(t) - \varepsilon_\alpha^i(t)] \equiv \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \xi_\alpha \dot{\varepsilon}_\alpha^i(t) \quad (B6.45)$$

y también la disipación de energía,

$$\Xi_m(t) = \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \sigma_\alpha(t) \cdot \varepsilon_\alpha^i(t) \equiv \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \xi_\alpha [\dot{\varepsilon}_\alpha^i(t)]^2 \geq 0 \quad (B6.46)$$

Esta misma expresión puede obtenerse por otro camino, también a partir de la definición de la propia disipación (Capítulo 2, ecuación B2.51, para $\dot{\theta} = cte$). Esto es,

$$\begin{aligned} \Xi_m &= \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) - \dot{\Psi}(t) = \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon}(t) - \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_\alpha^i} \dot{\varepsilon}_\alpha^i(t) \\ &= \underbrace{\left[\sigma(t) - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right]}_0 \dot{\varepsilon}(t) - \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_\alpha^i} \dot{\varepsilon}_\alpha^i(t) \geq 0 \\ \Xi_m &= - \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_\alpha^i} \dot{\varepsilon}_\alpha^i(t) = - \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} -\mathbb{C}_\alpha (\varepsilon(t) - \varepsilon_\alpha^i(t)) \dot{\varepsilon}_\alpha^i(t) = \\ \Xi_m &= \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \sigma_\alpha(t) \dot{\varepsilon}_\alpha^i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n-Maxw} \xi_\alpha [\dot{\varepsilon}_\alpha^i(t)]^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (B6.47)$$

Como puede verse, la expresión de la disipación así obtenida es la misma que la expresada por la ecuación (B6.46).

B6.3 Generalización multiaxial de las leyes constitutivas viscoelásticas.

B6.3.1 Forma multiaxial de los modelos viscoelásticos.

Existe un camino riguroso para escribir la generalización de cualquier ley constitutiva viscoelástica que haya sido obtenido a través de conceptos fenomenológico basados en la analogía “muelle-amortiguador”. Mas propiamente puede decirse que las leyes formuladas en el apartado anterior, B6.2, pueden perfectamente presentarse en forma multiaxial. Esto se consigue utilizando la *función de fluencia* $J_{ijkl}(t) = \mathbf{J}(t)$ y de *relajación* $G_{ijkl}(t) = \mathbf{G}(t)$, ambas definidas como un tensor de cuarto orden. Esto es,

$$\begin{cases} J_{ijkl}(t) = J^V(t) (\delta_{ij} \delta_{kl}) + J^D(t) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ G_{ijkl}(t) = G^V(t) (\delta_{ij} \delta_{kl}) + G^D(t) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{cases} \quad (B6.48)$$

⁴ Malvern, L. (1969). *Introduction to the mechanics of continuous medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

⁵ Lubliner, J. (1990). *Plasticity theory*. MacMillan, New York.

Donde δ_{ij} es el “delta de Kronecker” y J^V, J^D, G^V, G^D son funciones escalares que definen el comportamiento viscoso volumétrico (índice V) y desviador (índice D), del material. En el caso de materiales isótropos, la definición de los tensores de fluencia y relajación son análogos al tensor de elasticidad y por ello es que puede expresarse la definición de los mismos descompuestos en una parte desviadora y una volumétrica.

Definidas las funciones (B6.48), la ecuación constitutiva para cualquier modelo viscoelástico, ya sea formulado en tensiones o deformaciones, pueden escribirse como,

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-s) \cdot \frac{d\varepsilon_{kl}(s)}{ds} ds & : \text{Modelo viscoelástico de relajación} \\ \varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J_{ijkl}(t-s) \cdot \frac{d\sigma_{kl}(s)}{ds} ds & : \text{Modelo viscoelástico de fluencia} \end{cases} \quad (\text{B6.49})$$

Como puede verse, esta definición es muy general, pero es poco práctica, puesto que determinar las funciones de fluencia y relajación para un material afectado por fenómenos viscoelásticos no es una tarea fácil. No obstante esto que se acaba de decir, existe un camino alternativo basado en la experimentación para la definición de las funciones de fluencia y relajación. A continuación y a modo de ejemplo se introduce la forma que establece el “Comité Europeo del Hormigón” (CEB-1978) y la “Federación Internacional del Pretensado” (FIP-1978), para función de relajación,

$$J_{ijkl}(t) = 0.4\beta_d(t-t_c) [\mathbb{C}_{ijkl}^h]^{-1} \quad (\text{B6.50})$$

Siendo t_c el tiempo inicial de referencia, $\mathbb{C}_{ijkl}^h$ el tensor constitutivo del hormigón y β_d una función que tiene en cuenta los efectos reológicos del material. La forma de esta última es como se muestra en la Figura B6.9.

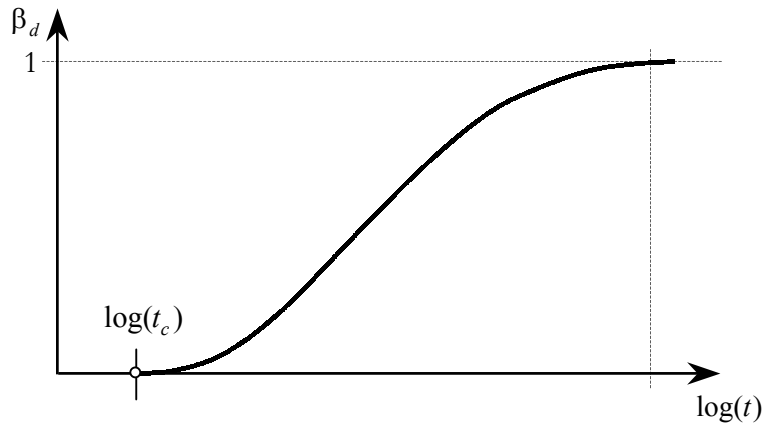


Figura B6.9 – Función de respuesta en el tiempo para el hormigón, según (CEB-FIP).

Desafortunadamente esta no es una función exponencial que haga fácil la resolución de la integral (B6.49), siendo inevitable resolverlas a través de una integral de convolución.

De la ecuación (B6.50) se deduce que siempre es posible aproximar el problema multiaxial mediante una función tensorial de fluencia, o de relajación, que dependa de una función escalar. En este sentido se puede practicar otra aproximación basada en la suposición de un material isótropo, cuyo coeficiente de Poisson $\nu \rightarrow 0$. En este caso es posibles definir una función de deformación de fluencia única para todas las direcciones.

De esta forma puede formularse la deformación en el tiempo multiaxial, la siguiente aproximación,

$$\varepsilon_{ij}(t) \cong \left\{ \mathbb{C}_{ijkl}^{-1} \cdot \mathbb{C} \right\} \int_{-\infty}^t J(t-s) \cdot \frac{d\sigma_{kl}(s)}{ds} ds \quad (\text{B6.51})$$

donde $\mathbb{C}$ es el módulo elástico o de Young. La tensión en el tiempo resulta entonces,

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) = \mathbb{C} \int_{-\infty}^t J(t-s) \cdot \frac{d\sigma_{ij}(s)}{ds} ds \quad (\text{B6.52})$$

B6.3.2 Resolución numérica de la integral y algoritmia.

Para obtener la solución de los problemas viscoelásticos, normalmente es necesario resolver integrales de convolución del tipo de las ecuaciones (B6.49). Si en particular, las funciones $J_{ijkl}(t)$ o $G_{ijkl}(t)$ cumplen con la propiedad del semigrupo⁶, es decir, las funciones que están en el integrando cumplen con la condición,

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b) \quad (\text{B6.53})$$

se puede evitar la integral de convolución, haciendo una integral en el tiempo de la siguiente forma,

$$I(t) = \int_{-\infty}^t f(t-s) \cdot g(s) ds = I(t-\Delta t) + \int_{t-\Delta t}^t f(t-s) \cdot g(s) ds \quad (\text{B6.54})$$

En cada paso se utiliza la integral del paso de tiempo anterior $I(t-\Delta t)$ y sólo se integra durante el intervalo de tiempo actual Δt .

Las funciones exponenciales que aparecen en los modelos viscoelásticos, basados en analogías muelle-amortiguador, dan como resultado funciones de relajación y fluencia exponenciales que cumplen con la propiedad del semigrupo. No es este el caso de los materiales reales, como el hormigón cuya función es como aquella expresada en la ecuación (B6.50), tal que si se quiere utilizar esta propiedad para evitar la convolución, es necesario admitir una simplificación.

Caso Multiaxial del Modelo Generalizado de Kelvin.

A modo de ejemplo, se presenta a continuación la aproximación al caso multiaxial de la deformación (B6.11), obtenida para el modelo de **Kelvin Generalizado** (B6.2.3). Esta aproximación se escribe considerando que para el tiempo $t + \Delta t$, la función a integrar vale $f(t + \Delta t - s) = \mathbb{C}_{ijkl}^{-1} (\mathbb{C}/\xi) e^{-(t+\Delta t-s)/r_1}$, resultando de aquí la siguiente expresión para la deformación,

$$\varepsilon_{ij}(t + \Delta t) = \underbrace{\mathbb{C}_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}(t + \Delta t)}_{\varepsilon_{ij}^e(t + \Delta t)} + \underbrace{\mathbb{C}_{ijkl}^{-1} \frac{\mathbb{C}}{\xi} \int_{-\infty}^{t+\Delta t} e^{-(t+\Delta t-s)/r_1} \cdot \sigma_{kl}(s) ds}_{\varepsilon_{ij}^i(t + \Delta t)} \quad (\text{B6.55})$$

⁶ J. C. Simo, and T.J.R Hughes, (1998). *Elastoplasticity and Viscoplasticity. Computational Aspects*. Springer Verlag.

Tal que la integral de convolución que define la deformación inelástica, puede ahora resolverse como,

$$\varepsilon_{ij}^i(t + \Delta t) = \varepsilon_{ij}^i(t) e^{-(\Delta t)/r_1} + \mathbb{C}_{ijkl}^{-1} \frac{\mathbb{C}}{\xi} \int_t^{t+\Delta t} e^{-(t+\Delta t-s)/r_1} \cdot \sigma_{kl}(s) ds \quad (\text{B6.56})$$

Aproximando la integral mediante la regla de Simpson, puede escribirse para incrementos de tiempo muy pequeños, la siguiente expresión,

$$\varepsilon_{ij}^i(t + \Delta t) \cong \varepsilon_{ij}^i(t) e^{-(\Delta t)/r_1} + \mathbb{C}_{ijkl}^{-1} \cdot \frac{\mathbb{C}}{\xi} e^{-(\Delta t)/r_1} \cdot \sigma_{kl}(t + \Delta t) \cdot \Delta t \quad (\text{B6.57})$$

Un posible algoritmo para resolver este problema es el que se detalla en la Tabla 6.1.

1. Inicialización	${}^0[\varepsilon_{ij}^i]^{t+\Delta t} \equiv [\varepsilon_{ij}^i]^t$ ${}^0[\sigma_{ij}^i]^{t+\Delta t} \equiv [\sigma_{ij}^i]^t$
2. Definición del sub-incremento de tiempo	$\delta t = \frac{\Delta t}{m} \quad ; \quad \text{Contador de paso: } \alpha = 1$
3. Inicio del proceso de sub-incrementación y cálculo de las deformaciones inelásticas	${}^\alpha[\varepsilon_{ij}^i]^{t+\Delta t} \cong {}^{\alpha-1}[\varepsilon_{ij}^i]^{t+\Delta t} e^{-(\delta t)/r_1} + \mathbb{C}_{ijkl}^{-1} \cdot \frac{\mathbb{C}}{\xi} e^{-(\delta t)/r_1} \cdot \underbrace{[\sigma_{kl}]^{t+(\alpha-1)\delta t}}_{{}^{\alpha-1}[\sigma_{kl}]^t}$
4. Cálculo de la tensión	${}^\alpha[\sigma_{ij}^i]^{t+\Delta t} \cong \mathbb{C}_{ijkl} \cdot \left[[\varepsilon_{ij}^i]^{t+\Delta t} - {}^\alpha[\varepsilon_{ij}^i]^{t+\Delta t} \right]$ Sí $\alpha \leq m$ Entonces $\alpha = \alpha + 1$, volver a 3.
5. Fin de la integración y prosigue el cálculo	

Tabla 6.1 – Algoritmo para obtener la tensión el modelo generalizado de Kelvin.

Caso Multiaxial del Modelo Generalizado de Maxwell.

Otro caso que resulta adecuado tratar es el algoritmo correspondiente al modelo de **Generalizado de Maxwell** (B6.2.5). En éste modelo, la expresión multiaxial para la tensión, ecuación (B6.29), se escribe en el tiempo $t + \Delta t$ mediante la siguiente aproximación,

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = \mathbb{C}_{ijkl} \left[\varepsilon_{ij}(t + \Delta t) - \frac{\mathbb{C}_1}{\mathbb{C}_0 \xi} \int_{-\infty}^{t+\Delta t} e^{-(t+\Delta t-s)/r_1} \cdot \varepsilon_{kl}(s) ds \right] \quad (\text{B6.58})$$

En la cual las variables que participan son las ya definidas para el problema uniaxial, apartado B6.2.5. La solución de esta integral puede llevarse a cabo sin necesidad de hacer una convolución, para ello se la rescribe como,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t + \Delta t) = & \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{ij}(t + \Delta t) - \left[\mathbb{C}_{ijkl} \frac{\mathbb{C}_1}{\mathbb{C}_0 \xi} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/r_1} \cdot \varepsilon_{kl}(s) ds \right] - \\ & - \mathbb{C}_{ijkl} \frac{\mathbb{C}_1}{\mathbb{C}_0 \xi} \int_t^{t+\Delta t} e^{-(t+\Delta t-s)/r_1} \cdot \varepsilon_{kl}(s) ds \end{aligned} \quad (\text{B6.59})$$

Luego de integrar por la regla del trapecio el tercer término y reordenar las expresiones, se escribe la tensión como,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t + \Delta t) = & \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{ij}(t + \Delta t) - \mathbb{C}_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}(t) \cdot e^{-(\Delta t)/r_1} - \sigma_{ij}(t) \cdot e^{-(\Delta t)/r_1} - \\ & - \mathbb{C}_{ijkl} \frac{\mathbb{C}_1}{\mathbb{C}_0 \xi} \left[e^{-(\Delta t)/r_1} \cdot \varepsilon_{kl}(t) - \varepsilon_{kl}(t + \Delta t) \right] \cdot \frac{\Delta t}{2} \\ \sigma_{ij}(t + \Delta t) = & -\mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) \cdot e^{-(\Delta t)/r_1} \left[1 + \frac{\mathbb{C}_1}{\mathbb{C}_0 \xi} \frac{\Delta t}{2} \right] + \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(t + \Delta t) \cdot \left[1 - \frac{\mathbb{C}_1}{\mathbb{C}_0 \xi} \frac{\Delta t}{2} \right] + \\ & + \sigma(t) \cdot e^{-(\Delta t)/r_1} \end{aligned} \quad (\text{B6.60})$$

Un posible algoritmo para resolver este problema es el que se muestra en la Tabla 6.2.

1. Obtención de la deformación

$$[\varepsilon_{ij}]^{t+\Delta t}$$

2. Integración de la tensión,

$$[\sigma_{ij}]^{t+\Delta t} = [\sigma_{ij}]^t \cdot e^{-(\Delta t)/r_1} - \mathbb{C}_{ijkl} [\varepsilon_{kl}]^t \cdot e^{-(\Delta t)/r_1} \left[1 + \frac{\mathbb{C}_1}{\mathbb{C}_0 \xi} \frac{\Delta t}{2} \right] + \mathbb{C}_{ijkl} [\varepsilon_{kl}]^{t+\Delta t} \cdot \left[1 - \frac{\mathbb{C}_1}{\mathbb{C}_0 \xi} \frac{\Delta t}{2} \right]$$

Tabla 6.2 – Algoritmo para obtener la tensión el modelo generalizado de Maxwell.

Si se impone una fuerza que de lugar a una tensión constante, este modelo representa correctamente el problema de fluencia en el tiempo, y si se impone un desplazamiento que de lugar a una deformación constante se recupera el comportamiento por relajación.

B6.4 El modelo de Kelvin en los problemas dinámicos.

La viscoelasticidad es la que induce al fenómeno del amortiguamiento durante el comportamiento dinámico de la estructura. Estos modelos viscoelásticos permiten incorporar el concepto de amortiguamiento estructural de una manera racional, fundamentado en las leyes de la mecánica. De esta forma, el amortiguamiento depende de las propiedades del propio material sin necesidad de recurrir a formulaciones artificiales del tipo de la introducida por Rayleigh⁷.

⁷ R. Clough and J. Penzien (1977). Dynamics of Structures. Mc Graw-Hill - N. York.

En lo que sigue se presenta la influencia del modelo multiaxial de Kelvin (B6.2.2), cuya formulación es sencilla y apropiada para representar el amortiguamiento estructural y a la vez permite establecer una comparación con el ya mencionado concepto de amortiguamiento de Rayleigh.

Siguiendo la formulación del modelo presentado en el apartado (B6.2.1), puede sintetizarse su ecuación constitutiva mediante las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sigma^e(t) + \sigma^{vis}(t) = \mathbb{C} \varepsilon(t) + \xi \dot{\varepsilon}(t) = \mathbb{C} \left[\varepsilon(t) + \frac{\xi}{\mathbb{C}} \dot{\varepsilon}(t) \right] \\ \varepsilon(t) &= \varepsilon^e(t) = \varepsilon^{vis}(t) = \frac{\sigma(t)}{\mathbb{C}} - \frac{\xi}{\mathbb{C}} \dot{\varepsilon}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\xi} e^{-(t-s)/r_1} \cdot \sigma(s) ds\end{aligned}\quad (B6.61)$$

Donde σ^e y σ^{vis} representan la parte elástica y viscosa de la tensión respectivamente, $\varepsilon^\infty = \mathbb{C}^{-1} \sigma(t)$ la deformación estacionaria (en tiempo infinito), $\mathbb{C}$ el módulo de Young y ξ la viscosidad. La extensión al caso multiaxial, utilizando la aproximación presentada en el apartado B6.3, conduce a la siguiente expresión,

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^e(t) + \sigma_{ij}^{vis}(t) = \mathbb{C}_{ijkl} \left[\varepsilon_{kl}(t) + \frac{\xi}{\mathbb{C}} \dot{\varepsilon}_{kl}(t) \right] \quad (B6.62)$$

Siendo $r = \frac{\xi}{\mathbb{C}}$ el tiempo de retardo ya definido en apartados previos.

La resolución de este problema en dinámica, exige que se obtenga el campo de desplazamientos y velocidades a partir de la solución de la ecuación del movimiento, y para ello puede utilizarse el método de Newmark (ver capítulo B 3). Es decir, la algoritmia es muy simple y se resume en el siguiente cuadro,

1. Obtención de la deformación y velocidad de deformación a partir de los campos de desplazamientos y velocidades obtenidos a partir del procedimiento de integración de la ecuación del movimiento. En este caso particular se utiliza Newmark,

$$\begin{aligned}\left[\varepsilon_{ij} \right]^{t+\Delta t} &= \nabla_i^s \left[u_j \right]^{t+\Delta t} \\ \left[\dot{\varepsilon}_{ij} \right]^{t+\Delta t} &= \nabla_i^s \left[\dot{u}_j \right]^{t+\Delta t}\end{aligned}$$

2. Integración directa de la tensión,

$$\left[\sigma_{ij} \right]^{t+\Delta t} = \mathbb{C}_{ijkl} \left\{ \left[\varepsilon_{kl} \right]^{t+\Delta t} + \frac{\xi}{\mathbb{C}} \left[\dot{\varepsilon}_{kl} \right]^{t+\Delta t} \right\}$$

Tabla 6.3 – Algoritmo para obtener la tensión en problemas dinámicos a través del modelo de Kelvin .

B6.4.1 Disipación del modelo de Kelvin.

En el modelo de Kelvin generalizado al caso multiaxial, la energía libre puede escribirse en la siguiente forma cuadrática:

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (B6.63)$$

Obteniéndose a partir de la segunda ley de la termodinámica (capítulo 2), la siguiente expresión para la disipación por unidad de volumen,

$$\Xi_m = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\Psi} = (\sigma_{ij} - \mathbb{C}_{ijkl} \epsilon_{kl}) \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{ij}^{vis} \dot{\epsilon}_{ij} = \xi \dot{\epsilon}_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (B6.64)$$

y la disipación en todo el volumen, en el tiempo t , resulta

$$E_{dis} = \int_0^t \left(\int_V \Xi_m dV \right) dt \quad (B6.65)$$

El campo de velocidades de deformación resulta de la ecuación $\dot{\epsilon}_{ij} = \nabla_i^s \dot{u}_j = \nabla_i^s N_{jk} \dot{U}_k$, tal que la velocidad se obtiene directamente de la solución por Newmark, de la ecuación diferencial del equilibrio dinámico (B2.68) o (B2.72) para el sólido discreto.

B6.4.2 Ecuación de equilibrio dinámico para el modelo de Kelvin.

Al escribir la ecuación de equilibrio dinámico en función del estado tensional de Kelvin, resulta en forma natural el termino de las fuerzas de amortiguación.

Considerando la ecuación de equilibrio dinámico discretizada para un dominio elemental (B2.72) y luego extendiendo su formulación a todo el dominio Ω , ensamblaje, resulta la ya formulada ecuación (B3.1),

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta f_k = M_{kj} \ddot{U}_j(t + \Delta t) + f_k^{\text{int}}(\dot{U}, U, t + \Delta t) - f_k^{\text{ext}}(t + \Delta t) \quad \in \Omega \\ 0 &= \Delta \mathbf{f} = \mathbb{M} \ddot{U}(t + \Delta t) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\dot{U}, U, t + \Delta t) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t + \Delta t) \quad \in \Omega \\ 0 &= \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\int_{V^e} \rho N_{ki} N_{ij} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \ddot{U}_j \Big|_{\Omega^e}^{t+\Delta t} + \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\int_{V^e} \sigma_{in} \nabla_i^s N_{nk} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} - \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\oint_{S^e} t_i N_{ik} dS + \int_{V^e} \rho b_i N_{ik} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \end{aligned}$$

Sustituyendo en esta última la ley constitutiva viscoelástica (B6.62),

$$\begin{aligned} \Delta f_k &= M_{kj} \ddot{U}_j(t + \Delta t) + \underbrace{\mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\int_{V^e} \sigma_{in} \nabla_i^s N_{nk} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t}}_{f_k^{\text{int}}} - f_k^{\text{ext}}(t + \Delta t) = 0 \\ \Delta f_k &= M_{kj} \ddot{U}_j(t + \Delta t) + \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\int_{V^e} \left[\mathbb{C}_{inrs} \epsilon_{rs} + \mathbb{C}_{inrs} \frac{\xi}{\mathbb{C}} \dot{\epsilon}_{rs} \right] \nabla_i^s N_{nk} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} - f_k^{\text{ext}}(t + \Delta t) = 0 \end{aligned} \quad (B6.66)$$

y luego operando sobre el término de las fuerzas internas, se tiene la siguiente forma conocida para la ecuación de equilibrio

$$\Delta f_k = M_{kj} \ddot{U}_j(t + \Delta t) + \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\int_{V^e} \left[\mathbb{C}_{inrs} \nabla_r^S N_{sj} U_j + \mathbb{C}_{inrs} \frac{\xi}{\mathbb{C}} \nabla_r^S N_{sj} \dot{U}_j \right] \nabla_i^S N_{nk} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} - f_k^{\text{ext}}(t + \Delta t) = 0 \quad (\text{B6.67})$$

$$0 = \Delta f_k = M_{kj} \ddot{U}_j(t + \Delta t) + \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\left\{ \int_{V^e} \left[\mathbb{C}_{inrs} \nabla_r^S N_{sj} \right] \nabla_i^S N_{nk} dV \right\} U_j \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} + \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\left\{ \int_{V^e} \left[\mathbb{C}_{inrs} \frac{\xi}{\mathbb{C}} \nabla_r^S N_{sj} \right] \nabla_i^S N_{nk} dV \right\} \dot{U}_j \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} - f_k^{\text{ext}}(t + \Delta t) = 0 \quad (\text{B6.68})$$

Que en forma compacta se escribe,

$$0 = \Delta f_k = M_{kj} \ddot{U}_j(t + \Delta t) + K_{kj} U_j(t + \Delta t) + D_{kj} \dot{U}_j(t + \Delta t) - f_k^{\text{ext}}(t + \Delta t) = 0 \quad (\text{B6.69})$$

$$0 = \Delta \mathbf{f} = \mathbb{M} \ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \mathbb{K} \mathbf{U}(t + \Delta t) + \mathbb{D} \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t + \Delta t)$$

En resumen, las fuerzas elásticas y viscosa valen respectivamente,

$$\mathbf{f}^{\text{elast}}(t + \Delta t) = \mathbb{K} \cdot \mathbf{U}(t + \Delta t) = \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\int_{V^e} \mathbf{B} : \mathbb{C} : \mathbf{B} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \cdot [\mathbf{U}]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \quad (\text{B6.70})$$

$$\mathbf{f}^{\text{vis}}(t + \Delta t) = \mathbb{D} \cdot \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) = \mathbf{A}_{\Omega^e} \left[\int_{V^e} \mathbf{B} : (r \mathbb{C}) : \mathbf{B} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \cdot [\dot{\mathbf{U}}]_{\Omega^e}^{t+\Delta t}$$

En ésta última puede verse que la matriz de amortiguamiento para el modelo de Kelvin es igual a la de rigidez inicial por el tiempo de retardo.

$$\mathbb{D} = r \mathbb{K} \quad (\text{B6.71})$$

Así, en el caso particular del amortiguamiento de Rayleigh con coeficientes $\alpha = 0$ y $\beta = r = \xi/\mathbb{C}$, conduce al amortiguamiento viscoso de Kelvin,

$$\mathbb{D} = \alpha \mathbb{M} + \beta \mathbb{K} \xrightarrow{\alpha=0, \beta=r} \mathbb{D} = r \mathbb{K} \quad (\text{B6.72})$$

De esto resulta que la utilización del amortiguamiento de Rayleigh en las condiciones citadas y el amortiguamiento viscoso de Kelvin, conducen a soluciones en desplazamientos, deformaciones, velocidades y aceleraciones idénticas,

$$\text{Kelvin con } r = \frac{\xi}{\mathbb{C}} \text{ en :} \quad 0 = \Delta \mathbf{f} = \mathbb{M} \ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t + \Delta t) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t + \Delta t)$$

$\equiv$

$$\text{Rayleigh con } \alpha = 0 \text{ y } \beta = r : \quad 0 = \Delta \mathbf{f} = \mathbb{M} \ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \mathbb{K} \mathbf{U}(t + \Delta t) + \mathbb{D} \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t + \Delta t)$$

B6.4.3 Consideración sobre la tensión. Rayleigh vs. Kelvin.

De lo que se ha visto en el apartado anterior se puede llegar a la conclusión de que la utilización del amortiguamiento de Rayleigh en la ecuación de equilibrio dinámico es exactamente igual que utilizar el modelo de Kelvin. Esto es verdad sólo en el campo de los desplazamientos y sus derivados, pero no en el campo de tensiones, pues en un caso se trabaja con una ley constitutiva elástica lineal y el amortiguamiento se lo añade como una fuerza exterior al sistema, y en el otro se tiene un modelo constitutivo viscoelástico. De esto resultan que ambos modelos dan tensiones distintas,

$$\sigma_{ij}(t) = \begin{cases} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) & \text{para el modelo elastico} \\ \mathbb{C}_{ijkl} \left[\varepsilon_{kl}(t) + \frac{\xi}{\mathbb{C}} \dot{\varepsilon}_{kl}(t) \right] & \text{para el modelo viscoelastico} \end{cases} \quad (\text{B6.73})$$

Aquí se puede observar que la diferencia entre las tensiones es más grande cuanto mayor es el amortiguamiento y/o la velocidad.

Por otro lado, esta diferencia cobra importancia cuando se trata de evaluar la resistencia de la estructura o cuando el material trabaja con un límite de resistencia acotado, que es el caso de la fractura, del daño o de la plasticidad.

B6.4.4 Consideración sobre la disipación. Rayleigh vs. Kelvin.

En este caso también se encuentran diferencias al utilizar una ecuación de equilibrio con amortiguamiento de Rayleigh u otra que incorpore en su fuerza interna un modelo constitutivo de Kelvin. La ecuación de equilibrio de potencias B2.32 ($P_d = P_{\text{int}} - \dot{K}$) se cumple en cualquiera de los casos. Sin embargo, en caso del amortiguamiento de Rayleigh hay que forzar la condición de equilibrio de potencia para garantizar su cumplimiento.

Disipación en el caso viscoelástico,

Post multiplicando por $\dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t)$ la ecuación de equilibrio dinámico (B2.72), expresada en el tiempo $t + \Delta t$, se obtiene

$$0 = \underbrace{\left[\mathbb{M} \ddot{\mathbf{U}} \right] \cdot \dot{\mathbf{U}}}_{\dot{K}} + \underbrace{\left[\mathbf{f}^{\text{elast}}(\mathbf{U}) + \mathbf{f}^{\text{vis}}(\dot{\mathbf{U}}) \right] \cdot \dot{\mathbf{U}}}_{P_d} - \underbrace{\left[\mathbf{f}^{\text{ext}} \right] \cdot \dot{\mathbf{U}}}_{P_{\text{int}}} \quad (\text{B6.74})$$

Donde la potencia deformativa se expresa sustituyendo en la anterior la ecuación (B6.70),

$$\begin{aligned} P_d = \left\{ \mathbf{f}^{\text{elast}}(\mathbf{U}) \right\} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \left\{ \mathbb{K} \cdot \mathbf{U} \right\} \cdot \dot{\mathbf{U}} &= \left\{ \mathbf{A} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B} : \mathbb{C} : \mathbf{B} dV \right]_{\Omega^e} \cdot [\mathbf{U}]_{\Omega^e} \right\} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \\ &+ \left\{ \mathbf{f}^{\text{vis}}(\dot{\mathbf{U}}) \right\} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \left\{ \mathbb{D} \cdot \dot{\mathbf{U}} \right\} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \left\{ \mathbf{A} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B} : (r \mathbb{C}) : \mathbf{B} dV \right]_{\Omega^e} \cdot [\dot{\mathbf{U}}]_{\Omega^e} \right\} \cdot \dot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (\text{B6.75})$$

Resultando naturalmente de esta ecuación el término correspondiente a la potencia de amortiguamiento.

Disipación en el caso del amortiguamiento de Rayleigh,

Post multiplicando por $\dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t)$ la ecuación de equilibrio dinámico (B2.72), expresada en el tiempo $t + \Delta t$, se obtiene

$$0 = \underbrace{[\mathbb{M} \ddot{\mathbf{U}}] \cdot \dot{\mathbf{U}}}_{\dot{K}} + \underbrace{[\mathbf{f}^{\text{elast}}(\mathbf{U})] \cdot \dot{\mathbf{U}}}_{P_d} - \underbrace{[\mathbf{f}^{\text{ext}}] \cdot \dot{\mathbf{U}}}_{P_{\text{int}}} \quad (\text{B6.76})$$

Donde la potencia deformativa se expresa sustituyendo en la anterior la ecuación (B6.70), con un tiempo de retardo $r = 0$,

$$P_d = \{\mathbf{f}^{\text{elast}}(\mathbf{U})\} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \{\mathbb{K} \cdot \mathbf{U}\} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \left\{ \mathbf{A} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B} : \mathbf{C} : \mathbf{B} dV \right]_{\Omega^e} \cdot [\mathbf{U}]_{\Omega^e} \right\} \cdot \dot{\mathbf{U}} \quad (\text{B6.77})$$

Donde no se tiene el término de la potencia de amortiguamiento y por lo tanto no hay potencia disipativa en el sistema.. Para completar esta formulación debe introducirse un término disipativo al balance de potencia, pero debe quedar muy claro que es externo al sistema y no proviene del propio material. Así, la ecuación (B6.76) se escribe,

$$P_d = \{\mathbf{f}^{\text{elast}}(\mathbf{U})\} \cdot \dot{\mathbf{U}} + P_{\text{disip}}^R = \{\mathbb{K} \cdot \mathbf{U}\} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \{\mathbb{D} \cdot \dot{\mathbf{U}}\} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \left\{ \mathbf{A} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B} : \mathbf{C} : \mathbf{B} dV \right]_{\Omega^e} \cdot [\mathbf{U}]_{\Omega^e} \right\} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \left\{ [\alpha \mathbb{M} + \beta \mathbb{K}] \cdot [\dot{\mathbf{U}}]_{\Omega^e} \right\} \cdot \dot{\mathbf{U}} \quad (\text{B6.78})$$

La diferencia fundamental entre la utilización de un modelo viscoelástico y la utilización de un modelo elástico más amortiguamiento estructural (ver ecuación (B6.73)), se presenta al evaluar la disipación. En el primer caso la disipación proviene del modelo constitutivo. En el segundo caso de un término añadido. No obstante esto, debe cumplirse que para toda la estructura, la energía disipada en ambos casos sea la misma,

$$E_{\text{dis}}(t) = \int_0^t \left[\mathbf{A} \left\{ \int_{\Omega^e} \left(\mathbb{C}_{\text{inrs}} \frac{\xi}{\mathbb{C}} \nabla_r^S N_{sj} \right) \nabla_i^S N_{nk} dV \right\} \cdot \dot{\mathbf{U}}_j \right]_{\Omega^e} \cdot \mathbf{A} \left\{ \dot{\mathbf{U}}_k \right\}_{\Omega^e} dt \equiv \int_0^t (\mathbb{D} : \dot{\mathbf{U}}) \cdot \dot{\mathbf{U}} dt \quad (\text{B6.79})$$

En los ejemplos que a continuación se muestran, puede notarse las consideraciones que se han resaltado sobre los modelos de Kelvin y Rayleigh.

B6.4.5 Viga en voladizo

Este ejemplo consiste en una viga en voladizo sometida a un desplazamiento en su extremo que luego es suspendido para que oscile libremente (Figura B6.10). En la misma figura se han representado la variación de los desplazamientos en el tiempo para el caso elástico, viscoelástico con $r = \xi/\mathbb{C} = 0,01 \text{ seg}$ y amortiguamiento estructural con $\beta = 0,01 \text{ seg}$. En la Figura B6.11 se han representado las curvas de variación de tensión longitudinal máxima en el extremo empotrado para las mismas situaciones. Puede verse que la respuesta en desplazamientos es la misma no así en tensiones.

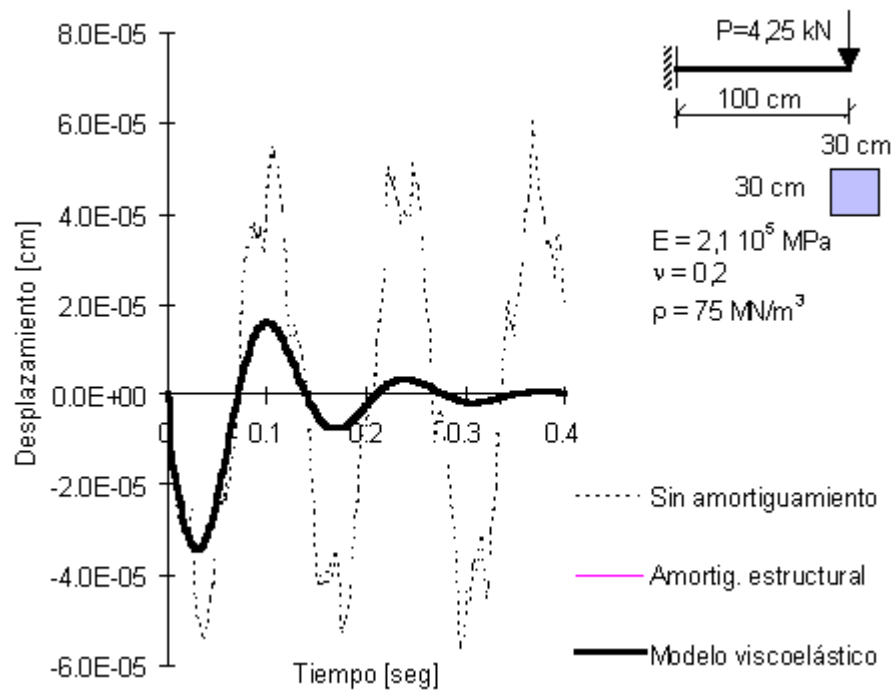


Figura B6.10 – Viga en voladizo. Desplazamientos vs. Tiempo para amortiguamiento estructural con $\beta = 0.01$ y modelo viscoelástico con $r = 0.01$.

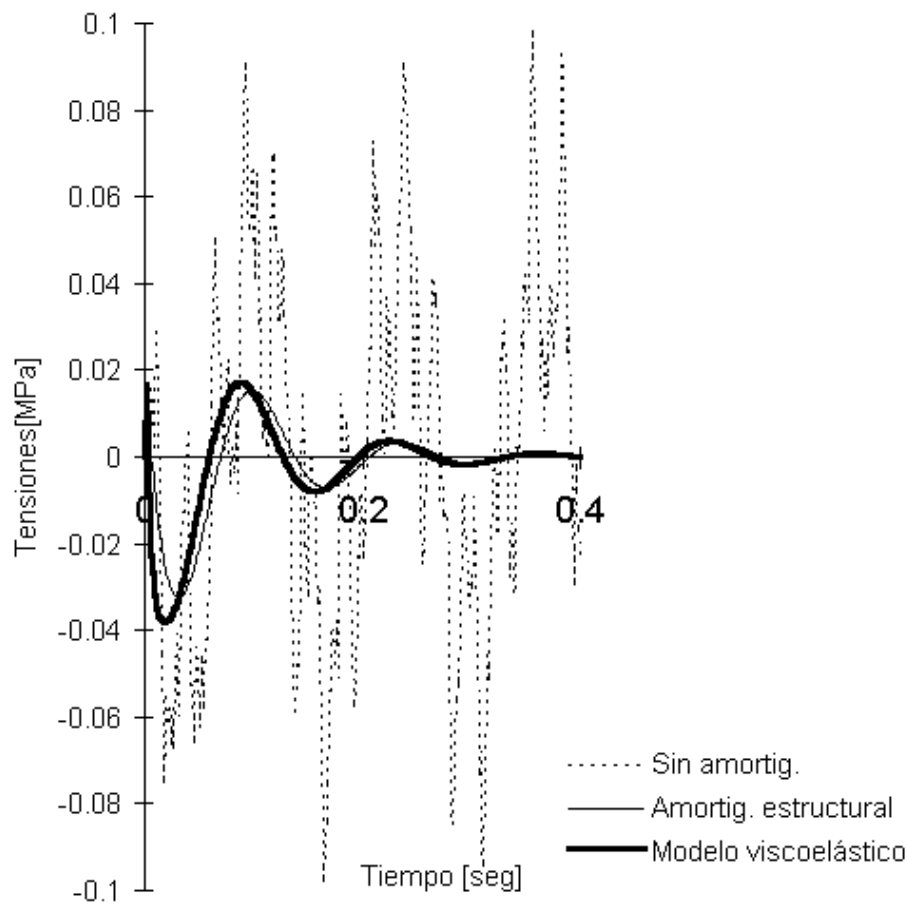


Figura B6.11 – Viga en voladizo. Tensiones vs. Tiempo para amortiguamiento estructural con $\beta = 0.01$ y modelo viscoelástico con $r = 0.01$.

B6.4.6 Pórtico con dintel rígido y masa concentrada en el mismo.

En este ejemplo se analiza el comportamiento del pórtico de la Figura B6.12, sometido a una fuerza F que varía en el tiempo. En la misma figura se ha representado la variación del desplazamiento en el punto de aplicación de la carga para el caso no amortiguado, modelo viscoelástico con $\tau = \eta/E_o = 0,14 \text{ seg}$ y $\tau = 0,25 \text{ seg}$ y amortiguamiento estructural con $\beta = 0,14 \text{ seg}$ y $\beta = 0,25 \text{ seg}$. Nuevamente puede verse que ambas formas de considerar el amortiguamiento coincide en desplazamientos.

En las Figura B6.13 se ha representado la variación de la tensión normal máxima en el empotramiento para el caso no amortiguado, modelo viscoelástico con $\tau = \eta/E_o = 0,14 \text{ seg}$ y $\tau = 0,25 \text{ seg}$ y amortiguamiento estructural con $\beta = 0,14 \text{ seg}$ y $\beta = 0,25 \text{ seg}$. Puede notarse que ambas formas dan resultados diferentes para las tensiones y la diferencia es mayor cuanto mayor es el amortiguamiento.

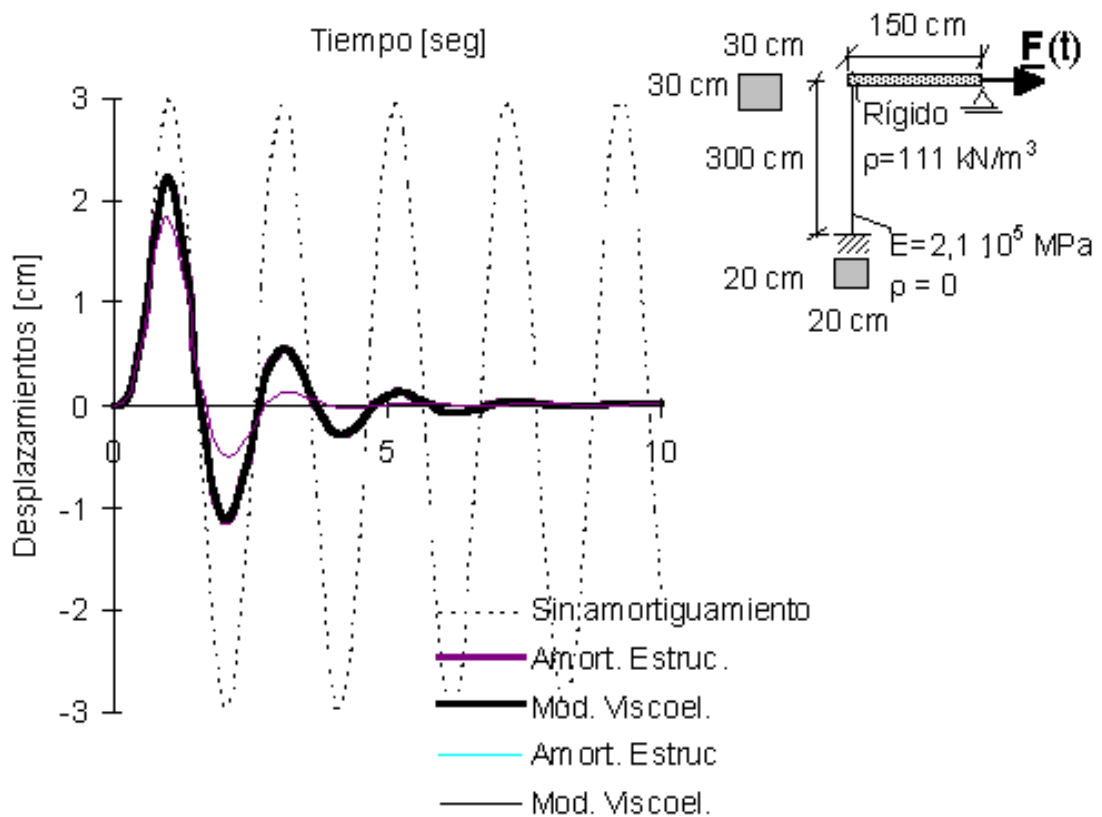


Figura B6.12 – Pórtico. Desplazamientos vs. Tiempo para: 1) La segunda y tercera respuesta con amortiguamiento estructural con $\beta = 0,14$ y modelo viscoelástico con $r = 0,14$, respectivamente. 2) La cuarta y quinta respuesta con amortiguamiento estructural con $\beta = 0,25$ y modelo viscoelástico con $r = 0,25$, respectivamente.

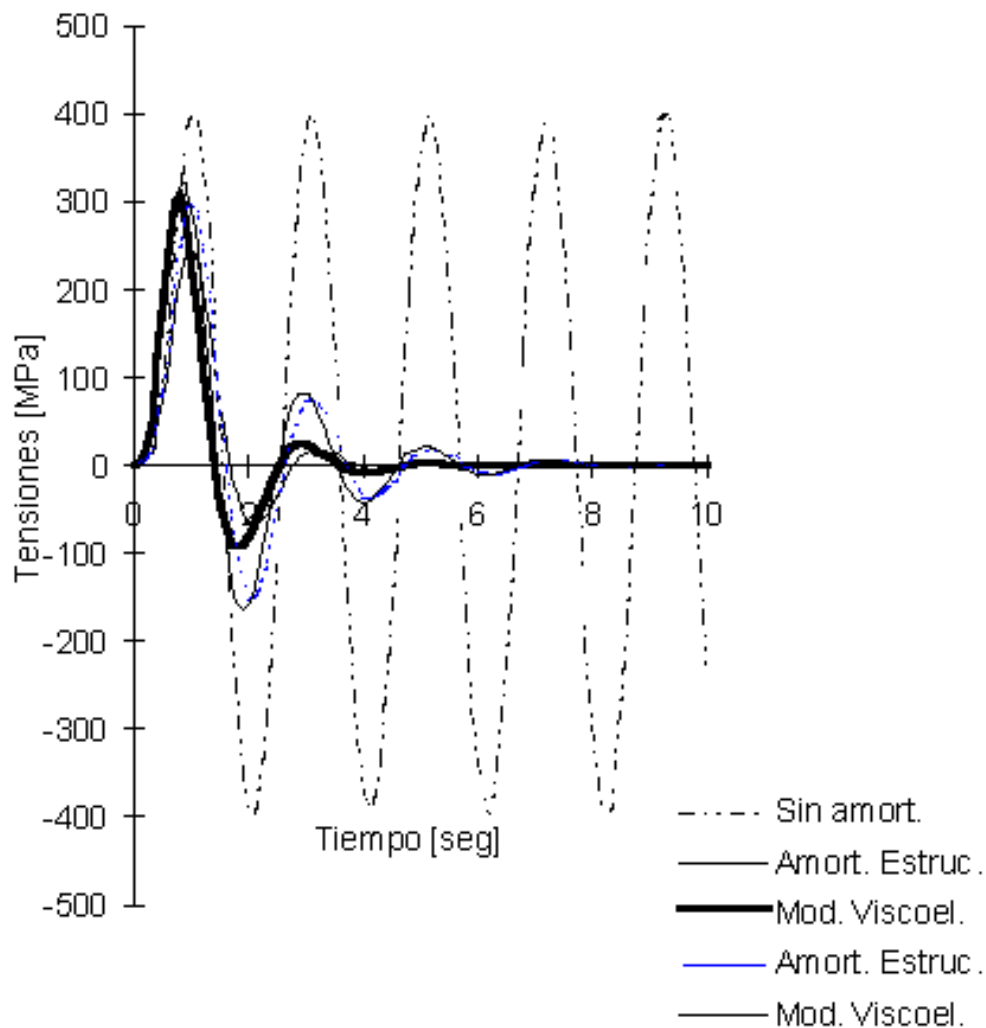


Figura B6.13 – Pórtico. Tensiones vs. Tiempo para: 1) La segunda y tercera respuesta con amortiguamiento estructural con $\beta = 0.14$ y modelo viscoelástico con $r = 0.14$, respectivamente. 2) La cuarta y quinta respuesta con amortiguamiento estructural con $\beta = 0.25$ y modelo viscoelástico con $r = 0.25$, respectivamente.

B6.5 Viscoplasticidad.

La teoría de la viscoplasticidad es un caso general de la teoría de la elasticidad y de la plasticidad a la vez (ver Figura B6.14).

La viscoplasticidad, a diferencia de la elasticidad y la plasticidad, incorpora el parámetro de viscosidad ξ como variable del modelo. Esto hace que el modelo sea sensible al tiempo. Como en los casos anteriores, el estudio que aquí se presenta se centra en la solución viscoplástica para pequeñas deformaciones.

Las características básicas del modelo viscoplástico en pequeñas deformaciones son:

- Definición de la deformación total en forma aditiva

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} \quad (\text{B6.80})$$

Donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ representa la deformación total en el punto, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$ las cuotas elástica y viscoplástica que componen la deformación total.

- Definición de la evolución de la variable interna viscoplástica mediante una regla de normalidad o flujo viscoplástico del tipo de la que se utiliza en plasticidad (ecuación B5.45),

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \lambda^{vp} \frac{\partial \mathbb{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda^{vp} \mathbf{g} \Rightarrow d\boldsymbol{\varepsilon}^{vp} = \lambda^{vp} \mathbf{g} dt \quad (\text{B6.81})$$

Donde $\mathbb{G}$ es la función de potencial viscoplástico, análoga a la función de potencial plástico, que al considerar flujo viscoplástico asociado resulta igual a la función umbral de fluencia $\mathbb{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \equiv \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$. El parámetro viscoplástico λ^{vp} cumple una función análoga al parámetro de consistencia plástico utilizado en plasticidad, pero en este caso la definición del mismo es más general,

$$\lambda^{vp} = \frac{\langle \Phi[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})] \rangle}{\xi} \quad (\text{B6.82})$$

Donde $\Phi[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})]$ es la “función de sobretensión” introducida por Perzyna⁸ (1963) y $\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = [f(\boldsymbol{\sigma})/K] - 1$ es la función de fluencia viscoplástica, análoga a la función umbral de plasticidad (ecuación B5.59). Los paréntesis de Mc Aully se definen como $\langle x \rangle = 0,5[x + |x|]$, y K es la variable interna de endurecimiento que al igual que en plasticidad puede relacionarse con una resistencia uniaxial equivalente $\bar{\sigma} = K$. La evolución de esta variable depende de una regla definida a partir de su variación temporal y puede ser lineal o cuadrática o seguir una forma asignada según la experimentación. La función de sobretensión se define como,

$$\langle \Phi[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})] \rangle = \begin{cases} 0 & \forall \mathbb{F} \leq 0 \\ \Phi[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})] & \forall \mathbb{F} > 0 \end{cases} \quad (\text{B6.83})$$

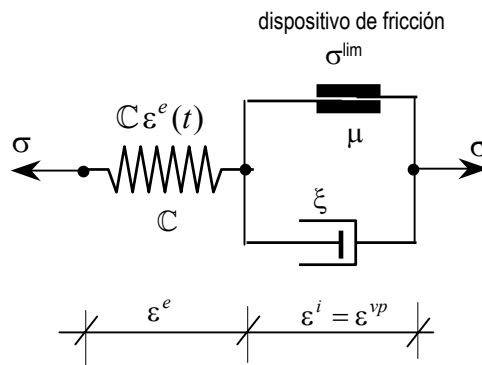


Figura B6.14 – Modelo viscoplástico.

A diferencia del problema elastoplástico, en viscoplasticidad no se exige el cumplimiento instantáneo de la igualdad entre la función de fluencia y la variable de endurecimiento. De

⁸ Perzyna P. (1963). The constitutive equation for rate sensitive plastic materials. *Quart. Appl. Math.*, 20, 321-332.

hecho, y a diferencia de la plasticidad, aquí la función de fluencia viscoplástica puede ser positiva $\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \geq 0$ durante el proceso viscoplástico, no obstante esto, esta condición debería coincidir con la de plasticidad en el infinito $t \rightarrow \infty$ (Figura B6.15). Así, la condición equivalente a la de fluencia plástica en viscoplasticidad se puede escribir a partir de la siguiente relación,

$$\lambda^{vp} = \frac{\langle \Phi[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})] \rangle}{\xi} = \dot{\mu} \quad (\text{B6.84})$$

estableciendo que durante el comportamiento viscoplástico ocurra siempre que $\Phi > 0$, y permitiendo que se cumpla en cada instante la siguiente relación, cuyo cumplimiento garantiza un estado de equilibrio viscoplástico:

$$\Phi[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})] - \xi \dot{\mu} = 0 \quad (\text{B6.85})$$

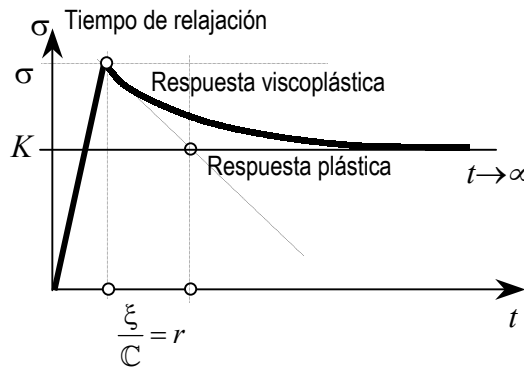


Figura B6.15 – Comportamiento viscoplástico de un punto.

En el resto de las definiciones la viscoplasticidad puede considerarse como una generalización o más bien como una regularización de la plasticidad, porque la viscosidad permite una transición del campo elástico al inelástico *relajada en el tiempo*.

B6.5.1 Estados límites de la viscoplasticidad.

La viscoplasticidad establece una formulación que permite la transición hacia dos teorías que establecen los límites viscoplásticos. Dependiendo de la magnitud de la viscosidad, puede establecerse los siguientes extremos,

- **Caso de viscosidad infinita** ($\xi \rightarrow \infty$), situación en el que la viscosidad tiende al “comportamiento elástico” (ver Figura B6.14). Esto es,

$$\lambda^{vp} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\langle \Phi[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K)] \rangle}{\xi} = 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp} = 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \equiv \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (\text{B6.86})$$

En esta situación puede verse que el modelo resulta exactamente coincidente con un modelo elástico lineal igual al modelo de Hooke,

- **Caso de viscosidad nula** ($\xi \rightarrow 0$), situación en que el modelo tiende a un “comportamiento elastoplástico” (Figura B6.14). Eso es,

$$\lambda^{vp} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\langle \Phi[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K)] \rangle}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\langle \Phi[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K) = 0] \rangle}{\xi} = \dot{\lambda}^p \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp} \equiv \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (\text{B6.87})$$

En esta última expresión puede observarse la necesidad de imponer la condición de fluencia plástica $\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K) = 0$ para que exista el límite buscado. Siendo éste el único camino para garantizar la existencia del parámetro viscoplastico, ahora con la forma de factor de consistencia plástica $\lambda^{vp} dt = d\lambda^p$, en el extremo de viscosidad nula. Desde el punto de vista de la optimización, puede entenderse la viscoplasticidad como un problema elastoplástico regularizado. Es decir, se relaja el problema elastoplástico $\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K) \geq 0$, con lo que se permite la existencia de una solución fuera del espacio convexo elástico, pero penalizada por el parámetro de viscosidad ξ .

Estas situaciones límites hacen del modelo viscoplastico una formulación versátil para abordar problemas comprendidos entre la elasticidad, plasticidad y la propia viscoplasticidad.

B6.5.2 Función de sobretensión.

La función umbral de fluencia permite establecer una transición entre dos comportamientos diferentes en el material,

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K) = \left[\frac{f(\boldsymbol{\sigma})}{K} \right] - 1 \quad \begin{cases} \leq 0 & \text{Estado elástico,} \\ > 0 & \text{Estado viscoplastico,} \end{cases} \quad (\text{B6.88})$$

Esta función de sobretensión, tiene básicamente dos formas de establecerse,

$$\Phi[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K)] = \begin{cases} \mathbb{F}^n(\boldsymbol{\sigma}, K) & \text{Modelo de Perzyna,} \\ \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K) & \text{Modelo de Duvaut - Lyons,} \end{cases} \quad (\text{B6.89})$$

Donde “ n ” es un exponente a definir según sea el tipo de material a representar en la simulación numérica. Una forma cómoda es elegir “ $n=1$ ”, con lo que se adopta en forma implícita la función de sobretensión de Duvaut-Lyons⁹. De esta manera, la expresión para la deformación temporal viscoplastica queda expresada como,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp} = \lambda^{vp} \cdot \frac{\partial G(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[\frac{\langle \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K) \rangle}{\xi} \right] \cdot \mathbf{g} \quad (\text{B6.90})$$

Por lo tanto la tensión queda definida como,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}) = \mathbf{C} : \left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e - \left[\frac{\langle \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K) \rangle}{\xi} \right] \cdot \mathbf{g} \right) \quad (\text{B6.91})$$

B6.5.3 Algoritmo de integración de la ecuación constitutiva viscoplastica.

Existen distintos caminos para realizar la integración numérica de la ecuación diferencial (B6.38), pero un camino muy utilizado es a través del esquema de integración en el tiempo

⁹ Maugin, G. A. (1992). *The thermodynamics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press.

de Euler implícito, cuyas características se detallan en el siguiente cuadro. En este algoritmo el tiempo actual se define como “ $t + \Delta t$ ” y la variable “ i ” representa el indicador de la iteración dentro del proceso de linealización,

1. Predicción del estado tensional

- a. Inicialización de la variable interna de deformación viscoplástica y cálculo de la tensión predictora,

$$\begin{aligned} {}^{i-1}(\boldsymbol{\epsilon}^{vp})^{t+\Delta t} &= (\boldsymbol{\epsilon}^{vp})^t \\ {}^{i-1}(\boldsymbol{\sigma})^{t+\Delta t} &= \mathbb{C} : \left(\boldsymbol{\epsilon}^{t+\Delta t} - {}^{i-1}(\boldsymbol{\epsilon}^{vp})^{t+\Delta t} \right) \end{aligned}$$

- b. Condición de fluencia viscoplástica

$${}^i[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K)]^{t+\Delta t} = \left[\frac{f[{}^{i-1}(\boldsymbol{\sigma})^{t+\Delta t}]}{K[{}^{i-1}(\bar{\epsilon}^{vp})^{t+\Delta t}]} \right] - 1 \quad ; \quad \text{donde } \bar{\epsilon}^{vp} = \sqrt{\gamma(\boldsymbol{\epsilon}^{vp} : \boldsymbol{\epsilon}^{vp})}$$

Sí: ${}^i[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K)]^{t+\Delta t} < 0$, $\Rightarrow$ comportamiento elástico, ${}^i(\boldsymbol{\sigma})^{t+\Delta t} \equiv {}^i(\boldsymbol{\sigma}^*)^{t+\Delta t}$, Ir al punto “f.”

Sí: ${}^i[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K)]^{t+\Delta t} \geq 0$ Entonces se tiene comportamiento viscoplástico
Hacer ${}^i[r]^{t+\Delta t} = [{}^i[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K)]]^{t+\Delta t}$

2. Integración de la ecuación viscoplástica,

- c. Cálculo del flujo plástico

$$\begin{aligned} {}^i[\lambda^{vp}]^{t+\Delta t} &= \left[\frac{r}{\xi} \right]^{t+\Delta t} \Rightarrow {}^i[\Delta \mu^{vp}]^{t+\Delta t} = {}^i[\lambda^{vp}]^{t+\Delta t} \cdot \Delta t \\ {}^i[\boldsymbol{\epsilon}^{vp}]^{t+\Delta t} &= {}^{i-1}[\boldsymbol{\epsilon}^{vp}]^{t+\Delta t} + {}^i[\lambda^{vp}]^{t+\Delta t} \cdot {}^i[\mathbf{g}]^{t+\Delta t} \Delta t = {}^i[\Delta \mu^{vp}]^{t+\Delta t} \cdot {}^i[\mathbf{g}]^{t+\Delta t} \end{aligned}$$

- d. Corrección de la tensión

$${}^i(\boldsymbol{\sigma})^{t+\Delta t} = {}^{i-1}(\boldsymbol{\sigma})^{t+\Delta t} - \mathbb{C} : \underbrace{\left({}^i[\lambda^{vp}]^{t+\Delta t} \cdot {}^i[\mathbf{g}]^{t+\Delta t} \Delta t \right)}_{{}^i[\Delta \mu^{vp}]^{t+\Delta t} \cdot {}^i[\mathbf{g}]^{t+\Delta t}}$$

- e. Verificación de la convergencia (ec. (B6.85))

$$\text{Sí } {}^i[r]^{t+\Delta t} = \left[-\Phi[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})] + \xi \frac{\Delta \mu}{\Delta t} \right]^{t+\Delta t} \geq \text{Tolerancia, } i = i + 1 \text{ y luego ir a "2"}$$

- f. FIN de la integración y continua el cálculo

Tabla 6.4 – Algoritmo para obtener la tensión en problemas viscoplásticos.

B6.5.4 Caso particular del modelo de Duvaut-Lyon para un material viscoplástico de von Mises.

Se supone un modelo viscoplástico de Duvaut-Lion en pequeñas deformaciones, cuya función de fluencia viscoplástica tiene la siguiente forma de von Mises,

$$\Phi[\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})] \equiv \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \left[\frac{f(\boldsymbol{\sigma})}{K(\bar{\epsilon}^{vp})} \right] - 1 \equiv \left[\frac{\sqrt{J_2}}{K(\bar{\epsilon}^{vp})} \right] - 1 \quad (\text{B6.92})$$

siendo $\bar{\epsilon}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}(\boldsymbol{\epsilon}^{vp} : \boldsymbol{\epsilon}^{vp})}$ la deformación plástica efectiva y $K(\bar{\epsilon}^{vp})$ una función de endurecimiento cualquiera, que en un caso general puede tomar la forma de una variable interna de endurecimiento y por lo tanto definirse a partir de su variación temporal. Teniendo en cuenta que el segundo invariante del desviador puede escribirse como¹⁰,

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} = \frac{3}{2} \tau_{oct}^2 \quad \text{o también} \quad \sqrt{J_2} = \frac{\|\mathbf{s}\|}{\sqrt{2}} = \frac{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2}}{\sqrt{2}} \quad (\text{B6.93})$$

donde $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}$, o $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$, es la tensión desviadora.

Considerando la ecuación (B6.90) y una función de potencial viscoplástica asociada a la función de fluencia, ecuación (B6.92), se obtiene el siguiente tensor de flujo viscoplástico,

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = J_2 - \hat{K}(\bar{\epsilon}^{vp}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{s} \quad (\text{B6.94})$$

sustituyendo esta última en la ecuación (B6.90), resulta la siguiente deformación viscoplástica,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp} = \lambda^{vp} \cdot \frac{\partial \mathbb{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[\frac{\langle \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}, K) \rangle}{\xi} \right] \cdot \mathbf{g} = \frac{\left\langle \left[\frac{\sqrt{J_2}}{K(\bar{\epsilon}^{vp})} \right] - 1 \right\rangle}{\xi} \cdot \mathbf{s} \quad (\text{B6.95})$$

Debido a que se propone un potencial viscoplástico del tipo von Mises, se escribe una ley constitutiva apropiada para representar un comportamiento con desviación dominante. De esta forma, se tendrá un comportamiento volumétrico elástico y sólo la parte desviadora sufrirá los efectos de la viscoplasticidad¹¹. Por ésta razón sólo se describirá e integrará la ley constitutiva viscoplástica desviadora, pero es importante recordar que para obtener la tensión completa hay que añadir el comportamiento elástico volumétrico σ_{ij}^{vol} .

La tensión desviadora se escribe entonces,

$$\mathbf{s} = 2 G (\mathbf{e} - \mathbf{e}^{vp}) \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{s} = 2 G (\Delta \mathbf{e} - \Delta \mathbf{e}^{vp}) \quad (\text{B6.96})$$

Además, la tensión desviadora en el instante $t + \Delta t$ valdrá,

$$\mathbf{s}^{t+\Delta t} = \mathbf{s}^t + \Delta \mathbf{s}^{t+\Delta t} = \underbrace{\mathbf{s}^t + 2 G \Delta \mathbf{e}^{t+\Delta t}}_{(\mathbf{s}^*)^{t+\Delta t}} - 2 G (\Delta \mathbf{e}^{vp})^{t+\Delta t} \quad (\text{B6.97})$$

¹⁰ S.Oller (2001). *Fractura mecánica – Un enfoque global*. CIMNE – Ediciones UPC. Barcelona.

¹¹ La ley constitutiva descompuesta en su parte volumétrica y desviadora se escribe como,

$$\sigma_{ij} = \lambda^{Lame} \epsilon_{kk}^e \delta_{ij} + 2 \mu^{Lame} \left(\epsilon_{ij}^e - \frac{1}{3} \epsilon_{kk}^e \delta_{ij} \right) = \lambda^{Lame} \epsilon_{kk}^e \delta_{ij} + 2 \mu^{Lame} e_{ij}^e$$

siendo las constantes de Lamé $\lambda^{Lame} = E/3(1-2\nu)$ y $\mu^{Lame} = G = E/2(1+\nu)$, donde E y ν son respectivamente el módulo de Young y el coeficiente de Poisson. Debido a que el flujo de von Mises es predominantemente desviador ($\dot{\epsilon}_{kk}^{vp} = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \equiv \dot{e}_{ij}^{vp} = [\langle \Phi \rangle / \xi] \mathbf{s}$), la ley constitutiva anterior queda particularizada en la siguiente forma,

$$\sigma_{ij} = \lambda^{Lame} \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 G (e_{ij} - e_{ij}^{vp}) = \sigma_{ij}^{vol} - s_{ij}$$

Y sustituyendo aquí la regla de flujo plástica se tiene,

$$\mathbf{s}^{t+\Delta t} = (\mathbf{s}^*)^{t+\Delta t} - 2G \frac{\langle \Phi[\mathbb{F}^{t+\Delta t}] \rangle}{\xi} \mathbf{s}^{t+\Delta t} \Delta t, \quad \text{con} \quad \Phi[\mathbb{F}^{t+\Delta t}] \equiv \mathbb{F}^{t+\Delta t} = \mathbb{F}(\mathbf{s}^*)^{t+\Delta t} \quad (\text{B6.98})$$

A partir de ésta puede despejarse el tensor de tensión desviador en el tiempo actual $\mathbf{s}^{t+\Delta t}$, sin que se cumpla la condición de consistencia, propia de la plasticidad. Esto es,

$$\mathbf{s}^{t+\Delta t} = \frac{(\mathbf{s}^*)^{t+\Delta t}}{1 + \frac{\Delta t}{\xi} 2G \langle \mathbb{F}(\mathbf{s}^*)^{t+\Delta t} \rangle} \quad (\text{B6.99})$$

En esta última ecuación puede verse las siguientes características de comportamiento viscoplástico,

1. Sí $\Delta t \rightarrow \infty$ o $\xi \rightarrow 0$, para que haya solución debe alcanzarse la condición de $\Phi[\mathbb{F}^{t+\Delta t}] = 0$ y para ello hay que aplicar la condición de consistencia plástica y por lo tanto transformarlo en un problema elastoplástico (ver ecuación (B6.84)).
2. Sí $\Delta t \rightarrow 0$ o $\xi \rightarrow \infty$, ocurre que la tensión buscada coincide con la predictora $\mathbf{s}^{t+\Delta t} = (\mathbf{s}^*)^{t+\Delta t}$, lo que implica que el comportamiento durante el intervalo Δt ha sido elástico lineal.