

ANÁLISIS DINÁMICO DE MÁSTILES ARRIOSTRADOS¹

Sergio Preidikman^{2,3}, Julio C. Massa^{2,3} y Bruno A. Rocca³

Resumen: En este trabajo se estudia la respuesta dinámica de mástiles arriostrados comúnmente utilizados en telecomunicaciones, mediciones meteorológicas y aún, más recientemente, en líneas de transmisión eléctrica. Para llevar a cabo simulaciones numéricas de una manera simple se modela el mástil reticulado de tres o cuatro caras como una viga-columna apoyada sobre un conjunto de soportes no-lineales y sin masa que representan el sistema de riendas. El efecto de segundo orden de las fuerzas de compresión en la dirección del mástil se tiene en cuenta mediante el uso de una matriz de rigidez geométrica. Los cables que representan el conjunto de apoyos elásticos se idealizan usando el modelo parabólico clásico, válido para cables con flecha pequeña. El sistema estructural aquí presentado tiene dos grados de libertad por nudo: el desplazamiento transversal y la rotación de los nudos en los cuales se ha discretizado el sistema. Primero se estudia estáticamente la variación de la rigidez horizontal de un nudo arriostrado en función de la pretensión de montaje y del desplazamiento horizontal de dicho nudo. Para tener en cuenta el valor instantáneo de la rigidez, que es función de los desplazamientos, se desarrolló un algoritmo que permite integrar numéricamente e interactivamente en el dominio del tiempo el sistema de ecuaciones diferenciales que describe al sistema dinámico no lineal. Finalmente, se comparan resultados provistos por el modelo totalmente no lineal de los cables con aquellos provistos por linealizaciones habitualmente utilizadas en la práctica.

Palabras clave: estructuras de tracción, mástiles arriostrados, soluciones periódicas.

DYNAMIC ANALYSIS OF GUYED TOWERS

Abstract: A numerical approach capable of predicting the dynamic behavior of guyed towers commonly used for wireless communication, meteorological measurements, and recently, even for power transmission, is presented in this paper. In order to carry out numerical simulations in a simple way, the three/four-legged latticed mast is modeled as a beam-column standing on a set of massless, non-lineal springs which represent the guys. Because the inherent non-linear behavior of tall guyed masts, geometrics nonlinearities are included in the finite element procedure. A geometrical stiffness matrix is included to account for the influence of the axial force acting on the mast on the transverse vibrations of the guyed tower. The cables are idealized using the classic parabolic model, valid for small strain elastic catenaries. Self-weight and inertia of the cables are neglected. The legs, diagonals and horizontal members of the mast are modeled as a two-node, bi-dimensional elastic beam-column element with two degrees-of-freedom at each node. Nonlinear dynamic response is computed in the time domain using a predictor-corrector method to perform a step-by-step integration of the governing equations of motion. The results provided by the non-lineal model were compared with those obtained from the linearization commonly used in practice.

Keywords: braced masts, periodic solutions, traction structures.

¹ Artículo recibido el 1 de diciembre de 2005 y en forma revisada el 10 de abril de 2006.

² Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina.

³ Departamento de Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, Campus Universitario, Ruta Nacional 36 Km. 601. 5800 Río Cuarto. Argentina.

INTRODUCCIÓN

Los estudios de fenómenos inherentes a elementos estructurales que contienen cables y trabajan a tracción (estructuras de tracción) tales como mástiles arriostrados (Irvine, 1981), puentes colgantes y arriostrados (Pugsley, 1968), líneas que anclan varias estructuras oceánicas como boyas, barcos y plataformas (Leonard y Nath, 1981; Ramberg et al., 1977 y Tuah, 1983), permiten desarrollar nuevos tipos de diseños que pueden soportar satisfactoriamente esta clase de solicitaciones.

En el caso de mástiles arriostrados, el funcionamiento de los cables es no lineal y depende de los desplazamientos de los nudos arriostrados. El funcionamiento del mástil como viga-columna es también no-lineal; esta no-linealidad proviene de la interacción entre las grandes cargas axiales (normalmente cercanas a las de pandeo) y los considerables desplazamientos laterales que ocurren en condiciones normales de trabajo (Greene, 1985; Goldberg et al., 1973 y Chajes et al., 1979). Otros factores tales como ráfagas de viento, vibraciones inducidas por emisión de vorticidad, “galope” de las riendas, sismos, presencia de masas rotantes desbalanceadas y ruptura de riendas (Buchholdt et al., 1982), entre otros, cobran gran importancia al momento de realizar un análisis dinámico de mástiles arriostrados.

Las estructuras de tracción (conteniendo cables), son susceptibles de experimentar grandes movimientos debido a cargas concentradas y efectos dinámicos debido a su pequeña rigidez. La respuesta de este tipo de sistemas es altamente no-lineal tanto para cargas de pretensión como para cargas en servicio activo de la estructura, a pesar de la linealidad de los materiales y las cargas aplicadas (Leonard, 1988).

Las cargas de pretensión son fuerzas (cargas originadas en el montaje, peso o presión) que actúan sobre una configuración predominante de equilibrio estático en la estructura. Este tipo de cargas estabiliza la estructura y además proporciona rigidez a futuras deformaciones. La respuesta del sistema a este tipo de cargas es siempre no-lineal en la configuración de equilibrio, ya que el estado de tensión es dependiente de las cargas actuantes. Las cargas de servicio son aquellas fuerzas variables, estáticas o dinámicas, que pueden actuar sobre la estructura a lo largo de su vida útil. La respuesta del sistema a este tipo de carga puede ser no-lineal o cuasi-lineal, dependiendo de la dirección y magnitud relativa de estas cargas respecto al estado de tensión y la configuración de la estructura pretensionada.

En este trabajo se analiza primero, en forma estática, la incidencia sobre la rigidez horizontal de los nudos arriostrados y sobre la carga de compresión del mástil, de la variación de la rigidez instantánea de los cables en función del desplazamiento del nudo al que concurren. Este análisis se realiza para un sistema con cuatro planos de riendas a 90° y para un sistema espacial con tres planos de riendas a 120° . Esas variables, rigidez horizontal y carga de compresión, y su variación instantánea tienen una incidencia muy importante sobre las características dinámicas de los mástiles arriostrados. Posteriormente se realiza un análisis dinámico lineal y un análisis dinámico no-lineal de un sistema mástil-riendas y se presentan gráficos que muestran la incidencia del efecto no lineal de las riendas sobre el período natural del sistema.

EL MODELO ESTRUCTURAL

El mástil se modela como una viga-columna continua, tanto en la distribución de rigidez como en la distribución de masa. Esta viga columna se considera apoyada sobre un conjunto de soportes elásticos no-lineales y sin masa que representan el sistema de riendas.

En la Figura 1 se muestra el modelo de la viga-columna utilizado para llevar a cabo las simulaciones numéricas. La viga-columna se modela con dos grados de libertad dinámicos en el plano por nudo: U_1 y U_2 son los desplazamientos transversales de la viga y θ_1 y θ_2 son los giros de los respectivos nudos.

El efecto de las fuerzas en la dirección del mástil causadas por las riendas se tiene en cuenta mediante una matriz de rigidez geométrica. Este efecto introduce no-linealidades del tipo geométrica que son importantes cuando se producen grandes desplazamientos debido a cambios significativos en la geometría de la estructura, de manera que las ecuaciones de equilibrio deben formularse en la configuración deformada. Es importante notar que al considerar el equilibrio en la configuración deformada del sistema, se acopla el efecto axial y el efecto de flexión.

Los cables, que constituyen un conjunto de apoyos elásticos no-lineales, se idealizan usando el modelo parabólico clásico. Este modelo es aplicable en el caso de cables con flecha pequeña. En la Figura 2 se muestra el modelo de cable parabólico utilizado para llevar a cabo las simulaciones numéricas.

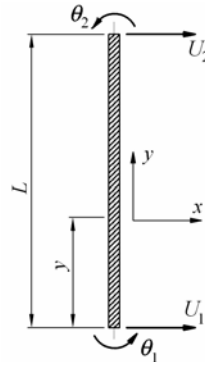


Figura 1: Modelo de viga columna utilizado en las simulaciones numéricas.

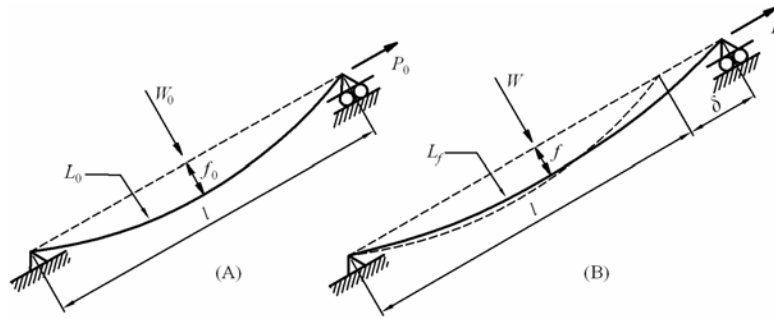


Figura 2: El modelo de cable parabólico.

Las relaciones que gobiernan el modelo de cable parabólico son:

$$\begin{aligned} \text{Figura 2 (A)} \quad & \begin{cases} P_0 f_0 = \frac{W_0 l}{8} \Rightarrow \frac{f_0}{l} = \frac{W_0}{8 P_0} \\ L_0 = l + \frac{8}{3} l \left[\frac{f_0}{l} \right]^2 \end{cases} & \text{Figura 2 (B)} \quad & \begin{cases} \frac{f}{(l + \delta)} = \frac{W}{8 P} \\ L_f = (l + \delta) + \frac{8}{3} (l + \delta) \left[\frac{f}{(l + \delta)} \right]^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

donde δ es la variación de distancia entre los extremos del cable, P_0 es la carga de pretensión, P es la carga instantánea en el cable y f_0 es el desplazamiento transversal máximo (flecha) en la configuración inicial del cable. W_0 es la fuerza total transversal al cable en su estado inicial mientras que en la configuración final W puede resultar distinto de W_0 (por acción del viento, presencia de manguito de hielo, etc.).

El modelo para la viga-columna y el sistema de riendas se presentan en forma esquemática en la Figura 3. El desplazamiento transversal $U_x(t)$ de la viga-columna se considera positivo en el sentido positivo del eje de las abscisas x y el giro $\theta(t)$ se considera positivo en el sentido antihorario de las manecillas del reloj.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de las leyes de movimiento de Newton. Cuando se ignora el amortiguamiento, éstas tienen la siguiente forma:

$$[M] \ddot{\mathbf{x}}(t) + [K] \mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{F}(t) \quad (2)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ representa el vector de desplazamientos nodales, $[M]$ es la matriz de masa consistente del sistema (Paz, 1980), $[K]$ es la matriz de rigidez total de la estructura, $\mathbf{P}(\mathbf{x}(t))$ representa el vector que tiene en cuenta la contribución de rigideces proveniente de los cables, $\mathbf{F}(t)$ es un vector que contiene las fuerzas de excitación externa.

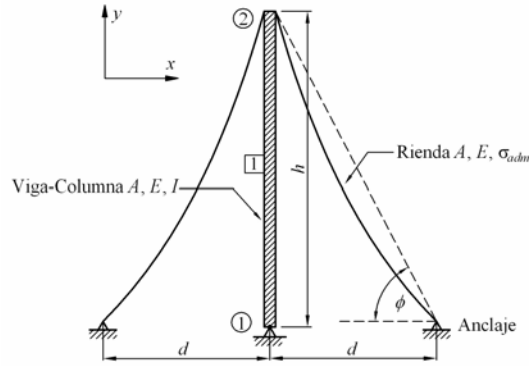


Figura 3: Esquema del modelo viga-columna y sistema de riendas.

Las ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal del sistema se integran numéricamente en forma simultánea en el dominio del tiempo utilizando un método implícito predictor-corrector de cuarto orden desarrollado por Hamming (Preidikman, 1998; Preidikman y Mook, 1997).

La matriz de masa consistente del elemento en coordenadas locales está dada por:

$$[M] = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 36 & 32 L & 54 & -13 L \\ & 4 L^2 & 13 L & -3 L^2 \\ & & 156 & -22 L \\ & \text{simétrica} & & 4 L^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde ρ es la densidad por unidad de volumen, A es el área del elemento y L su longitud.

La matriz de rigidez total está compuesta por la suma de la matriz de rigidez elástica, $[K_E]$ y la matriz de rigidez geométrica, $[K_G]$, como se muestra a continuación:

$$[K] = [K_E] + [K_G] \quad (4)$$

La matriz de rigidez elástica del elemento en coordenadas locales está dada por,

$$[K_E] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 L & -12 & 6 L \\ & 4 L^2 & -6 L & 2 L^2 \\ & & 12 & -6 L \\ & \text{simétrica} & & 4 L^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material e I es el momento de inercia del elemento.

La matriz de rigidez geométrica utilizada en este trabajo (Przemieniecki, 1968) está dada por:

$$[K_G] = -\frac{P}{30 L} \begin{bmatrix} 36 & 3 L & -36 & 3 L \\ & 4 L^2 & -3 L & -L^2 \\ & & 36 & -3 \\ & \text{simétrica} & & 4 L \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde P es la carga axial, que resulta positiva si es de compresión.

La relación implícita carga–desplazamiento (P - δ), en el modelo de cable parabólico (Livesley, 1969) está dada por la siguiente expresión no lineal:

$$P^3 + P^2 \left[\frac{a_0}{2P_0^2} - P_0 - \frac{AE}{l} \delta \right] - \frac{a}{2} = 0 \quad \text{donde: } a = \frac{EA}{12} W^2, \quad a_0 = \frac{EA}{12} W_0^2 \quad (7)$$

donde E es el módulo de elasticidad del cable y A es el área transversal del cable.

La incorporación de relaciones no-lineales carga-desplazamiento debida a las riendas no presenta complicaciones, ya que la solución del problema se obtiene mediante integración numérica de las ecuaciones de movimiento.

ANÁLISIS ESTÁTICO DE LA RIGIDEZ INSTANTÁNEA DE LA RIENDAS

En la Tabla 1 se muestran datos del mástil y de las riendas utilizados en el análisis estático referido a la variación de la rigidez instantánea del sistema esquematizado en la Figura 3.

Tabla 1: Datos empleados en el análisis de rigidez.

DATOS DEL MÁSTIL	DATOS DE LAS RIENDAS
Altura: $h = 13$ m Proyección: $d = 4$ m $E = 2,06 \times 10^{11}$ Pa $I = 3,06796 \times 10^{-7}$ m ⁴ $A = 0,0019635$ m ²	$E = 1,56 \times 10^{11}$ Pa $\rho = 7800$ Kg/m ³ $A = 3,44 \times 10^{-5}$ m ² $P_0 = 615,73$ N $\sigma_{Rot} = 11,47 \times 10^8$ Pa

donde P_0 y σ_{Rot} son, respectivamente, la fuerza de pretensión y la tensión de rotura del cable.

En la Figura 4 se presenta el gráfico de la carga en cada una de las riendas y la carga de compresión sobre el mástil en función del desplazamiento horizontal del nudo arriostrado. La proyección del desplazamiento U_2 sobre la dirección de cada rienda determina el valor de δ para ser usado en la ecuación (7) en cada rienda.

Se puede observar la relación no lineal entre estos parámetros: mientras una rienda se estira y toma más carga (rienda 1) la otra se afloja y toma menos carga. Lo que aumenta la rienda 1 es más que lo disminuye la rienda 2 y por lo tanto la carga de compresión sobre el mástil aumenta con el desplazamiento (cualquiera sea el sentido del desplazamiento horizontal). Para el gráfico se usaron los datos de la Tabla 1.

Análisis de la rigidez horizontal de un nudo arriostrado

La geometría del sistema que se estudia en esta sección se muestra esquemáticamente en la Figura 3 descripta anteriormente. Para realizar un análisis de la rigidez instantánea se comienza definiendo la rigidez horizontal linealizada y la rigidez horizontal variable del nudo arriostrado debido al efecto no lineal de las riendas:

$$\begin{aligned} \text{Rigidez horizontal linealizada: } K_L &= 2 \frac{AE}{l} \cos^2 \phi \\ \text{Rigidez horizontal variable: } K &= \frac{AE}{l} \left[\left(\frac{P_1^3}{P_1^3 + a_0} \right) + \left(\frac{P_2^3}{P_2^3 + a_0} \right) \right] \cos^2 \phi \end{aligned} \quad (8)$$

donde ϕ es el ángulo que forma la horizontal con una línea imaginaria que une el anclaje de la rienda con el nudo arriostrado, P_1 y P_2 son valores instantáneos de la cargas en los cables que dependen implícitamente del desplazamiento nodal U_2 .

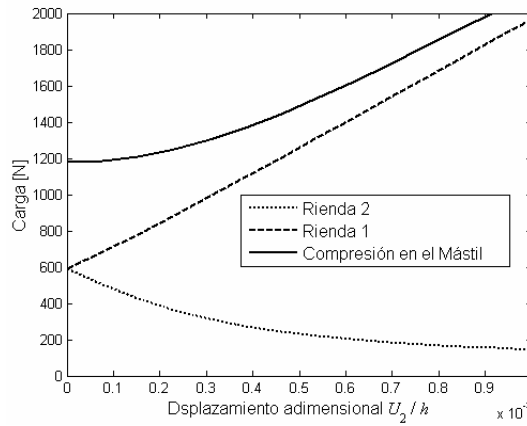


Figura 4: Carga en los cables y en el mástil de la Figura 3 en función de U_2/h (datos de la Tabla 1).

En la Figura 5 se muestra la variación de la rigidez horizontal instantánea provista por las riendas en función del desplazamiento horizontal del nudo 2 (ver Figura 3) para dos valores de pretensión de montaje. Dependiendo del valor de P_0 , la rigidez horizontal del nudo 2 puede aumentar o disminuir a medida que se desplaza ese nudo, esto es conocido como endurecimiento o ablandamiento de la estructura. El valor σ_{adm} que figura en los gráficos como tensión admisible se ha tomado como el 50% de la tensión de rotura del cable.

También se puede observar que la rigidez horizontal del nudo en ambos casos tiende asintóticamente al valor $K = 0,5 K_L$ (donde $K_L = 2AE/l \cos^2 \phi$). Esta situación se presenta cuando, la deformación del sistema es tal que uno de los cables se estira aportando una rigidez casi igual al valor $AE/l \cos^2 \phi$, y el otro se afloja mucho aportando muy poca rigidez. Este análisis se puede efectuar utilizando la ecuación (7) y se ha graficado en la Figura 4.

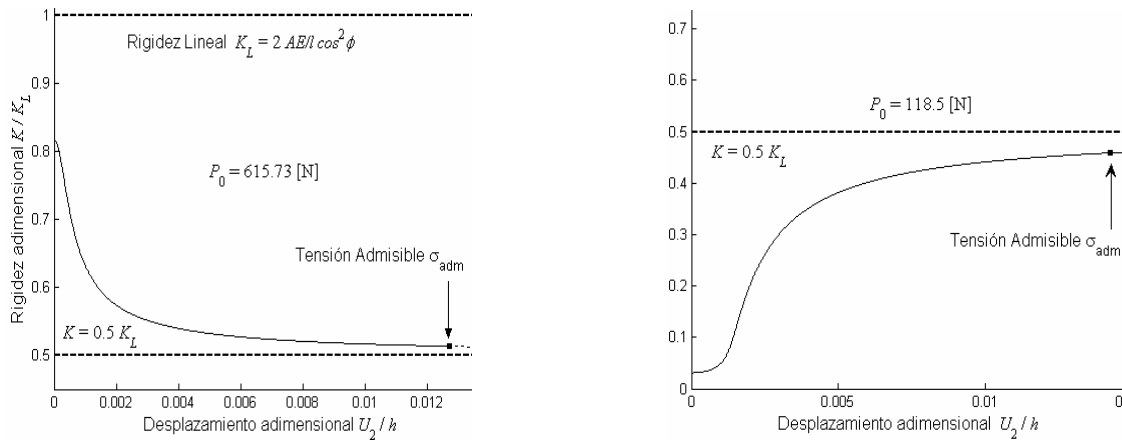


Figura 5: Variación de la rigidez instantánea del nudo 2 en función del desplazamiento horizontal.

En la Figura 6 se ha graficado la rigidez instantánea versus el desplazamiento horizontal del nudo 2 para varios valores de la pretensión.

Límites para los valores de la fuerza de pretensión P

La Norma Americana establece que a los fines del diseño (punto 10.2.1, American National Standard ANSI/TIA/EIA-222-F, 1996), la tensión inicial de las riendas normalmente es el 10 por ciento de la resistencia a la rotura publicada del cable con límites superior e inferior de 15 y 8 por ciento, respectivamente. Se pueden usar valores de tensión inicial no comprendidos dentro de estos límites, siempre que se haya considerado adecuadamente la sensibilidad de la estructura a las variaciones de la tensión inicial y, si fuera necesario, su comportamiento dinámico.

$$(P_0)_{min} = 0,08 \sigma_{Rot} A \quad (P_0)_{max} = 0,15 \sigma_{Rot} A \quad (9)$$

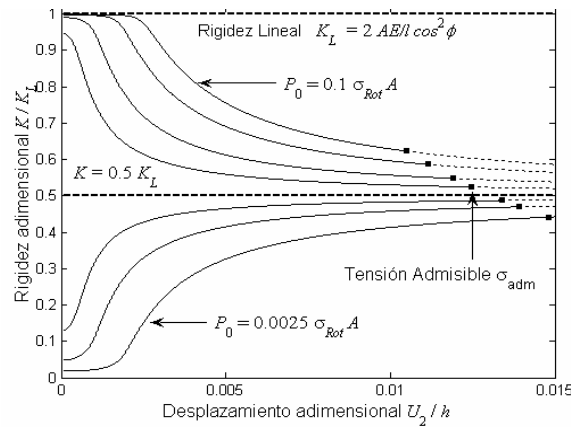


Figura 6: Rigidez instantánea en función del desplazamiento del nudo 2 para varios valores de pretensión.

Según las Normas Argentinas (Apéndice Capítulo 5, Reglamento CIRSOC 306, 1992), la tensión mínima de pretensión de montaje para un mástil está dada por la siguiente expresión:

$$(\sigma_0)_{\min} = 7100 d^{0.667} \longrightarrow (P_0)_{\min} = (7100 d^{0.667}) A \quad (10)$$

donde $(\sigma_0)_{\min}$ es la tensión mínima de pretensión en kN/m², d es la proyección horizontal de la rienda medida en metros y A es el área de la rienda en m².

Estos valores (ecuaciones (9) y (10)) definen un rango de valores que delimitan una zona en la cual trabajarán las riendas. En la Figura 7 se presenta un gráfico donde se muestra dicha zona de trabajo para el mástil arriostrado esquematizado en la Figura 3, cuyos datos están dados en la Tabla 1.

En la zona de trabajo de las riendas se observa que la rigidez horizontal del nudo disminuye cuando se deforma el sistema, esto es equivalente a decir que la estructura se ablanda.

La pretensión de montaje no se mantiene indefinidamente en el valor inicial y podría disminuir con el paso del tiempo de forma tal que la estructura al deformarse, se endurezca en lugar de ablandarse.

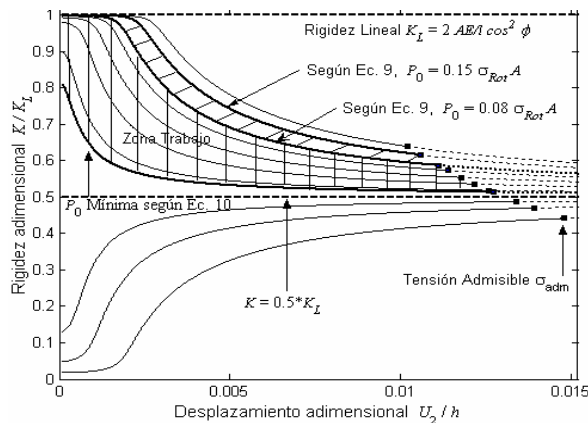


Figura 7: Zona de trabajo de las riendas.

Para mostrar este fenómeno se toma el valor de pretensión mínima que establece la ecuación (10) para el mástil de la Tabla 1, y se obtiene:

$$(P_0)_{\min} = 7100 (4)^{0.667} 0,0000344 = 615,73 \text{ [N]} \quad (11)$$

En la Figura 8 se muestran los resultados obtenidos suponiendo que transcurrido un largo tiempo posterior al montaje de la estructura, la pretensión cae un 50 % : $P_0 \rightarrow 307.86$ N.

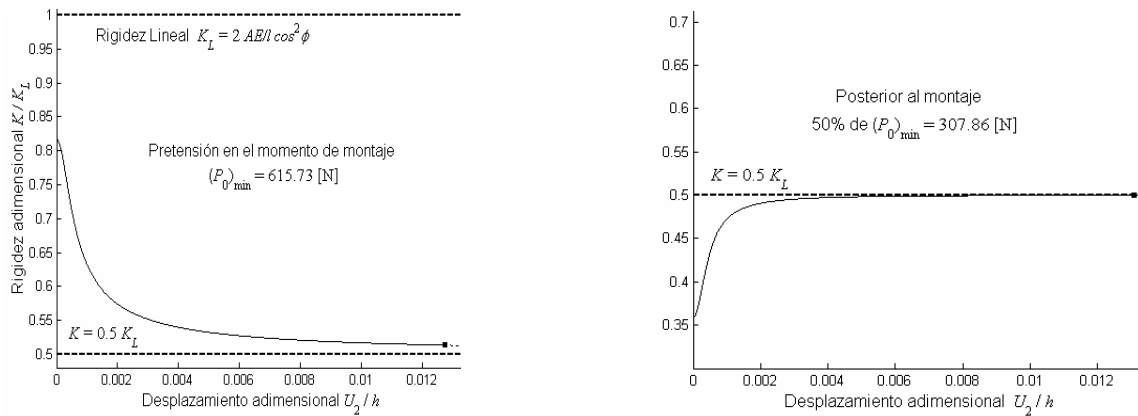


Figura 8: Rigidez del nudo 2: a) al momento del montaje. b) después de transcurrido cierto tiempo.

Análisis de rigidez para un mástil espacial con cuatro planos de riendas a 90°

En la Figura 9 se presenta un esquema del mástil espacial con cuatro planos de riendas a 90°. Considerando un nudo del mástil donde concurren dos riendas iguales y coplanares (uno de cada lado), la rigidez es la suma de la rigidez de cada uno de los cables.

En el límite, cuando el desplazamiento horizontal es muy grande en uno de los dos planos que contienen a las riendas (α o β), uno de los cables aportará la rigidez lineal dada por $K_1 = AE/l \cos^2 \phi$, mientras que el otro cable casi no aportará rigidez, como se vió en la sección 3.1. De la misma forma si en el momento del montaje cada una de las riendas aportaba más de $0,5 K_L$, la rigidez disminuirá con el desplazamiento, en caso contrario aumentará.

Análisis de rigidez para un mástil espacial con tres planos de riendas a 120°

En la Figura 10 se presenta un bosquejo de un mástil espacial con tres planos de riendas a 120°. Tomando como referencia el plano α que contiene a una de las riendas, se estudia a continuación la rigidez instantánea aportada por los tres cables que concurren al nudo arriostrado.

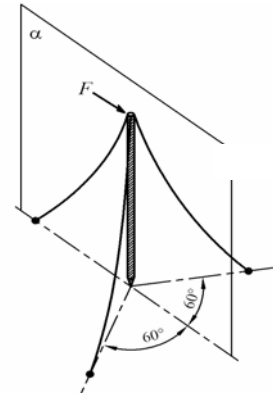
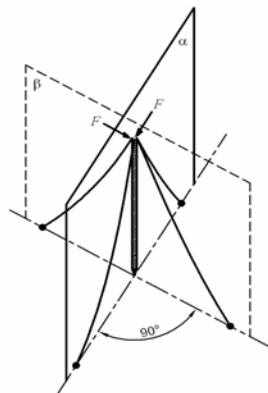


Figura 9: Esquema de una torre espacial con cuatro planos de riendas a 90°.

Figura 10: Esquema de una torre espacial con tres planos de riendas a 120°.

La rienda que se encuentra en el plano aporta una rigidez $K_1 = \psi_1 K_0$:

$$K_1 = \psi_1 K_0 \quad \text{donde: } K_0 = \frac{AE}{l} \cos^2 \phi, \quad \text{y} \quad \psi_1 = \frac{P_1^3}{P_1^3 + a_0} \quad (12)$$

Las riendas que están fuera del plano de referencia aportan poca rigidez:

$$K_2 = \psi_2 K_0 \cos^2 60 = 0,25 \psi_2 K_0 \quad \text{donde:} \quad \psi_2 = \frac{P_2^3}{P_2^3 + a_0} \quad (13)$$

Por lo tanto la rigidez horizontal instantánea del nudo arriostrado resulta:

$$K = K_1 + 2 K_2 = \psi_1 K_0 + 0,5 \psi_2 K_0 \quad (14)$$

La rigidez horizontal inicial de montaje del nudo arriostrado es:

$$K_{\text{montaje}} = 1,5 \psi_0 K_0 = \psi_0 K_L \quad \text{donde:} \quad \psi_0 = \frac{P_0^3}{P_0^3 + a_0} \quad \text{y} \quad K_L = 1,5 \frac{A E}{l} \cos^2 \phi \quad (15)$$

Cuando el desplazamiento es muy grande ($U_2 \rightarrow +\infty$), se estira el cable contenido en el plano y se aflojan las riendas no contenidas en el plano:

$$U_2 \rightarrow +\infty \quad \psi_1 \rightarrow 1 \quad \psi_2 \rightarrow 0 \quad K_{+\infty} \rightarrow K_0 \quad (16)$$

Si el desplazamiento es muy grande pero en el sentido opuesto, se estiran las riendas fuera del plano:

$$U_2 \rightarrow -\infty \quad \psi_1 \rightarrow 0 \quad \psi_2 \rightarrow 1 \quad K_{-\infty} \rightarrow 0,5 K_0 \quad (17)$$

Si la pretensión P_0 tiene un valor suficientemente grande como para hacer que el valor de ψ_0 sea superior a 2/3, el nudo se ablanda con el desplazamiento cualquiera sea el sentido, ya que:

$$\psi_0 > 2/3 \Rightarrow K_{\text{montaje}} > K_0 \Rightarrow K_{\text{montaje}} > K_{+\infty} > K_{-\infty} \longrightarrow \text{"ablanda"} \quad (18)$$

Por el contrario, si la pretensión P_0 tiene un valor suficientemente pequeño para que ψ_0 sea inferior a 1/3, el nudo se endurece con el desplazamiento cualquiera sea el sentido, ya que:

$$\psi_0 < 1/3 \Rightarrow K_{\text{montaje}} < 1/2 K_0 \Rightarrow K_{\text{montaje}} < K_{-\infty} < K_{+\infty} \longrightarrow \text{"endurece"} \quad (19)$$

En conclusión, cuando el coeficiente ψ_0 debido a la pretensión es mayor a 2/3, el mástil se ablanda con el desplazamiento y cuando ψ_0 es menor a 1/3, el mástil se endurece.

En la Figura 11 se presenta un gráfico donde ψ_0 es mayor que 2/3; se observa que el mástil se ablanda en ambos sentidos. Nótese que este ablandamiento no es simétrico, sino que la torre se ablanda más en un sentido que en el otro.

En la Figura 12 se muestra un gráfico donde ψ_0 es menor que 1/3 y se observa un comportamiento contrario al de la Figura 11 ya que el mástil se endurece en ambos sentidos, pero nótese también que este endurecimiento no es simétrico.

En la Figura 13 se presenta el caso intermedio donde ψ_0 es mayor que 1/3 y menor que 2/3,

$$1/3 < \psi_0 < 2/3 \Rightarrow K_{-\infty} < K_{\text{montaje}} < K_{+\infty} \quad (20)$$

Esta situación produce un resultado muy interesante, ya que hace que el mástil se ablande en un sentido del desplazamiento y se endurezca en el otro.

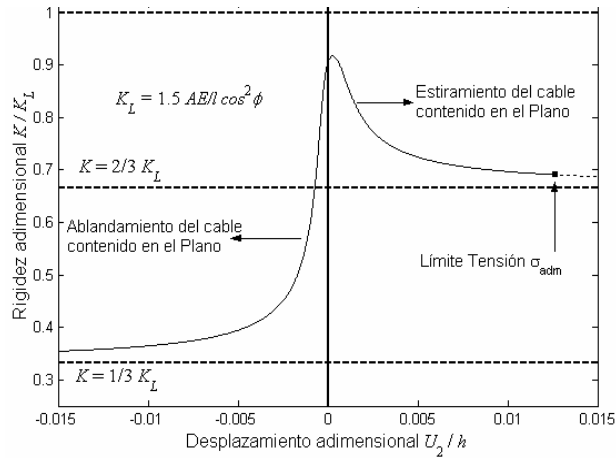


Figura 11: Rigidez vs. desplazamiento para $\psi_0 = 0,9$.

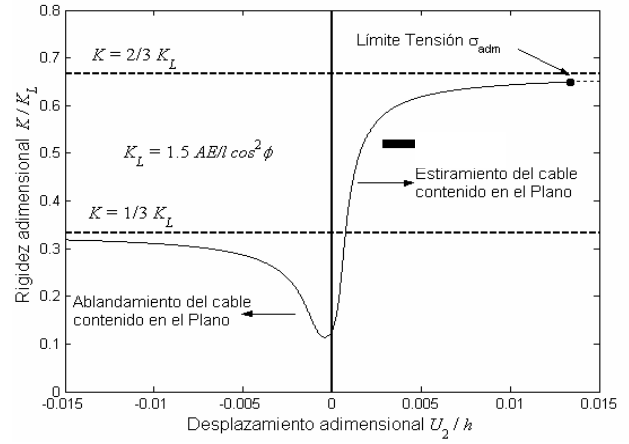


Figura 12: Rigidez vs. desplazamiento para $\psi_0 = 0,13$.

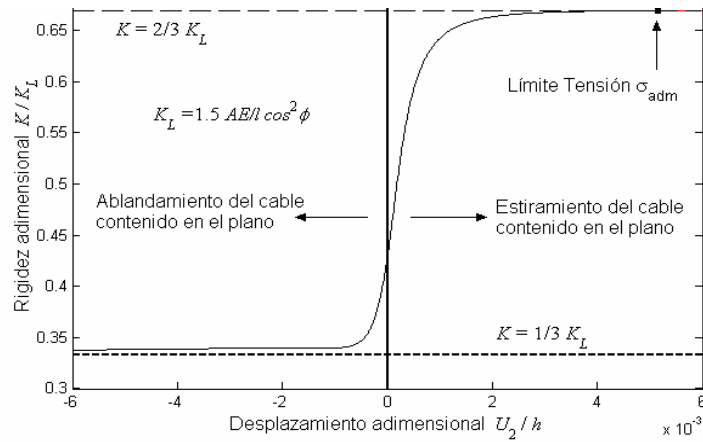


Figura 13: Gráfico de rigidez horizontal vs. desplazamiento para $\psi_0 = 0,42$.

En la Figura 14 se puede observar la variación de la rigidez instantánea horizontal del nudo 2 respecto al desplazamiento para distintos valores de ψ_0 .

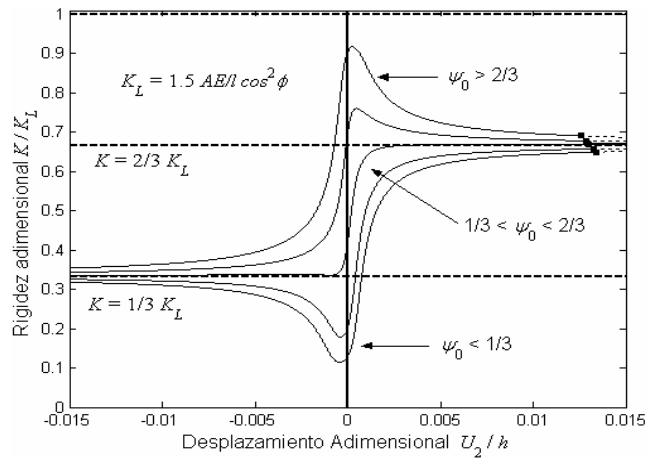


Figura 14: Rigidez horizontal del nudo para varios ψ_0 .

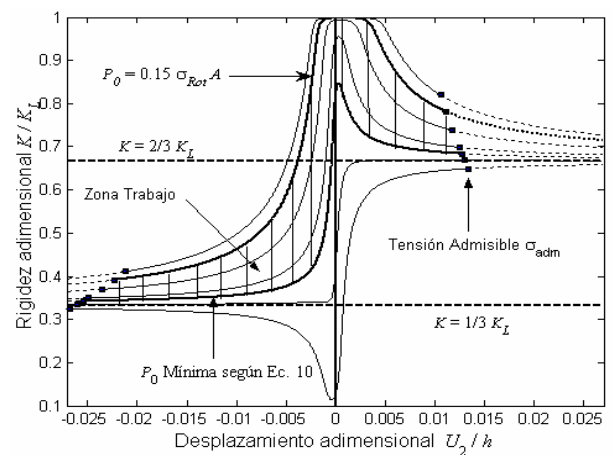


Figura 15: Zona de trabajo de las riendas.

Es interesante analizar la Figura 15 puesto que en este gráfico se presenta la zona de trabajo de las riendas según las ecuaciones 9 y 10. Como se ve, en la práctica sólo es posible el caso donde ψ_0 es mayor que $2/3$ y por lo tanto la estructura después del montaje perderá rigidez con el desplazamiento en las dos direcciones, más en el sentido de ablandar el cable contenido en el plano y menos en la dirección opuesta.

ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MÁSTIL ARRIOSTRADO EN EL PLANO

Esquema de Integración Numérica

A efectos de integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento (2) en el dominio del tiempo, se introduce el siguiente vector de estado:

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t))^T = (x_1, \theta_1, x_2, \theta_2, \dots, x_n, \theta_n; \dot{x}_1, \dot{\theta}_1, \dot{x}_2, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{x}_n, \dot{\theta}_n)^T \quad (21)$$

Premultiplicando ambos miembros de (2) por la inversa de la matriz de masa $[M]$ se obtiene la siguiente expresión para las aceleraciones:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{y}}_2(t) = -[M]^{-1} [K] \mathbf{y}_1(t) - [M]^{-1} (\mathbf{P}(\mathbf{y}_1(t)) - \mathbf{F}(t)) \quad (22)$$

Por consiguiente el sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden dado por (2) puede ser escrito como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\dot{\mathbf{y}} = [A] \mathbf{y} + \mathbf{f} \quad (23)$$

donde

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ \hline -[M]^{-1} [K] & \mathbf{0}_{n \times n} \end{array} \right] \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_{n \times n} \\ -[M]^{-1} (\mathbf{P}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{F}(t)) \end{array} \right\} \quad (24)$$

El sistema de ecuaciones (23) se integra numéricamente en el dominio del tiempo mediante un esquema predictor–corrector de cuarto orden desarrollado por Hamming (Preidikman y Mook, 1997 y Preidikman, 1998).

En cada paso de integración, al cual corresponde un estado, se calculan las fuerzas en los cables y se las descompone en el sistema de referencia global. Después de calcular la fuerza en cada cable se obtiene la fuerza aplicada al mástil en el nudo correspondiente. De esta manera se obtienen dos fuerzas en coordenadas globales aplicadas al mástil: una fuerza transversal a la torre y una fuerza en la dirección del mástil a la cual se le suma también el peso de todos los tramos de la torre que se encuentran por encima del nudo analizado. Las fuerzas de compresión resultantes pueden producir fenómenos de inestabilidad (pandeo).

En la Figura 16 se esquematiza la forma en que se descomponen las fuerzas ejercidas por las riendas sobre el mástil.

La fuerza en la dirección transversal al mástil debido a los cables en el nudo i resulta: $P_i = P_{j_2} \cos \phi_{j_2} - P_{j_1} \cos \phi_{j_1}$

La fuerza en la dirección del mástil debido a los cables en el nudo i está dada por: $Q_i = P_{j_1} \sin \phi_{j_1} + P_{j_2} \sin \phi_{j_2}$

En resumen, las etapas llevadas a cabo en cada paso de integración son las siguientes:

1. Se calculan los desplazamientos de los nudos y el δ en cada uno de los cables.
2. Se resuelve la ecuación cúbica (7) para obtener la carga en cada cable.
3. Se calcula la matriz de rigidez elástica, la matriz de rigidez geométrica y el vector de cargas externas.

4. Se predice el estado de la estructura al final del paso de integración.
5. La solución predicha es modificada usando el llamado “error de truncamiento local”.
6. La solución predicha y modificada es “corregida” mediante un procedimiento iterativo hasta obtener convergencia.
7. Los desplazamientos en los cables y las matrices de rigidez elástica y geométrica son recalculados en cada iteración.
8. Se determina el nuevo error de truncamiento para utilizarlo durante el siguiente paso de integración y para evaluar la solución final correspondiente al paso actual.
9. Se obtiene el estado del sistema correspondiente al tiempo actual.
10. Se incrementa el tiempo y se retoma el ciclo desde 1.

Los detalles del método de integración pueden encontrarse en Preidikman (1998).

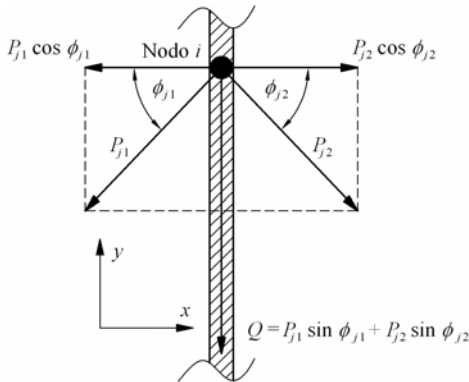


Figura 16: Descomposición de las fuerzas inducidas por las riendas.

Simulaciones Numéricas

En las simulaciones numéricas se utilizó una torre simétrica con dos riendas coplanares como se muestra en la Figura 3. Los datos utilizados se detallan en la Tabla 2. Se eligió un mástil “típico” con un solo nivel de riendas porque en ese caso se puede encontrar el período del modelo linealizado utilizando fórmulas tabuladas (Blevins, 2001).

Tabla 2: Datos empleados en la simulación numérica.

DATOS GENERALES	DATOS DEL MÁSTIL	DATOS DE LAS RIENDAS
$N_n = 6$ $\Delta t = 0,001$ seg. $N_{\Delta t} = 15000$ pasos Proyección: $d = 4$ m	$L = 13$ m $m = 15,119$ Kg/m $A = 0,0019635$ m ² $(EI) = 63201$ Nm ²	$E = 1,56 \times 10^{11}$ Pa $\rho = 7800$ Kg/m ³ $A = 3,44 \times 10^{-5}$ m ² $P_0 = 615,73$ N

donde N_n es el número de nudos utilizados para discretizar el mástil, (EI) es la rigidez flexional del mástil y P_0 es la pretensión de las riendas.

Vibraciones libres: Para poner en evidencia las características dinámicas del sistema se determinó la respuesta en el tiempo en el caso de vibraciones libres. Se utilizó un programa de integración numérica desarrollado utilizando un esquema predictor–corrector de cuarto orden. Para llevar a cabo las simulaciones cuyos resultados se muestran en las Figuras 17 y 18, se usaron 15000 pasos de tiempo. El tiempo de CPU, en una computadora personal, fue 20 minutos.

Condiciones iniciales: El sistema se encuentra en reposo, con desplazamientos prefijados. Esos desplazamientos corresponden a la forma del primer modo de vibrar del sistema linealizado donde las riendas tienen el valor de la pretensión de montaje independientemente del desplazamiento. Las condiciones iniciales impuestas para realizar las simulaciones numéricas se obtuvieron multiplicando por 50 los valores de la Tabla 3 (notar que el desplazamiento horizontal máximo del nudo arriostrado es igual a 0,836 cm. mientras que la amplitud el desplazamiento del nudo 4 es 50 cm.). Los valores que se muestran en la Tabla 3 corresponden al modo fundamental de la estructura linealizada normalizado respecto a la componente más grande.

Tabla 3: Condiciones iniciales de las vibraciones libres.

	Desp. [cm]	Giro [rad]	Vel. Lineal [cm/seg]	Vel. Ang. [rad/seg]
Nudo 1	0.0000000	-0.0025265	0.0	0.0
Nudo 2	0.6147739	-0.0020470	0.0	0.0
Nudo 3	0.9962609	-0.0007912	0.0	0.0
Nudo 4	1.0000000	0.0007628	0.0	0.0
Nudo 5	0.6254833	0.0020221	0.0	0.0
Nudo 6	0.0167197	0.0025044	0.0	0.0

Incidencia de la pretensión:

Para poner en evidencia la incidencia de la pretensión de las riendas se consideraron dos casos:

- A) Riendas “normales” ($P_0 = 615,73$ N), pretensión mínimo permitida por la Norma (Ecuación 10).
- B) Riendas “flojas”, pretensión reducida a la mitad del valor de montaje por transcurso del tiempo.

Para mostrar la incidencia de la carga de compresión en el mástil se consideraron dos casos:

- I) se ignora la incidencia de carga de compresión en el mástil.
- II) se considera la incidencia de carga de compresión en el mástil.

Resultados obtenidos con el modelo no-lineal

Se puede observar que el efecto de las riendas sobre el mástil modifica radicalmente la forma de vibrar de la estructura. A diferencia de los problemas lineales, donde el período es una propiedad del sistema, en este tipo de problemas altamente no-lineales el período se ve afectado por las condiciones iniciales y por las características físicas del cable.

En la Figura 17 se presenta un gráfico para el caso de rienda “normal” donde se muestra la respuesta del nudo 4 obtenida resolviendo el problema en forma linealizada. La curva en línea llena es la respuesta del sistema obtenida ignorando las fuerzas de compresión en la dirección del mástil en donde $T = 1.685$ seg. La curva en línea punteada tiene en cuenta las fuerzas de compresión en el mástil, con $T = 1.95$ seg.

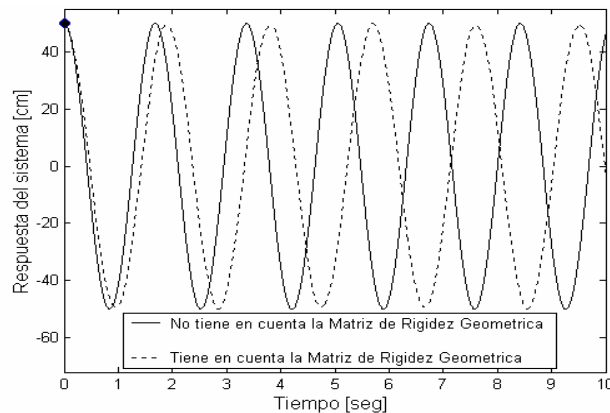


Figura 17: Respuesta del sistema lineal.

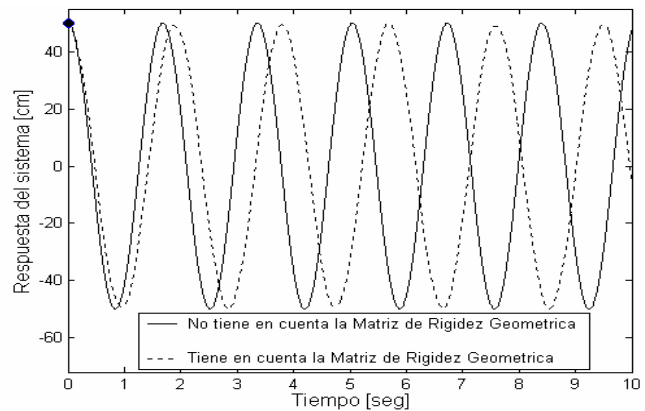


Figura 18: Respuesta del sistema no-lineal.

En la Figura 18 se grafica la respuesta del mismo nudo 4 calculada en forma no-lineal. Los resultados son prácticamente idénticos a los determinados con el modelo linealizado.

Siendo un poco más rigurosos no es correcto hablar de un período de la estructura, ya que diferentes puntos de la estructura se mueven con distintos periodos, como se observa en las Figuras 19, 20, 21 y 22.

En las Figuras 19 y 20 se presentan dos gráficos donde se muestra como varían los períodos de los distintos nudos de la estructura al considerar el efecto no lineal de las riendas. Se puede observar que la fuerza de compresión en el mástil debida a las riendas disminuye la rigidez flexional del mástil y esto aumenta considerablemente el período (alrededor del 11%). La forma del “modo no-lineal” es diferente de la correspondiente al caso lineal, por eso las condiciones iniciales dadas en la Tabla 3 tienen pequeñas componentes en los modos superiores. Esto resulta notorio en el gráfico correspondiente al nudo 6 porque el desplazamiento horizontal de ese nudo es muy pequeño y el error resulta comparable.

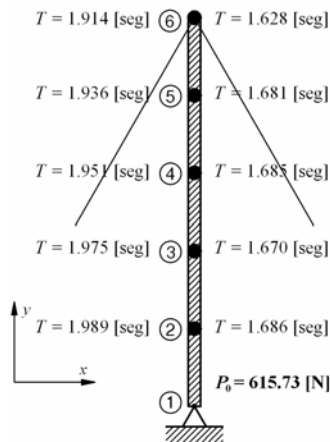


Figura 19: Período de los distintos nudos con $P_0 = 615,73 \text{ N}$.

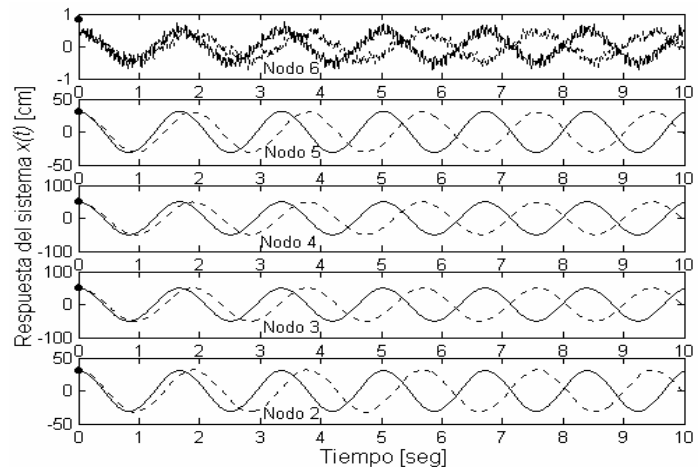


Figura 20: Desplazamiento horizontal de los nudos vs. tiempo con $P_0 = 615,73 \text{ N}$.

Los períodos indicados a derecha en las Figuras 19 y 21 se obtienen ignorando la carga de compresión en el mástil.

En las Figuras 21 y 22 se muestra el cambio en el período de los distintos nudos de la estructura para las vibraciones libres no amortiguadas con condiciones iniciales especificadas en la Tabla 3 igual que en el caso anterior (Figuras 19 y 20), pero en este caso consideró la pretensión reducida a la mitad del valor de montaje por transcurso del tiempo. Esto permite evidenciar en mayor medida el comportamiento no-lineal de las riendas.

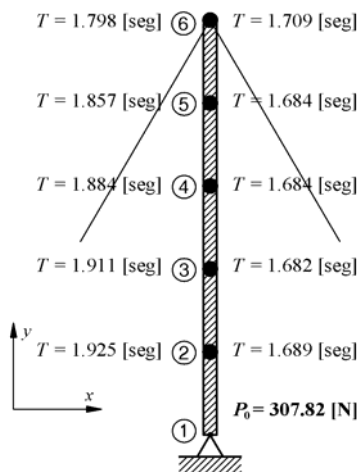


Figura 21: Período de los distintos nudos con $P_0 = 307,82 \text{ N}$.

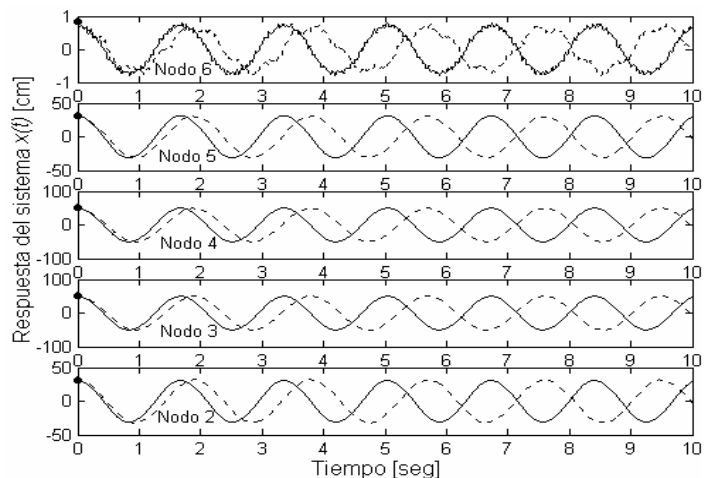


Figura 22: Desplazamiento horizontal de los nudos vs. el tiempo con $P_0 = 307,82 \text{ N}$.

Comparación de resultados obtenidos con diferentes modelos

Los períodos naturales de vibración calculados utilizando distintos modelos lineales y no lineales se resumen en la Tabla 4. En los casos no lineales se ha usado el período promedio: (■) valor promedio de los 5 nudos en la Figura 19,

(♠) promedio de los 5 nudos en la Figura 21. Según se observa en la Tabla 5, las cargas de compresión en el mástil son importantes cuando se las compara con la carga crítica de pandeo P_E (calculada como viga biarticulada).

Tabla 4: Períodos (en seg.) de las vibraciones calculados con varios modelos.

Referencias: Columna simplemente apoya sin carga axial $\rightarrow T = 1,6640$ seg. Carga crítica de pandeo viga biarticulada $\rightarrow P_E = 3690,9$ N.				RIENDAS	
				A: normales $P_0 = 615,73$ N	B: muy flojas $P_0 = 307,86$ N
MÁSTIL	I Ignorando compresión en el mástil	I-1	Modelo linealizado. Rigidez de las riendas fija en el valor de montaje. Ignorando compresión del mástil.	1,673	1,683
		I-2	Apoyo elástico no lineal. Rigideces de las riendas variables en el tiempo. Ignorando compresión del mástil.	1,670 (■)	1,690 (♠)
	II Considerando compresión en el mástil	II-1	Modelo linealizado. Rigideces de las riendas fija en el valor de montaje. Compresión del mástil fija en el valor de montaje.	1,958	1,803
		II-2	Modelo totalmente no lineal. Rigideces de las riendas variables en el tiempo. Compresión del mástil variable en el tiempo.	1,953 (■)	1,875 (♠)

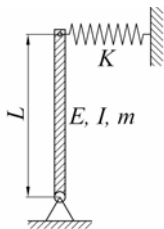
Tabla 5: Carga de compresión P en el mástil vs. carga crítica de pandeo P_E en los modelos 3 y 4.

ESTADO DE LAS RIENDAS	P_E [N]	$P_{\min}$ [N]	$P_{\max}$ [N]	$P_{\min}/P_E$	$P_{\max}/P_E$
Caso A: Riendas normales	3690,9	1177,0	1654	0,319	0,448
Caso B: Riendas muy flojas	3690,9	588,4	1139	0,159	0,308

Verificación de los resultados correspondientes a modelos linealizados

Modelo I-1

El periodo de vibración de una viga sin carga axial con un extremo articulado y el otro sobre un apoyo elástico, se encuentra tabulado (Blevins, 2001). L , $E I$ y m son el largo, el módulo de Young, el momento de inercia y la masa por unidad de longitud de la columna, K es la rigidez del resorte.



$$T = \frac{2\pi L^2}{\lambda^2} \sqrt{\frac{m}{EI}} \rightarrow T = \frac{16,4235}{\lambda^2} \text{ seg.} \quad (25)$$

Figura 23: Columna con apoyo elástico lineal sin carga axial.

El valor de λ se determina en función de las rigideces relativas x :

$$x = \frac{K L^3}{E I} \rightarrow \lambda = \begin{cases} 1,3098 x^{0,2486} & \text{cuando } x < 1 \\ \pi - 16/x + 75/x^2 - 60,8318/x^3 & \text{cuando } x \geq 1 \end{cases} \quad (26)$$

Estas expresiones analíticas de λ se obtuvieron ajustando valores tabulados (Blevins, 2001).

Datos de las riendas:

$$l = \sqrt{13^2 + 4^2} = 13,60147 \text{ m} \quad \cos \phi = 4/13,60147 = 0,294086$$

$$\text{Peso de la rienda: } \text{Peso} = \rho g A l = 7800 \times 9,8 \times 0,000344 \times 13,60147 = 35,7655 \text{ N}$$

$$W = \text{Peso} \times \cos \phi = 35,7655 \times 0,294086 = 10,5181 \text{ N}$$

$$AE = 0,0000344 \times 1,56 \times 10^{11} = 5366400 \text{ N} \rightarrow a = AE W^2 / 12 = 4,9474 \cdot 10^7 \text{ N}^3$$

$$K = 2 \frac{AE}{l} \left(\frac{P_0^3}{P_0^3 + a} \right) \cos^2 \phi \rightarrow K = \frac{68245}{1 + a/P_0^3} \rightarrow x = \frac{K L^3}{EI} = \frac{2372,37}{1 + 49474000/P_0^3}$$

Tabla 6: Períodos de las vibraciones libres de la columna con apoyo elástico de la Figura 23.

ESTADO DE LAS RIENDAS	P_0 [N]	K [N/m]	x	λ	T [seg]
Caso A: Riendas normales	615,73	56311	1957,46	3,13344	1,673
Caso B: Riendas flojas	307,82	25311	880,04	3,12350	1,683

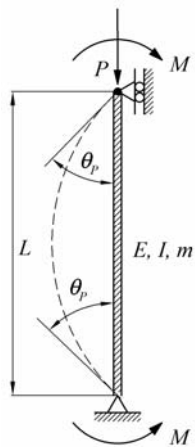
Para el caso de la viga simplemente apoyada:

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda = \pi \Rightarrow T = 1,664 \text{ seg.} \quad (27)$$

Comparando este valor con los resultados mostrados en la Tabla 6 se observa que el efecto de la flexibilidad horizontal provista por las riendas es muy poco significativo.

Modelo II-1

Para obtener una fórmula para el período de la columna con apoyo elástico de la Figura 23 cuando se agrega una carga axial de compresión, en este trabajo se propone seguir utilizando en la ecuación (25) pero modificando adecuadamente la rigidez flexional (EI).



Teniendo en cuenta la simetría en la viga columna con carga axial, se tiene

$$\begin{bmatrix} 4EI\phi_3/L^3 & 2EI\phi_4/L^3 \\ 2EI\phi_4/L^3 & 4EI\phi_3/L^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_p \\ -\theta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ -M \end{pmatrix} \quad (28)$$

donde los coeficiente ϕ_3 y ϕ_4 dependen de la relación entre la carga de compresión P y la carga de Euler P_E . Cuando la fuerza de compresión se anula resulta $\phi_3 = \phi_4 = 1$. De (28) se tiene:

$$\left[2(EI)_p / L^3 \right] \theta_p = M \quad \text{donde: } (EI)_p = EI(2\phi_3 - \phi_4) \quad (29)$$

Llevando este último valor a (25) se tiene:

$$T = \frac{2\pi L^2}{\lambda^2} \sqrt{\frac{m}{(EI)\Phi}} \quad \text{donde: } \Phi = (2\phi_3 - \phi_4) \quad (30)$$

Las expresiones para ϕ_3 y ϕ_4 pueden consultarse en Livesley (1969). Cuando la relación $P/P_E < 1$ los coeficientes pueden aproximarse por polinomios cuadráticos (Massa, 2000):

$$z = \frac{P}{P_E} = \frac{P L^2}{\pi^2 (EI)} \leq 1 \rightarrow \begin{cases} \phi_3 \approx 1 - 0,323 z - 0,06 z^2 \\ \phi_4 \approx 1 + 0,154 z + 0,08 z^2 \end{cases} \rightarrow \Phi \approx 1 - 0,8 z - 0,2 z^2 \quad (31)$$

Tabla 7: Períodos de las vibraciones libres de la columna con apoyo elástico lineal y carga axial.

ESTADO RIENDAS	P_0 [N]	K [N/m]	P [N]	$z=P/P_E$	$\Phi=(EI)_p/(EI)$	$x=KL^3/EI$	λ (26)	T [seg]
A: Riendas normales	615,73	56311	1177	0,31889	0,72455	2689,6	3,13563	1,958
B: Riendas flojas	307,82	25311	588,4	0,15942	0,86738	1012,1	3,12571	1,803

Los casos linealizados I-1 y II-2 se resolvieron por separado de tres maneras distintas dando resultados totalmente coincidentes:

1. Utilizando fórmulas tabuladas: la ecuación (25) para el caso I-1 donde se ignora el efecto de segundo orden provocado por la carga axial de compresión y la ecuación (30) para el caso II-1 donde se tiene en cuenta la carga axial.
2. Utilizando una rutina estándar del programa MATLAB para determinar autovalores.
3. Modificando el código no lineal desarrollado en este trabajo, para que no actualice la rigidez de las riendas en cada paso.

Resultados obtenidos

El análisis realizado muestra que al disminuir la pretensión en las riendas se producen dos acciones opuestas sobre el período de las vibraciones libres del mástil:

- a) El período aumenta por la disminución de la rigidez horizontal del nudo arriostrado.
- b) El período disminuye por la disminución de la carga de compresión en el mástil.

El efecto b) es bastante más acentuado que el a). El problema es aún más complejo, porque al aflojar las riendas se agrega otro ingrediente: la relación entre la carga en los cables y los desplazamientos se hace más no-lineal.

Observando los resultados presentados en la Tabla 4 se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. La acción las riendas tiene mucha incidencia sobre las características dinámicas de la estructura, ya que modifica notablemente el período de las vibraciones libres al inducir importantes cargas de compresión en el mástil.
2. La variación de rigidez horizontal de los nudos arriostrados debida a la acción de las riendas modifica muy poco el período natural porque la mayor parte de la energía puesta en juego durante las vibraciones libres es del tipo flexional. Hay poca diferencia entre el valor del período de una viga simplemente apoyada y el correspondiente a una viga con un apoyo elástico en un extremo, salvo que la rigidez del apoyo elástico sea muy pequeña pero esto último no ocurre en el caso de los mástiles arriostrados.

No obstante hay que recordar que el mástil estudiado (con los datos de la Tabla 2) tiene un único tramo. En el caso de un mástil alto con muchos niveles de riendas, si la pretensión en las riendas es muy baja puede aparecer un modo de traslación horizontal de baja frecuencia, que entre en competencia con el modo fundamental de flexión.

CONCLUSIONES

Se desarrolló una metodología de cálculo que permite llevar a cabo simulaciones numéricas de la respuesta dinámica de mástiles arriostrados comúnmente utilizados en comunicaciones inalámbricas (“wireless”), estaciones meteorológicas, y más recientemente en transmisión de energía eléctrica. Se demostró que el modelo desarrollado es de gran utilidad en la etapa de diseño de torres arriostradas porque es capaz de predecir razonablemente bien la respuesta dinámica, aunque el número de grados de libertad es pequeño comparado con modelos mucho más complicados que incluyen la discretización de los cables mediante elementos finitos.

En la primera parte de este trabajo se estudió, estáticamente, la variación de la rigidez horizontal de un nudo arriostrado en función de la pretensión de montaje y del desplazamiento horizontal de dicho nudo. En la segunda parte, se compararon resultados provistos por el modelo totalmente no-lineal con aquellos provistos por linealizaciones habitualmente utilizadas en la práctica. Para poner en evidencia la incidencia de la pretensión de las riendas en la rigidez del mástil se analizaron las dos configuraciones más utilizadas en la práctica: mástiles con cuatro planos de riendas a 90° y mástiles con tres planos de riendas a 120°. Además, se estudiaron en detalle las zonas de trabajo de las riendas de acuerdo a los límites establecidos para la tensión mínima de pretensión de montaje por la Norma Americana (American

National Standard ANSI/TIA/EIA-222-F, 1996) y la Norma Argentina (Apéndice Capítulo 5, Reglamento CIRSOC 306, 1992).

De las simulaciones numéricas llevadas a cabo se puede además concluir que: (1) las características dinámicas de la estructura son altamente dependientes de las riendas; (2) la pérdida de pretensión en las riendas produce dos efectos opuestos sobre el periodo de las vibraciones libres del mástil: un aumento del periodo debido a la disminución de la rigidez horizontal del nudo arriostrado, y una disminución del periodo debido a la disminución de la carga de compresión en el mástil; (3) la mayor parte de la energía puesta en juego durante las vibraciones libres del mástil arriostrado es del tipo flexional; (4) un modelo de viga continua sobre apoyos rígidos es suficiente para modelar mástiles con riendas sometidas a alta pretensión; y, (5) en el caso de un mástil alto con muchos niveles de riendas sometidas a pretensión baja, el modelo de viga continua no es válido, debido a que aparece un modo de traslación horizontal de baja frecuencia, que entre en competencia con el modo fundamental de flexión.

Como trabajos futuros en esta área se prevé: (1) incluir la dinámica de los cables; (2) estudiar la respuesta a cargas de origen sísmico y de viento; (3) estudiar la dinámica torsional del mástil y el acoplamiento con la dinámica flexional del mismo; (4) incorporar algún criterio de fatiga, por ejemplo el criterio de Manson de daño acumulado (Manson et al., 1965; Shigley et al., 1990), que permita determinar si durante un sismo se ha superado el límite de fatiga de algún elemento estructural; y (5) analizar la posibilidad de falla estructural originada en el daño acumulado, en una etapa posterior al sismo debido a oscilaciones producidas por el viento a un nivel de tensiones inferiores a las previstas como límite de fatiga en la etapa de diseño.

REFERENCIAS

- American National Standard ANSI/TIA/EIA-222-F, (1996). *Normas Estructurales para Torres y Estructuras de Acero para Antenas*, Publicado por Telecommunications Industry Association, Arlington, Virginia.
- Blevins, R. (2001). *Formulas for Natural Frequency and Mode Shapes*, Krieger Publishing, Melbourne, Florida, USA.
- Buchholdt, H.A. Moossavinejad, S. e Iannuzzi, A. (1986). "Non-linear dynamic analysis of guyed masts subjected to wind and guy ruptures", *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, Vol. 81 (Part 2), pp. 353–395.
- Chajes, A. y Chen, W.S. (1979). "Stability of Guyed Towers", *Journal of the Structural Division*, Vol. 105, No. 1, pp.163-174.
- Goldberg, J.E. y Gaunt, J.T. (1973). "Stability of guyed towers", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 99, No. 4, pp. 741-756.
- Greene, W.H. (1985). "Minimum weight sizing of guyed antenna towers", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 111, No. 10, pp. 2121-2139.
- Irvine, M. (1981). *Cable Structures*, Dover Publications, New York.
- Leonard, J.W. y Nath, J.H. (1981). "Comparison of finite element and lumped parameter methods for oceanic cables", *Engineering Structures*, Vol. 3, No. 3, pp. 153-167.
- Leonard, J.W. (1988). *Tension Structures: Behavior and Analysis*, McGraw-Hill, New York.
- Livesley, R.K. (1969). *Matrix Methods of Structural Analysis*, Pergamon Press, Oxford.
- Manson, S.S., Nachtigal, A.J., Ensing C.R. y Freche, J.C. (1965). "Further investigation of a relation for cumulative fatigue damage in bending", *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, ser. B, Vol. 87, No. 1, pp. 23-35.
- Massa, J.C. (2000). *Compendio de Cálculo Estructural*, Ed. Coop. Dto. Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina.
- Paz, M. (1980). *Structural Dynamics: Theory and Computation*, Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- Preidikman, S. (1998). "Numerical Simulations of Interactions Among Aerodynamics, Structural Dynamics and Control Systems," *Ph.D. Thesis, Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Polytechnic Institute and State University*, Blacksburg, Virginia, USA.
- Preidikman, S. y Mook, D.T. (1997). "A new method for actively suppressing flutter of suspension bridges", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 69/71, pp. 955-974.
- Przemieniecki, J.S. (1985). *Theory of Matrix Structural Analysis*, Dover Publications, New York.
- Pugsley, A. (1968). *The Theory of Suspension Bridges*, Edward Arnold, London.
- Ramberg, S.E. y Griffin, O.M. (1977). "Free vibrations of taut and slack marine cables", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 103, No. 11, pp. 2079-2092.
- Recomendación CIRSOC 303, (1991). *Estructuras Livianas de Acero*, INTI, Buenos Aires.
- Reglamento CIRSOC 306, (1992). *Estructuras de Acero para Antenas*, INTI, Buenos Aires.
- Shigley, J.E y Mischke, C.R. (1990). *Diseño en Ingeniería Mecánica*, 5ª Edición, McGraw-Hill.
- Tuah, H. (1983). "Cable Dynamics in an Ocean Environment", *Ph.D. Thesis, Oregon State University*, Corvallis, Oregon.