

CALCULO DE LA RESPUESTA DINAMICA DE ESTRUCTURAS MEDIANTE UN PROCEDIMIENTO DE ESTADO

ALEX H. BARBAT¹,
JOSE RODELLAR¹,
FRANCISCO LOPEZ ALMANSA²

y
JESUS CARRERA¹

¹*E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos*

²*E.T.S. Arquitectura*
Universitat Politècnica de Catalunya, España

RESUMEN

Se desarrolla un procedimiento de cálculo de la respuesta dinámica de estructuras lineales elásticas basado en la representación de estado de las ecuaciones del movimiento. La estabilidad y la precisión del algoritmo de cálculo se comparan favorablemente con las de procedimientos de integración paso a paso. El procedimiento propuesto no requiere hipótesis restrictiva alguna acerca del tipo de matriz de amortiguamiento. Como ejemplos ilustrativos se incluyen la aplicación del algoritmo al cálculo sísmico de un dique de contención y de una estructura de edificación.

SUMMARY

A procedure for computing the dynamic response of elastic linear structure is developed. The method is based on the state representation the equations of motion. The algorithm stability and accuracy compare favourably with those of step-by-step integration procedures. The proposed approach does not require any restriction on the type of damping matrix. The methodology is illustrated by two examples: seismic response of a dam and calculation of a building structure.

INTRODUCCION

Los métodos numéricos utilizados para calcular la respuesta dinámica de estructuras lineales elásticas están condicionados básicamente por el tipo de amortiguamiento considerado en la modelización de la estructura y por la precisión deseada en los resultados. En el caso de un amortiguamiento de tipo clásico (matriz de amortiguamiento definida como una combinación lineal de las matrices de masa y de rigidez), se ha utilizado tradicionalmente el desacoplamiento modal con la posterior resolución de las ecuaciones diferenciales independientes resultantes a partir de una solución numérica de la integral de Duhamel. Este procedimiento tiene la ventaja de una buena precisión, pero no se puede aplicar al caso de un amortiguamiento no clásico. En este último caso, se pueden utilizar métodos de integración directa paso a paso de las ecuaciones del movimiento, o bien el desacoplamiento modal utilizando valores y vectores propios complejos. Los métodos de integración paso a paso son relativamente eficientes en un

Recibido: Mayo 1987

cálculo lineal elástico en lo referente al tiempo de cálculo, pero, al sustituir el operador derivada por un operador incremental, son especialmente sensibles a la acumulación de errores. Por otra parte el desacoplamiento modal mediante valores y vectores propios complejos aumenta considerablemente el tiempo de cálculo.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, puede ser de gran utilidad disponer de un método de cálculo de la respuesta dinámica de estructuras con comportamiento lineal elástico aplicable a modelos con amortiguamiento no clásico y que al mismo tiempo limite al máximo los errores de cálculo. En este sentido se ha propuesto en^{1, 2} un procedimiento de cálculo de la respuesta que parte de la representación de estado de las ecuaciones del movimiento. Este procedimiento, denominado SSP (Structural State Procedure), formula un modelo en tiempo discreto a través de la solución analítica de la ecuación del movimiento en espacio de estado.

En el caso de estructuras complejas, cuya modelización requiere un elevado número de grados de libertad, el volumen de cálculo necesario para solucionar las ecuaciones del movimiento mediante cualquier algoritmo aplicado es considerable. Si además se requiere un análisis de la respuesta dinámica con alta precisión, el volumen de cálculo se ve incrementado. Obviamente, la aplicación del SSP a este tipo de estructuras está enmarcada en esta problemática: alta precisión a costa de un notable tiempo de cálculo. Sin embargo, la eficiencia del SSP, en el sentido de reducir el esfuerzo de cálculo, puede incrementarse al utilizar este procedimiento combinado con el concepto de reducción modal. Este consiste en describir mediante un sistema de ecuaciones expresado en el espacio de los modos propios de vibración y cuyo orden se reduce al número de modos incluidos en el cálculo. Dicho sistema de ecuaciones está acoplado a través de la matriz de amortiguamiento si éste es de tipo no clásico.

En este artículo se describe el procedimiento SSP, incluida la formulación con reducción modal. Se hace un estudio de la estabilidad y de la precisión del algoritmo, efectuándose una comparación de ambas con las de métodos numéricos usuales de integración paso a paso, como son los de diferencias centrales, Newmark y Wilson. La aplicación práctica del algoritmo se ilustra mediante el cálculo de la respuesta sísmica de dos tipos de estructuras: un dique de contención discretizado mediante el método de los elementos finitos y un edificio de 23 plantas.

FORMULACION DEL PROCEDIMIENTO SSP

Las ecuaciones del movimiento de un modelo estructural con n grados de libertad sometido a una excitación dinámica $f(t)$ pueden expresarse en la forma

$$M \ddot{d} + C \dot{d} + K d = f(t) \quad (1)$$

donde M , C y K son, respectivamente, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez; d , $\dot{d}$ y $\ddot{d}$ son los vectores de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones nodales respectivamente.

Las ecuaciones del movimiento pueden escribirse en la forma de ecuación de estado siguiente:

$$\dot{x} = F x + v \quad (2)$$

donde el vector de estado $\mathbf{x}$, de dimensión $2n$, se define en la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

la matriz del sistema $\mathbf{F}$ es

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (4)$$

y $\mathbf{v}$ es el vector de excitación que define la acción dinámica en la forma

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (5)$$

La ecuación (2) tiene solución analítica y, para la condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, puede escribirse

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)} \mathbf{v}(\tau) d\tau \quad (6)$$

donde la matriz exponencial se define como

$$e^{\mathbf{F}(t-t_0)} = \mathbf{I} + \mathbf{F}(t-t_0) + \mathbf{F}^2 \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots \quad (7)$$

Dicha solución puede usarse para obtener una ecuación en tiempo discreto que permita calcular la respuesta en cada instante de tiempo $k\Delta t$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Para ello se expresa la ecuación (6) entre dos instantes consecutivos. Así, sustituyendo $t_0 = k\Delta t$ y $t = (k+1)\Delta t$ en (6) se obtiene

$$\mathbf{x}(k\Delta t + \Delta t) = e^{\mathbf{F}\Delta t} \mathbf{x}(k\Delta t) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{\mathbf{F}(k\Delta t + \Delta t - \tau)} \mathbf{v}(\tau) d\tau \quad (8)$$

El cálculo analítico de la integral de (8) requiere conocer la evolución temporal continua del vector de excitación $\mathbf{v}(\tau)$ en el intervalo $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$. Generalmente la acción dinámica $\mathbf{f}(t)$ puede definirse como una secuencia temporal discreta de valores. Por tanto ha de considerarse algún criterio para simular $\mathbf{v}(\tau)$ en el intervalo $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ según (5). Dos criterios sencillos distintos pueden consistir en suponer que la excitación se mantiene constante en dicho intervalo o bien suponer que varía linealmente.

En el caso de considerar una variación lineal, $v(\tau)$ puede expresarse

$$v(\tau) = v(k\Delta t) + \frac{\tau - k\Delta t}{\Delta t} [v(k\Delta t + \Delta t) - v(k\Delta t)] \quad (9)$$

Sustituyendo (9) en (8) y mediante el cambio de variable

$$\mu = k\Delta t + \Delta t - \tau \quad (10)$$

la ecuación (8) se escribe en la forma

$$\begin{aligned} x(k\Delta t + \Delta t) = e^{\mathbf{F}\Delta t} x(k\Delta t) + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{F}\mu} \left(\frac{\Delta t - \mu}{\Delta t} (v(k\Delta t + \Delta t) - v(k\Delta t)) + \right. \\ \left. + v(k\Delta t) \right) d\mu \end{aligned} \quad (11)$$

o bien finalmente como

$$\begin{aligned} x(k\Delta t + \Delta t) = \mathbf{A} x(k\Delta t) + \mathbf{P}_1 v(k\Delta t + \Delta t) + \\ + \mathbf{P}_2 [v(k\Delta t + \Delta t) - v(k\Delta t)] \end{aligned} \quad (12)$$

donde

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{F}\Delta t} \quad (13a)$$

$$\mathbf{P}_1 = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{F}\mu} d\mu \quad (13b)$$

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mu \cdot e^{\mathbf{F}\mu} d\mu \quad (13c)$$

Si se considera un valor constante de $v(\tau)$ entre dos instantes de tiempo consecutivos, utilizando el cambio de variable (10) en la ecuación (8) se obtiene directamente:

$$x(k\Delta t + \Delta t) = \mathbf{A} x(k\Delta t) + \mathbf{P}_1 v(k\Delta t) \quad (14)$$

Las ecuaciones (12) y (14) permiten obtener la respuesta en forma recurrente a partir de las condiciones iniciales. En la sección siguiente se da un algoritmo para el cálculo de las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$.

CALCULO DE LAS MATRICES $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$

De acuerdo con la definición de la matriz exponencial (7), $\mathbf{A}$ puede expresarse en la forma

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{F}\Delta t} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{F}^i \frac{\Delta t^i}{i!} \quad (15)$$

Análogamente $\mathbf{P}_1$ puede escribirse como

$$\mathbf{P}_1 = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{F}\mu} d\mu = \mathbf{F}^{-1} [\mathbf{A} - \mathbf{I}] \quad (16)$$

Integrando por parte, $\mathbf{P}_2$ se desarrolla en la forma

$$\mathbf{P}_2 = -\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mu e^{\mathbf{F}\mu} d\mu = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}_1 - \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}) \quad (17)$$

Existen distintos métodos de calcular la matriz exponencial $e^{\mathbf{F}\Delta t}$ entre los que pueden destacarse los basados en la factorización de la matriz $\mathbf{F}\Delta t$ por semejanza y los que aproximan el propio desarrollo en serie (15)³. Si la matriz $\mathbf{F}$ fuera simétrica, la factorización sería especialmente efectiva diagonalizando $\mathbf{F}\Delta t$. La matriz $\mathbf{F}$ definida en (4) correspondiente al modelo estructural no es simétrica y, en tal caso, parece más conveniente la aproximación del desarrollo en serie tomando un número finito de términos en (15).

Una forma eficiente de calcular dicha serie parte de la definición de una matriz

$$\underline{\psi} = \mathbf{I} + \mathbf{F} \frac{\Delta t}{2!} + \mathbf{F}^2 \frac{\Delta t^2}{3!} + \dots + \mathbf{F}^{L-1} \frac{\Delta t^{L-1}}{L!} \quad (18)$$

que permite escribir las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{P}_1$ en la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{F} \underline{\psi} \Delta t \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_1 = \underline{\psi} \Delta t \quad (20)$$

El cálculo de $\tilde{\psi}$ puede optimizarse utilizando la expresión (ver por ejemplo⁴):

$$\tilde{\psi} = \mathbf{I} + \mathbf{F} \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{I} + \mathbf{F} \frac{\Delta t}{3} (\dots \mathbf{F} \frac{\Delta t}{L-1} (\mathbf{I} + \mathbf{F} \frac{\Delta t}{L}) \dots)) \quad (21)$$

La evaluación de la matriz $\tilde{\psi}$ es un punto importante en la aplicación del SSP ya que en ella reside la fuente de error intrínseca del algoritmo.

La evaluación numérica de la expresión (21) conlleva premultiplicar en cada iteración una matriz genérica $\mathbf{B}$ por $\mathbf{F}$ y ello, de acuerdo con (4), puede ordenarse en cuatro bloques de dimensión $n \times n$ según:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{B}_{11} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{B}_{12} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{B}_{21} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

Esta operación requiere un número $4n^3$ de multiplicaciones y $4n^2$ de sumas.

Implementación del procedimiento

Los pasos a seguir para implementar el procedimiento descrito pueden resumirse en:

- Selección del incremento de tiempo Δt .
- Selección del número L de iteraciones y cálculo de la matriz $\tilde{\psi}$ mediante la expresión (21).
- Cálculo de las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ (si se utiliza la aproximación lineal) según (19), (20) y (17).
- Cálculo del vector de estado $\mathbf{x}$ en cada instante de tiempo, a partir de las condiciones iniciales, de acuerdo con (12) ó (14).
- La respuesta en aceleración puede obtenerse por derivación numérica de la respuesta en velocidad contenida en el vector $\mathbf{x}$.

Los pasos a) - c) se ejecutan una única vez. Los pasos d) y e) son los que se ejecutan de forma recurrente para calcular la respuesta en cada instante de tiempo.

SSP CON REDUCCION MODAL

Se consideran los valores propios ω_i y los vectores propios ϕ_i del sistema sin amortiguamiento. Las propiedades de ortogonalidad de los vectores propios permiten desacoplar el sistema de ecuaciones del movimiento (1) en el caso en que el amortiguamiento considerado sea de tipo clásico (Rayleigh, por ejemplo).

Los primeros n_p valores y vectores propios se organizan respectivamente en la matriz espectral Ω^2 diagonal de dimensión $n_p \times n_p$ y en la matriz modal ϕ de dimensión $n \times n_p$. Se utiliza en (1) el cambio de variable

$$\mathbf{d}(t) = \phi \cdot \underline{\eta}(t) \quad (23)$$

donde las coordenadas generalizadas $\underline{\eta}(t)$ son las nuevas incógnitas del problema. Después de la premultiplicación por ϕ^T se obtiene:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\underline{\eta}}(t) + \mathbf{C}^* \dot{\underline{\eta}}(t) + \mathbf{K}^* \underline{\eta}(t) = \phi^T \mathbf{f}(t) \quad (24)$$

donde

$$\mathbf{M}^* = \phi^T \mathbf{M} \phi; \mathbf{C}^* = \phi^T \mathbf{C} \phi; \mathbf{K}^* = \phi^T \mathbf{K} \phi \quad (25)$$

Debido a las condiciones de ortogonalidad, las matrices $\mathbf{M}^*$ y $\mathbf{K}^*$ son diagonales. En el caso en que el amortiguamiento es de tipo no-clásico, la matriz del amortiguamiento generalizado $\mathbf{C}^*$ no es diagonal. Por consiguiente el sistema de ecuaciones (24) está acoplado a través de la matriz $\mathbf{C}^*$. Pero la aplicación de la transformación (23) ha reducido de n a n_p la dimensión del sistema de ecuaciones a solucionar, con lo cual la aplicación del SSP es mucho más eficiente.

En general, los algoritmos de cálculo de los valores y vectores propios proporcionan matrices modales ortonormales. En tal caso se tiene $\mathbf{M}^* = \mathbf{I}$ y $\mathbf{K}^* = \Omega^2$. En consecuencia la matriz $\mathbf{F}$ toma la forma

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -\mathbf{C}^* \end{bmatrix} \quad (26)$$

La operación (22) implicada en el cálculo de ψ es de esta forma significativamente menos costosa debido a que n_p es generalmente mucho menor que n y además el número de multiplicaciones y de sumas puede reducirse aún más al ser $\mathbf{C}^*$ la única matriz llena en $\mathbf{F}$.

Una vez calculada la respuesta generalizada $\underline{\eta}(t)$, $\dot{\underline{\eta}}(t)$ y $\ddot{\underline{\eta}}(t)$ mediante la aplicación del SSP, la relación (23) proporciona la respuesta en desplazamientos $\mathbf{d}(t)$, en velocidades $\dot{\mathbf{d}}(t)$ y en aceleraciones $\ddot{\mathbf{d}}(t)$.

ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD

El incremento de tiempo Δt utilizado en un procedimiento de cálculo numérico para solucionar las ecuaciones del movimiento (1) tiene que ser suficientemente pequeño

para asegurar la estabilidad; pero al mismo tiempo es conveniente que sea lo mayor posible para reducir el tiempo de cálculo. Un algoritmo numérico como el SSP puede definirse como estable si para una excitación acotada proporciona una respuesta acotada pues ello garantiza ausencia de amplificaciones artificiales en la respuesta. Como se demuestra a continuación la estabilidad del SSP está ligada a los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$.

Para analizar la estabilidad se precisa una expresión que relacione la respuesta en un instante k con la excitación en todos los instantes anteriores y con las condiciones iniciales. Aplicando k veces la expresión (12) a partir del instante inicial, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k\Delta t) = & \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \mathbf{P}_1 \sum_{l=1}^k \mathbf{A}^{k-l} \mathbf{v}(l\Delta t) + \\ & + \mathbf{P}_2 \sum_{l=1}^k \mathbf{A}^{k-l} [\mathbf{v}(l\Delta t) - \mathbf{v}(l\Delta t - \Delta t)] \end{aligned} \quad (27)$$

Si la matriz $\mathbf{F}$ es diagonalizable (como por ejemplo, en el caso en que son distintos todos sus valores propios), las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ tienen también expresión diagonal en la nueva base de vectores propios de $\mathbf{F}$. Si se llama $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ a los valores propios de $\mathbf{F}$, en general complejos, la igualdad (27) se transforma, en la base de vectores propios, en las $2n$ siguientes ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} x'_i(k\Delta t) = & e^{\Delta t \lambda_i} x'_i(0) + \frac{e^{\Delta t \lambda_i} - 1}{\lambda_i} \sum_{l=1}^k e^{\Delta t \lambda_i (k-l)} v'_i(l\Delta t) + \\ & + \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{e^{\Delta t \lambda_i} - 1}{\Delta t \lambda_i} - e^{\Delta t \lambda_i} \right) \sum_{l=1}^k e^{\Delta t \lambda_i (k-l)} (v'_i(l\Delta t) - v'_i(l\Delta t - \Delta t)) \end{aligned} \quad (28)$$

donde x'_i y v'_i son las componentes de los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{v}$ en dicha base. Si los módulos de las componentes de $\mathbf{x}'(0)$ y $\mathbf{v}'$ están todos acotados por un valor ϵ (es decir, la excitación está acotada) el módulo de $x'_i(k\Delta t)$ verifica la desigualdad

$$|x'_i(k\Delta t)| \leq \epsilon \left(|e^{\Delta t \lambda_i}|^k + \mu \left| \frac{1 - e^{\Delta t \lambda_i k}}{1 - e^{\Delta t \lambda_i}} \right| \right) \quad (29)$$

donde μ es independiente de k y su valor es

$$\mu = \left| \frac{e^{\Delta t \lambda_i} - 1}{\lambda_i} \right| + \frac{2}{|\lambda_i|} \left| \frac{e^{\Delta t \lambda_i} - 1}{\Delta t \lambda_i} - e^{\Delta t \lambda_i} \right| \quad (30)$$

Cuando el tiempo tiende a infinito ($k \rightarrow \infty$) el segundo miembro de la desigualdad (29) tiene como límite

$$\frac{\epsilon \mu}{|1 - e^{\Delta t \lambda_i}|} \quad (31)$$

si $e^{\Delta t \lambda_i}$ (valores propios de $\mathbf{A}$) tienen módulo menor que la unidad. Ello equivale a que los valores propios de $\mathbf{F}$, λ_i , tengan parte real negativa. La existencia del límite (31) asegura que las sucesiones $(x_i'(k\Delta t))_{k \in \mathbb{N}}$ están acotadas para cualquier valor de i entre 1 y $2n$. En consecuencia la respuesta $\mathbf{x}$ está acotada y el algoritmo SSP es estable si los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ tienen módulo menor que la unidad.

En ausencia de excitación la expresión (27) se reduce a

$$\mathbf{x}(k\Delta t) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) \quad (32)$$

En este caso puede garantizarse que la respuesta está acotada cuando k tiende a infinito, si el módulo de los valores propios de $\mathbf{A}$ es menor o igual que la unidad y que dicha respuesta tiende a cero cuando k tiende a infinito si el módulo de los valores propios de $\mathbf{A}$ es menor que la unidad. Puesto que el amortiguamiento contribuye a la estabilidad, es suficiente verificar la condición de estabilidad para el sistema sin amortiguamiento. En tal caso, las ecuaciones obtenidas sustituyendo $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ en (1) y el sistema de ecuaciones desacopladas incluyendo todos los n módulos propios son equivalentes y sobre dicho sistema se estudia a continuación la estabilidad del SSP verificando que todos los valores propios de $\mathbf{A}$ tengan módulo menor o igual a la unidad.

Considerando $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ en (1), el sistema de ecuaciones desacopladas es

$$\ddot{\eta} + \Omega^2 \eta = \Phi^T \mathbf{f}(t) \quad (33)$$

donde en (33) se han incluido los n modos de vibración. La matriz $\mathbf{F}$ de la ecuación de estado correspondiente a (33) es de la forma

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (34)$$

En este caso los $2n$ valores propios de $\mathbf{F}$ son $\pm j\omega_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) donde $j = \sqrt{-1}$. La matriz exponencial exacta $\mathbf{A} = e^{\mathbf{F}\Delta t}$ tiene como valores propios $\lambda_i = e^{\pm j\omega_i \Delta t}$ ($i=1, 2, \dots, n$). Su módulo es la unidad y en consecuencia la estabilidad estaría intrínsecamente garantizada si $\mathbf{A}$ se calculase exactamente. Si $\mathbf{A}$ se calcula utilizando la serie truncada (18) el módulo de sus valores propios depende de la aproximación realizada, es decir del número L de términos incluidos en la serie. La figura 1 representa el módulo ρ_i de los valores propios aproximados para distintos valores de L en

función de la relación $\Delta t/T_i$ donde $T_i = 2\pi/\omega_i$. Puede observarse que para cualquier valor de $\Delta t/T_i$, existe un número L de términos de la serie para el que $\rho_i \leq 1$ garantizando así la estabilidad del modo i . Dado que el valor de L necesario para ello crece con la relación $\Delta t/T_i$, la estabilidad del procedimiento aplicado al sistema global requiere utilizar el número de términos apropiado para la relación $\Delta t/T_n$ siendo T_n el período correspondiente al modo más alto. De la figura 1 se deduce que con un número pequeño de términos (≤ 30) se asegura la estabilidad del procedimiento dentro de un rango de valores de $\Delta t/T_n$ grande (hasta 1.8). Cuando se aplica el SSP con reducción modal, se requiere un número aún menor de términos para garantizar la estabilidad al ser la relación $\Delta t/T_{np}$ mucho menor que $\Delta t/T_n$.

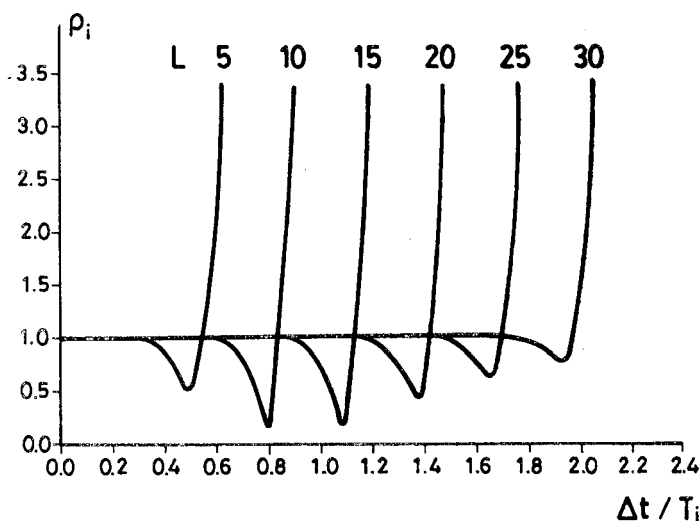


Figura 1. Análisis de la estabilidad.

ANÁLISIS DE LA PRECISIÓN

Un algoritmo numérico es tanto más preciso cuanto más se aproxima la respuesta calculada a la respuesta real del modelo. La precisión suele estimarse considerando la vibración libre no amortiguada del sistema descoplado⁵ a partir de unas condiciones iniciales dadas. Para este sistema se ha comparado la precisión del SSP con la del método de las diferencias centrales, el de Newmark y el de Wilson. Para la comparación se ha definido como criterio de error e_i la media cuadrática de la diferencia entre la solución numérica y la analítica para un modo i a lo largo de 25 segundos. La figura 2 muestra la variación del error e_i en función de la relación $\Delta t/T_i$ para un desplazamiento inicial 1 y velocidad inicial nula.

Dentro del rango de valores $\Delta t/T_i$ considerado en la figura 2, el error del SSP es prácticamente nulo. Tal como está estructurado el cálculo de las matrices del algoritmo en las ecuaciones (17), (19) y (20), la única fuente de error intrínseca del procedimiento SSP está en el cálculo de ψ según (21). Por tanto, el número L de términos considerados en (21), además de condicionar la estabilidad, influye en la precisión del SSP. Para

el valor $L=10$ y para $\Delta t/T_i \leq 0.2$ considerados en la figura 2, se observa en la figura 1 que la estabilidad está garantizada. Pero además, para estos valores el cálculo de A es prácticamente exacto.

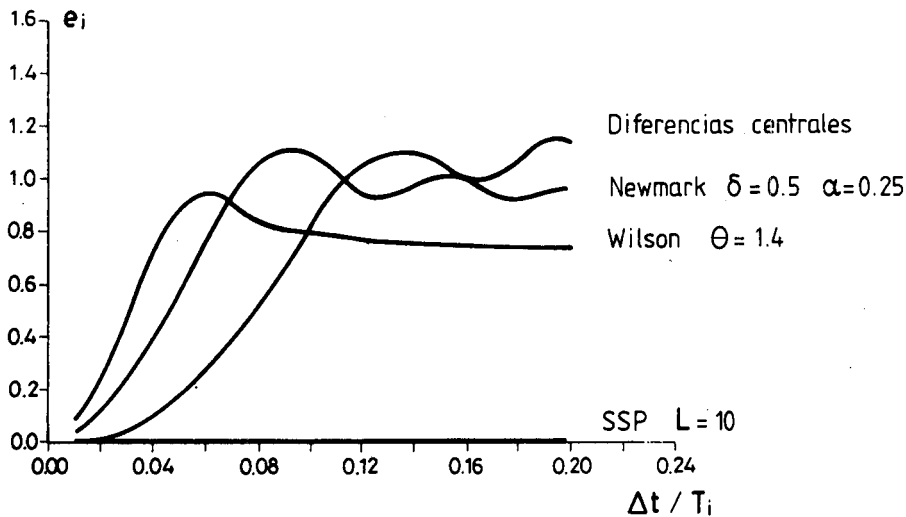


Figura 2. Análisis de la precisión para vibración libre.

En presencia de excitación, la precisión se ve influenciada también por la relación entre el incremento de tiempo y el período predominante de la excitación. Para un modo i , la figura 3 representa la comparación del error e_i para los métodos anteriormente considerados para el caso de una excitación sinusoidal de período T_s . El error del SSP está ligado a la aproximación lineal de la excitación entre instantes sucesivos que se utiliza en la integral de (8). Esto explica el crecimiento del error con la relación $\Delta t/T_s$ aunque su valor es significativamente inferior al de los otros algoritmos considerados en la figura 3.

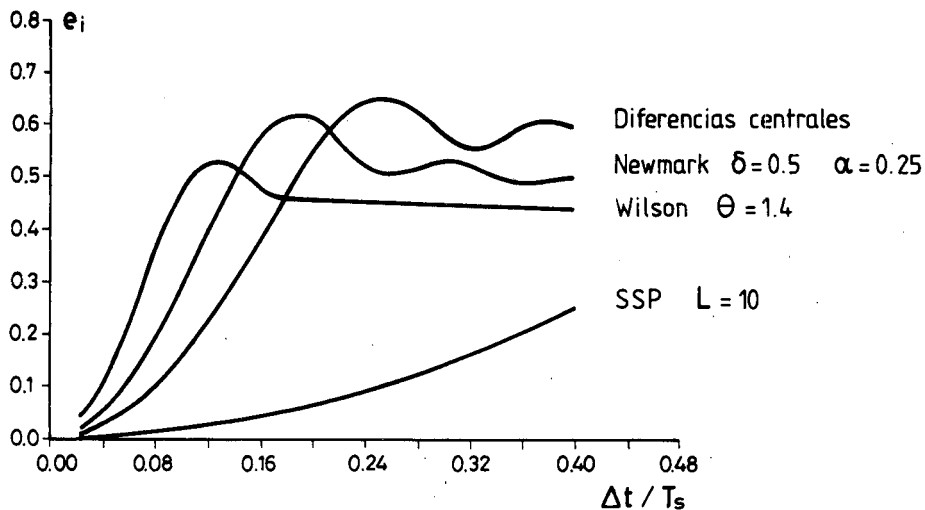


Figura 3. Análisis de la precisión para excitación sinusoidal.

APLICACION AL CALCULO SISMICO DE UN DIQUE

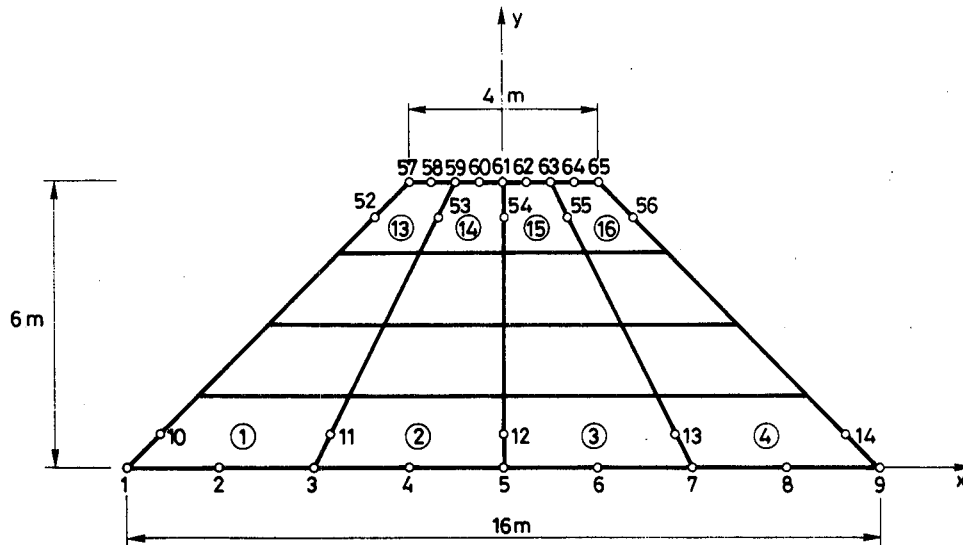


Figura 4. Dique de contención discretizado en elementos finitos.

Se considera el dique de contención de la figura 4, en un estado de deformación plana, discretizado en 16 elementos finitos bidimensionales. El modelo resultante tiene 112 grados de libertad. El dique se considera sujeto a un movimiento sísmico horizontal de aceleración $a(t)$, siendo sus ecuaciones del movimiento:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = -\mathbf{M} \mathbf{j} a(t) \quad (35)$$

donde $\mathbf{j}$ es un vector de componentes 1 según los grados de libertad horizontales y 0 según los verticales. La matriz de masa $\mathbf{M}$ es consistente y se ha generado utilizándose las mismas funciones de forma $\mathbf{N}$ que en la generación de la matriz de rigidez $\mathbf{K}$.

La matriz de amortiguamiento $\mathbf{C}$ es también consistente y se ha ensamblado a partir de las matrices de los elementos $\mathbf{C}_e$ definidas por

$$\mathbf{C}_e = \int_{v_e} \mathbf{N}^T \tilde{\gamma} \mathbf{N} dv \quad (36)$$

En la relación (36) $\mathbf{N}$ son las funciones de forma y

$$\tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

contiene los coeficientes de amortiguamiento del material, correspondientes respectivamente a la dirección horizontal y vertical. De esta manera, al considerar diferentes coeficientes de amortiguamiento para los distintos tipos de materiales que constituyen la estructura, la matriz de amortiguamiento resultante $\mathbf{C}$ es de tipo no-clásico.

La estructura analizada está compuesta por dos materiales cuyas características son las siguientes:

Material 1 (en los elementos 2, 3, 6, 7, 10, 11)

$$E = 2.10^4 \text{ N/cm}^2; \quad \nu = 0.3; \quad \rho = 2000 \text{ kg/m}^3$$

$$\gamma_1 = 100 \text{ Ns/m}^4, \quad \gamma_2 = 0$$

Material 2 (en los demás elementos)

$$E = 10^5 \text{ N/cm}^2; \quad \nu = 0.2; \quad \rho = 2000 \text{ kg/m}^3$$

$$\gamma_1 = 300 \text{ Ns/m}^4, \quad \gamma_2 = 0$$

La aceleración sísmica considerada se representa en la figura 5 correspondiendo a un acelerograma generado artificialmente⁶ con una frecuencia predominante de 2,5 Hz. Para la aplicación del SSP al sistema completo de ecuaciones no desacopladas, se ha utilizado un incremento de tiempo $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ y un número de términos $L=30$ para el cálculo de la matriz $\mathbf{A}$. Con este Δt se tiene para el modo 112 una

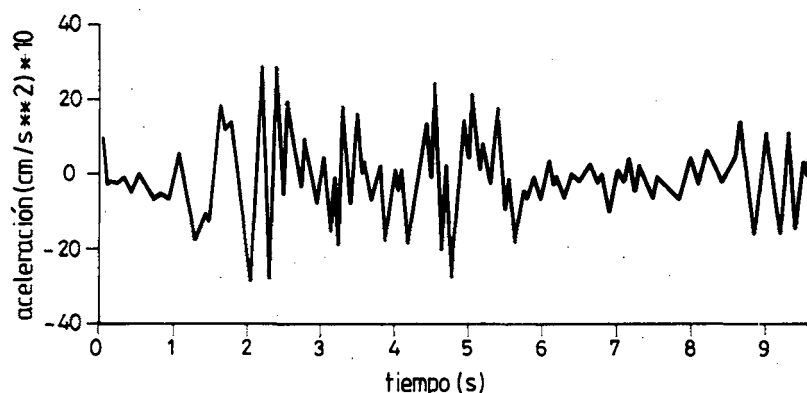


Figura 5. Acelerograma de excitación sintético.

relación $\Delta t/T_{112} = 1.5$. Puede comprobarse en la figura 1 que un valor de $L=30$ garantiza en este caso la estabilidad del sistema completo por no amplificarse artificialmente ningún modo propio superior de vibración. Asimismo, la respuesta se determina con muy buena precisión ya que los modos que influyen apreciablemente en la respuesta tienen un período propio tal que la relación $\Delta t/T_i$ corresponde en la figura 2 a un error inapreciable. Además, el número de términos L de la serie considerado en la figura 2 ha sido 10, mientras que en la aplicación del algoritmo SSP se han incluido 30 términos.

La precisión respecto a la aproximación lineal de la excitación también buena por ser la relación $\Delta t/T_s = 0.0125$ muy inferior a los valores que en la figura 3 corresponden a errores apreciables.

En las figuras 6-9 se presentan características de respuesta para los grados de libertad 99 y 111.

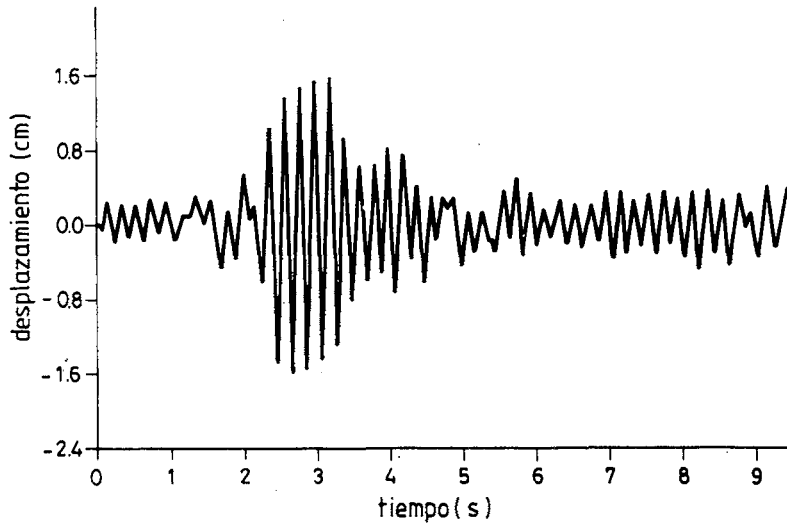


Figura 6. Desplazamiento del grado de libertad 99.

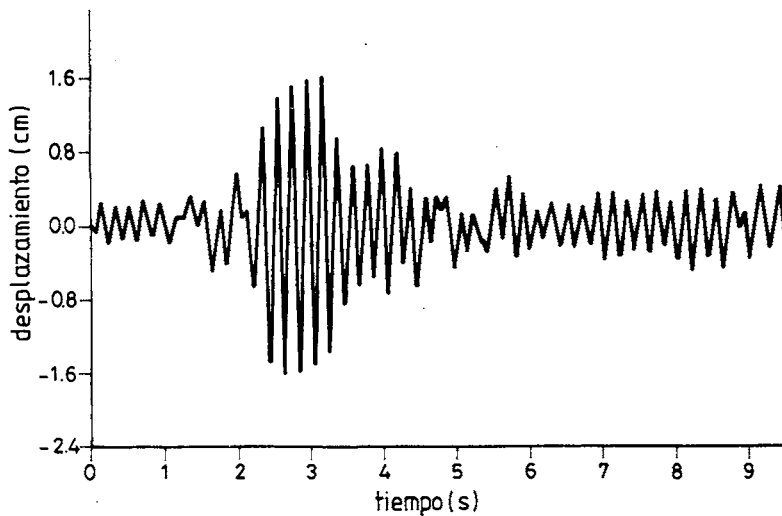


Figura 7. Desplazamiento del grado de libertad 111.

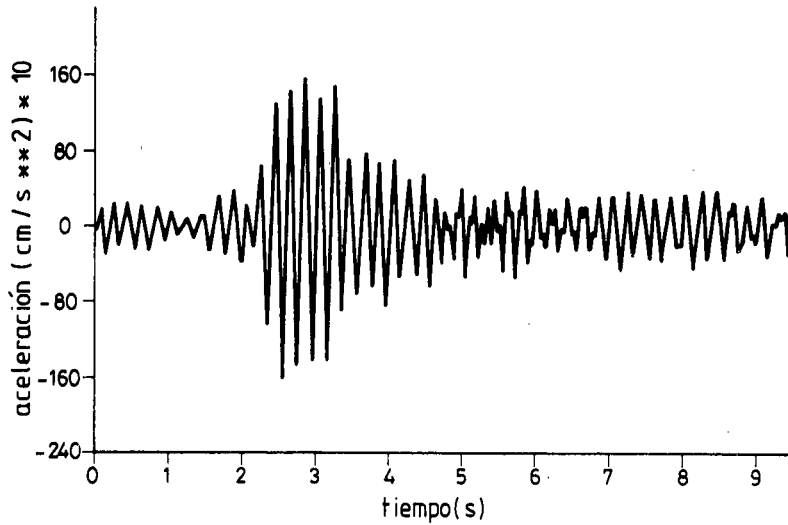


Figura 8. Velocidad del grado de libertad 111.

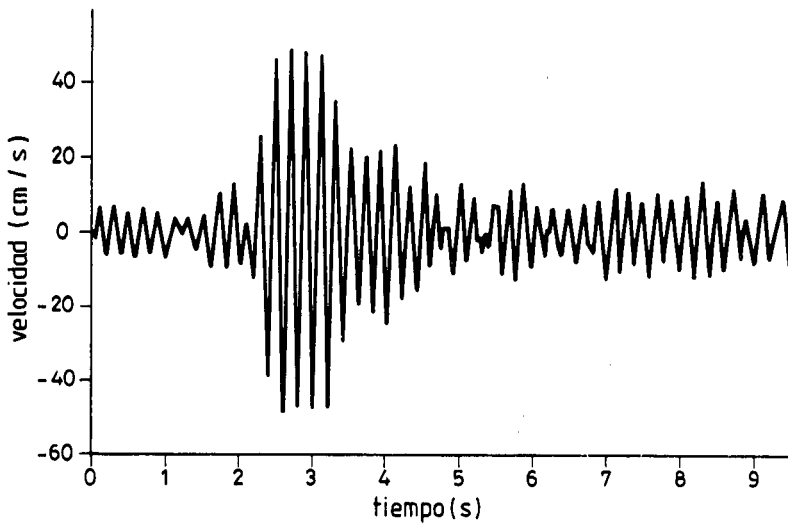


Figura 9. Aceleración del grado de libertad 111.

El procedimiento SSP se ha aplicado también con una previa reducción modal incluyendo en el análisis únicamente los primeros diez modos. El número de multiplicaciones implicadas en la operación (22) se ha reducido 1200 veces obteniéndose resultados prácticamente iguales a los presentados en las figuras 6-9.

APLICACION AL CALCULO SISMICO DE UN EDIFICIO

El procedimiento SSP se aplica a la obtención de la respuesta dinámica de un edificio de 23 plantas sometido a una excitación sísmica. El edificio consta de cinco pórticos

paralelos idénticos en cuyo plano se supone que actúa la aceleración sísmica. Las dimensiones y estructura de una planta tipo del edificio se indican en la figura 10. La altura de cada planta es de 3.5 m, excepto la de la primera planta que es de 4 m. En la Tabla 1 se muestran los perfiles metálicos de acero A-52 utilizados en los diferentes pilares y jácenas. Suponiendo rigidez absoluta de los forjados en su plano, se modeliza el comportamiento dinámico horizontal del edificio en el plano de sus pórticos mediante un modelo lineal discreto de 23 grados de libertad coincidentes con los desplazamientos horizontales de cada piso.

TABLA 1. Secciones de pilares y jácenas del edificio

Plantas	Pilares
1 y 2	HEB 600 + 2 # 350 x 30
3 y 4	HEB 600 + 2 # 350 x 24
5 y 6	HEB 600 + 2 # 350 x 20
7	HEB 600 + 2 # 350 x 15
8	HEB 600 + 2 # 350 x 10
9 y 10	HEB 600
11	HEB 550
12	HEB 500
13	HEB 450
14	HEB 400
15	HEB 360
16	HEB 340
17	HEB 320
18	HEB 300
19	HEB 280
20	HEB 260
21	HEB 240
22	HEB 220
23	HEB 220

Todas las jácenas están formadas por perfiles IPN 550.

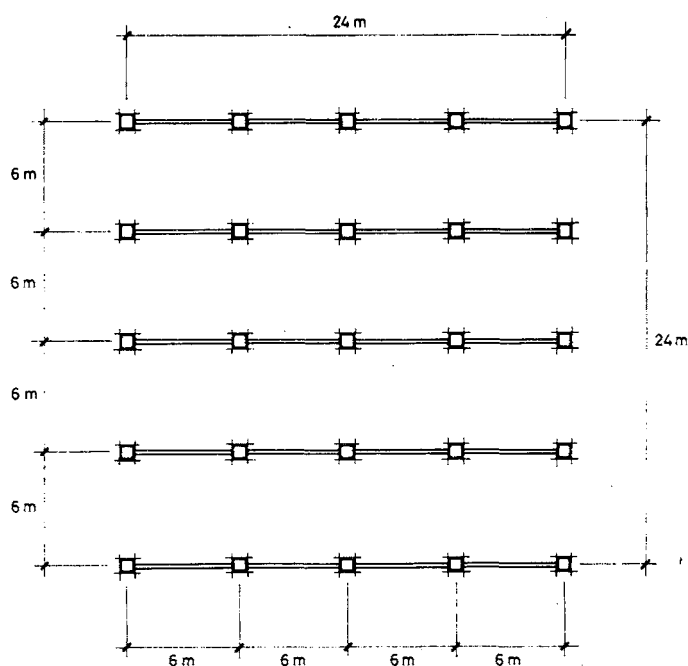


Figura 10. Planta-tipo del edificio.

La matriz de rigidez $\mathbf{K}$ se obtiene como inversa de la matriz de flexibilidad $\mathbf{S}$. Los elementos s_{ij} de la matriz $\mathbf{S}$ del modelo se obtienen calculando el desplazamiento horizontal del piso j cuando actúa una carga unitaria sobre el piso i . Bajo estas consideraciones el comportamiento dinámico del modelo se rige por la ecuación (35). La matriz $\mathbf{M}$ de masa es diagonal y la matriz de amortiguamiento $\mathbf{C}$ se define en coordenadas modales considerando una fracción del 2.5 % del amortiguamiento crítico. El vector $\mathbf{j}$ está formado por componentes 1.

Se somete el edificio a la acción de un acelerograma sintético⁶ con una frecuencia de 2.5 Hz y una aceleración máxima esperada de 0.15 g. En la figura 11 se representa gráficamente dicho acelerograma.

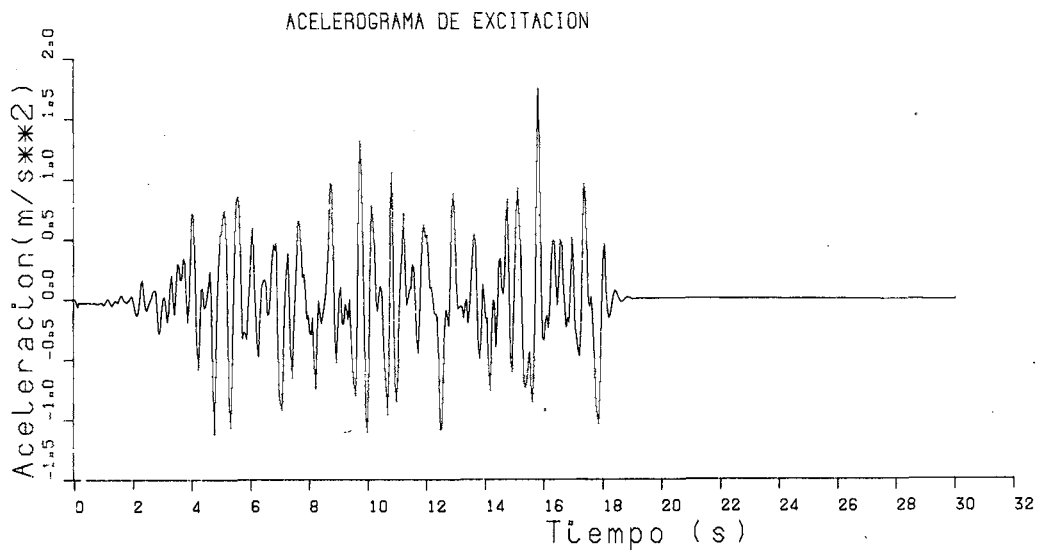


Figura 11. Acelerograma de excitación sintético.

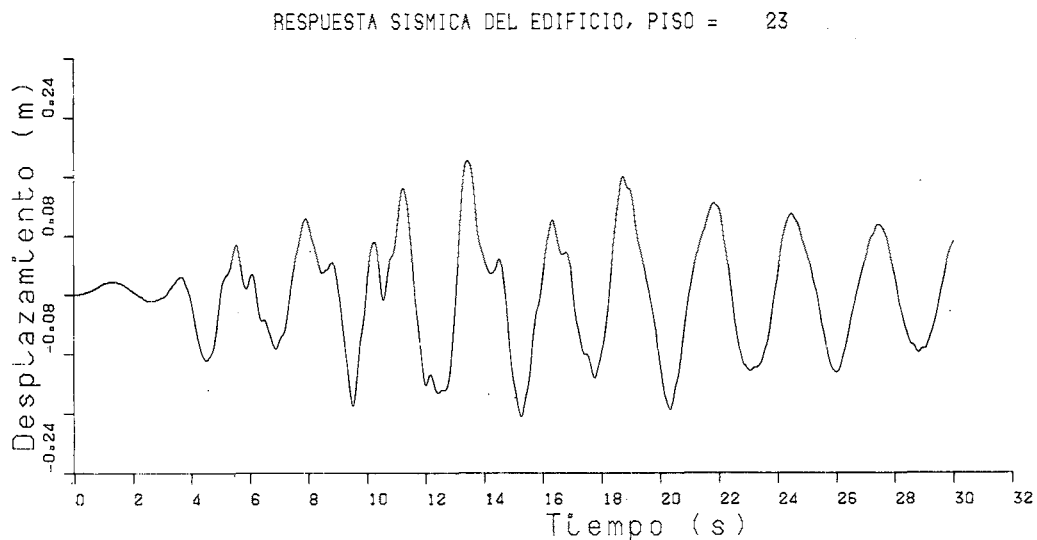


Figura 12. Desplazamiento del piso superior.

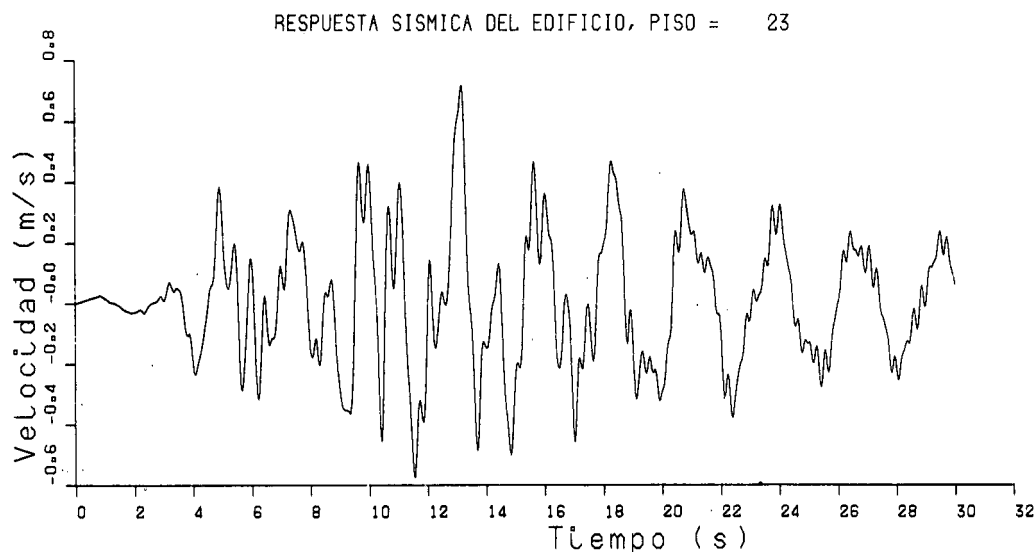


Figura 13. Velocidad del piso superior.

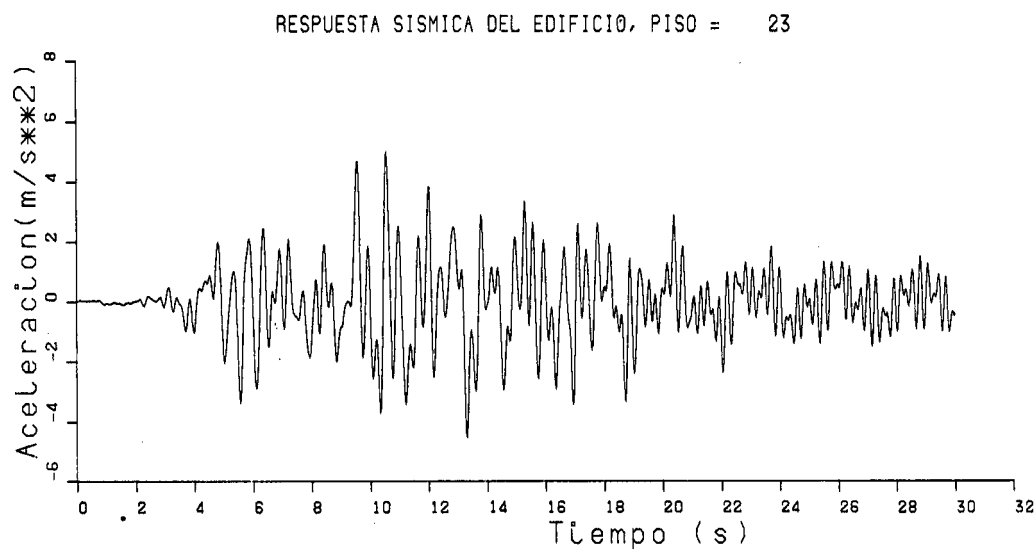


Figura 14. Aceleración del piso superior.

Para la aplicación del procedimiento SSP se toman 30 términos de la serie de Taylor de $\Delta t \mathbf{F}$ y se considera un intervalo de discretización $\Delta t = 0.025$ segundos de forma que la relación $\Delta t/T_{23}$ correspondiente al modo propio 23 toma el valor 0.86 que asegura la estabilidad del proceso de cálculo según la figura 1. Las figuras 2 y 3 muestran que el cálculo tiene una buena precisión para los modos que influyen de forma apreciable en la respuesta.

En las figuras 12, 13 y 14 se representa la respuesta en desplazamientos, velocidades y aceleraciones del piso superior. Es interesante señalar que a partir de 18 segundos se tiene respuesta libre al cesar la excitación.

CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un algoritmo para el cálculo numérico de la respuesta dinámica de estructuras con comportamiento lineal-elástico que parte de una representación de estado de las ecuaciones del movimiento. Utilizando la solución analítica de la ecuación de estado, se formula una ecuación en tiempo discreto cuya solución es exacta. La única fuente de error intrínseca del algoritmo reside en la evaluación de una matriz exponencial mediante un desarrollo en serie. El número L de términos de la serie siempre puede fijarse de manera que la estabilidad y la precisión estén aseguradas. El valor de L depende de la relación entre el incremento de tiempo y el período del modo más alto incluido en el análisis. En este contexto el procedimiento propuesto ha demostrado ser más preciso que otros algoritmos usuales de integración paso a paso. En este sentido el SSP puede utilizarse como un método de referencia para comprobaciones de la precisión de otros algoritmos.

El procedimiento presentado admite amortiguamiento de tipo no-clásico, caso en que el sistema de ecuaciones del movimiento no puede desacoplarse. Sin embargo, puede utilizarse la reducción modal de dicho sistema de ecuaciones, incluyendo en el análisis los primeros modos propios del modelo no amortiguado. Esta operación reduce sustancialmente el tiempo de cálculo.

REFERENCIAS

1. J. Rodellar y A. H. Barbat, "Numerical analysis of the seismic response. A state space approach", *Proceedings of the NUMETA '85 Conference*, Swansea, Ed. J. Middleton and S.N. Pande, A.A. Balkema Publ., 273-279, (1985).
2. A. H. Barbat, J. Rodellar, J. Carrera y P. Beroy, "Procedimiento de espacio de estado para el cálculo de la respuesta dinámica de modelos de elementos finitos". En *Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería*, Vol. 1, Ed. J. Oliver, M. Casteleiro y E. Oñate, Edicions de la U.P.C., A-273 - A-285, (1986).
3. C. Moler y C. Van Loan, "Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix", *SIAM Review*, Vol. 20, No. 4, 801-836, (1978).
4. G. Franklin y J.D. Powell, *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley Publishing, (1980).
5. K.J. Bathe y E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc., (1976).
6. P. Ruíz y J. Penzien, "PSEQGN: Artificial generation of earthquake accelerograms", College of Engineering, Univ. of California, Berkeley, California, Report, (1969).

