Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing. (2010) 26: 251-261

Dependência estrutural da capacidade de rotação plástica em vigas de concreto armado

André L. Gamino · Osvaldo L. Manzoli

Recibido: Octubre 2009, Aceptado: Octubre 2010
©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

Resumo. Neste trabalho a dependência da capacidade de rotação plástica com relação às características físicas, geométricas e construtivas das vigas de concreto armado, ou dependência estrutural da capacidade de rotação plástica em vigas de concreto armado, conforme definição por Bigaj [1] é avaliada através do Método dos Elementos Finitos. O termo dependência estrutural refere-se a relação necessária ou interação entre o comportamento da estrutura e seus materiais constituintes, tais como concreto e aço ou mesmo fatores geométricos como efeito de escala. O objetivo é conseguir uma melhor compreensão sobre o comportamento não-linear de elementos de concreto armado e executar estudos paramétricos extensivos por meio do modelo analítico desenvolvido por Bigaj [1] afim de analisar o fenômeno da capacidade de rotação plástica em elementos de concreto armado. Supõe-se que somente a ruptura por flexão é relevante devido à capacidade resistente suficiente do elemento ao cisalhamento e torção. O trabalho inicia-se com uma revisão de literatura a respeito do desenvolvimento da rotação plástica em vigas de concreto armado, atentando tanto para aspectos experimentais quanto a aspectos de modelagem analítica. Dá-se ênfase especial na introdução da dependência estrutural da capacidade de rotação plástica em vigas de concreto armado. A dependência do tamanho do elemento e a propriedade dos materiais de construção são enfatizados. Os componentes essenciais do modelo de Bigaj para o cálculo da capacidade de rotação plástica são discutidos. O comportamento da rotação plástica é analisado levando-se em consideração a deformação localizada em zonas de dano da região plastificada. O Modelo de Fissura Fictícia e o Modelo de Zona de Dano na Compressão são adaptados à Mecânica da Fratura a fim de modelar o comportamento do concreto a tração e compressão respectivamente. Nas simulações numéricas utilizou-se o programa FEMOOP, um "solver" desenvolvido segundo o Método Elementos Finitos e aplicado para avaliar a ductilidade em vigas segundo uma análise 2D. Exemplos de aplicação são apresentados para avaliar o potencial das implementações cujos modelos foram gerados com o programa GiD desenvolvido pelo CIMNE.

A.L. Gamino · O.L. Manzoli
UNESP, Univ Estadual Paulista
Av. Luiz Edmundo Carrijo, s/n
CEP 17033-360, Bauru, SP, Brasil
e-mail: andre.gamino@gmail.com

STRUCTURAL DEPENDENCE OF PLASTIC ROTATION CAPACITY IN RC BEAMS

Summary In this work the structural dependence of plastic rotation capacity in RC beams is evaluated using the Finite Element Method. The objective is to achieve a better understanding of the non-linear behavior of reinforced concrete members and perform extensive parameter studies, using a rational model developed by Bigaj [1] to analyze the phenomenon of plastic rotation capacity in reinforced concrete members. It is assumed that only bending failure is relevant due to sufficient member resistance against shear and torsion. The paper begins with the physical and theoretical background of the phenomenon of plastic hinge development in RC structures. Special emphasis is laid on the issue of structural dependence of deformation capacity of plastic hinges in RC members. Member size dependence and influence of properties of construction materials were emphasized as well. The essential components of the Bigajs model for calculating the plas-

tic rotation capacity are discussed. The behaviour of the plastic hinge is analysed taking into account the strain localisation in the damage zones of the hinge region. The Fictitious Crack Model (FCM) and the Compressive Damage Zone Model (CDZ) are adopted in a Fracture Mechanics approach to model the behaviour of concrete in tension and compression, respectively. The approach is implemented in FEMOOP, a FEM in-house solver under development, and applied to evaluate ductility in 2D beams. The models were generated with GiD, a pre-processor and post-processor developed by CIMNE, and analyzed with the capabilities implemented in FEMOOP.

1. Capacidade de rotação plástica em elementos de concreto armado

Este trabalho trata do estudo da capacidade de rotação plástica em vigas de concreto armado em continuação à trabalhos já publicados pelo autor dentro do mesmo escopo (Gamino & Bittencourt [2], Gamino, Borges & Bittencourt [3] e Gamino *et al.* [4]). No contexto do fenômeno da capacidade de rotação plástica em elementos de concreto armado foi sugerido por alguns autores (Hillerborg [5] e Hillerborg [6]) que este efeito é extremamente dependente do tamanho do elemento estrutural, mais precisamente, com relação a altura da viga: vigas mais altas exibem uma rotação plástica inferior comparando-se com vigas de menor altura.

Uma das explicações plausíveis a respeito do aumento da ductilidade provocada pela diminuição do tamanho do elemento originou-se dos trabalhos sobre ruptura localizada e da dependência das relações constitutivas do concreto em compressão em relação ao tamanho da peça.

Isto foi confirmado a partir de ensaios de compressão axial em prismas de concreto em que a ductilidade dos corpos-de-prova aumentava quando a altura diminuía e, da mesma forma, a ruptura a compressão tendia a ser menos frágil com a diminuição do tamanho do corpo-de-prova (van Mier & Vonk [7]).

Por outro lado, o processo de fratura na zona de compressão de um elemento submetido a flexão está ligado à ruptura do concreto em compressão altamente sensível às condições de confinamento lateral.

O grau de confinamento existente na estrutura e a formação de fissuras no lado tracionado da viga influenciam o desenvolvimento das deformações por compressão e o tamanho final da zona de dano a compressão.

Com o objetivo de gerar uma base consistente para o desenvolvimento de um modelo analítico para o cálculo da capacidade de rotação plástica em vigas de concreto armado, Bigaj [1] desenvolveu um programa experimental. As vigas ensaiadas serviram também de base para a determinação da capacidade do FEMOOP em captar o efeito de ductilidade estudado.

Neste sentido são analisados os efeitos de dependência estrutural sobre o tamanho do elemento e da influência dos materiais de construção empregados sobre a capacidade de rotação plástica das vigas analisadas.

2. Modelo analítico de Bigaj: formulação básica

Baseando-se na análise de fissuras formadas por flexão pode-se obter o limite inferior da rotação máxima. Um elemento de concreto armado com uma fissura espaçada em s_r é discretizado conforme ilustra a Figura 1.

Segundo Bigaj [1] admite-se que cada fissura de flexão (FC) é submetida somente a momento fletor. Para determinar as deformações em FC as seguintes relações foram usadas: a relação tensão-deformação para as armaduras, a relação tensão-deformação para o concreto (tracionado e comprimido) e a relação de aderência concreto-aço.

A distribuição tensão-deformação em cada FC é obtida através de um processo iterativo de cálculo. As rotações na FC do elemento Θ_{el} são obtidas integrando-se as deformações calculadas nas armaduras ε_s e na fibra mais comprimida do concreto ε_c ao longo de todo espaçamento entre fissuras s_r de acordo com:

$$\Theta_{el} = \frac{\int_0^{s_r} \varepsilon_s.dx + \int_0^{s_r} \varepsilon_c.dx}{d} \tag{1}$$

onde d é a altura útil do elemento.

A soma das rotações no elemento Θ_{el} dará origem a uma rotação total Θ_{tot} de acordo com:

$$\Theta_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \Theta_{el}^{i} \tag{2}$$

onde i é o número da FC, $i = 0.....n$.

Assim, a rotação plástica do elemento $\Theta^{(p)}$ pode ser obtida por:

$$\Theta^{(p)} = \Theta^{(u)} - \Theta^{(y)} \tag{3}$$

onde $\Theta^{(u)}$ e $\Theta^{(y)}$ são respectivamente as rotações obtidas para a carga de ruptura e no escoamento das armaduras de flexão.

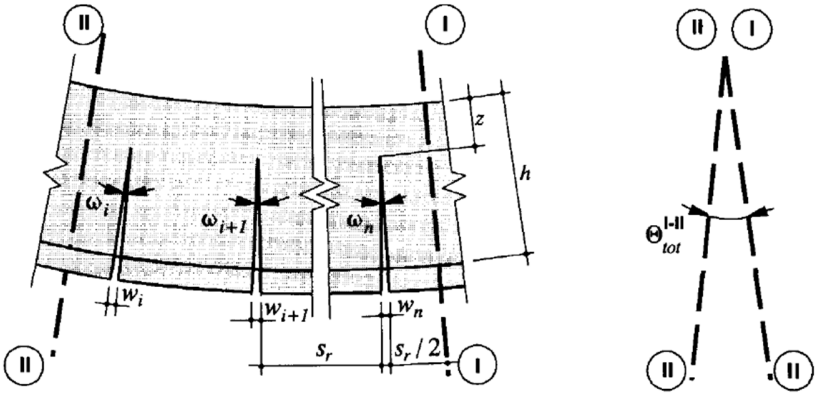


Figura 1. Modelo de cálculo para o critério de Bigaj [1]. Fonte: Bigaj [1]

2.1. Concreto sob tração

Para caracterizar o comportamento do concreto sob tração, o modelo analítico de Bigaj [1] utiliza o Modelo de Fissura Fictícia (maiores detalhes em Hillerborg [8]) conforme a Figura 2.

Após a carga de ruptura, as deformações no concreto sob tração são consideradas aproximadamente homogêneas ao longo do comprimento do elemento. Quando nível de tensão superior à resistência do concreto é alcançado, uma zona localizada de dano (chamada zona de processo de fissura) começa a se desenvolver. Com o aumento da deformação nesta região, inicia-se um processo progressivo de amolecimento que se manifesta de duas formas:

- Perda gradual de rigidez;
- Perda de capacidade de carga;

Em outras regiões localizadas do elemento (Figura 2) ocorre um processo de descarregamento. Os dois comportamentos observados (região de descarregamento e região de processo de fissura) podem ser observados na Figura 2 onde ilustram-se os comportamentos reais e os comportamentos assumidos no modelo analítico de Bigaj [1].

2.2. Concreto sob compressão

Para caracterizar o comportamento do concreto sob compressão, o modelo analítico de Bigaj [1] utiliza o Modelo da Zona de Dano a Compressão (maiores detalhes em Markeset [9]) conforme apresentado na Figura 3.

Analogamente ao caso de tração, atingida a carga de ruptura, as deformações longitudinais são tomadas como uniformemente distribuídas ao longo do comprimento do elemento. Após a carga de ruptura, as fissuras longitudinais e as deformações laterais ocorrem em uma região específica do elemento (chamada de zona de dano). Ao longo do comprimento da zona de dano (L^d), micro fissuras desenvolvem uma banda de cisalhamento.

Conforme observa-se na Figura 3, após a carga de pico ocorre uma distinção entre os materiais dentro e fora da zona de dano:

- Fora da zona de dano ocorre um processo de descarregamento;
- Dentro da zona de dano ocorre um processo de fratura em tração descrito pelo ramo de amolecimento da relação tensão-deformação;

3. Análise pelo Método dos Elementos Finitos

3.1. Concreto íntegro

O modelo constitutivo adotado nas modelagens bidimensionais e implementado no sistema GiD/FEMOOP (Gamino [10] e Gamino, Bittencourt & Sousa [11]) foi o modelo de Ottosen [12]. Trata-se de um modelo de quatro parâmetros ("A", "B", "K_1", "K_2") cujo funcional (Figura 4) é representado por:

$$F = A\frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda\frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + B\frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \tag{4}$$

sendo A, B, K_1 e K_2 os parâmetros determinados experimentalmente, f_{cm} a resistência à compressão média do concreto, I_1 o primeiro invariante do tensor de tensões, J_2 o segundo invariante do tensor desviador de tensões e λ calculado segundo os parâmetros K_1, K_2 e o invariante $\cos(3\theta)$.

A superfície de ruptura é a descrita por esse funcional. A calibração paramétrica foi efetuada com base em testes realizados dentre as propostas de Ottosen [12], CEB [13] e Dahl [14]. Segundo testes conduzidos por Hartl [15] em ensaios biaxiais no concreto, os melhores

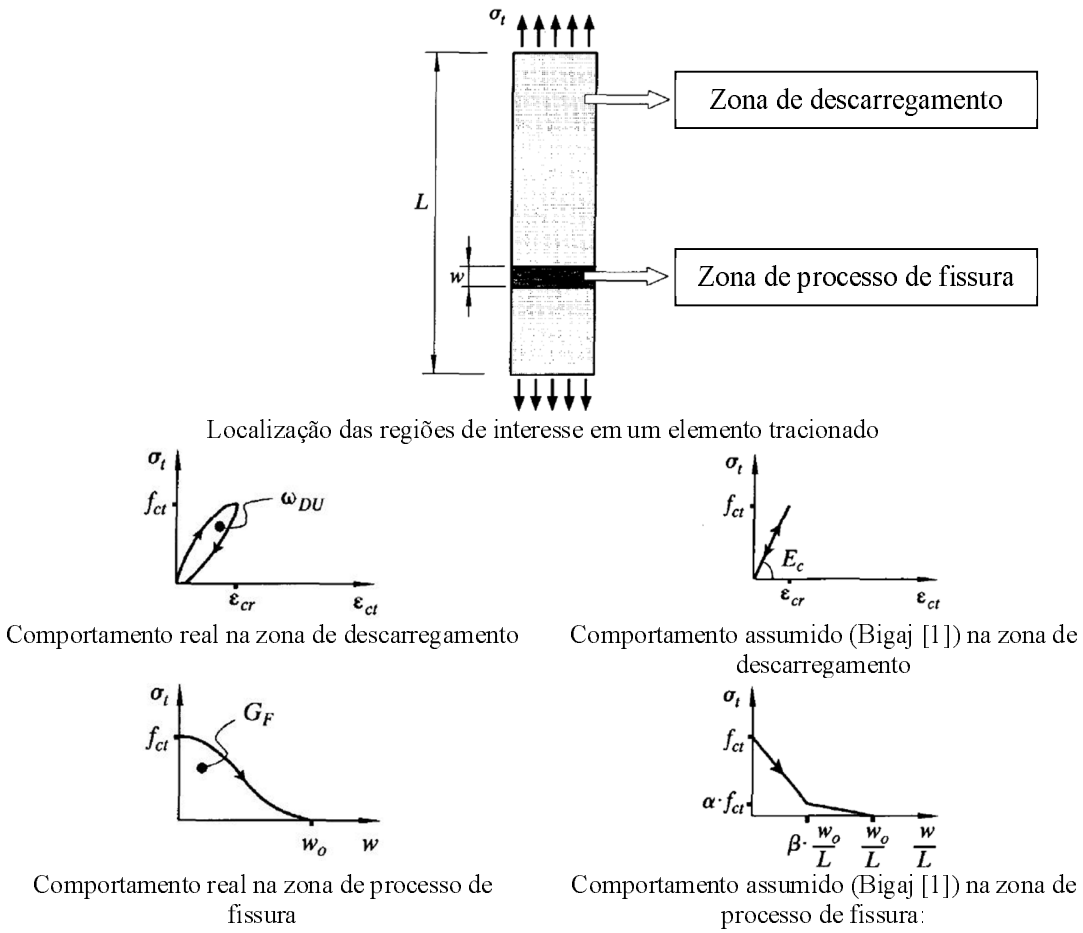


Figura 2. Ilustração sobre o Modelo de Fissura Fictícia. Fonte: Bigaj [1]

resultados foram alcançados segundo a formulação de Dahl [14] cujos parâmetros podem ser calculados por meio de:

$$\begin{aligned} x &= \frac{f_{cm}}{100[MPa]} \\ A &= -1,66x^2 + 3,49x + 0,73 \\ B &= -0,19x^2 + 0,41x + 3,13 \\ K_1 &= 0,46x^2 - 0,97x + 11,89 \\ K_2 &= -0,02x^2 + 0,04x + 0,974 \end{aligned} \tag{5}$$

Na zona de tração-tração, a superfície de ruptura (Figura 4) de Ottosen [12] se aproxima do modelo de Rankine.

3.2. Concreto fissurado

Acoplado com o modelo de integridade física, implementou-se um modelo de fissuração distribuída do tipo rotacional cujo critério de aparecimento de fissuras está relacionado com as tensões de tração nos pontos de integração dos elementos finitos (oriundas da utilização do modelo de Ottosen [12]), comparadas com a resistência à tração do material. Após o aparecimento da primeira fissura utiliza-se um modelo de amolecimento linear em tração (Figura 5).

Usando-se o modelo de amolecimento linear na tração, as aberturas das fissuras podem ser obtidas da seguinte forma:

$$w^{cr} = \frac{2G_f}{f_t}; \text{ ou } w^{cr} = \varepsilon^{cr}.h \tag{6}$$

onde: w^{cr} = abertura da fissura; G_f = energia de fratura Modo-I; ε^{cr} = deformação na fissura; h = largura de banda de fissura.

As aberturas das fissuras foram computadas a partir das deformações nas fissuras que são dependentes dos modelos de ruptura adotados para o concreto e as armaduras de aço. As taxas de armadura utilizadas influem no nível de tensão no lado tracionado da estrutura que, conseqüentemente, afetam os valores de aberturas das fissuras (maiores taxas de armadura implicam em menores aberturas de fissuras). Conseqüentemente as aberturas nas fissuras são menores para taxas de armadura mais elevadas.

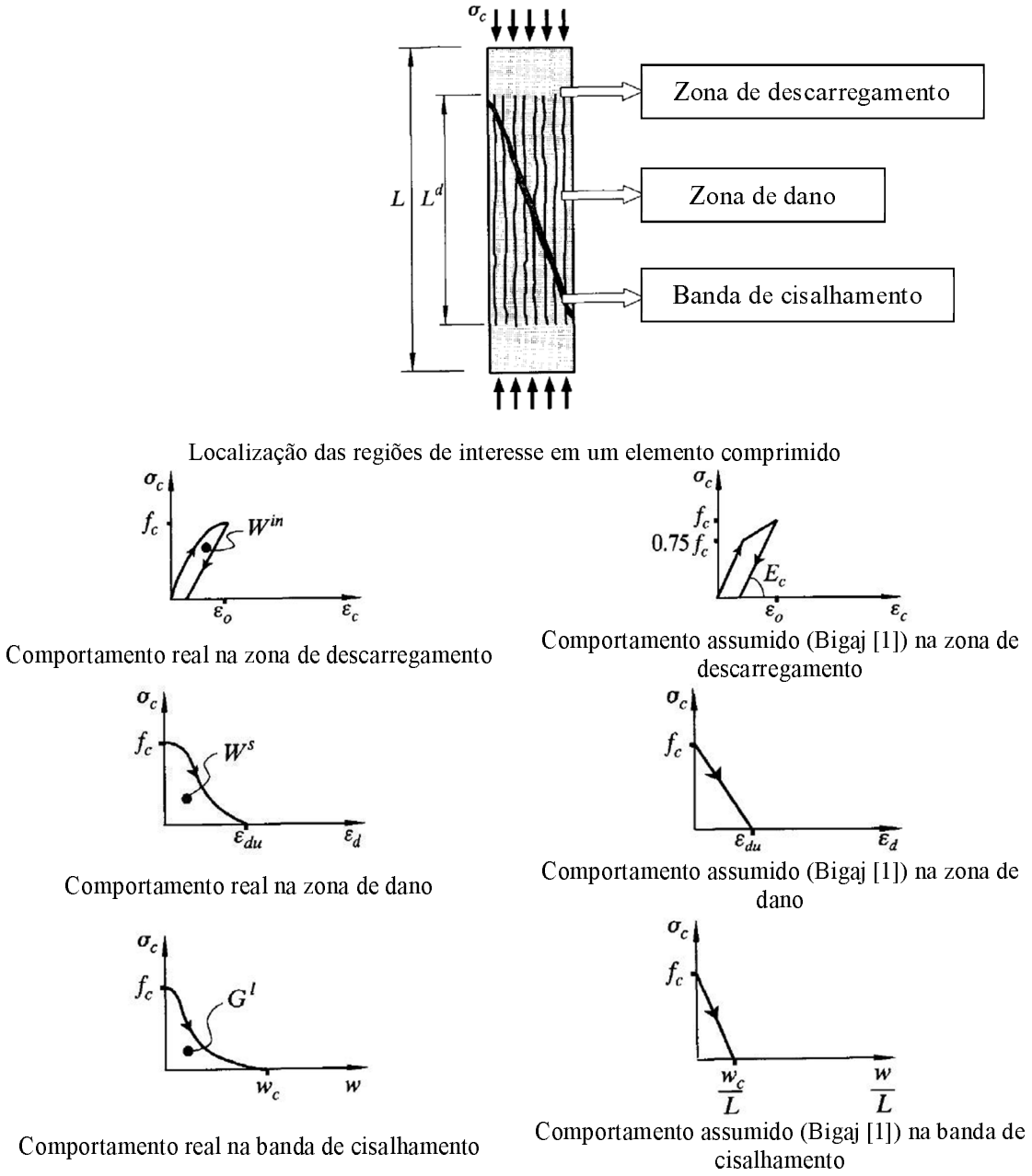


Figura 3. Ilustração sobre o Modelo de Fissura Fictícia. Fonte: Bigaj [1]

As deformações no concreto podem ser obtidas por:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon^{cr} \tag{7}$$

onde: ε_e = vetor de deformações elásticas obtido a partir da matriz elástica; ε^{cr} = vetor de deformações na fissura obtidas a partir da contribuição do processo de degradação do concreto.

A contribuição das fissuras sobre o vetor de deformações depende exclusivamente da abertura calculada e da área do elemento finito aplicada sobre as arestas dos elementos, conforme a Figura 6 e Eq.(7).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\nu \\ 0 \end{Bmatrix} \sigma/E + \begin{Bmatrix} y_1 - y_2 \\ 0 \\ x_2 - x_1 \end{Bmatrix} w^{cr}/2A \tag{8}$$

onde w^{cr} é a abertura de fissuras calculada no passo corrente e A é a área do elemento finito.

O ângulo α indica a direção principal das deformações e, perpendicular a este eixo, ocorre a direção

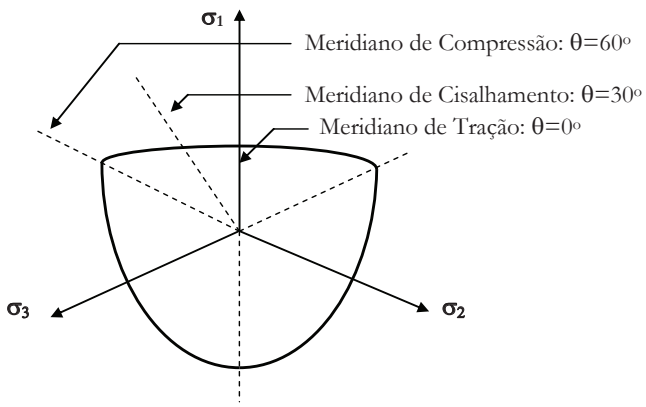


Figura 4. Superfície de ruptura segundo o modelo de Ottosen [12]

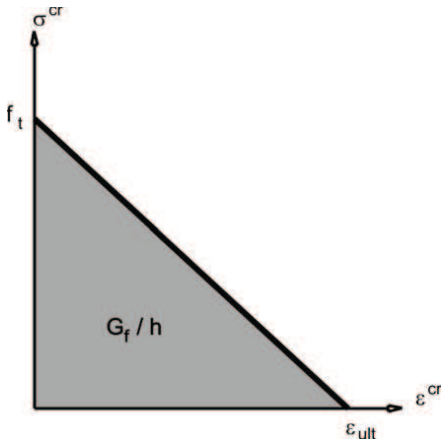


Figura 5. Modelo de amolecimento linear na tração

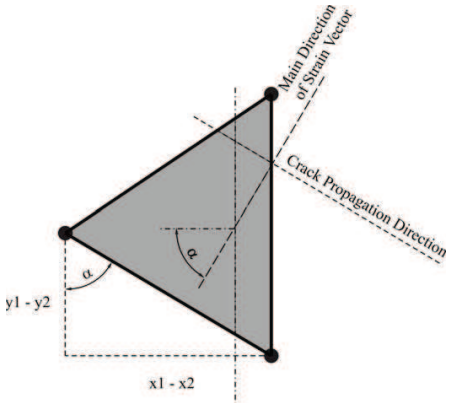


Figura 6. Topologia para o cálculo da contribuição das fissuras sobre o vetor de deformações

de propagação da fissura, obtido por meio de:

$$\alpha = \lim_{w^{cr}\to\infty} 1/2 \arctan \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = 1/2 \arctan \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2} \tag{9}$$

Nos modelos de fissura distribuída, a descontinuidade do campo de deslocamentos causada pela fissura é espalhada ao longo do elemento, que tem sua equação constitutiva alterada. Mesmo sabendo que a continuidade de deslocamentos assumida é incompatível com a descontinuidade real, modelos deste tipo foram os mais utilizados ao longo dos anos, devido ao fato de sua aplicação computacional ser bastante simples e conseguirem modelar bem o comportamento estrutural global de peças de concreto armado [4,16,17,18].

3.3. Malhas típicas geradas no GiD

Foram utilizadas malhas não estruturadas com elementos finitos quadráticos planos (T6) para a representação do concreto e elementos finitos quadráticos isoparamétricos unifilares para a representação das armaduras explícitas. As malhas típicas segundo o comprimento de cada conjunto de vigas estão apresentadas na Figura 7.

4. Ensaios das vigas de Bigaj [1]

O esquema geral das vigas ensaiadas em três pontos por Bigaj [1] está apresentado na Figura 8 e na Tabela 1. Os resultados de capacidade de rotação plástica obtidos experimentalmente foram confrontados com as respostas produzidas pelo modelo analítico e modelagem computacional.

As vigas foram basicamente divididas em dois grupos: com baixa taxa geométrica de armadura (0,28 %) e com alta taxa geométrica de armadura (1,12 %). As vigas ainda foram subdivididas em três tamanhos distintos, representados no segundo conjunto numérico constante nos nomes das vigas: 1-vigas pequenas; 2-vigas médias e 3-vigas grandes.

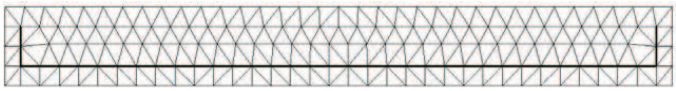
5. Resultados obtidos

5.1. Variação da capacidade de rotação plástica com a altura efetiva

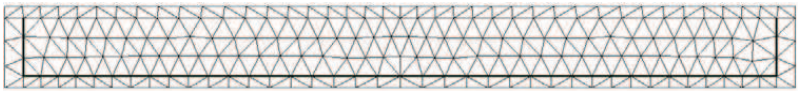
As vigas ensaiadas foram modeladas no sistema FEMOOP/GiD. A Figura 9 apresenta a avaliação da rotação plástica em função da altura efetiva das vigas.

A partir desta figura torna-se claro a relação entre a capacidade de rotação plástica e o tamanho das vigas:

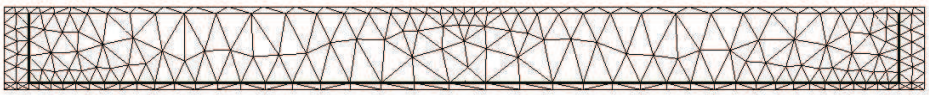
- Vigas mais curtas apresentam uma capacidade de rotação plástica superior às vigas com grandes dimensões;



a) Malha típica (318 elementos) para as vigas com comprimento de 1050 mm



b) Malha típica (440 elementos)para as vigas com comprimento de 2100 mm



c) Malha típica (503 elementos) para as vigas com comprimento de 5500 mm

Figura 7. Malhas não estruturadas usadas na modelagem das vigas ensaiadas por Bigaj [1]

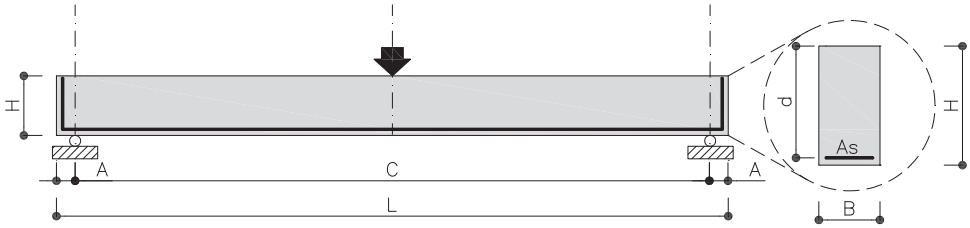


Figura 8. Esquema geral das vigas ensaiadas por Bigaj [1]

Tabela 1. Resumo das vigas ensaiadas por Bigaj [1]

Viga	A (mm)	C (mm)	L (mm)	B (mm)	H (mm)	d (mm)	As	ρs (%)
B.0.2.4	50	2000	2100	100	210	30	1ϕ 8	0,28
B.0.3.4	150	5200	5500	250	490	450	4ϕ 10	0,28
B.1.1.4	25	1000	1050	50	120	90	1ϕ 8	1,12
B.1.2.16	50	2000	2100	100	210	30	1ϕ 16	1,12
B.1.3.4	150	5200	5500	250	490	450	4ϕ 16	1,12

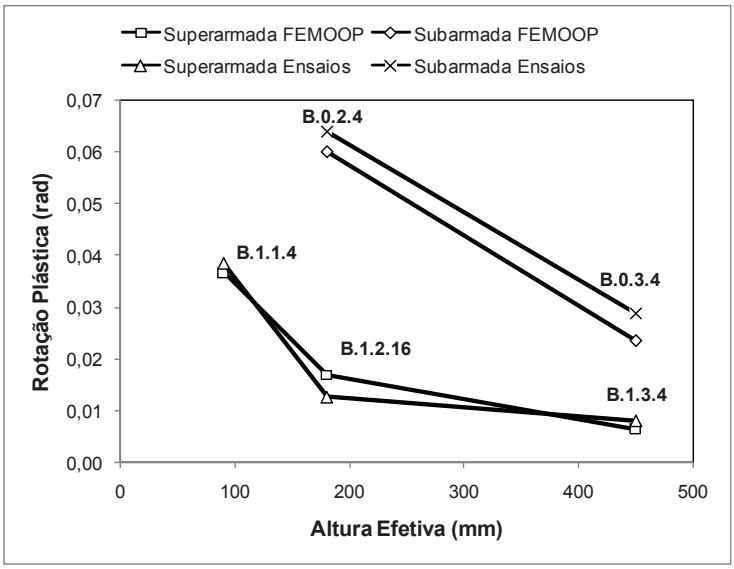


Figura 9. Evolução numérica e experimental da rotação plástica com a altura efetiva das vigas modeladas

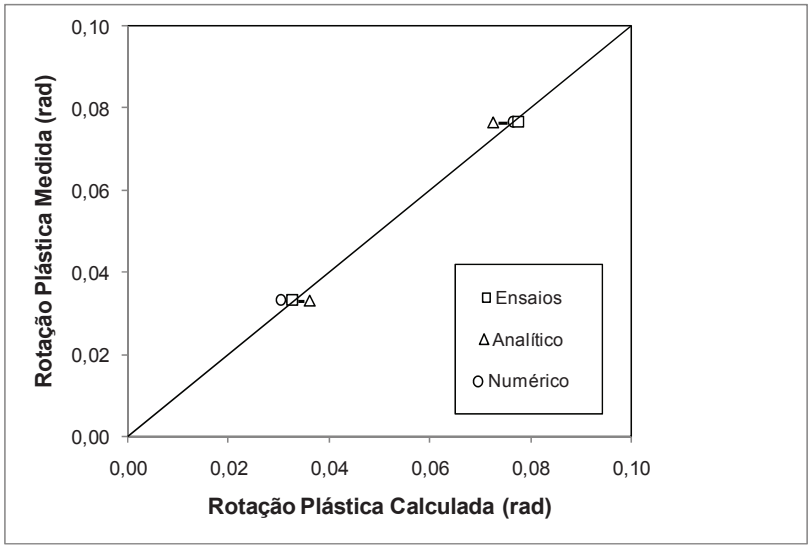


Figura 10. Comparação entre os resultados de rotação medidos e calculados para a carga de ruptura para vigas com menor taxa de armadura (0,28 %)

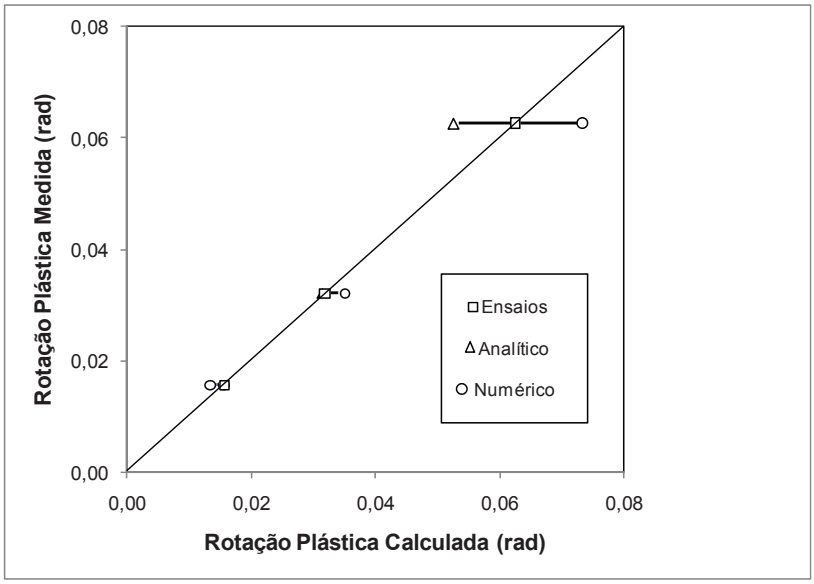


Figura 11. Comparação entre os resultados de rotação medidos e calculados para a carga de ruptura para vigas com maior taxa de armadura (1,12 %)

- Para as vigas com taxa de armadura mais baixa (0,28 %) a rotação plástica dobra quando a altura efetiva sofre uma redução de 450mm para 180mm;
- Para as vigas com taxa de armadura mais elevada (1,12 %) a rotação plástica amplia quase seis vezes quando a altura efetiva é diminuída de 450mm para 90mm;
- O mecanismo de diminuição da rotação plástica com o aumento da altura útil pode ser verificado em duas situações: a primeira em que, com a altura útil menor, as vigas apresentam uma ruptura por esgotamento da capacidade resistente das armaduras e uma segunda, em que, com a altura útil maior, o mecanismo de ruptura por esmagamento do concreto prevalece após o escoamento das armaduras;
- Os resultados numéricos obtidos nas modelagens ficaram próximos dos valores medidos experimentalmente.

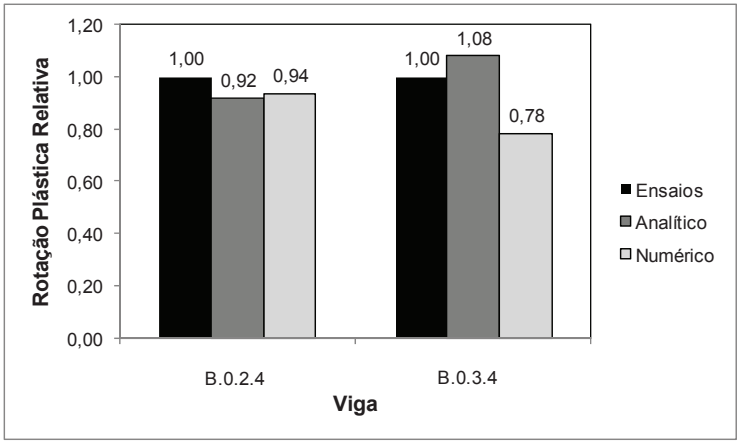


Figura 12. Resultados para a capacidade de rotação plástica para as vigas com taxa de armadura de 0,28 %

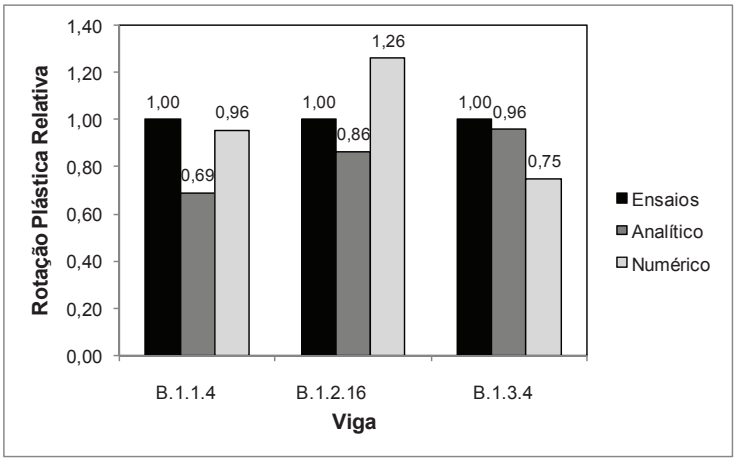


Figura 13. Resultados para a capacidade de rotação plástica para as vigas com taxa de armadura de 1,12 %

5.2. Comparativo nas rotações medidas na ruptura das vigas

A Figura 10 apresenta a comparação nas rotações medidas na carga de ruptura para as vigas com menor taxa geométrica de armadura e a Figura 11 para as vigas com maior taxa geométrica de armadura.

A partir destas figuras pode-se concluir que:

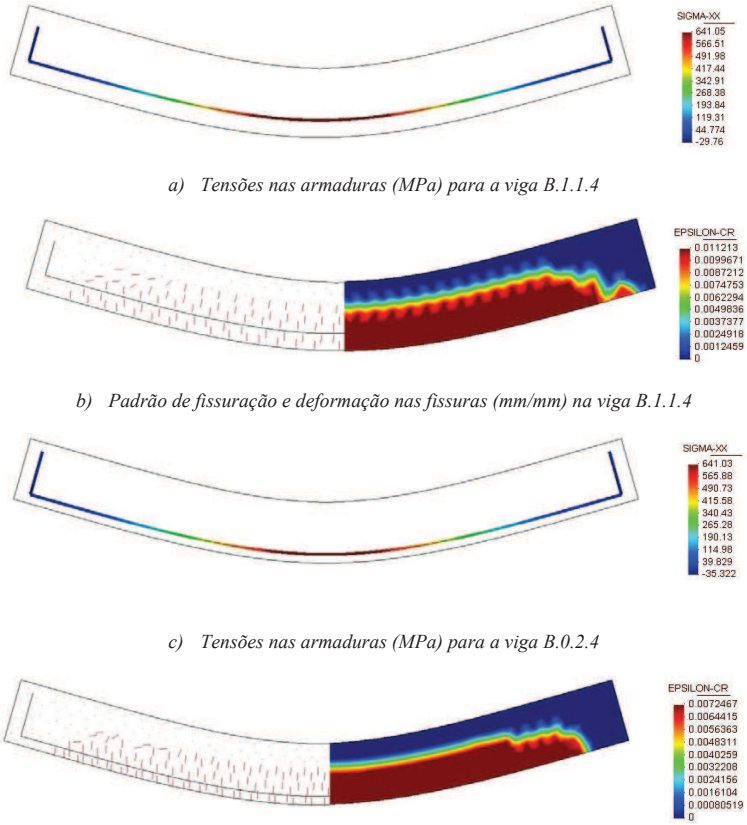
- De uma maneira geral o modelo analítico de Bigaj [1] e a modelagem numérica proposta conseguiram prever rotações para a carga de ruptura próximas aos resultados experimentais;
- Para as vigas de maiores dimensões os resultados numéricos e analíticos aproximam-se bastante da resposta experimental;
- Para as vigas de menores dimensões (B.1.1.4) há uma maior discrepância de resultados: o modelo analítico de Bigaj [1] é mais conservador (cerca de 19 % menor que o experimental) enquanto a resposta numérica apresentou-se cerca de 15 % superior ao valor experimental.

5.3. Valores de rotação plástica: experimental *vs.* analítico *vs.* numérico

A Figura 12 e a Figura 13 apresentam respectivamente o confronto de respostas de capacidade de rotação plástica a partir dos resultados experimentais, analíticos e numéricos para as vigas com baixa taxa de armadura e alta taxa de armadura.

A partir destas figuras pode-se concluir que:

- Os valores de rotação plástica calculados segundo o modelo analítico de Bigaj [1] ficaram mais próximos dos valores experimentais para as vigas B.1.2.16 e B.1.3.4;
- Os valores de rotação plástica calculados segundo o modelo numérico utilizado ficaram mais próximos dos valores experimentais para as vigas B.0.2.4 e B.1.1.4;



a) Tensões nas armaduras (MPa) para a viga B.1.1.4

b) Padrão de fissuração e deformação nas fissuras (mm/mm) na viga B.1.1.4

c) Tensões nas armaduras (MPa) para a viga B.0.2.4

d) Padrão de fissuração e deformação nas fissuras (mm/mm) na viga B.0.2.4

Figura 14. Resultados numéricos obtidos para as vigas B.1.1.4 e B.0.2.4

5.4. Outras respostas numéricas

Na Figura 14 são apresentadas algumas imagens representativas das respostas numéricas das vigas B.1.1.4 e B.0.2.4 modeladas, especificamente com referência às tensões axiais nas armaduras, padrão de fissuração e aberturas de fissuras obtidos.

6. Conclusões

O objetivo central desse artigo foi mostrar as diferentes formas – analítica e numérica – de avaliação do fenômeno da capacidade de rotação plástica em vigas de concreto armado, sem a preocupação de apontar qual o melhor modelo.

Os resultados obtidos deixam claro que vigas mais curtas apresentam ductilidade superior em relação à vigas mais longas, devido ao mecanismo de ruptura encontrado em cada situação. Este efeito apresenta-se ainda mais evidente em vigas com elevada taxa de armadura.

Os modelos analítico e numérico utilizados foram bastante confiáveis na representação da capacidade de rotação plástica das vigas, porém, o modelo analítico mostrou-se mais conservador para as vigas mais curtas, sendo este comportamento perfeitamente aceitável e esperado de qualquer modelo analítico.

7. Agradecimentos

Os autores agradecem à UNESP – Universidade Estadual Paulista pelo suporte financeiro ao desenvolvimento desta pesquisa.

Referencias

1. Bigaj A.J. (1999) Structural dependence of rotation capacity of plastic hinges in RC beams and slabs. Doctoral Thesis, Technische Universiteit Warschau. 230 pp
2. Gamino A.L., Bittencourt T.N. (2007) Numerical evaluation of plastic rotation capacity in reinforced-concrete beams. In Alberto Carpinteri, Pietro G. Gambarova, Giuseppe Ferro, Giovanni Plizzari. (Org.), *6th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures*. 1 Ed. London: Taylor & Francis. 2:665–670

3. Gamino A.L., Borges J.U.A., Bittencourt T.N. (2006) Size effect of concrete: uniaxial and flexural compression. In Maria Konsta Gdoutos. (Org.) Measuring, Monitoring and Modeling Concrete Properties: In Honor of Surendra P. Shah. 1 Ed. New York, Springer. 1:107–113
4. Gamino, A.L. Manzoli O.L., Sousa J.L.A.O., Bittencourt T.N. (2010) 2D evaluation of crack openings using smeared and embedded crack models. *Computers and Concrete*.7 (6):483–496
5. Hillerborg A. (1988) Fracture mechanics concept applied to moment capacity and rotational capacity of reinforced concrete beams. In *International Conference on Fracture and Damage of Concrete and Rock*. Vienna. 233–240 pp
6. Hillerborg A. (1989) The compression stress-strain curve for design of concrete beams. In Fracture Mechanics: Application to Concrete. SP-118. ACI. V.C. Li and Z.P. Bazant Eds. American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich. 281–294 pp
   Hillerborg, A., "The Compression Stress-Strain Curve for Design of Reinforced Concrete Beams," Fracture Mechanics: Application to Concrete, SP-118,
7. van Mier J.G.M., Vonk R.A. (1991) Fracture of concrete under multiaxial stress – Recent developments. *Materials and Structures* RILEM 24:61–65
8. Hillerborg A. (1983) Analysis of one single crack. *Fracture Mechanics of Concrete*. Elsevier. 223–249 pp
9. Markeset G. (1993) Failure of concrete under compressive strain gradients. PhD Thesis. The Norwegian Institute of Thecnology. 168 pp
10. Gamino A.L. (2009) Tutorial de customização GiD & FEMOOP. Versão 1.4, Universidade Estadual de Campinas. Novembro 2009.
11. Gamino A.L., Bittencourt T.N., Sousa J.L.A.O. (2009) Finite element computational modeling of externally bonded CFRP composites flexural behavior in RC beams. *Computers and Concrete*. 6(3):187–202
12. Ottosen N.S. (1977) A failure criterion for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 103(4):527–535
13. Comité Euro – International du Béton. (1993) Model Code for Concrete Structures. CEB – FIP MC 90, 437pp.
14. Dahl K.K.B. (1992) A failure criterion for normal and high strength concrete. Technical University of Denmark, Lyngby
15. Hartl H. (2002) Development of a continuum-mechanics-based for 3D finite element analysis of reinforced concrete structures and application to problems of soil-structure interation. Tese de Doutorado, Technische Universität Graz, Áustria. 250 pp
16. Lorrain M.S., Barbosa M.P., Arnaud M., Gamino A.L. (2007) Alto desempenho: o concreto armado do século XXI? *Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.* 23(3):251–264
17. Jacomassi L.M., Barbosa M.P., Gamino A.L. (2009) Simulação numérica do comportamento de vigas e pilares de concreto armado via MEF usando o código CASTEM 2000. *Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.* 25(2):133–144
18. Gamino A.L., Bittencourt T.N., Sousa J.L.A.O. (2007) Numerical modeling of classic concrete beam tests. *Revista IBRACON de Estruturas*. 3(2):201–229