

Análisis estructural de muros de mampostería asistido mediante fotografía digital para la generación de la malla

Daniel Di Capua · Vega Pérez-Gracia · Ramon González-Drigo

Recibido: Septiembre 2009, Aceptado: Septiembre 2009
©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

Resumen En este artículo se presenta una metodología que permite obtener de forma automática la geometría de muros de mampostería para proceder al cálculo estructural mediante elementos finitos considerando por separado las unidades estructurales (ladrillo o piedra) y el mortero. Esta geometría se obtiene mediante un proceso de detección de bordes en fotografías digitales de los muros analizados. A modo de ejemplo se presentan dos aplicaciones de esta metodología. Una de ellas es el análisis de un muro de mampostería regular de obra. La otra aplicación es el análisis de un muro de mampostería de piedra irregular. El cálculo computacional en ambos casos se ha basado en un conocido modelo de daño isótropo que permite simular el deterioro del muro de mampostería debido a la fisuración por tracción de las juntas.

STRUCTURAL ANALYSIS OF MASONRY WALLS USING DIGITAL PHOTOGRAPHY ASSISTED MESH GENERATION

Summary This paper presents a methodology developed to obtain the geometry of masonry walls. The methodology is based on the automatic recognition of

boundaries. The geometry is used to perform the numerical simulation of the cracking process due to tensile stresses in joints. Masonry units are considered as linear elastic elements, and the non-elastic process is only taken into account in the joints. Two examples are included showing two different walls: a regular masonry wall built with bricks, and an irregular masonry wall with limestone stones as masonry units.

1. Introducción

Las estructuras de mampostería se pueden considerar como materiales no homogéneos formados por numerosas unidades estructurales unidas mediante algún tipo de mortero. Los muros de mampostería tienen como característica relevante la gran variedad de posibles geometrías que pueden adoptar sus elementos componentes (ladrillos o piedras y mortero).

Cuando las unidades son de fábrica (ladrillos), la disposición de las uniones con mortero es regular. En el caso de que las unidades sean naturales (piedras), la disposición de las uniones con mortero puede ser tanto regular como irregular (Figura 1). Debido a estas características, la rotura de dichas estructuras no se puede considerar debida a un único mecanismo, ya que presentan propiedades direccionales relacionadas con la disposición de las unidades y el mortero. Las juntas se comportan como planos de debilidad de la estructura. Se puede considerar que el fallo en este tipo de muros se produce principalmente según alguno de los mecanismos indicados por Lourenço y Rots [1] que involucran rotura o desplazamiento en las juntas o bien rotura del ladrillo. La combinación de tensiones actuando sobre la estructura desencadenará uno de los posibles mecanismos, produciéndose la rotura por el mortero o bien por una combinación de ladrillo y mortero.

Daniel Di Capua
Centro Internacional de Métodos Numéricos
en Ingeniería (CIMNE)
Edificio C1 Campus Nord, UPC, 08034 Barcelona, España
Tel.: 34 93 4017355; Fax: 34 93 4016517
e-mail: dicapua@cimne.upc.edu

Daniel Di Capua · V. Pérez-Gracia · R. González-Drigo
Dept. Resistencia de Materiales y
Estructuras en la Ingeniería, UEUETIB, UPC
C/Urgell 187, 08036 Barcelona, España
e-mail: daniel.di.capua@upc.edu; vega.perez@upc.edu;
jose.ramon.gonzalez@upc.edu

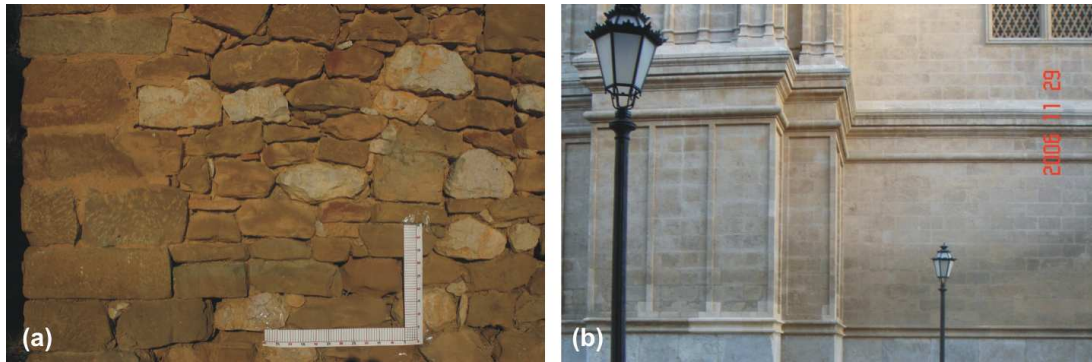


Figura 1. Muros de carga contruidos con piedra natural. a) Sillares y sillarejos irregulares. b) Sillares casi regulares

Aunque un gran número de edificaciones existentes están contruidas con mampostería, históricamente se ha estudiado poco esta tipología estructural si se compara con otros tipos de materiales como puede ser el hormigón. Los motivos principales de esta falta de estudios radican en la dificultad existente para evaluar los complejos mecanismos de interacción entre los dos materiales constructivos (unidades y mortero). Los modelos numéricos para el estudio del comportamiento de la mampostería que se encuentran en la literatura pueden clasificarse en tres grupos : micromodelos, micromodelos simplificados y macromodelos [2].

Los micromodelos consideran a la mampostería como un medio de dos fases, en el cual las unidades y las juntas de mortero se tratan como dos materiales independientes [1,3,4,5]. Estos modelos permiten una predicción precisa del campo de tensiones y deformaciones. Sin embargo su aplicabilidad suele reducirse al análisis de pequeños paneles debido a su elevado coste computacional y a la dificultad para obtener la geometría, sobre todo en los casos en los que la disposición de los elementos es irregular.

Los micromodelos simplificados utilizan técnicas de homogeneización para determinar el comportamiento de la mampostería a partir del comportamiento de sus materiales constituyentes [6,7]. Estos métodos identifican una celda elemental que genera toda la estructura por repetición regular. Sobre dicha celda elemental se plantea el problema diferencial cuya solución conduce a la definición de las ecuaciones constitutivas homogeneizadas.

Los macromodelos aproximan a la mampostería a un medio homogéneo definiendo un material ideal cuyo comportamiento constitutivo se determina por ajuste de resultados experimentales [1,8,9]. Estos modelos se aplican para el análisis de grandes estructuras. Sin embargo, debido a que las propiedades mecánicas del mo-

delo se determinan experimentalmente, la aplicabilidad del modelo se reduce a casos bajo condiciones semejantes a las de los ensayos en los que dichos datos fueron obtenidos.

Tradicionalmente, la geometría de la estructura se obtiene a partir de planos y de representaciones bidimensionales que deben introducirse en los programas manualmente. Otras técnicas como el levantamiento fotogramétrico [10, 11] o como el laser-scan tridimensional [12] permiten introducir detalles de esta geometría como zonas dañadas, grietas o bien elementos estructurales. Con estos métodos se obtienen las diferentes superficies estructurales con gran detalle. Estas superficies se introducen posteriormente en un programa de procesamiento para realizar el mallado.

En el presente artículo se propone una metodología de análisis estructural de muros de mampostería utilizando la fotografía digital como técnica de obtención de geometrías. Las imágenes se procesan para obtener un reconocimiento automático de las unidades estructurales y del mortero, permitiendo de este modo la discretización mediante elementos finitos de ambos materiales. Posteriormente se utiliza un modelo constitutivo de daño isótropo existente en la literatura para simular la fisuración a tracción de las juntas entre el mortero y los elementos estructurales (ladrillo o piedra).

2. Obtención de la malla geométrica y la malla

La geometría se obtiene a partir de una fotografía digital del muro. Tras un procesamiento de la imagen se consigue la identificación automática de bordes, información que se utiliza para definir la geometría del muro y para el posterior mallado.

2.1. Fotografía digital

La fotografía digital es la captación de una imagen mediante una cámara fotográfica en la que se ha sustituido la película por un chip (CCD) formado por retículas fotosensibles. La imagen se almacena en el CCD mediante una serie de dígitos binarios. Esto quiere decir que dicha imagen se puede descomponer en una serie de cuadrículas (píxeles) de pequeño tamaño, cada una de ellas caracterizada por los dígitos binarios que representan su color y su intensidad lumínica. La resolución de la imagen depende del número de píxeles existentes. El almacenamiento de la imagen en medios electrónicos permite una fácil manipulación y tratamiento.

2.2. Proceso automático de detección de bordes: filtro de Laplace

El filtro de Laplace es el más utilizado para la detección de bordes¹⁶. Se trata de un filtro espacial consistente en pasar una matriz cuadrada sobre la superficie, calculando un nuevo valor de la luminosidad para la celda o píxel central de la matriz como una función de todos los valores luminosidad de las celdas cubiertas por la matriz. Estas matrices denotadas como $C_{i,j}$ suelen ser de 3×3 . De forma general, se tiene:

$$C_{i,j} = f \left\{ \sum_{i-m}^{i+m} \sum_{j-n}^{j+n} C_{i,j} \right\} \quad (1)$$

Indicando que la operación f se ha aplicado sobre la matriz de tamaño $2m+1, 2n+1$, anotando el resultado en el píxel central de la matriz. Dentro de este tipo de filtros se sitúan los denominados filtros paso alto o filtros de borde, que permiten obtener un realzado de las áreas de cambio rápido de la imagen. El resultado de un filtro paso alto es el obtenido de restar a la imagen inicial un filtro paso bajo que consiste en situar en el píxel central de la ventana el promediado de todos los valores de las celdas. En el filtro de Laplace se aplica un ponderado para cada una de las celdas de la ventana, definido por una de las siguientes matrices:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

siendo G_1, G_2 y G_3 las matrices de convolución que definen los filtros de Laplace de primer, segundo y tercer orden, respectivamente.

La convolución de la matriz G con una ventana de 9×9 , la celda central se multiplica por -4 , mientras que las celdas contiguas se multiplica por 0 o por 1 . El resultado de los nueve productos se suma y se sitúa en el píxel central de la ventana. El resultado final proporciona un perfilado de áreas de tal manera que se evitan los bordes falsos.

2.3. Proceso de obtención de la geometría

Para la obtención de la geometría se ha utilizado el programa de procesamiento de imágenes GIMP2 [13]. A continuación se detallan los pasos necesarios que se han propuesto en este trabajo para este proceso:

1. Obtención de la fotografía (Figura 2a).

La fotografía digital debe ser tomada con buena iluminación ya que la aparición de sombra dificultaría el procesamiento de la imagen. Asimismo se debe intentar que la imagen este bien centrada, evitando la inclinación de la cámara.

2. Resaltar mortero en negro (Figura 2b y 2c).

Una vez obtenida la imagen, el siguiente paso es seleccionar todo el mortero y pasarlo a color negro. Para realizar esta acción se utilizan herramientas de selección de regiones continuas basadas en la selección de píxeles que tienen el mismo color o color similar. Al finalizar se transforma el mortero a color negro.

3. Resaltar las unidades en blanco (Figura 2d).

Seguidamente se seleccionan las unidades que se pintan en color blanco.

4. Aplicación del filtro dilatar (Figura 2e).

A continuación se aplica un filtro de mínimo (o filtro de dilatación) con el cual se sustituye cada píxel por el mínimo valor de luminosidad de una ventana dada. En este caso la ventana seleccionada es una matriz de 9×9 quedando situado el píxel evaluado en el centro de la matriz. De este modo, cada píxel se compara con los ocho píxeles circundantes, asignándole el valor más bajo de luminosidad. Este tipo de filtro realza y aumenta el tamaño de las zonas más oscuras. El efecto final es la dilatación de las áreas oscuras ya que, en el caso de que exista un único píxel oscuro en una zona blanca, los ocho píxeles circundantes se modifican a negro, obteniendo de este modo nueve píxeles oscuros. Así mismo, en una zona oscura, un píxel blanco se transformará en negro, y un área oscura se dilatará en un píxel en todas las direcciones. De este modo se consigue eliminar el ruido con forma de puntos blancos.

5. Aplicación del filtro Laplace (Figura 2e).

El filtro de Laplace para detectar bordes se aplica tras efectuar un ligero desenfoque gaussiano de la

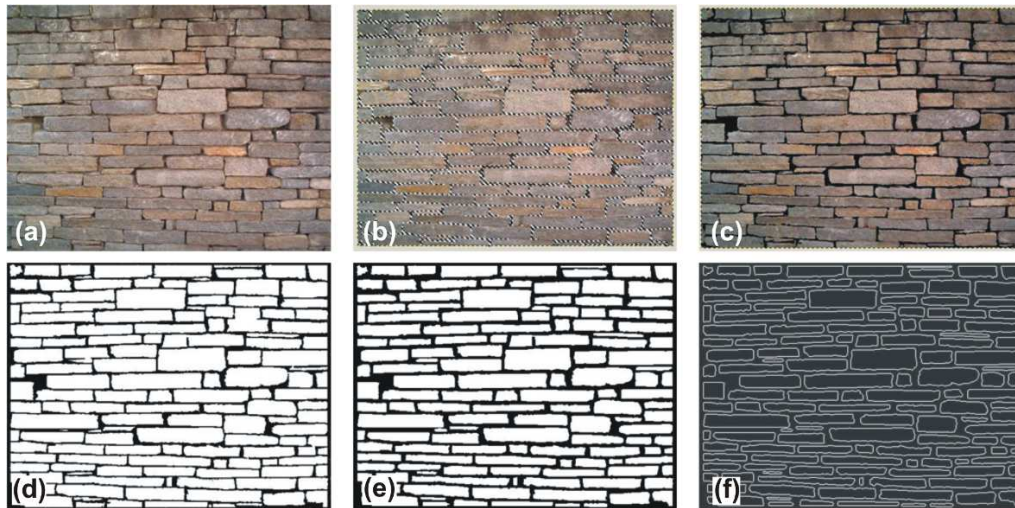


Figura 2. Proceso para detección de contornos. a) Fotografía original (.jpg), b) Selección del mortero, c) Mortero negro, d) Piedra blanca, (e) Filtro dilatar, (f) Filtro Laplace (.bmp)

imagen que permite suavizar la imagen sin perder ningún detalle. Finalmente se guarda la imagen en formato .bmp, ya que se trata de una imagen en blanco y negro.

6. Vectorización de la imagen.

Mediante el programa Ras2vec [14] se vectoriza la imagen pasando del formato .bmp a .dxf (Drawing Interchange Format), obteniendo de esta manera el formato adecuado para poder trabajar con los programas de pre-proceso.

2.4. Mallado de la geometría

Una vez obtenida la geometría del muro en formato .dxf se utiliza el programa de pre y post-proceso GiD [15] que permite importar la geometría en dicho formato para realizar posteriormente su mallado.

2.5. Limitaciones del método

El método presentado para la obtención de la geometría a partir de una fotografía digital es bastante eficiente. No obstante dicha eficiencia del método queda condicionada a la calidad de la fotografía digital disponible debido a la existencia de ruidos y aberraciones en la imagen.

3. Modelo Constitutivo

En los muros de mampostería se pueden considerar principalmente cinco casos típicos de fallo [1], que se muestran representados en la Figura 3:

- a) Fisuración por tracción en las juntas.
- b) Desplazamientos en la dirección de las juntas horizontales (bed joints) o de las verticales (head joints) en el caso de bajas tensiones normales.
- c) Rotura a tracción del ladrillo.
- d) Tensiones diagonales de tracción en el ladrillo con valores importantes de las tensiones normales para desarrollar fricción.
- e) Rotura por aplastamiento en el ladrillo y junta.

El modelo constitutivo escogido en este trabajo se basa en el modelo de daño isótropo para mampostería presentado en Clemente *et al.* [8] y en Creazza *et al.* [16], los cuales a su vez se basan en el modelo de daño isótropo para hormigón presentado en Faria *et al.* [17]. Asimismo se considera que el comportamiento inelástico del muro se concentra en la fisuración por tracción de las juntas (caso a de la Figura 3). La degradación del material se controla mediante una variable escalar d , definida como la relación entre el área dañada y el área total, debiendo verificarse:

$$0 \leq d \leq 1 \quad (3)$$

3.1. Criterios de daño

Para poder distinguir entre los procesos de carga, descarga y recarga, así como la evolución de las variables d , se define una norma del tensor de deformaciones o alternatively del tensor de tensiones efectivas (netas modificadas). Esta norma se conoce también como deformación equivalente y se utiliza para comparar distintos estados de deformación. Las deformaciones equivalentes normalizadas se definen según la propuesta de

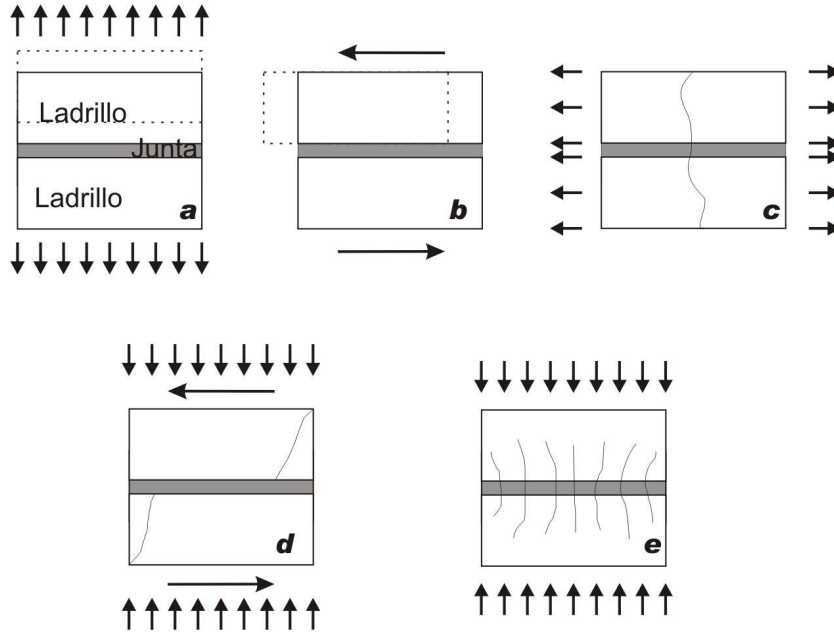


Figura 3. Modos típicos de fallo en muros de mampostería

Faria *et al.* [17,18]:

$$\tau = \frac{1}{M} [\bar{\sigma} : (\mathbf{C}^0)^{-1} : \bar{\sigma}]^{1/2} \quad (4)$$

donde $\bar{\sigma} = \mathbf{C}^0 \epsilon$ se define como la tensión efectiva siendo, $\mathbf{C}^0$ el tensor de constantes elásticas del material sin degradar y $M = \frac{f_p^+}{\sqrt{E_0}}$ un parámetro de normalización.

A partir de las definiciones de la deformación equivalente normalizada se especifica el siguiente criterio de daño $g(\tau, r)$:

$$g(\tau, r) = \tau - r \leq 0 \quad (5)$$

Siendo la variable r un parámetro que define el umbral instantáneo normalizado del daño.

3.2. Leyes de evolución

Las leyes de evolución del umbral del daño se definen a partir de las condiciones de carga, descarga y recarga, que a su vez cumplen las llamadas relaciones de Kuhn-Tucker:

$$\dot{r} \geq 0 \quad g \geq 0 \quad \dot{r}g = 0 \quad r\dot{g} = 0 \quad (6)$$

donde el punto denota derivada temporal ($\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$).

En situación de carga la condición de persistencia cumple que $\dot{g} = 0$, y a partir de la ec.(5) se verifica que:

$$\dot{r} = \dot{\tau} \quad (7)$$

Integrando esta relación (7) para un instante genérico t , se obtiene la siguiente expresión explícita de los valores actuales de las variables internas:

$$r(t) = \max \left\{ r_0, \max_{s \in [0, t]} \tau(s) \right\} \quad (8)$$

donde $r_0 = 1$ es el umbral para el límite del dominio elástico lineal.

El índice de daño d se define explícitamente en función de los valores instantáneos del umbral de daño a partir de la siguiente función propuesta [18]:

$$d(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (9)$$

donde q son funciones positivas de las variables r .

Dado que el índice de daño d , la expresión (3) se puede reescribir partiendo de la ec.(9) como:

$$\frac{q}{r} \leq 1 \quad (10)$$

Para que la disipación del esqueleto sólido sea siempre positiva para cualquier proceso de deformación debe cumplirse que $\dot{d} \geq 0$, lo que según (9) equivale a:

$$\dot{d} \geq 0 \Rightarrow \frac{q}{r} \geq \frac{dq}{dr} \quad (11)$$

Para el desarrollo de los ejemplos incluidos en este artículo se proponen las siguientes funciones q [18]:

$$q(r) = e^{A(1-r)} \quad \text{si } r \geq r_0 = r_p = 1 \quad (12)$$

siendo A un parámetro del material.

A partir de la ec.(12) se puede observar que en esta aplicación, para el régimen de tracción, la rama de ablandamiento aparece inmediatamente después de alcanzarse el límite elástico de material ($r_0 = r_p$). Esta hipótesis se utiliza comúnmente para el comportamiento a tracción. Para obtener el parámetro A hay que considerar que deben cumplirse los requisitos de objetividad de la malla.

Si se utiliza el método de los elementos finitos en el marco de los modelos locales es necesario introducir una longitud característica [19] l^* que depende del tamaño (volumen o área) de la malla utilizada para la discretización espacial. El parámetro A se puede calcular igualando la relación G_f/l^* con la energía específica total disipada en cualquier proceso mecánico, siendo G_f la energía de fractura a tracción (considerada como una propiedad del material [17,18]). En los procesos considerados se mantienen constantes la temperatura y las variables hídricas.

3.3. Implementación numérica

El modelo descrito ha sido implementado numéricamente en el programa HTM.Concrete realizado por el primer autor. Este programa se ha realizado para el análisis higro-terno-mecánico del hormigón, previamente adaptado para funcionar dentro del entorno gráfico del programa de elementos finitos GID.

4. Ejemplos de aplicación

Los ejemplos incluidos muestran una mampostería regular y otra irregular. En ambos casos se ha obtenido la geometría partiendo de una fotografía digital del muro. Esta geometría se ha utilizado para definir la malla utilizada en la modelización mediante elementos finitos. El muro se considera apoyado en los dos extremos, quedando su parte central libre. De este modo se fuerza a que el daño se produzca en esa zona central, facilitando el control de la zona más crítica afectada por la deformación. La densidad lineal de carga aplicada sobre los muros es constante e igual a 24 kN/m (Figura 4).

4.1. Mampostería regular

Se parte de la fotografía digital mostrada en la Figura 2a. A partir de la imagen final obtenida tras el proceso de filtrado (Figura 2d) se procede a la obtención de la geometría en GID y a la posterior diferenciación de materiales, separando entre ladrillo y mortero (Figura 5). El módulo de Young y la densidad del ladrillo se consideran de 6.2 GPa y de 1840 kg/m³, respectivamente. Para el mortero estos mismos parámetros se

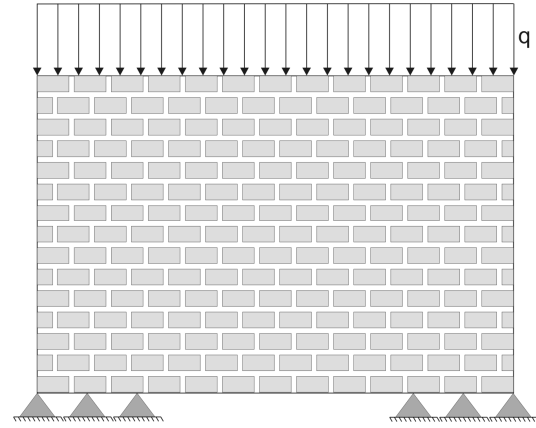


Figura 4. Hipótesis de cargas y apoyos para el muro de mampostería

suponen de 4.5 GPa y de 1500 kg/m³. Se ha supuesto que los ladrillos presentan un comportamiento elástico lineal, mientras que el comportamiento del mortero queda definido con el modelo constitutivo de daño escalar definido anteriormente (ec.(9)). La resistencia a tracción del mortero es de 1 Mpa y la energía de fractura de 100 N/m.

La simulación se ha efectuado con 25 incrementos, obteniendo un valor para la deformada (Figura 6a), los desplazamientos (Figura 6b) y el parámetro de daño (Figura 6c). Las mayores deformaciones y desplazamientos se producen en la zona central entre los dos apoyos. El parámetro de daño es mayor en la parte inferior central del muro, donde se manifiesta un claro daño a flexión. También aparece un evidente daño a cortante entre en las zonas próximas a los apoyos. Se puede observar en la Figura 6 como el daño se produce en la zona de las juntas.

La evolución de este daño sigue los contactos entre el mortero y los ladrillos, iniciándose un daño a flexión en la zona inferior central del muro. Tras una cierta evolución del daño en esta zona, aparecen evidentes efectos de daño a cortante en las dos zonas laterales, junto a los apoyos, tal como puede observarse en la Figura 6.

4.2. Mampostería irregular

El muro considerado en este segundo ejemplo está construido con piedra caliza irregular, unida mediante un mortero para el cual se consideran las mismas propiedades que el mortero de la mampostería regular. Para la piedra se supone un módulo de Young de 7 GPa y una densidad de 2 000 kg/m³. Como en el ejemplo anterior (mampostería regular), se ha considerado que las unidades estructurales (en este caso, piedras), tienen un comportamiento elástico lineal, de tal manera que todo el proceso no lineal se concentra en las juntas.

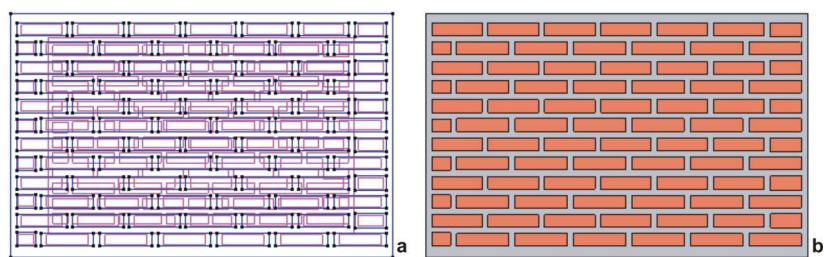


Figura 5. a) Geometría en GID. b) Diferenciación entre materiales

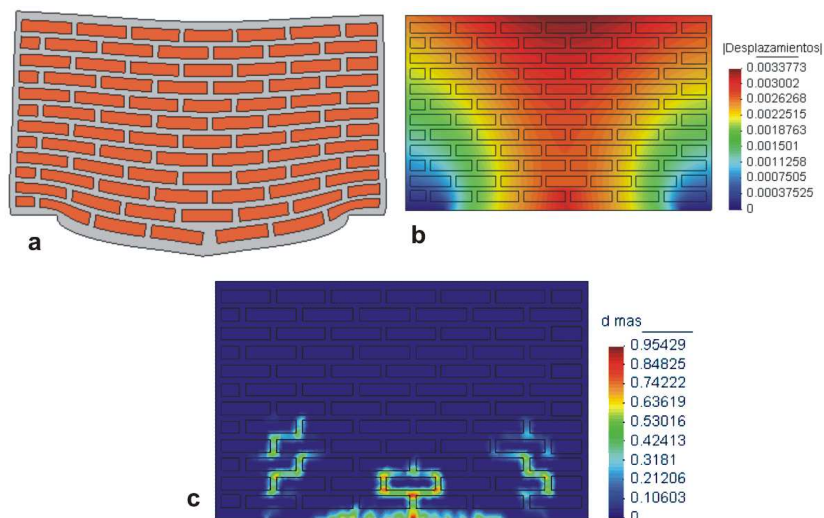


Figura 6. Deformada, desplazamientos [m] y parámetro de daño

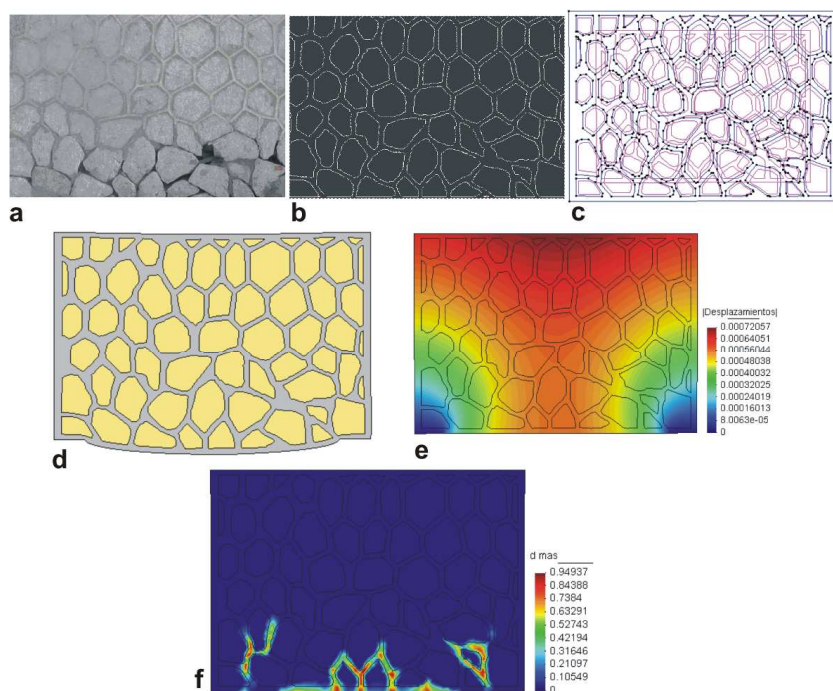


Figura 7. a) Fotografía digital del muro de mampostería irregular. b) Obtención de contornos tras el procesamiento de la imagen. c) Geometría considerada en GID. d) Deformada tras la aplicación de las cargas. e) Desplazamientos. f) Evolución del parámetro de daño

La fotografía digital del muro considerado se muestra en la Figura 7a. El resultado de todo el procesado de la señal, finalizando con el filtrado de Laplace, puede verse en la Figura 7b. Esta imagen se utiliza para definir la geometría en GID (Figura 7c) y la diferenciación entre los dos materiales. Tras la aplicación de la carga en 25 incrementos se obtienen como resultados la deformada que se muestra en la Figura 7d, los desplazamientos (Figura 7e) y la evolución del parámetro de daño (Figura 7f).

Como en el caso anterior aparece un daño a flexión en la zona inferior central del muro, correspondiente con la máxima deformada. Posteriormente aparece daño a cortante en los laterales, próximo a los apoyos.

5. Conclusiones

En este artículo se ha presentado una técnica de análisis estructural de muros de mampostería basada en una novedosa metodología de obtención de la geometría mediante algoritmos de detección automática de bordes en imágenes digitales. Este proceso ha permitido obtener la geometría tanto de mampostería regular como de mampostería irregular con gran exactitud.

Se ha utilizado un modelo constitutivo sencillo que permite simular el deterioro del muro debido a la fisuración por tracción de las juntas. En los dos ejemplos presentados se puede observar la capacidad de la metodología propuesta para realizar el análisis estructural de muros de mampostería existentes. A partir de una fotografía digital de los muros tomada en campo, se procesa la imagen en la oficina técnica para obtener finalmente la geometría. Esta geometría se utiliza como base para el posterior análisis computacional mediante el método de elementos finitos, y para el correspondiente análisis estructural.

Referencias

1. Lourenço P.J., Rots J.G. (1997) Multisurface interface models for masonry structures. *Journal of Engineering Mechanics* 123(7):660–668
2. Ferreti E., Casadio E., Di Leo A. (2008) Masonry walls under shear test. *Computer Modelling in Engineering & Sciences* 30(3):163–189
3. Gambarotta L., Lagomarsino S. (1997) Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part I: the mortar joint model and its applications. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 26:423–439
4. Gambarotta L., Lagomarsino S. (1997) Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part II: the continuum model and its applications. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 26:441–462
5. Lofti H.R., Benson Shing P. (1994) Interface model applied to fracture of masonry structures. *Journal of Structural Engineering, ASCE* 120(1):63–80
6. Lourenço P.B. (1996) Computational strategies for masonry structures. Ph.D. Thesis, Delft University of Technology. Delft, Holanda
7. Cecchi A., Di Marco R. (2000) Homogenization of masonry walls with a numerical oriented procedure. Rigid or elastic blocks? *European Journal of Mechanics - A/Solids* 19:535–546
8. Clemente R., Cervera M., Roca P. (2008) El modelo de daño localizado aplicado al análisis de estructuras de obra de fábrica. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 24(1):67–91
9. Lourenço P.B., Rots J.G. (1995) Blaauwendraad J. Two approaches for the analysis of masonry structures: micro and macro-modeling. *Heron* 40(4):313–340
10. Arias P., Armesto J., Di Capua D., González-Drigo R., Lorenzo H., Pérez-Gracia V. (2007) Digital photogrammetry, GPR and computational analysis of structural damages in a mediaeval bridge. *Engineering Failure Analysis* 14:1444–1457
11. Vatan M., Arun G. (2005) Using photogrammetric data for establishing 3D finite element model of a masonry aqueduct. En *Proceedings CIPA 2005 XX, International Symposium*, 26 september-01 october 2005, Torino, Italy, pp 1-4,
12. Mallardo V., Malvezzi R., Milani E., Milani G. (2008) Seismic vulnerability of historical masonry buildings: a case study in Ferrara. *Engineering Structures* 30:2223–2241
13. GIMP2. GNU Image Manipulation Program. www.gimp.org.
14. Ras2Vec 1.2. Raster to vector conversion program. www.xmailserver.org.
15. GiD. The personal pre and post processor program. www.gid.cimne.upc.es.
16. Creazza G., Matteazzi R., Saetta A., Vitaliani R. (2002) Analyses of Masonry Vaults: A Macro Approach based on Three-Dimensional Damage Model. *Journal of Structural Engineering, ASCE* 128(5):646–654,
17. Faria R., Oliver J., Cervera M. (1998) A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures. *International Journal of Solids and Structures* 35(14):1533–1558
18. Faria R., Oliver J., Cervera M. (2004) Modelling material failure in concrete structures under cyclic actions. *Journal of Structural Engineering, ASCE* 130(12):2997–2005
19. Oliver J. (1989) A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28:461–474