

Tratamiento del Fenómeno de Fatiga Mediante la Mecánica de Medios Continuos

**A. Suero
S. Oller**

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España

Primera edición Diciembre 1998

TRATAMIENTO DEL FENÓMENO DE FATIGA MEDIANTE LA MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS
Monografía CIMNE M45
© Los autores

ISBN: 84-89925-30-5
Depósito legal: B-4677-1999

Prólogo.

En el presente trabajo se desarrolla un nuevo modelo constitutivo, basado en la mecánica de medios continuos, que permite modelar el comportamiento a fatiga isotérmica bajo cargas periódicas. Este modelo permite tratar en forma conjunta fenómenos acoplados, tales como la combinación de fatiga con daño, plasticidad, fenómenos viscosos y temperatura.

Se presenta una formulación basada en la teoría de la plasticidad y daño y se establecen las modificaciones necesarias a realizar en estas teorías, para garantizar la inclusión del fenómeno de fatiga.

El estudio de la fatiga ha sido tema de continuos trabajos de investigación en los últimos setenta años. Esto ha echado luz sobre esta disciplina, generando una cantidad de publicaciones y teorías de distinta importancia. A pesar del gran volumen de trabajo que ha realizado la ingeniería sobre este tema, se encuentran aun grandes lagunas en cuanto a la simulación numérica del mismo y a la predicción de vida útil en las piezas. Sobre este último tema pocas teorías han acertado y por lo tanto no hay caminos claros para garantizar aciertos en este tema.

Basado en el estado actual del tema, se ha querido en este trabajo avanzar en la dirección de la predicción de vida útil y utilizar las herramientas de la mecánica de medios continuos para garantizar la concreción de las ideas.

Otra motivación del desarrollo de este trabajo se asienta en la peligrosidad que involucra la falta de conocimientos para la realización de la predicción de vida útil de las piezas. Las roturas por fatiga son especialmente peligrosas por que no suelen presentar indicios de fallo inminente, sino que este se produce de modo repentino y sin observar deformaciones plásticas de conjunto. Se trata pues de roturas frágiles que se caracterizan por presentar zonas bien diferenciadas, una de textura lisa con muestra de rotura dúctil y otra de textura gruesa rugosa más brillante que es donde se localiza la rotura final al rebasar la resistencia máxima disminuida por el fenómeno de fatiga.

Hay que recordar que normalmente la fatiga no sobreviene sola y que siempre está acompañada de otros efectos mecánicos que en un principio pueden parecer secundarios, pero al final se tornan determinantes en la vida de las piezas.

En la esperanza de abrir un camino para el tratamiento de este fenómeno desde la mecánica de medios continuos, es que se desarrolla el presente trabajo,

Indice

Prologo.	i
Capítulo 1 : Introducción	1
Capítulo 2 : Conceptos básicos sobre la fatiga	5
2.1 Curvas tensión-número de ciclos	5
2.2 Curvas deformación-número de ciclos	7
2.3 Estudios basados en la mecánica de fractura.	11
2.4 Modelos de daño	14
2.5 Acumulación del daño	16
Capítulo 3 : La fatiga dentro de la mecánica de medios continuos	19
3.1 Introducción	19
3.2 Teoría de la plasticidad clásica	21
3.2.1. Breve reseña del modelo elasto-plástico	21
3.2.2. Criterio de fluencia plástico	22
3.2.3. Criterio de fluencia plástico de Von-Mises	23
3.2.4. Comportamiento elasto-plástico	23
3.2.5. Endurecimiento plástico	23
3.2.6. Relación tensión-deformación generalizada	25
3.3 Modelos de daño isótropo	26
3.3.1. Breve reseña del modelo de daño isótropo	26
3.3.2. Tensión equivalente y criterio de daño	28
3.4 Formulación del fenómeno de fatiga dentro de la mecánica de medios continuos	29
3.4.1. Introducción	29
3.4.2. Relación con las curvas de Wöhler.	34
3.5 Detalles sobre la formulación propuesta.	35
3.5.1. Curvas de Wöhler.	35
3.5.2. Curvas de evolución de la tensión límite de discontinuidad	38
3.5.3. Planteamiento general de la fatiga combinada con otros comportamientos no-lineales.	41
3.5.4. Caso de vida infinita.	42
3.5.5. Observaciones	44
3.6 Aplicación de cargas con periodos y amplitudes variables.	46
3.6.1. Aplicación de diversas cargas armónicas.	46
3.6.2. Redistribución de tensiones	48
3.7 Otras consideraciones sobre la formulación de fatiga.	48
3.7.1. Parámetro β .	48
3.7.2. Coste de cálculo.	50
Capítulo 4 : Ejemplos de aplicación de la teoría de fatiga	51
4.1 Introducción	51
4.2 Ejemplo de una probeta bajo carga uniaxial.	52

4.2.1. Prueba de acumulación de daño.	55
4.3 Crecimiento de fisuras	57
4.3.1. Características del material, geometría y malla de elementos finitos.	58
4.3.2. Crecimiento de la localización de deformaciones – fisuración.	62
4.3.3. Curvas de evolución del daño a lo largo de la pieza	64
4.3.4. Curvas de evolución de la tensión a lo largo de la pieza	66
Notación	67
Bibliografía	69

Capítulo 1

Introducción

Cuando sobre los materiales actúan cargas que varían a lo largo del tiempo, la rotura se produce para valores de cargas inferiores a los que podrían soportar si su valor fuese constante. A este fenómeno se le denomina fatiga y es definido de un modo más general según las normas ASTM ¹ como: “el proceso de cambio estructural permanente, progresivo y localizado que ocurre en un material sujeto a tensiones y deformaciones variables, en algún punto o puntos y que produce grietas o la fractura completa tras un número suficiente de fluctuaciones”.

La fatiga es la causante de la mayor parte de las roturas de las piezas en servicio. Aunque no es posible establecer un porcentaje exacto, algunos autores sugieren que del orden del cincuenta al noventa por ciento de los fallos mecánicos son fallos por fatiga. Si bien este último dato pueda parecer exagerado no hay más que observar la multitud de componentes o estructuras sujetos a la acción de cargas cíclicas a lo largo de su vida para darse cuenta de la trascendencia del fenómeno. Entre ellos por ejemplo cabe citar algunos de los más relevantes como: edificios de gran altura sometidos a cargas de viento, diques ante la acción del oleaje, puentes de ferrocarril bajo la acción del tráfico así como muchos otros fuera del ámbito de la ingeniería civil y relacionados con otros campos tan diversos como la industria del automóvil o la ingeniería aeronáutica.

Para poder estudiar la fatiga es necesario comprender que no es un fenómeno asociado al concepto clásico de plasticidad, es decir se puede producir la rotura por fatiga aun estando las cargas dentro del dominio elástico del material. Ello se debe fundamentalmente a la existencia de ciertas zonas dentro del material, donde, por diversos motivos se produce una concentración de tensiones (o deformaciones). En esta zona las tensiones locales pueden llegar a rebasar el límite elástico del material produciendo consecuentemente una deformación irre recuperable (plástica) que después de un cierto número de ciclos de carga nos conduce al agotamiento bajo cargas muy inferiores a las que podría soportar si las mismas actuaran de modo estático. Como vemos se trata de un fenómeno de tipo local que produce la formación de grietas o fisuras y posteriormente su propagación hasta producir el colapso de la pieza.

Este fenómeno de concentración de tensiones se produce fundamentalmente en las discontinuidades de los elementos estructurales. Son por ello particularmente peligrosas las soldaduras, nervios, ranuras, cambios bruscos de sección, puntos angulosos, etc. Aunque evidentemente la fatiga también afecta a piezas aparentemente exentas de estas discontinuidades, pero con irregularidades no detectables a priori.

Las roturas por fatiga son además especialmente peligrosas porque no suelen presentar indicios de fallo inminente, sino que este se produce de modo repentino y sin observar deformaciones plásticas de conjunto. Se trata pues de roturas frágiles que se caracterizan por presentar dos zonas bien diferenciadas: una lisa que corresponde al trozo de sección que partiendo de un punto ha ido rompiendo poco a poco y otra de estructura gruesa y brillante que es la que rompe instantáneamente cuando la sección ya debilitada no pudo aguantar una sobrecarga final.

También hay que tener en cuenta que en la resistencia a la fatiga pueden intervenir, a parte de la geometría, las propiedades del material y las cargas otros factores cuyo efecto es difícilmente cuantificable como la corrosión, el proceso de fabricación, etc.

En una pieza sometida a cargas cíclicas se pueden distinguir distintas etapas durante el proceso de fatiga (ver Figura I.1):

- **Región I**, que corresponde a una fase donde se producen los primeros cambios micro estructurales, aumento de densidad de dislocaciones y formación de micro fisuras y posterior localización de las zonas con daño irreversible,
- **Región II**, donde se inician las macrogrietas y formación de fisuras con orientación dominante,
- **Región III**, donde se produce un proceso de propagación inestable, provocando la fractura o fallo total de la pieza.

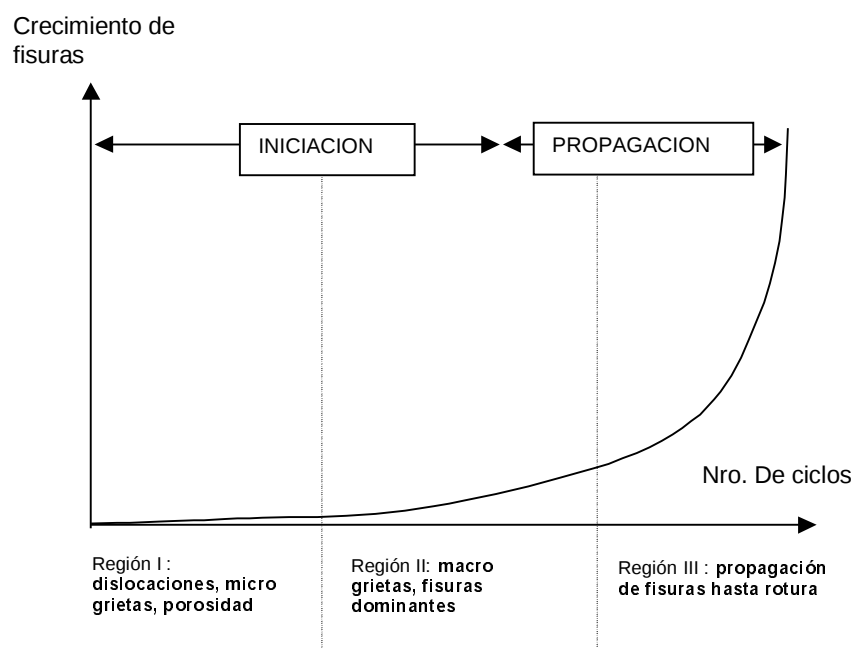


Figura I: Etapas de la vida a fatiga de un material

La fracción de cada una de estas fases respecto a la vida total puede variar mucho en función de las cargas, la geometría, el ambiente... y sobretodo de la

existencia de irregularidades o defectos existentes inicialmente en la pieza que puedan provocar el considerable acortamiento de las fases iniciales. Además a menudo es muy difícil determinar la transición entre unas etapas y otras. Así por ejemplo es particularmente complicado establecer el momento en que se forman las macrogrietas.

Como se verá esta es una de las principales diferencias entre los distintos métodos de estudio. Mientras algunos de ellos tratan de determinar el número total de ciclos de vida a fatiga sin hacer distinción alguna de las distintas fases del proceso, otros tratan de averiguar el número de ciclos hasta la aparición de macrogrietas y otros estudian la propagación de estas desde su aparición hasta la rotura.

Capítulo 2

Conceptos básicos sobre la fatiga

2.1 Curvas tensión-número de ciclos

El primer estudio sobre fatiga en los metales ha sido desarrollado hacia el año 1829 en Alemania, después de ser observado el fallo de cadenas en minas bajo cargas que usualmente eran consideradas como seguras. Estas cadenas habían estado sometidas a tracciones repetidas a lo largo de su vida. Ello motivó los primeros ensayos de piezas bajo cargas cíclicas. El interés en el estudio de la fatiga fue creciendo posteriormente como consecuencia del mayor uso de las estructuras metálicas, particularmente en el ámbito ferroviario.

Hacia 1860 A.Wöhler², un ingeniero de ferrocarriles bávaro, dio un impulso trascendental al conocimiento del fenómeno de la fatiga después de realizar numerosos ensayos bajo diversas condiciones de carga para determinar la causa de la rotura prematura de los ejes ferroviarios. Fruto de su trabajo fueron la caracterización del comportamiento a fatiga en términos de *amplitud de tensión-número de ciclos de vida* (curvas $\sigma - N$), así como el concepto de *tensión límite de fatiga o indurancia*.

Estas curvas $\sigma - N$ se obtienen experimentalmente tras someter a distintas muestras a estados cíclicos generalmente de tracción-compresión, flexión y torsión y después representar en ordenadas los valores tensionales (tensión máxima generalmente) y en abscisas el número de ciclos necesarios para romper la pieza. Para definir la carga es necesario conocer otro parámetro ya sea la amplitud de tensión del ciclo de carga ($\Delta\sigma$), o la relación tensional ($R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$). Así para una determinada relación tensional R (que usualmente corresponde $R=0$ o sea tensión alterna) estas curvas presentan el siguiente aspecto (Figura II.1):

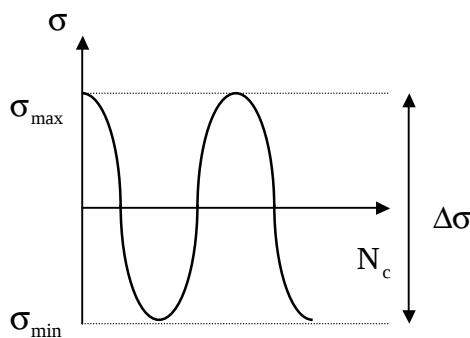


Fig.2.1: Cargas cíclicas.

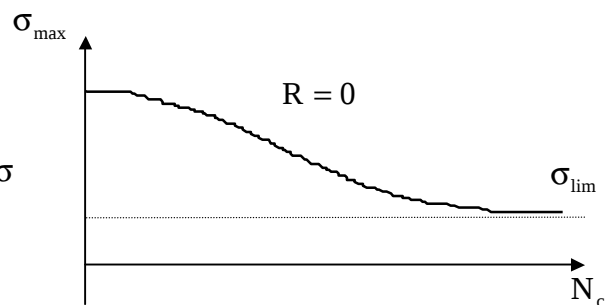


Fig.2.2: Curva de Wöhler ($\sigma - N_c$)

En estas curvas se pueden apreciar dos hechos básicos del comportamiento de los aceros a fatiga. El primero, que resulta obvio, es que a menores tensiones mayor es el número de ciclos de vida del material y el segundo consiste en la existencia de una tensión límite de fatiga en los aceros, lo cual significa que la rotura no tiene lugar sea cual sea el número de ciclos si la amplitud de la sollicitación es inferior a dicho valor límite (Figura II.2).

La tensión media puede tener un efecto sustancial en el comportamiento a fatiga. Se comprueba experimentalmente que generalmente las tensiones de tracción son más perjudiciales que las tensiones de compresión (Figura 2.3)].

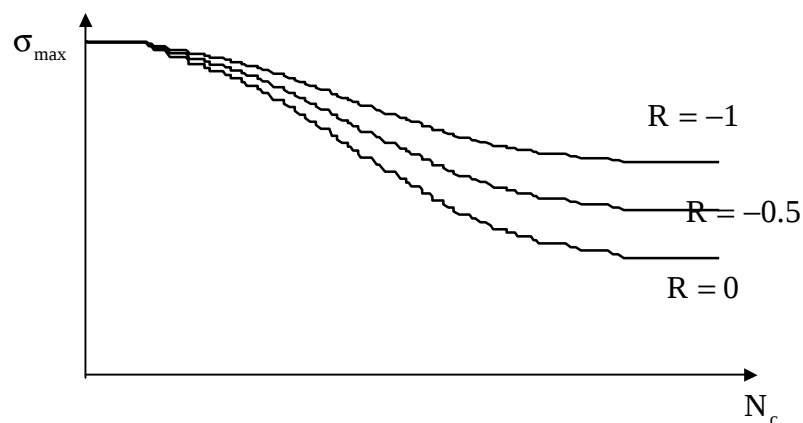


Fig.2.3: Curvas σ - N obtenidas en ensayos bajo carga axial de un A517.

Las curvas $\sigma - N_c$ no hacen distinción alguna entre las distintas etapas de la vida de la pieza a fatiga tratando conjuntamente la formación de grietas, su propagación y fractura.

Además se debe tener en cuenta que el límite de fatiga tiene un enorme margen de fluctuación en función del acabado superficial, el tamaño, el tipo de carga, la temperatura, etc.

2.2 Curvas deformación-número de ciclos

A principios de siglo los estudios iban encaminados a entender el endurecimiento y ablandamiento cíclico de los metales y a encontrar relaciones entre las curvas de histéresis de deformación y la vida de fatiga. Bajo estos planteamientos cabe destacar los estudios realizados por Basquin⁴ y Bairstow⁵.

Cuando sometemos a un material a ciclos sucesivos de tensión constantes y de nivel apreciable puede presentarse el problema de fluencia en el tiempo (efectos viscosos) debido al cual la deformación media aumenta de modo progresivo. Este hecho dificulta la obtención de ciclos estables de tensión-deformación. En estos casos

se somete al material a ciclos de deformación de amplitud constante y se dice entonces que el material esta gobernado por deformación.

Otro hecho justifica además este planteamiento. En la mayoría de las estructuras los estados tensionales son elásticos, por lo que a pesar de existir deformaciones plásticas en ciertas zonas, estas están envueltas por zonas con comportamiento elástico. Por lo tanto podemos decir sin demasiado error que estas zonas plásticas están también gobernadas por deformación.

La predicción de la vida a fatiga mediante las deformaciones se basa en las propiedades cíclicas que exhibe el material tras someterlo a ciclos de amplitud de deformación constante.

$$\epsilon_a = \Delta\epsilon/2 = \Delta\epsilon_e/2 + \Delta\epsilon_p/2 = \Delta\sigma/2E + \Delta\epsilon_p/2 \quad [2.1]$$

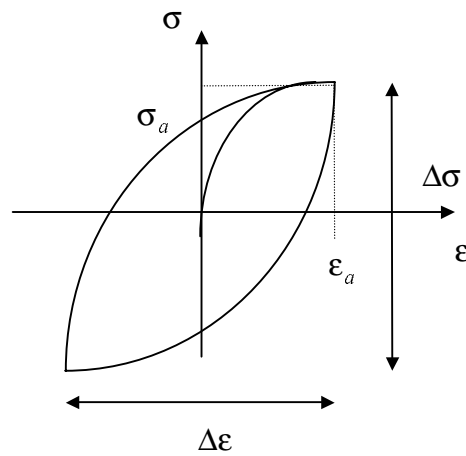


Fig. 2.4: Curva de histéresis bajo deformación cíclica.

Generalmente los metales presentan una primera etapa inicial con endurecimiento cíclico, seguida de un posterior ablandamiento hasta que se estabilizan. Este momento se conoce como estado de saturación del material. Esta última etapa es la más prolongada de todas y suele abarcar la mayor parte de su vida. El hecho que la mayor parte de vida a fatiga tenga lugar después de que el estado de saturación ha sido alcanzado, explica porque estas curvas de histéresis estables son usadas como una de las herramientas más importantes para comprender el comportamiento mecánico cíclico de los materiales.

Como consecuencia del periodo transitorio inicial la relación tensión-deformación cíclica no se corresponde con la estática o monotónica. A partir de resultados experimentales se ha determinado que es posible relacionar la amplitud de deformación plástica (ϵ_p) y la elástica (ϵ_e) a través de las ecuaciones{6}:

$$\epsilon_p = (\sigma_a/K)^{1/n} \quad [2.2]$$

$$\epsilon_e = \sigma_a/E \quad [2.3]$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_p + \varepsilon_e = (\sigma_a / K)^{1/n} + \sigma_a / E \quad [2.4]$$

donde K representa el coeficiente de resistencia, n el exponente de endurecimiento por deformación, E el módulo elástico y σ_a la tensión máxima del ciclo de histéresis.

Las curvas deformación número de ciclos, se determinan mediante ensayos de deformación alterna hasta la aparición de una grieta de cierta magnitud aunque también es posible construir una expresión analítica a partir de los siguientes hechos experimentales:

- Si en la construcción de una curva tensión-número de ciclos hasta la aparición de una grieta se emplea la tensión real ($\sigma = P / A$) en lugar de la ingenieril ($\sigma_0 = P / A_0$) y se representan los resultados en escalas logarítmicas esta queda linealizada y tiene la siguiente forma:

$$\sigma_a = \sigma_f \cdot (2N_f)^b \quad [2.5]$$

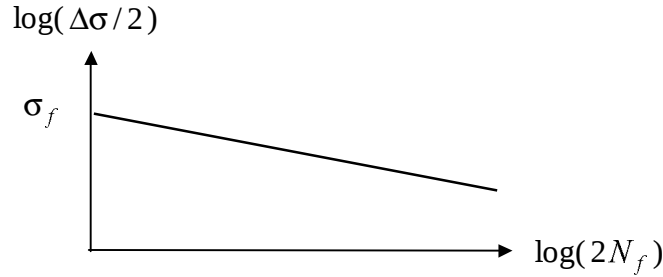


Fig. 2.6.: Relación entre la amplitud de la tensión y el número de ciclos

Donde σ_f representa el coeficiente de resistencia a fatiga y b el exponente de resistencia a fatiga

- Para niveles de deformación altos, existe una relación entre la amplitud de deformación plástica y el número de ciclos, hasta la aparición de una macrogrieta, que se aproxima mediante una relación del mismo tipo a la presentada en la ec. (2.6),

$$\Delta\varepsilon / 2 = \varepsilon_f \cdot (2N_f)^c \quad [2.6]$$

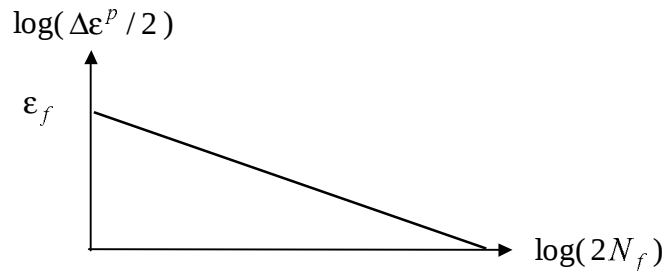


Fig. 2.7.: Relación entre la amplitud de la deformación plástica y el número de ciclos

Donde ϵ_f es el denominado coeficiente de ductilidad a fatiga y c el exponente de ductilidad a fatiga.

- La evidencia anterior, conduce también a una expresión que relaciona la deformación con el numero de ciclos de vida,

$$\Delta\epsilon / 2 = \frac{\sigma_f}{E} (2N_f)^b + \epsilon_f (2N_f)^c \quad [2.7]$$

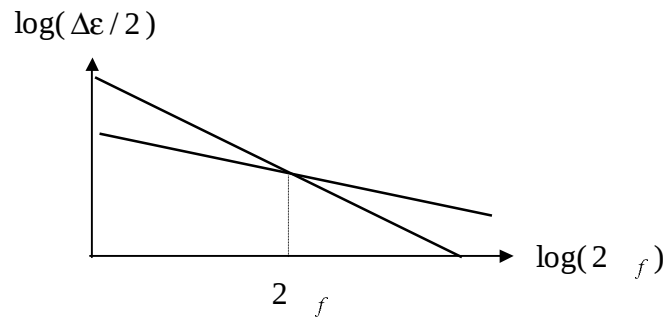


Fig. 2.8.: Relación entre la amplitud de la deformación y el número de ciclos.

Hacia 1954 Manson⁷ y Coffin⁸ trabajando independientemente establecieron la idea de que la deformación plástica es la responsable del daño cíclico, y propusieron una relación empírica entre el número de ciclos de vida a fatiga y la amplitud de la deformación plástica. Dicha expresión es denominada la “fórmula de las pendientes universales” y es aplicable a una gran variedad de materiales metálicos,

$$\Delta\epsilon = 3.5 \cdot \frac{R_m}{E} (N_f)^{-0.12} + E_f^{0.6} (N_f)^{-0.6} \quad [2.8]$$

donde R_m es la tensión de rotura, $E_f = \ln(100/(100 - RA))$ es el coeficiente de ductilidad y RA el porcentaje de estricción.

Otra conclusión importante de lo expuesto anteriormente es la existencia del denominado número de ciclos de transición a fatiga, $2N_t$ (ver Figura 2.8), para el cual las componentes de deformación plástica y elástica se igualan:

$$2N_t = \left(\frac{E \cdot \epsilon_f}{\sigma_f} \right)^{1/(b-c)} \quad [2.9]$$

Esta expresión, indica que en aquellos casos en que la vida total a fatiga es menor a $2N_t$ el proceso esta gobernado principalmente por la amplitud de deformación plástica sucediendo lo contrario cuando $2N > 2N_t$ donde entonces tiene mayor relevancia la parte elástica de la deformación.

Las curvas $\varepsilon - N$, dado su carácter asintótico, permiten tratar con único planteamiento tanto aquellas situaciones en las que predomine la componente elástica de deformación (fatiga a alto número de ciclos), como aquellas en las que lo haga la componente plástica (fatiga a bajo número de ciclos).

Durante el proceso oscilatorio en el sólido elástico tiene lugar una disipación de energía como fruto del rozamiento interno. Se puede presumir que la disipación de energía en el curso de las oscilaciones y la rotura por fatiga son consecuencia de las mismas deformaciones plásticas estructurales. Basándose en ello surgió la idea de adoptar la disipación de energía en un ciclo, como índice de resistencia a fatiga.

Es un hecho experimental demostrado, a pesar del posible endurecimiento o ablandamiento del material, que usualmente la energía de deformación plástica por ciclo mantiene un valor prácticamente constante para niveles de deformación elevados (fatiga a bajo número de ciclos).

Así pues es una idea muy tentadora considerar que la energía total disipada hasta rotura, W , es un valor intrínseco del material.

Aunque desgraciadamente numerosos trabajos⁹ muestran que este valor de W no es constante, este hecho ha sido constatado por experimentos directos que parece explicarse mediante el siguiente razonamiento: “la disipación de energía en un ciclo queda definida por el nivel medio de las tensiones locales, sin embargo, el desarrollo de una grieta a fatiga está condicionado no ya por el valor medio, sino por el valor máximo de las deformaciones locales”.

2.3 Estudios basados en la mecánica de fractura.

Otra dirección de estudio basada en la mecánica de fractura fue la seguida por Irwin¹⁰, en cuyos estudios aparece por primera vez el *factor de intensidad tensional* K . Bajo el mismo enfoque han sido los trabajos de Paris, Gomez & Anderson¹¹, de caracterizar el crecimiento de las fisuras debido a fatiga en términos de intensidad tensional. Ellos fueron los primeros de sugerir que el aumento de estas fisuras podía ser expresado en función del rango de fluctuación del factor de intensidad tensional ΔK .

Como se ha dicho anteriormente, es fundamental en el comportamiento a fatiga de los materiales el tratamiento del fenómeno de concentración de tensiones, que se produce principalmente en zonas con imperfecciones geométricas. A menudo en problemas de resistencia de materiales se utilizan hipótesis que simplifican enormemente la resolución de los problemas siempre que conduzcan a resultados razonables, como es el hecho de suponer un reparto de tensiones uniforme en una sección. Sin embargo hay casos en los que el error cometido es demasiado grande para ser despreciado, al aparecer tensiones del orden de 4 a 5 veces mayores a las calculadas con dichas hipótesis simplificadoras. Además es particularmente peligroso este hecho cuando las cargas aplicadas no son constantes, pues esta variación de tensiones produce con el tiempo la fatiga del material.

Este es el punto de partida de los métodos basados en la mecánica de fractura, es decir, se basan en un minucioso análisis tensional de las zonas susceptibles de producir estas concentraciones tensionales (grietas, entallas, zonas angulosas,

cambios bruscos de sección). Así por ejemplo, es posible demostrar que en un sólido sometido a tracción uniforme de valor σ_{med} , la distribución de tensiones cerca de una grieta deja de ser uniforme, produciéndose un fuerte aumento en las proximidades del borde de la misma.

Basándose en estos hechos se analizan una gran cantidad de piezas con distintas imperfecciones y se define K , el factor de intensidad de tensiones, de cada una de ellas que depende de la geometría de la entalla y de las tensiones aplicadas

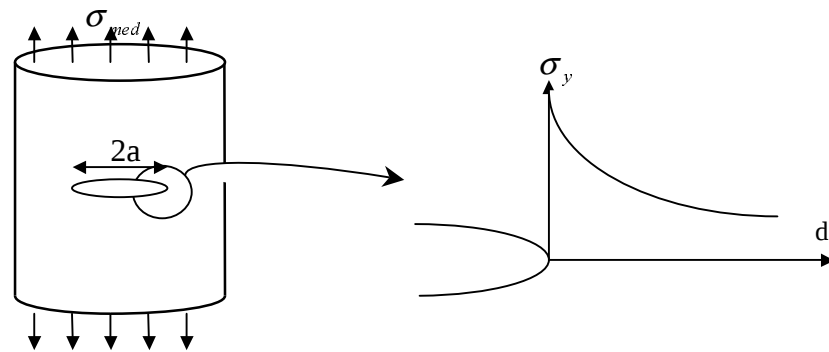


Fig. 2.9.: Distribución de la tensión en la cabeza de la fisura.

Esto se resume en una expresión general que define el factor de intensidad de tensiones como,

$$K = \sigma_{med} \alpha f_{geom} \quad [2.10]$$

donde f_{geom} es una función que depende de la geometría de la entalla.

Existe un determinado valor del factor de intensidad tensional, para el cual la grieta se propaga bruscamente, produciéndose la rotura. A este valor se le designa como factor de intensidad crítico o tenacidad K_c , siendo su valor más crítico el correspondiente al estado plano de deformaciones (espesor infinito) designado como K_{IC} . Por lo tanto, dado un material y conocida su tenacidad de fractura K_c , se puede determinar el tamaño de la grieta que provocará la rotura bajo una tensión determinada

A partir de lo expuesto anteriormente numerosos estudios intentan caracterizar el crecimiento de las grietas de fatiga en términos del factor de intensidad tensional. Así la vida a fatiga de una cierta pieza vendrá definida por el periodo de tiempo necesario para propagar una fisura inicial en el material hasta un tamaño crítico de esta que provoque la rotura de la pieza. Es necesario por lo tanto un control detallado para conocer las distribuciones y tamaños de las fisuras preexistentes a la puesta en servicio y en todo caso suponer el mayor tamaño de discontinuidad no detectable por los métodos de inspección.

Con estos planteamientos Paris¹² logró caracterizar el crecimiento de las grietas a fatiga sometiendo distintas muestras a ensayos cíclicos, como se esquematiza en la Figura 2.10.

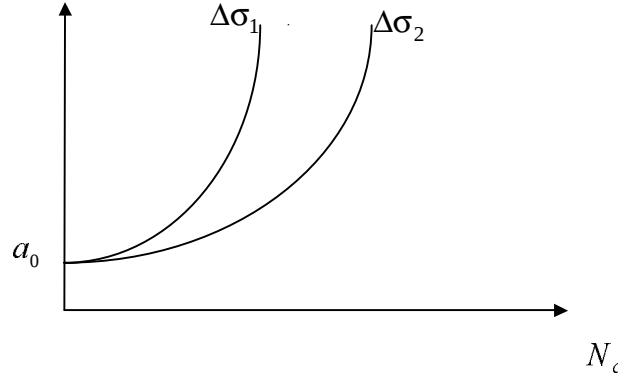


Fig. 2.10: Efecto de la amplitud de tensión en el crecimiento de una grieta.

Estas curvas se reducen a una única curva cuando los resultados se representan en términos del crecimiento del tamaño de fisura por ciclo de carga da/dN_c y la fluctuación del factor de intensidad tensional ΔK ya que este es un parámetro que incorpora los efectos de la magnitud de la carga cíclica y del tamaño de la fisura creciente. De este modo el crecimiento de las fisuras durante el proceso de cargas cíclicas queda gobernado por el parámetro ΔK en la mayor parte de su vida útil mediante la siguiente ley, conocida como ley de Paris¹²:

$$\frac{da}{dN} = A \cdot (\Delta K)^m \quad [2.11]$$

donde el incremento de intensidad de tensión vale $\Delta K = K_{max} - K_{min} = (\sigma_{max} - \sigma_{min})\sqrt{a} f_{geom}$, la intensidad de tensión máxima y mínima se define respectivamente como $K_{max} = \sigma_{max} \sqrt{a} f_{geom}$ y $K_{min} = \sigma_{min} \sqrt{a} f_{geom}$. Además, en las expresiones anteriores a es el tamaño de la fisura, f_{geom} la función que depende de la geometría de la pieza y A y m son constantes del material.

Basándose en la experimentación se divide el comportamiento de propagación de fisuras en tres regiones, según cuáles sean los valores del factor de intensidad tensional:

- **Región I:** Para $\Delta K < \Delta K_{lim}$, las fisuras no se propagan.
- **Región II:** Para $\Delta K > \Delta K_{lim}$, las fisuras se propagan mediante la ley de Paris [2.11].
- **Región III:** Para $K_{max} > K_t$, el crecimiento de las fisuras resulta superior al predicho mediante la ley de Paris.

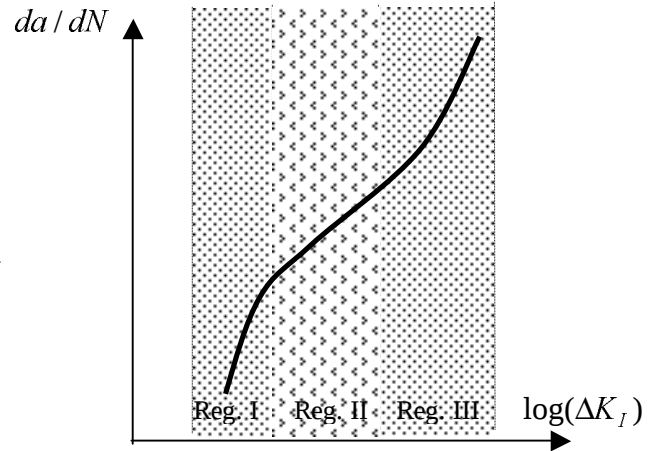


Fig. 2.11: Regiones de comportamiento en el crecimiento de fisuras para acero.

La existencia de este límite (ΔK_{lim}) implica que para un cierto material y geometría existe un rango de amplitudes de carga y tamaños de fisura dentro de los cuales no hay propagación de fisuras y por tanto a pesar de la aplicación de cargas cíclicas no se produciría la rotura por fatiga de la pieza, lo cual parece corresponderse con el límite de indurancia definido anteriormente.

Dicho comportamiento parece explicarse por la existencia de mecanismos de cierre de las fisuras inducidos por la misma plasticidad, la rugosidad de las fisuras o la presencia de óxidos. Muchos factores pueden influenciar dicho estado límite, incluyendo entre ellos el límite elástico, la historia tensional, el tamaño de grano, el módulo de Young, las tensiones residuales, el ambiente y la temperatura. El efecto de estos factores en ΔK_{lim} parece explicarse por su relación con los distintos mecanismos de cerramiento de fisuras.

Aunque de todos los factores, el que más afecta al límite de indurancia, según se desprende de diversos estudios, es la relación de reversibilidad tensional $R = \sigma_{min} / \sigma_{max}$, a través de la cual se conocen las siguientes relaciones¹³, suficientemente aproximadas para un buen número de condiciones normales:

$$\Delta K_{lim} = 7 (1 - 0.85 R) \quad MN / m^{3/2} \quad \text{para } R < 0.1 \quad [2.12]$$

$$\Delta K_{lim} = 6 \quad MN / m^{3/2} \quad \text{para } R > 0.1 \quad [2.13]$$

Cuando la fluctuación del factor de intensidad tensional supera estos valores entramos en la región II donde se produce la propagación de las fisuras proporcionalmente a ΔK hasta que K sobrepasa el valor K_t (región III) o bien K_c (rotura). En algunos aceros se alcanza la rotura antes de entrar en la región III mientras en otros se produce anteriormente la aceleración del proceso de propagación de fisuras y luego sobreviene la rotura ($K_t < K_c$). De todos modos esta última parte de la vida a fatiga sólo suele ser importante en casos especiales de componentes estructurales con vidas muy cortas.

El factor de intensidad tensional de transición entre la región II y la región III suele predecirse mediante la ecuación:

$$K_t = (0.04 \text{ mm}) \sqrt{E \sigma_{ys}} \quad [2.14]$$

Donde se observa la importancia que el módulo de Young E y el límite elástico σ_{ys} pueden tener en esta transición.

Así pues, dentro de esta estructura teórica, el procedimiento para hallar el número de ciclos de vida a fatiga de una pieza determinada es el siguiente:

- Estimar el tamaño de grieta inicial.
- A partir de K_c (obtenido en condiciones estáticas) determinar el tamaño crítico de grieta (a_f) que causaría la rotura bajo una amplitud de carga determinada.

- Obtener K a partir de a_0 e integrar la expresión [2.11] desde a_0 hasta a_{crteo} , obteniendo así la vida de la estructura hasta el fallo.

$$\Delta N = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{A \cdot (\Delta K)^m} \quad [2.15]$$

2.4 Modelos de daño.

Por último se hace una mención a trabajos de J.L.Chaboche¹⁴ quien realizó estudios recientes basados en teorías de daño del medio continuo.

Otra posibilidad para el estudio de la fatiga consiste en introducir sus efectos a través de una variable de daño, específicamente ligada al proceso de deterioro a lo largo de ciclos repetidos de carga.

El daño es considerado como un proceso de deterioro de los materiales debido a la acumulación y localización de las dislocaciones. Las teorías de daño “hablan” de defectos a través del concepto de homogeneización a diferencia de la Mecánica de Fractura que considera la modificación de las condiciones de borde (fisuras).

Es por estos últimos motivos que originalmente se usaron estas dos teorías (Mecánica de Fractura, Daño del Medio Continuo) para distintos ámbitos de estudio. Mientras la Mecánica de Fractura estudia la propagación de las fisuras ya formadas, las teorías de Daño eran usadas para tratar el comportamiento que va desde el daño inicial hasta la formación de grietas, aunque también se usan las teorías de Daño para estudios locales de propagación de fisuras, con ciertas restricciones.

La variable de daño puede definirse de diversas maneras:

- A través de la duración de vida restante. Es necesario un gran número de ensayos a rotura bajo ciclos de carga constante y debemos adoptar una regla de acumulación de daño.
- Mediante medidas físicas globales. Expresamos la variación de parámetros como la densidad, resistividad, etc. a través de la variable de daño.
- A través de parámetros mecánicos globales como el módulo de elasticidad, la amplitud de deformación plástica, etc. Estas medidas son interpretadas a través del concepto de tensión efectiva. La tensión efectiva σ_{ef} es aquella que debería aplicarse al modelo no dañado para que se deformara igual al modelo dañado bajo la acción de una tensión σ :

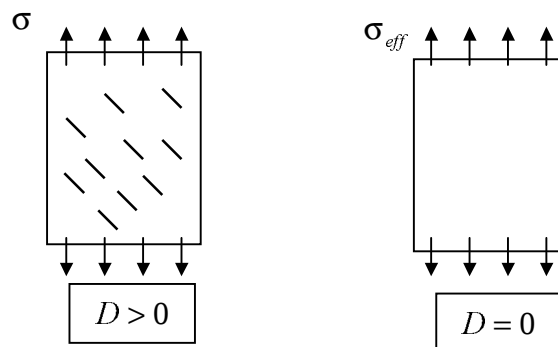


Fig.2.12: Elemento dañado, pérdida de sección resistente.

De esta forma puede interpretarse el daño como una pérdida de sección resistente, $D = 1 - \tilde{S} / S$, donde $\tilde{S}$ representa el área neta. De esta forma, se obtiene la evolución de la tensión y el módulo elástico del material como $\sigma_{ef} = \sigma / (1 - D)$ y $\tilde{E} = E \cdot (1 - D)$, respectivamente^(nota:1).

A partir de aquí se introduce la variable de daño como una variable interna del modelo constitutivo. El concepto de tensiones efectivas nos permite tratar los distintos tipos de daño sumando directamente sus contribuciones. Este es el caso del daño propiamente dicho (f_c) y del daño por fatiga (f_F):

$$dD = f_c(\sigma, D)dt + f_F(\sigma_M, \bar{\sigma}, D)dN \quad [2.16]$$

De este modo no sumamos los defectos físicos de ambos fenómenos sino sus efectos mecánicos que estos producen. Las funciones f_c, f_F se determinan mediante ensayos de plasticidad pura o fatiga únicamente respectivamente.

Observando ahora con más detenimiento el término de fatiga, se puede ver en él los efectos de acumulación de daño no lineal para distintos niveles de carga, la existencia de un límite de fatiga, el efecto de la tensión media, etc. Así por ejemplo en ciclos de tensión compresión puede adoptarse una ley de evolución del tipo¹⁹:

$$dD = \left[1 - (1 - D)^{\beta+1}\right]^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})} \cdot \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})(1 - D)}\right]^{\beta} dN \quad [2.17]$$

donde σ_M es la tensión máxima y $\bar{\sigma}$ la tensión media.

Las etapas a seguir para el estudio de la fatiga con modelos de daño son los siguientes:

- Determinación de las ecuaciones constitutivas del material.
- Cálculo de tensiones y deformaciones bajo la aplicación de cargas cíclicas.
- Determinación de las leyes de daño y de un criterio de iniciación de propagación de macrogrietas.
- Cálculo de la evolución del daño y del número de ciclos de carga hasta que se verifique la condición anterior.

Pero también se ha desarrollado en los últimos años la posibilidad de usar teorías de daño para el estudio local de propagación de grietas. Esta propuesta consiste en el cálculo preciso de tensiones y deformaciones en las vecindades de las grietas y la elección de un criterio de fractura. La continua progresión de las grietas es descrita entonces por el descenso gradual de las resistencias locales en las zonas dañadas.

¹ Nota: Para mayor información sobre modelos de daño continuo, consultar las referencias 16 y 24.

2.5 Acumulación del daño.

Los métodos de estudio de la fatiga suponen generalmente una historia tensional tan simple como la que se muestra en la Figura 2.13, ya sea bajo ciclos de amplitud de tensión o deformación constante:

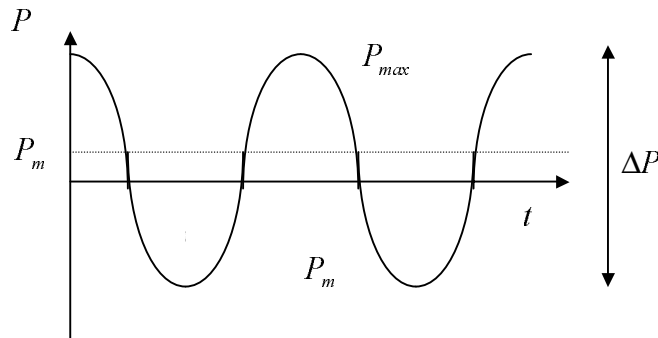


Fig. 2.13: Carga cíclica armónica.

La mayoría de las teorías de predicción de vida en los materiales, están basadas en cargas cíclicas armónicas, pero desafortunadamente los componentes estructurales reales están sujetos a historias mucho más complejas. Ello obliga a formular reglas de acumulación de daño para poder predecir los ciclos de vida con aquellos métodos que no son capaces de hacerlo para cargas variables.

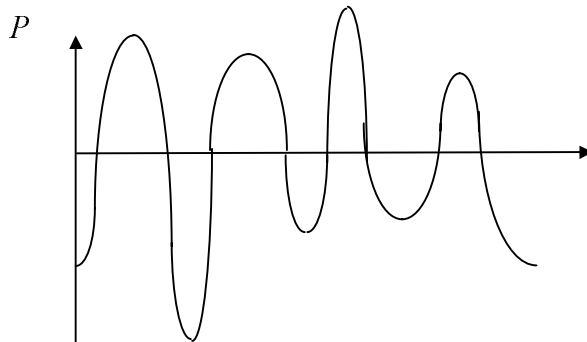


Fig.2.14: Posible historia de cargas de una estructura real.

El tratamiento general del tema es complejo y aún no está resuelto completamente. Un posible planteamiento del problema está basando en la “regla de Miner”¹⁵, que consiste en la definición de una variable de daño del tipo

$$d = \sum_i \frac{N_i}{N_{Fi}} \quad [2.18]$$

donde N_i es número de ciclos bajo la carga cíclica de amplitud constante i , N_{Fi} es número de ciclos de vida suponiendo un mismo ciclo de carga a lo largo de toda su vida.

Cuando $d = 1$ se alcanza la rotura del material. Este planteamiento es posible debido a la linealidad de la regla de acumulación que implica que el orden de aplicación de las cargas armónicas no altera la duración de la vida a fatiga, situación que mas adelante se mostrará como equivocada. Por otro lado, la realidad no es tan sencilla como muestra esta regla y tienen lugar fenómenos más complejos de acumulación de daño (no lineal), aunque esta regla es de obligada mención por ser ampliamente utilizada y constituir una aproximación útil en muchos casos.

Capítulo 3

La fatiga dentro de la mecánica de medios continuos

3.1 Introducción

Los estudios para modelar el comportamiento de los metales a fatiga para alto número de ciclos, en general, se han basado hasta hace pocos años en aproximaciones empíricas. Si bien para los cortos ciclos de vida se ha conseguido caracterizar bastante bien el comportamiento relacionándolo con las deformaciones plásticas, no sucede lo mismo para la predicción de vida bajo cargas moderadas donde la falta de una teoría coherente ha motivado el uso casi exclusivo de los datos precedentes de ensayos experimentales para predecir la vida a fatiga.

En la mayoría de los casos donde las cargas son pequeñas o moderadas, no se produce una deformación plástica detectable, aunque si que se puede presumir la existencia de plasticidad a escala microscópica en algunas zonas del metal. Esta plasticidad es la responsable de cambios en la microestructura del metal así como de la formación de fisuras, y es la culpable por tanto de la fatiga a alto número de ciclos.

Este hecho hace pensar que la estructura teórica matemática de teorías como Daño o Plasticidad debe permitir la simulación de este efecto plástico provocado por el número de ciclos de carga. Con base en este echo, se incluye dentro de las teorías de comportamiento no lineal del sólido continuo (plasticidad, daño), el efecto de la pérdida de resistencia de los metales a lo largo de su vida.

Además de los hechos que se acaban de exponer, en este trabajo se propone una alternativa a la corriente actual de estudio de la fatiga, a través de modelos basados en la mecánica de fractura, porque ello permitirá solventar algunas de las carencias, como:

1. En general los modelos clásicos para el estudio de la fatiga se limitan a predecir el número de ciclos de vida de los materiales bajo cargas periódicas. El modelo propuesto, en contrapartida, permite introducir el fenómeno de la pérdida de resistencia de los metales con el número de ciclos, junto con las clásicas teorías constitutivas de los aceros. De este modo el modelo propuesto no resuelve exclusivamente el problema de fatiga sino que se formula para ser introducido en un programa de cálculo real. Esto permitirá resolver problemas como:

- Conocer el estado tenso-deformacional de piezas metálicas en servicio.

- Hacer suposiciones acerca de la seguridad frente a rotura bajo cargas monótonas crecientes en un momento determinado de su vida.
- 2. Como se ha comentado anteriormente, existe multitud de parámetros que afectan el comportamiento cíclico de los aceros. Los ensayos experimentales son una buena herramienta para casos concretos de estudio pero evidentemente no constituyen un modo de trabajo para el estudio general de la fatiga ya que es difícil extrapolar sus resultados para situaciones más complejas que las estudiadas en laboratorio. Tampoco la Mecánica de Fractura ofrece una solución amplia a este problema y resulta complicado cuantificar de este modo el efecto producido en condiciones complejas de cargas. Abordando de una forma general el problema, desde la óptica de la Mecánica del Medio Continuo es posible tener en cuenta el efecto otros de factores como la temperatura, la tensión media, así como tratar con estados tensionales multiaxiales, fenómenos de daño plástico, viscoelasticidad o fluencia en el tiempo, etc.
- 3. La Mecánica de Fractura únicamente es capaz de estudiar la propagación de fisuras y por tanto incapaz de poder predecir la etapa de vida inicial hasta la formación de estas que puede representar en muchos casos un porcentaje muy importante respecto al total de su vida. El modelo que se presenta en este trabajo es capaz de estudiar cualquier etapa de la vida de las piezas sometidas a cargas cíclicas.
- 4. Por último al introducir una nueva variable interna relacionada con el problema de la fatiga permitirá reproducir fenómenos de acumulación de daño sin la necesidad de ninguna regla de acumulación complementaria. De este modo el modelo es capaz de tener en cuenta los fenómenos de acumulación no lineal del daño, que tienen lugar cuando se solicita a una pieza a distintos niveles de amplitud de carga.

A continuación y como parte de la completitud que se quiere dar a este trabajo, se exponen los principios básicos de la Teoría de la Plasticidad Clásica y Daño para poder comprender el papel que tendrá la introducción de la fatiga englobada en este ámbito de estudio.

3.2 Teoría de la plasticidad clásica.

3.2.1. Breve reseña del modelo elasto-plástico.

Las teorías inelásticas emulan el comportamiento de los sólidos cuando son sometidos a comportamientos más allá del límite de elasticidad. Tal es el caso de la teoría de la plasticidad clásica, basada en la mecánica de los sólidos continuos, que describe el comportamiento de los sólidos ideales bajo dos estados mecánicos:

1. Período inicial elástico, o sea donde la tensión en un punto depende solamente del valor actual de la deformación y no de la historia seguida por esta durante el periodo de aplicación de cargas.
2. Un comportamiento, denominado elastoplástico, que sigue al período inicial, donde el campo de tensiones no crece de forma proporcional al campo de deformaciones y donde estas deformaciones resultan de la adición de una parte recuperable o cuota elástica y otra irre recuperable o cuota plástica.

El límite que marca la separación entre estos dos estados mecánicos se conoce como “límite de fluencia” para los materiales metálicos, quedando definido a través de una función escalar de argumentos tensoriales en el espacio de tensiones y que recibe el nombre de función de fluencia plástica.

Se puede observar, por tanto, que existen dos grandes aspectos a tratar dentro de la teoría matemática de la plasticidad:

1. El criterio de fluencia plástico que permite establecer, durante el proceso de carga, el comienzo del proceso inelástico y posterior evolución de las fronteras del dominio elástico dentro del espacio de tensiones.
2. El comportamiento más allá del límite elástico, denominado comportamiento elasto-plástico que queda definido a partir de la formulación de una descomposición de deformaciones en una parte elástica y otra plástica, una regla de flujo plástica y unas variables internas.

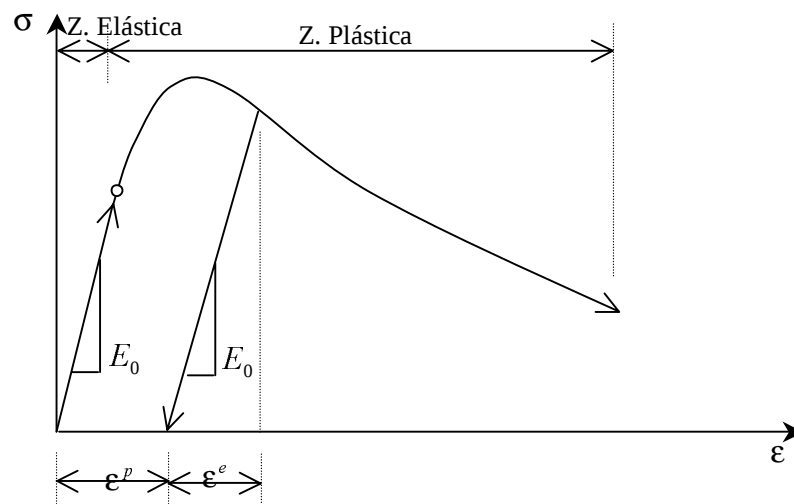


Fig. 3.1: Curva tensión deformación de un material elasto-plástico

3.2.2. Criterio de fluencia plástico

El criterio de fluencia plástico establece un límite en el espacio de tensiones, para cada punto del sólido, a partir del cual se inicia un proceso tensodeformacional inelástico, caracterizado por el desarrollo de deformaciones irreversibles.

De forma general puede definirse el criterio límite de discontinuidad como una función escalar que depende del estado de tensiones actual del punto del sólido y de un grupo de variables internas q . Esto es:

$$F(\sigma(t), q(t)) = 0 \quad [3.1]$$

donde $\sigma(t)$ es el tensor de tensiones actual $q(t) = \{k(t), \eta(t), \varepsilon^p(t)\}$ el vector de variables internas, con $k(t)$ como variable de endurecimiento plástico isótropo, $\eta(t)$ variable de endurecimiento plástico cinemático y $\varepsilon^p(t)$ como tensor de deformación plástica.

La situación mecánica de un punto cualquiera, en un determinado instante del proceso de carga cuasi estático queda determinada inequívocamente a partir de la condición de consistencia plástica:

- El proceso de deformación en un punto es elástico sí:

$$(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) < 0 \quad \text{o bien} \quad \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} < 0 \quad (\text{descarga}) \quad [3.2]$$

- El proceso de deformación es elastoplástico sí:

$$(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad (\text{carga}) \quad [2.3]$$

3.2.3. Criterio de fluencia plástico de Von-Mises

Este criterio forma parte de los criterios que dependen de un sólo parámetro, la máxima resistencia de corte octaédrica. De acuerdo con este criterio, un punto del sólido alcanza la situación de fluencia plástica cuando el valor de la función de endurecimiento plástico $K_0 = K(k_0)$ alcanza la máxima tensión de corte, τ_{oct} :

$$F = F(\sigma, K) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - K^2(k) \quad [3.4]$$

También puede expresarse esta función matemática a partir del segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 , esto es:

$$J_2 - K^2(k) = 0 \quad [3.5]$$

3.2.4. Comportamiento elasto-plástico

Cuando el estado tensional en un punto del sólido ideal alcanza el criterio de fluencia o discontinuidad inicial, $(\sigma(t), q(t)) = 0$, y a la vez se cumple con la condición de consistencia plástica, $\dot{F}(\sigma(t), q(t)) = 0$, se admite la hipótesis que este punto se encuentra en estado elastoplástico. La teoría clásica de la plasticidad sin degradación de rigidez, adopta como válida la hipótesis de la descomposición de la deformación total como:

$$\varepsilon = \mathbf{D}_s^{-1} \sigma + \varepsilon^p = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad [3.6]$$

donde $\mathbf{D}_s$ es la matriz de rigidez secante del material. Luego se define una regla de flujo generalizada que considera el incremento temporal de deformación plástica $\dot{\varepsilon}^p$, como una variable interna tensorial, cuya regla de evolución establece la proporcionalidad entre las componentes del tensor de flujo plástico $\mathbf{g}$ definido en el espacio de tensiones. Esto es:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial G(\sigma, q)}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \cdot \mathbf{g} \quad [3.7]$$

Donde $\dot{\lambda}$ es un escalar no negativo llamado parámetro de consistencia plástica que se determina a partir de la propia condición de consistencia plástica (ec. 3.3), y que da la magnitud del incremento temporal de deformación plástica $\dot{\varepsilon}^p$. La función de potencial plástico G se formula a partir de estudios experimentales y es la que define la dirección del incremento de deformación plástica.

3.2.5. Endurecimiento plástico

El límite entre la zona elástica y la zona plástica se establece mediante la superficie de fluencia, y a partir de aquí esta superficie adquiere movilidad en el espacio de tensiones, en función de la evolución del proceso plástico, transformándose en la denominada función de carga plástica. Esta función de carga no es otra cosa que la actualización de la función límite de fluencia para cada valor de las variables internas $q(t)$. El fenómeno que gobierna este cambio de posición en el espacio de tensiones, se lo conoce como endurecimiento plástico y puede ser:

- **Isótropo:** si hay movimiento homotético de la superficie de carga plástica. A su vez este movimiento puede ser positivo y en tal caso se lo denomina endurecimiento, o negativo y recibe el nombre de ablandamiento.

- **Cinemático:** si hay movimiento de traslación de la superficie de carga plástica.

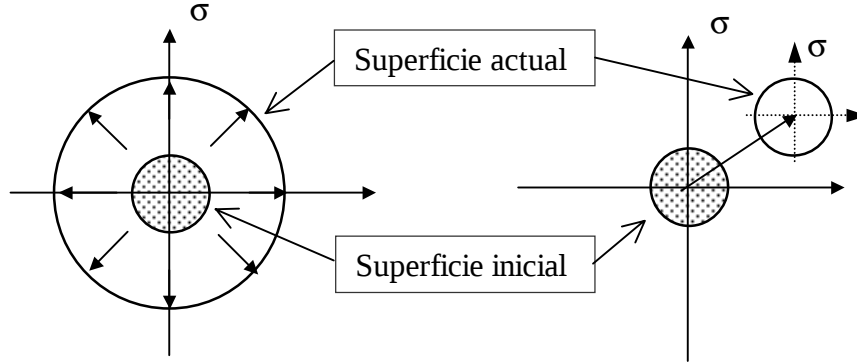


Fig. 3.2 Endurecimiento plástico isótropo y endurecimiento plástico cinemático.

El endurecimiento isótropo queda controlado por la evolución de la función de endurecimiento plástico $K(k)$, que depende de la variable de endurecimiento plástico k . La regla de evolución de esta variable interna puede expresarse matemáticamente en forma general del siguiente modo:

$$\dot{k} = h_k^T(\sigma, q) \dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \cdot \left[h_k^T(\sigma, k) \frac{\partial G(\sigma, k)}{\partial \sigma} \right] \quad [3.8]$$

$$\dot{k} = h_k^T(\sigma, q) \dot{\epsilon}^p \quad [3.9]$$

donde $h_k(\sigma, k)$ es función del estado actualizado de las tensiones y de la variable de endurecimiento plástico, que en el caso más simple adquiere la forma del tensor de tensiones:

$$h_k(\sigma, k) = \sigma \quad [3.10]$$

en esta situación particular resulta una variable de endurecimiento plástico igual al incremento temporal de trabajo plástico específico:

$$\dot{k} = \sigma^T \dot{\epsilon}^p \quad [3.11]$$

El endurecimiento cinemático queda controlado por la variable interna de endurecimiento plástico cinemático η , que define las coordenada del centro del dominio elástico en el espacio de tensiones. En el caso más general se puede escribir la función de carga plástica como:

$$F = F(\sigma, \eta) = f(\sigma - \eta) - K(k) = 0 \quad [3.12]$$

donde $q = \{k, \eta, \varepsilon^p\}$ el vector de variables internas y la ecuación de evolución de la variable interna η puede escribirse como

$$\dot{\eta} = \beta \cdot \dot{k} \quad [3.13]$$

3.2.6. Relación tensión-deformación generalizada

La ley constitutiva elastoplástica tangente $\dot{\sigma} = \mathbf{D}_T \dot{\varepsilon}$ y el parámetro de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ pueden ser formulados a partir del criterio general de fluencia plástica o condición de consistencia plástica:

$$F(\sigma) = f(\sigma) - K(k) \quad [3.14]$$

$$\dot{F}(\sigma, k) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \dot{\sigma} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial K} \right\}^T \dot{k} \quad [3.15]$$

Sustituyendo en estas ecuaciones las expresiones de las reglas de evolución de las variables internas, resulta una ecuación en $\dot{\lambda}$. Esto es

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_s \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_s \frac{\partial G}{\partial \sigma} = -\dot{\lambda} \cdot \frac{\partial F}{\partial k} (h_k^T \frac{\partial G}{\partial \sigma}) \quad [3.16]$$

y agrupando términos resulta,

$$\dot{\lambda} = \frac{\left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_s \varepsilon \right]}{A + \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_s \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right]} \quad [3.17]$$

donde $A = \left[-\frac{\partial F}{\partial k} (h_k^T \frac{\partial G}{\partial \sigma}) \right]$ es el denominado parámetro de endurecimiento plástico. Sustituyendo la ec. 3.17 en la ecuación constitutiva elastoplástica, resulta la expresión tangente para este problema, esto es

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_s (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = \mathbf{D}_s \left(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right)$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_T^{ep} : \dot{\varepsilon} \quad [3.18]$$

$$\mathbf{D}_T^{ep} = \mathbf{D}_s - \frac{\left[\mathbf{D}_s : \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \right] \otimes \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T : \mathbf{D}_s \right]}{A + \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T : \mathbf{D}_s : \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right]} \quad [3.18]$$

Mas información sobre los modelos elastoplásticos se pueden consultar en las referencias^{16, 27, 28}.

3.3 Modelos de daño isótropo.

3.3.1. Breve reseña del modelo de daño isótropo.

Los modelos de daño constituyen una herramienta importante para tratar la complejidad del comportamiento constitutivo de algunos materiales. Este planteamiento resulta simple y versátil además de estar rigurosamente basado en la termodinámica.

De entre las muchas posibilidades que ofrece este planteamiento la más simple es la que se refiere a los modelos de daño isótropo^{17,18}. En esta categoría el comportamiento no lineal es gobernado a través de una simple variable interna escalar, denominada daño o degradación, d . Esta variable es una medida de la pérdida de rigidez del material y sus valores están acotados entre 0 para el material exento de daño y 1 para el material completamente degradado.

La ecuación constitutiva para el modelo de daño isotrópico está basada en el concepto de tensión equivalente y tiene la siguiente forma:

$$\sigma = (1 - d) \mathbf{D}_0 : \varepsilon \quad [3.19]$$

donde σ y ε son los tensores de tensión y deformación respectivamente, d es la variable de daño, y $\mathbf{D}_0$ es el tensor constitutivo del material no dañado. La ecuación anterior revela los siguientes aspectos básicos del modelo:

1. La isotropía se conserva puesto que la rigidez se ve afectada por un factor escalar.
2. La integración de la ecuación constitutiva puede realizarse en forma cerrada. Para ello se aconseja consultar la referencia²⁴.
3. La ecuación 3.19 puede ser también interpretada como una descomposición de las tensiones en una parte elástica y otra inelástica, esto es

$$\sigma = (1 - d) \cdot \mathbf{D}_0 : \varepsilon = \mathbf{D}_0 : \varepsilon - d \cdot \mathbf{D}_0 : \varepsilon = \sigma_0 - \sigma_i \quad [3.20]$$

$$\sigma_0 = \mathbf{D}_0 : \varepsilon \quad , \quad \sigma_i = d \cdot \sigma_0 = d \cdot \mathbf{D}_0 : \varepsilon$$

El modelo definido según la ecuación 3.19 se halla completamente determinado si el valor de d puede ser evaluado en cada instante del proceso de deformación. Para ello debe definirse

1. Una norma conveniente del tensor de deformaciones ε o alternativamente del tensor de tensiones sin daño $\sigma_0 = \mathbf{D}_0 : \varepsilon$. Esta norma se denomina tensión equivalente y se usa para comparar distintos estados de deformación.
2. Un criterio umbral de daño $F(\tau, r) \leq 0$, formulado en deformaciones o en el espacio de tensiones σ_0 . La forma más simple de este criterio es:

$$F(\tau(t), r(t)) = \tau(t) - r(t) \leq 0 \quad \forall t > 0 \quad [3.21]$$

donde $\tau(t)$ es la norma del tensor de tensiones y $r(t)$ es el umbral de daño medido en unidades de tensión. O sea el daño ocurre cuando la norma $\tau(t)$ sobrepasa dicho umbral. La expresión [3.21] representa una superficie en el espacio de deformaciones o de tensiones σ_0 . Una expresión más general de dicho criterio puede escribirse como:

$$\bar{F}(\tau(t), r(t)) = G(\tau(t)) - G(r(t)) \leq 0 \quad [3.22]$$

3. Las leyes de evolución del umbral de daño como así también la variable interna de daño. Se definen estas leyes mediante las siguientes expresiones:

$$\dot{r} = \dot{\mu} \quad [3.23]$$

$$\dot{d} = \dot{\mu} \cdot \frac{\partial \bar{F}(\tau, r)}{\partial \tau} = \dot{\mu} \frac{dG(\tau)}{d\tau} \quad [3.24]$$

donde $\dot{\mu}$ es un parámetro de consistencia de daño, similar al parámetro de consistencia plástica definido en el apartado correspondiente a plasticidad. Las condiciones de carga y descarga se obtienen de acuerdo con las relaciones de Kuhn-Tucker.

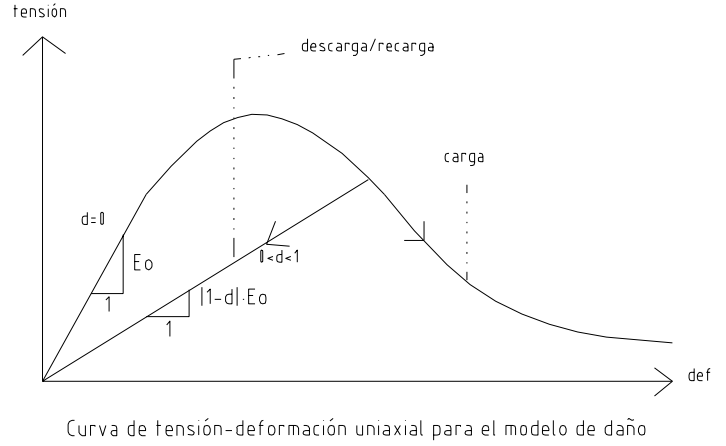
$$\dot{\mu} \geq 0, \quad F(\tau(t), r(t)) \leq 0, \quad \dot{\mu} \cdot F(\tau(t), r(t)) = 0 \quad [3.25]$$

La evolución de las variables internas se puede integrar en forma cerrada obteniéndose una función que representa dicho comportamiento

$$r(t) = \max\{r^0, \max \tau^s\} \quad 0 \leq s \leq t \quad [3.26]$$

$$d(t) = G(r(t)) \quad [3.27]$$

donde se comprueba la simplicidad del algoritmo cuando se compara con otras formulaciones como la plasticidad.



3.3.2. Tensión equivalente y criterio de daño.

Como se ha comentado anteriormente, el criterio de daño junto con la norma $\tau(\epsilon)$ definen la posición de la superficie de daño. Entre las distintas posibilidades¹⁶ resulta el siguiente modelo con igual degradación en tracción y compresión, que adopta la norma τ definida del siguiente modo:

$$\tau = \sqrt{\sigma_0 : \mathbf{D}_0^{-1} : \sigma_0} \quad [3.28]$$

que también puede escribirse en términos de deformación como:

$$\tau = \sqrt{\epsilon : \mathbf{D}_0 : \epsilon} \quad [3.29]$$

Físicamente está relacionada con la energía libre del material no dañado ($\tau^2 = 2\psi_0$). Esta definición de τ determina una superficie $\tau(\epsilon) - r^* = 0$ en el espacio de tensiones σ_0 que es un elipsoide centrado en el origen (una esfera para $\nu = 0$). Donde r^* es un umbral de energía, que evoluciona en función del proceso inelástico que se está desarrollando. A modo de ejemplo, se puede adoptar la siguiente expresión para este umbral,

$$r^* = \frac{f_t'}{\sqrt{E_0}} \quad [3.30]$$

3.4 Formulación del fenómeno de fatiga dentro de la mecánica de medios continuos.

3.4.1. Introducción.

Como de ha visto hasta ahora, tanto la teoría de la plasticidad como las teorías de daño tratan de resolver el comportamiento de los materiales más allá del régimen elástico, donde se pierde la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones y además el comportamiento mecánico se vuelve irreversible. No obstante esto, ambas teorías no están formuladas para predecir la pérdida de resistencia debido a la repetición de cargas. A pesar de ello, estas teorías inelásticas tienen una formulación básica que permite introducir indistintamente en la una como en la otra el efecto de la fatiga, es decir la pérdida de resistencia en función del número de ciclos.

En ambos planteamientos es posible descomponer las tensiones en una parte elástica y otra inelástica, pero lo que es más interesante es la existencia de una condición que indica el instante en que se abandona el comportamiento elástico para empezar la plasticidad o el daño, es decir el proceso de deterioro del material. Es el objetivo de este trabajo aprovechar esta última condición para formular un modelo de fatiga que es original en su planteamiento mecánico, puesto que como ya se ha comentado anteriormente hay muestras experimentales que la fatiga es consecuencia de una plasticidad o daño en pequeñas zonas del material, que produce fluencia a pesar de no ser detectable a escala macroscópica. Pero para que se produzcan estos procesos inelásticos es preciso que se haya alcanzado previamente en estos puntos el criterio de discontinuidad, que además de establecer el comienzo de un comportamiento no lineal irreversible describe la evolución de las fronteras del dominio elástico dentro del espacio de tensiones. Dicho criterio de discontinuidad se presentará para la plasticidad y daño, como:

* Criterio de fluencia en plasticidad:

$$F = f(\sigma) - \sigma'_f(k_p) = 0$$

* Criterio en daño:

$$F = \tau(t) - r(t) = 0$$

A esos criterios límites se los denominará en adelante *condición límite* que expresaremos de un modo general como:

$$F = f(\sigma) - \sigma'_f(q) = 0 \quad [3.31]$$

donde $f(\sigma)$ es una función que depende del estado tensional y $\sigma'_f(q)$ es la función que depende de las variables internas y que a partir de ahora se denominará s u a .

A lo largo del proceso de carga σ'_f no permanece constante, puesto que depende de las variables internas de daño d y plasticidad ε^p . Una posible curva de evolución de σ'_f en función de las variables internas de daño y plasticidad, sería:

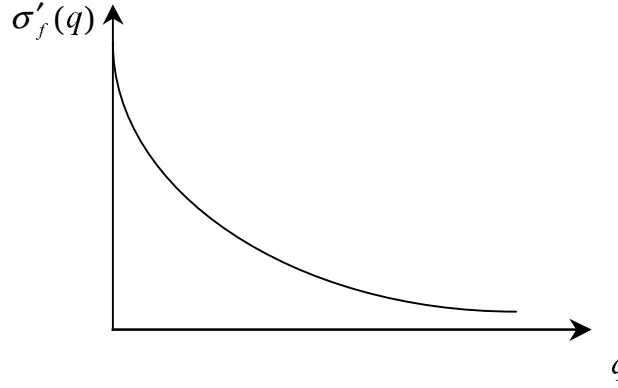


Fig.3.5: Pérdida de resistencia en plasticidad y daño.

Este comportamiento no lineal lleva a la disminución de resistencia del material. O sea, que las teorías de Daño y Plasticidad pueden contemplar fenómenos de pérdida de resistencia de los materiales una vez alcanzada la condición límite. Además de estas cualidades propias de ambas teorías, en este trabajo se introduce en la función $\sigma'_f(q)$, que es la responsable de esta pérdida de resistencia, el efecto del número de ciclos bajo la actuación de una carga armónica de amplitud constante. Esto es

$$F_i(t) = F_0^i \sin(w_i \cdot t) + F^m \quad N_c^i = \frac{t}{T_i} \quad T_i = \frac{2\pi}{w_i}$$

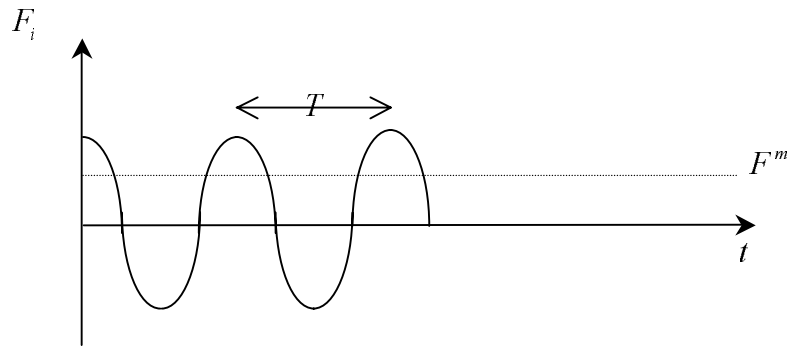


Fig.3.6: Carga armónica que se utiliza en la predicción de la fatiga.

Para incluir el número de ciclos en la tensión límite de discontinuidad es necesario obtener para cada $F_i(t)$ curva uniaxial del tipo $\sigma(q, N)$, que resultan de añadir una nueva dimensión, el número de ciclos de carga, a las curvas $\sigma'_f(q)$. De

modo que las curvas que describen la evolución de la tensión límite se transforman del siguiente modo:

$$\begin{array}{l} \sigma'_f(q) \quad : \text{ plasticidad y daño sin contemplar el efecto de la fatiga.} \\ \downarrow \\ \sigma_f(q, N) = \sigma'_f(q) \cdot \text{fred}(N) \quad : \text{ plasticidad y daño combinados con fatiga.} \end{array}$$

Donde $\sigma'_f(q)$ es el término que contempla la pérdida de resistencia debida a daño o plasticidad y el factor $\text{fred}(N)$ hace sensible al nuevo modelo al número de ciclos de carga. De este modo la aplicación de una carga cíclica sobre el material permite que curvas como la de la Figura 3.5 se transformen en superficies como la que se muestra en la Figura 3.7 y que denominaremos *superficie límite*.

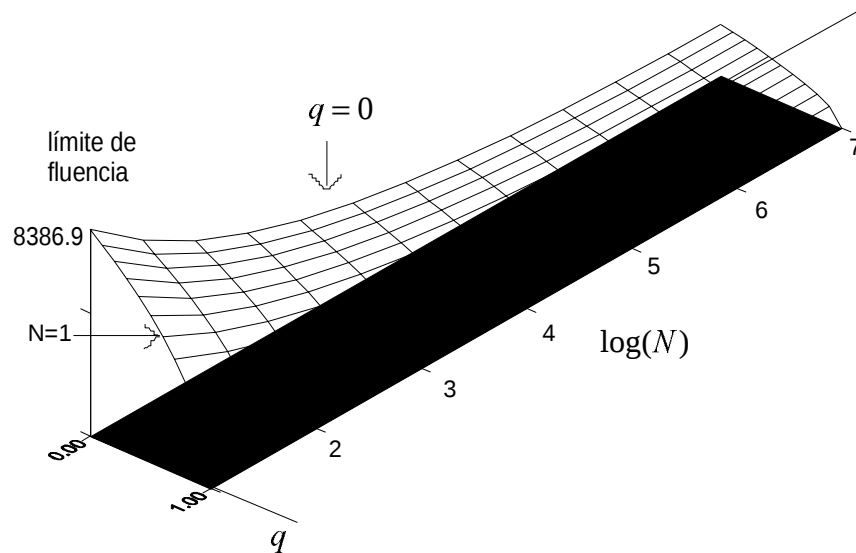


Fig.3.7. Curvas de disminución de la tensión límite por efecto de la plasticidad, daño y número de ciclos.

La ventaja de esta formulación, radica en la independencia que existe entre el daño, la plasticidad y el número de ciclos, dentro de la tensión límite. Esto es

$$\sigma_f(q, N) = \sigma'_f(q) \cdot \text{fred}(N) \quad [3.32]$$

A pesar de que $fred(N)$ se interpreta como un factor que afecta a la tensión límite, este parámetro no se introduce directamente $\sigma_f(q, N)$, sino que se introduce en el siguiente modo:

$$F = f(\sigma) - \sigma_f(q, N) = 0$$

$$f(\sigma) - \sigma'_f(q) \cdot fred(N) = 0 \quad [3.33]$$

$$\frac{f(\sigma)}{fred(N)} - \sigma'_f(q) = 0 \quad [3.34]$$

El motivo de ello es el de alterar lo menos posible las complejas estructuras matemáticas de plasticidad y daño obteniendo por lo tanto un modelo mucho más sencillo de implementar sin la necesidad de ninguna otra formulación complementaria.

Para comprender mejor como se produce esta pérdida de resistencia se trata de reproducir una posible trayectoria de la tensión límite σ_f a través de la superficie límite. Imagínese una probeta de acero sometida a una carga cíclica como la mostrada en la Figura 3.8, que produce una tensión homogénea en el material

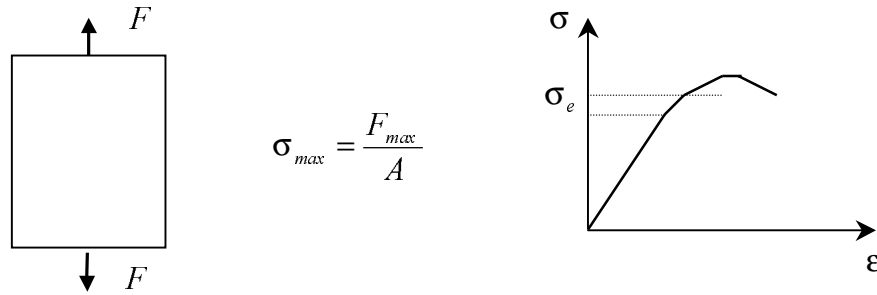


Fig. 3.8. Esquema de comportamiento uniaxial de una pieza sometida a tracción

Inicialmente la tensión umbral de comportamiento no lineal, se situará en el límite de elasticidad $\sigma_f^0 = \sigma_e$, lo cual indica que el material es capaz de resistir cualquier tensión por debajo de este valor ($\sigma_{max} < \sigma_e$), dentro de su dominio elástico. Con el aumento del número de ciclos de carga la tensión límite disminuye siguiendo curvas como la “1” que se indica en la Figura 3.9. Ello indica que, por ejemplo, para $N = N_1$ el material sólo es capaz de seguir resistiendo en estas condiciones tensiones inferiores a σ_f^1 y aunque esto no se manifieste en forma de plasticidad o daño, sí que implica la pérdida de resistencia dando lugar a que se produzcan fenómenos inelásticos, aun bajo cargas que en el material inicial corresponderían al ámbito elástico. De este modo se comprueba que al igual que ocurre en la realidad, en fatiga a pesar de que la resistencia de una pieza disminuye paulatinamente, no es posible

detectar esta degradación y el material sigue deformándose en régimen elástico. Por lo tanto esta pérdida de capacidad resistente no es percibida físicamente. De hecho el material es capaz de seguir resistiendo la sollicitación hasta cierto número de ciclos, aunque la mayor carga que es capaz de soportar sea notablemente inferior a la del material original

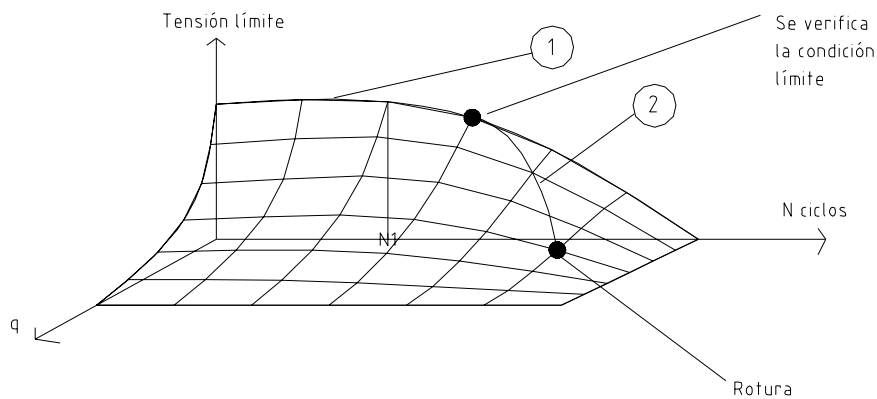


Fig.3.9. Trayectorias a través de la superficie límite.

Este proceso continua hasta que la tensión límite disminuye por debajo de la tensión existente en el material ($\sigma_{max} > \sigma_f$). En ese instante se verifica la condición límite [3.31] y comienzan a producirse fenómenos de deterioro del material asociados a daño o plasticidad. Entonces la tensión límite describe trayectorias como la “2” de la Figura 3.9, debido a la evolución de variables internas asociadas con fenómenos de daño o plasticidad que confieren un nuevo carácter tridimensional a estas curvas. Por lo tanto a partir de este instante la progresiva disminución de σ_f se ve acelerada por la iniciación de procesos inelásticos que en el caso de no cesar la carga cíclica aplicada provocarán la rotura de la pieza para cierto número de ciclos bajo una carga que en el material original era considerada como segura.

3.4.2. Relación con las curvas de Wöhler.

A continuación se caracterizan estas curvas de pérdida de resistencia para una determinada carga de amplitud constante y para el acero A517, a partir de sus curvas de Wöhler. Se continua con el caso sencillo de una probeta de acero sometida a repetidos ciclos de tracción compresión, adoptando como límite de discontinuidad, la siguiente curva simplificada

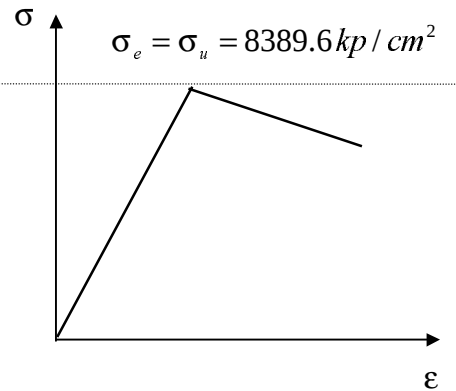
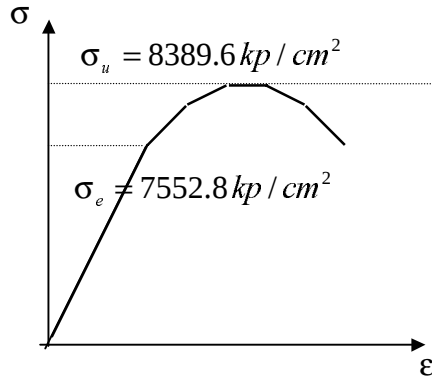


Fig. 3.10. Diagrama real del acero A517. Fig. 3.11. Diagrama simplificado.

Con un diagrama tensión-deformación de este tipo resulta claro que una vez alcanzado el límite elástico $\sigma_f = \sigma_e$, si no cesa la aplicación de la carga, la probeta de la Figura 3.8 romperá al ser el material incapaz de resistir la tensión a la que se ve solicitado, puesto que $\sigma_f = \sigma_e = \sigma_u$. Por lo tanto admitiendo que la pérdida de resistencia es debida al descenso de la tensión límite y aceptando un diagrama tensión-deformación como el que se muestra en la Figura. 3.11, se puede caracterizar la función $\sigma_f(q, N)$ a partir de las curvas de Wöhler, puesto que en el punto de rotura N_F de las curvas $\sigma_{max} - N$, la tensión límite debe valer $\sigma_f(N) = \sigma_{max}(N)$.

Además, la tensión límite para un número de ciclos $N_1 < N_F$ debe ser superior a la tensión máxima que según las curvas de Wöhler es capaz de resistir el material para ese número de ciclos N_1 . Para entender la necesidad de esta última condición se observa ahora como tiene lugar la disminución de la tensión límite en los puntos de una probeta como la de la Figura 3.8 bajo dos cargas armónicas P_1, P_2 de distinta amplitud e igual factor de reversión ($P_1 > P_2$). Deberá cumplirse que para cualquier número determinado de ciclos la tensión límite en un punto debe ser menor en el primer caso (carga mayor P_1) que en el segundo, puesto que al haber estado la pieza más solicitada ésta ha perdido más resistencia. Si se particulariza este hecho evidente para $N = N_{F1}$ (rotura en el caso 1) se puede observar que la curva de evolución de la tensión límite según la carga menor (P_2) debe estar por encima de la curva de Wöhler (asociada al factor de reversión correspondiente):

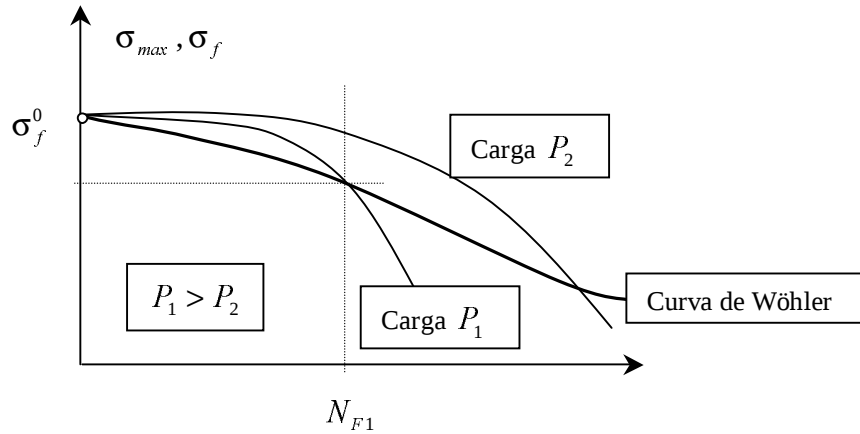


Fig. 3.12. Evolución de la tensión límite según distintas cargas.

Estos hechos junto con otro hecho obvio que es que en el material original la tensión límite debe valer precisamente $\sigma_f^0 = \sigma_e = \sigma_u$, permiten caracterizar las curvas $\sigma_f - N$ a partir de las curvas de Wöhler ($\sigma_{max} - N$). Todo ello se resume esquemáticamente a continuación:

Condiciones que deben cumplir las curvas de evolución de la tensión límite asociadas a su relación con las curvas de Wöhler:

a) $\sigma_f(q=0, N=1) = \sigma_f^0$ [3.35]
Inicialmente la tensión límite coincide con la resistencia máxima del material $\sigma_f^0 = \sigma_u$.

b) $\sigma_f(q=0, N) > \sigma_{max}(q=0, N)$ para $N < N_F$ [3.36]
El material aún es capaz de resistir la carga actual.

c) $\sigma_f(q, N_F) = \sigma_{max}(q, N_F)$ [3.37]
La curva de Wöhler y la de la tensión límite deben cortarse en rotura

3.5 Detalles sobre la formulación propuesta.

3.5.1. Curvas de Wöhler.

Se ha visto en el apartado anterior las curvas de descenso de la tensión límite ($\sigma_f - N$) y su relación con las curvas de Wöhler ($\sigma_{max} - N$). En este apartado se darán los pasos para desarrollar la formulación propuesta encontrando una

expresión analítica para las curvas de tensión límite. En la Figura 3.13 se muestran datos experimentales de las curvas de Wöhler para un acero del tipo A517. A modo de ejemplo se desarrollará el modelo de fatiga, con la obtención de las curvas de pérdida de resistencia para este acero en particular. A partir de la observación de las curvas de Wöhler se obtienen dos propiedades fundamentales, comentadas ya en el Capítulo 2, que debe reflejar la expresión matemática de las curvas para reproducir los datos experimentales²¹.

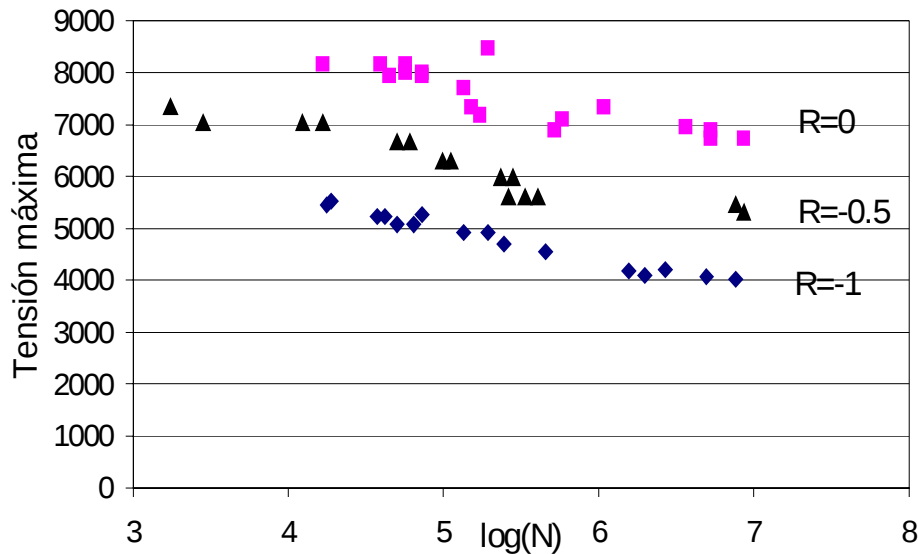


Fig. 3.13. Resultados experimentales (curvas de Wöhler).

1. Para $N = 0$ ciclos, $\sigma_{max}(N) = \sigma_u = 8389.6 kp/cm^2$, es decir el material es capaz inicialmente de resistir su tensión última de agotamiento.
2. Para un número elevado de ciclos se observa que las curvas anteriores tienen un límite inferior. Este límite como ya se describió en el Capítulo 2, se define como la tensión límite de indurancia y según resultados experimentales²¹, se obtiene para cada factor de reversión de cargas, los siguientes valores:

$R=0$	$\sigma_{límite} = 6680 kp/cm^2$
$R=-0.5$	$\sigma_{límite} = 5414 kp/cm^2$
$R=-1$	$\sigma_{límite} = 4078 kp/cm^2$

que puede definirse en modo general mediante la expresión:

$$\sigma_{\text{límite}} = \sigma_f^0 \cdot \left(\frac{1}{1.26} + \frac{R}{3.3} \right) \quad [3.38]$$

donde $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$, es el factor de reversión de cargas. La función que se ha adoptado para describir la evolución de la tensión máxima será

$$\sigma_{\max} = \sigma_f^0 \cdot e^{-A(\log N)^\alpha} \quad [3.39]$$

La observación experimental expresada en “1” se cumple automáticamente, puesto que $\sigma_{\max}(N=0) = \sigma_f^0 = 8389.6 \text{ kp/cm}^2$. Imponiendo ahora la condición que para $N = 10^7$ ciclos la tensión límite sea igual a la tensión de indurancia y definiendo a partir de entonces la curva mediante una constante, se consigue que se cumpla la observación “2”, de donde se obtiene el parámetro A :

$$\sigma_{\max}(N = 10^7) = \sigma_{\text{límite}}$$

y utilizando las ecuaciones [3.38] y [3.39], se obtiene

$$\sigma_{\max} = \sigma_f^0 \cdot e^{-A(\log 10^7)^\alpha} = \sigma_f^0 \cdot \left(\frac{1}{1.26} + \frac{R}{3.3} \right) = \sigma_{\text{límite}}$$

y operando se obtiene el valor del parámetro A que garantiza el comportamiento del material según las anteriores condiciones:

$$A = - \left(\frac{\ln \left(\frac{1}{1.26} + \frac{R}{3.3} \right)}{7^\alpha} \right) \quad [3.40]$$

el restante parámetro α que falta por determinar en la expresión [3.39] se lo obtiene de modo que las funciones resultantes se asemejen en lo máximo posible a los datos experimentales del acero A517. Parece razonable ya a priori adoptar un valor distinto para cada factor de reversión, R , pues la forma de las curvas es sensiblemente distinta. Así pues después de sucesivos tanteos se adopta $\alpha = 4 \cdot 2^{2R}$ obteniendo las curvas que se muestran en la Figura 3.15, que representan con bastante verosimilitud los datos disponibles. De este modo quedan definidas las expresiones analíticas de las curvas de Wöhler, del siguiente modo:

$$\sigma_{\max} = \sigma_f^0 \cdot e^{\ln \left(\frac{1}{1.26} + \frac{R}{3.3} \right) \left(\frac{\log N}{7} \right)^{4 \cdot 2^{2R}}} \quad \text{para } N < 10^7 \text{ ciclos} \quad [3.41]$$

$$\sigma_{max} = \sigma_f^0 \cdot \left(\frac{1}{1.26} + \frac{R}{3.3} \right) \quad \text{para } N > 10^7 \text{ ciclos} \quad [3.42]$$

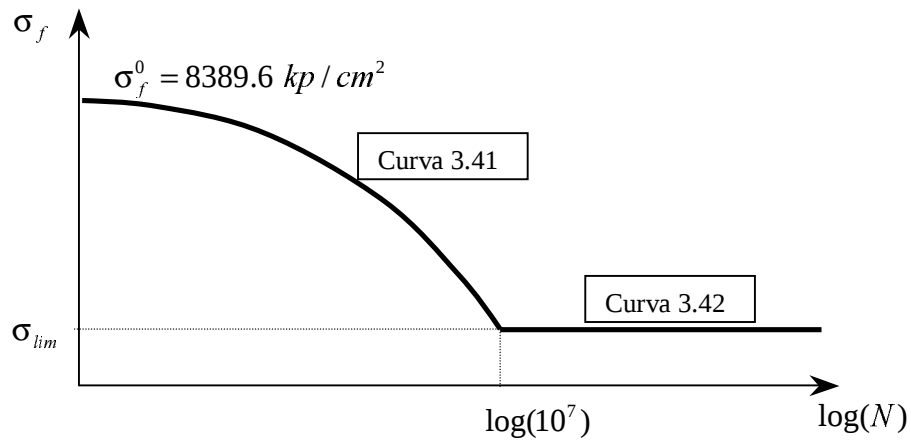


Fig. 3.14: Descripción de las curvas de Wöhler formuladas analíticamente.

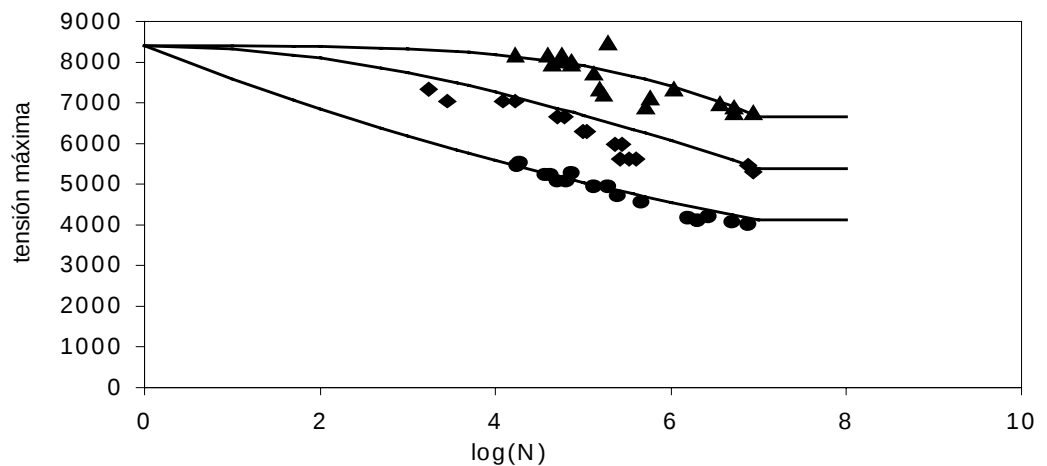
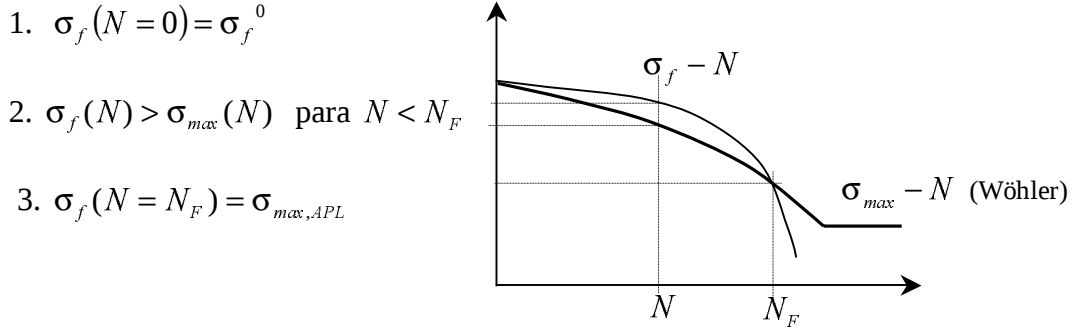


Fig. 3.15. Comparación entre las curvas de Wöhler experimentales y las obtenidas analíticamente

3.5.2. Curvas de evolución de la tensión límite de discontinuidad.

Ahora ya se está en disposición de hallar expresiones que proporcionen la variación de la tensión límite con el número de ciclos de carga a través de su relación con las curvas de Wöhler ya comentadas anteriormente y que se mencionará nuevamente a continuación:



donde $\sigma_{max}(N)$ es la tensión máxima que puede resistir el material durante N ciclos de carga (curvas de Wöhler) que se mantienen constantes, $\sigma_{max,APL}$ es la tensión máxima en el material provocada por la carga cíclica, $\sigma_f(N)$ es el valor de la tensión límite para N ciclos y N_F es número de ciclos que puede soportar el material la tensión máxima provocada por la carga cíclica ($\sigma_{max,APL}$).

Para obtener este valor N_F basta con entrar en las curvas de Wöhler con el valor $\sigma_{max} = \sigma_{max,APL}$ como se puede observar en la Figura 3.16.

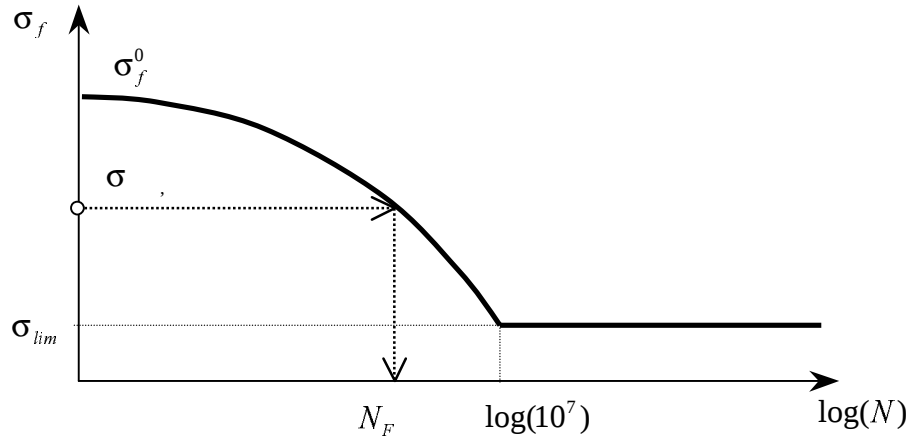


Fig. 3.16: Obtención de N_F a partir de la curva de Wöhler.

O analíticamente mediante la expresión:

$$\sigma_{max,APL} = \sigma_{max}(N = N_F) = \sigma_f^0 \cdot e^{A \cdot (\log N)^{\alpha}} \quad [3.43]$$

y operando se obtiene,

$$N_F = \log^{-1} \left(7 \cdot \sqrt{\frac{\ln \left(\frac{\sigma_{max, APL}}{\sigma_f^0} \right)}{\ln \left(\frac{1}{1.26} + \frac{R}{3.3} \right)}} \right) \quad [3.44]$$

Para la definición de la tensión límite de discontinuidad $\sigma_f - N$ (o resistencia), se adopta una función exponencial del tipo de la utilizada para las curvas de Wöhler [3.39], esto es:

$$\sigma_f(N) = \sigma_f^0 \cdot e^{-B(\log N)^\beta} \quad [3.45]$$

en esta última puede verse que la condición “1” se cumple automáticamente puesto que para $\sigma_f(N=0) = \sigma_f^0$, mientras que las otras dos condiciones nos permiten obtener el parámetro B y β , de la curva de resistencia máxima [3.45]. Para asegurar que se cumple la condición “2” basta con que el exponente de la expresión [3.45] sea mayor que el de la ecuación [3.39], quedando asegurado entonces que esta última curva está por debajo de la primera. Tomando por tanto $\beta = C \cdot \alpha = C \cdot 4 \cdot 2^{2R}$ donde $C > 1$, se asegura este comportamiento. El valor del parámetro β se justificará posteriormente. Para que se cumpla la condición “3” se imponen las siguientes ecuaciones,

$$\sigma_f(N = N_F) = \sigma_{max, APL}$$

$$\sigma_{max, APL} = \sigma_f^0 \cdot e^{-B(\log N_F)^\beta}$$

que pueden resolverse como

$$B = - \frac{\ln \left(\frac{\sigma_{max, APL}}{\sigma_f^0} \right)}{(\log N_F)^\beta} \quad [3.46]$$

y por tanto puede escribirse

$$\sigma_f(N) = \sigma_f^0 \cdot e^{\ln \left(\frac{\sigma_{max, APL}}{\sigma_f^0} \right) \left(\frac{\log N}{\log N_F} \right)^{8.2^{2R}}} \quad [3.47]$$

En el gráfico de la Figura 3.17 puede observarse las curvas obtenidas para un caso concreto de cargas y también puede apreciarse más claramente como se interpretan gráficamente las anteriores condiciones.

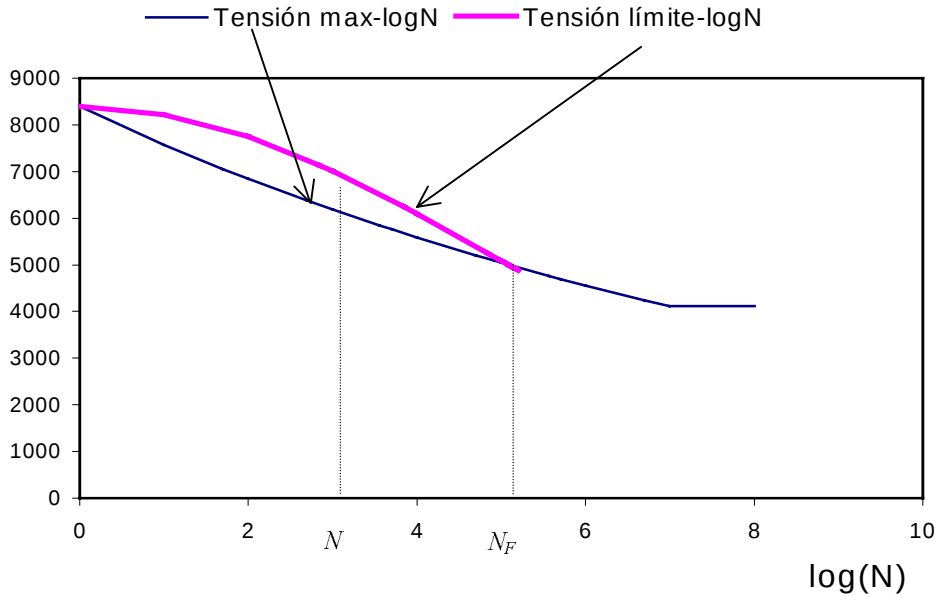


Fig. 3.17: Curva de Wöhler y curva de disminución de la tensión límite (resistencia)

3.5.3. Planteamiento general de la fatiga combinada con otros comportamientos no-lineales.

Hasta ahora se han caracterizado las curvas de disminución de la tensión límite (resistencia) en ausencia de otras deformaciones inelásticas, es decir, para:

$$q = 0 \quad \sigma_f(q=0, N) = \sigma'_f(q=0) \cdot \text{fred}(N) = 8389.6 \cdot \text{fred}(N) \text{ kp/cm}^2$$

que corresponden a la intersección de la superficie límite con el plano . Esto se debe a que las curvas de Wöhler han sido formuladas para piezas ensayadas a cargas uniaxiales (Figura 3.8) y bajo las hipótesis efectuadas en la Figura 3.11 exentas en todo momento de plasticidad y daño, puesto que al producirse estos fenómenos se alcanza la rotura de la pieza como ya se ha descrito anteriormente. Por lo tanto a lo largo de todo el proceso se ha seguido un camino sin evolución de las variables internas de plasticidad y daño (). Esto sólo ocurre en este tipo de ensayo puesto que en piezas más complejas, cuyas distribuciones tensionales no son tan simples, la verificación de la condición límite en un punto no implica la rotura, sino únicamente una pérdida de tensión en dicho punto (pérdida de resistencia) y una redistribución tensional en la vecindad de la zona dañada. En estos casos la tensión límite de estos puntos ya no corresponde al plano aunque las curvas se formulan en forma análoga puesto que como ya se ha comentado, los dos términos de la expresión $\sigma_f(q, N)$ son independientes y por lo tanto puede escribirse en la siguiente forma general:

$$\sigma_f = \sigma'_f(q) \cdot \text{fred}(N) = \sigma'_f(q) \cdot e^{-B(\log N)^\beta}$$

3.5.4. Caso de vida infinita.

Hasta el momento únicamente se han formulado las curvas para aquellos casos, donde según se desprende de los ensayos experimentales, se alcanza la rotura para un determinado número de ciclos. Pero falta determinar como tiene lugar este descenso de la tensión límite en aquellos casos donde no se alcanza la rotura, ya que la formulación propuesta no es válida al no tener solución la ecuación [3.43] y no existir por lo tanto el límite N_F , por ser $\sigma_{max,APL} < \sigma_{lim}$.

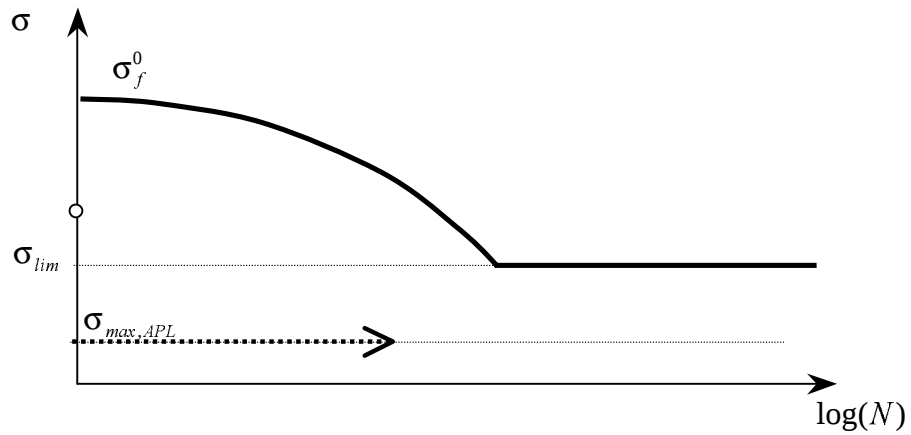


Fig. 3.18: Estado de carga que no produce rotura en un

Aunque en estos casos no se produzca rotura parece razonable pensar que la resistencia de la pieza (σ_f) también disminuye. Pero ahora la tensión límite debe estabilizarse para un número elevado de ciclos en un valor superior a la tensión máxima producida por la carga cíclica actuante ($\sigma_{max,APL}$), lo que garantiza que no se llegue a verificar la condición límite y por lo tanto la seguridad frente a rotura.

De acuerdo con estos hechos se considera que la tensión límite se estabiliza para,

$$\sigma_{f\text{inf}} = \sigma_f^0 - \sigma_{max} \cdot \left(\frac{\sigma_f^0 - \sigma_{lim}}{\sigma_{lim}} \right) \quad [3.48]$$

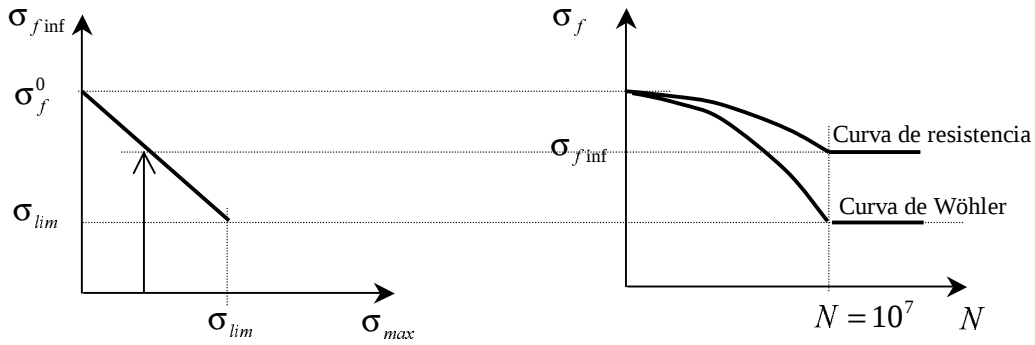


Fig. 3.19: Estabilización de la tensión límite para $\sigma_{max} < \sigma_{lim}$.

La ecuación [3.48], que define el límite inferior de fatiga $\sigma_{f\ inf}$, representa una simple interpolación lineal entre los dos casos extremos, donde el valor de σ_{lim} es conocido a partir de las curvas de Wöhler. De modo que se cumplen las dos condiciones límite que resultan obvias:

- Para $\sigma_{max} = \sigma_{lim} \longrightarrow \sigma_{f\ inf} = \sigma_{lim}$, Que corresponde a la tensión límite de indurancia.
- Para $\sigma_{max} = 0 \longrightarrow \sigma_{f\ inf} = \sigma_f^0$, Para tensión nula no existe degradación.

O sea que las funciones de evolución de la tensión límite serán nuevamente del tipo:

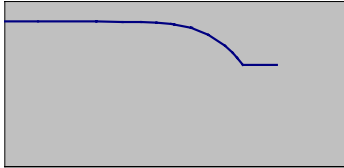
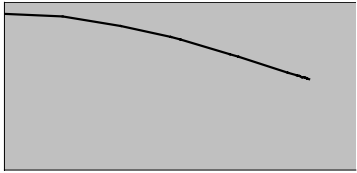
$$\sigma_f = \sigma_f^0 \cdot e^{-B(\log N)^\beta} \quad [3.49]$$

pero ahora la condición para obtener B cuando el número de ciclos llega a $N = 10^7$, resulta ser $\sigma_f = \sigma_{f\ inf}$, obteniendo entonces:

$$B = \frac{\ln\left(\frac{\sigma_{f\ inf}}{\sigma_f^0}\right)}{7^\beta} \quad [3.50]$$

donde β permanece igual que en los casos anteriores. De este modo la variación de la tensión límite σ_f se describe nuevamente mediante la expresión [3.50], pero con el parámetro B definido según la expresión anterior para $N < 10^7$ ciclos. A partir de $N = 10^7$ ciclos la tensión límite (resistencia) permanece constante igual a $\sigma_{f\ inf}$.

A continuación se particulariza toda esta teoría para el acero A517. De este modo se puede escribir la disminución del límite (resistencia) del acero A517 en función de R , σ_{max} , σ_f^0 y el número de ciclos como se muestra a continuación. La otra variable de la que depende σ_f aparece implícitamente en todas las expresiones pues $\sigma'_f = \sigma'_f(q)$

Sí: $\sigma_{APL,max} < \sigma_{lim}$ $\sigma_{lim} = \sigma'_f \cdot \left(\frac{1}{1.26} + \frac{R}{3.3} \right)$ Sí: $\sigma_{APL,max} > \sigma_{lim}$	$\sigma_f = \sigma'_f(q) \cdot e^{-B \cdot \log(N)^\beta} \quad N < 10^7$ $\alpha = 4 \cdot 2^{2R}$ $\beta = 8 \cdot 2^{2R}$ $\sigma_f = \sigma'_f(q) \cdot e^{-B \cdot \log(N)^\beta} \quad \forall N$ $\sigma_f = \sigma_{f \inf} \quad N > 10^7$ $\sigma_{f \inf} = \sigma_f^o - \sigma_{max} \cdot \left(\frac{\sigma_f^o - \sigma_{lim}}{\sigma_{lim}} \right)$ $B = \frac{-\ln\left(\frac{\sigma_{f \inf}}{\sigma_f^o}\right)}{7^\beta}$ $B = \frac{-\ln\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_f^o}\right)}{(\log N_F)^\beta}$ $N_F = a \log \left(7 \cdot \sqrt[\alpha]{\frac{\ln\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_f^o}\right)}{\ln\left(\frac{1}{1.26} + \frac{R}{3.3}\right)}} \right)$
tensión límite  log(N)	tensión límite  log(N)

3.5.5. Observaciones.

Como se ha visto σ_{lim} es una propiedad del material que indica la tensión máxima que es capaz de resistir el material durante un número infinito de ciclos. Es decir tensiones menores a este valor provocan que la tensión límite del material se estabilice por encima de la tensión actuante, para un valor elevado de ciclos ($N = 10^7$), garantizando la seguridad frente a rotura. Es interesante resaltar que este

valor además de depender del factor de reversión R , depende también de las variables asociadas a fenómenos de daño o plasticidad:

$$\sigma_{lim} = \sigma_{lim}(q, R) = \sigma'_f(q) \cdot \left(\frac{1}{1.26} + \frac{R}{3.3} \right) \quad \text{con , } R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} : \text{factor de reversión}$$

q : variables internas de
daño o plasticidad

Ello implica por tanto que la presencia de fenómenos de daño o plasticidad provoquen el descenso de la tensión límite de indurancia del material. Este hecho que parece razonable resulta indispensable además para la correcta descripción de roturas debidas a fatiga como se desprende de la siguiente justificación. Imagínese un punto de una pieza sometida a una tensión tal que $\sigma_{max} > \sigma_{lim}$, al cabo de cierto número de ciclos, cuando $\sigma_f = \sigma_{lim}$, comenzará a producirse deformaciones plásticas en el material. A partir de este instante se verifica que $\sigma_{max} = \sigma_f$ (la máxima tensión en el material coincide con su resistencia). Por otro lado, la resistencia debe seguir disminuyendo con el número de ciclos lo cual no se produciría si la tensión límite de indurancia dependiera exclusivamente del factor de reversión puesto que dejaría de cumplirse la condición $\sigma_{max} > \sigma_{lim}$, al disminuir σ_{max} por debajo de σ_{lim} y esta mantenerse constante, definiéndose entonces la tensión límite a partir de la formulación para casos de vida infinita, lo que imposibilita la total pérdida de resistencia del material.

3.6 Aplicación de cargas con periodos y amplitudes variables.

Las curvas de Wöhler que han sido utilizadas para formular las curvas de pérdida de resistencia del acero A517, se obtienen a partir de ensayos uniaxiales sencillos que suponen que la carga actuante es de amplitud constante y periódica desde el inicio del ensayo hasta rotura. Del mismo modo las curvas formuladas hasta ahora predicen la disminución de la tensión límite con el número de ciclos para cargas periódicas de amplitud constante, pero en la realidad raras veces se da esta situación y normalmente los materiales son sometidos a procesos de carga mucho más complejos. En el presente apartado se expone la forma de resolver estos problemas con el modelo propuesto.

3.6.1. Aplicación de diversas cargas armónicas.

Considérese que sobre una pieza cualquiera actúan dos estados de carga con amplitudes y periodos distintos, del tipo del que muestran la siguiente figura

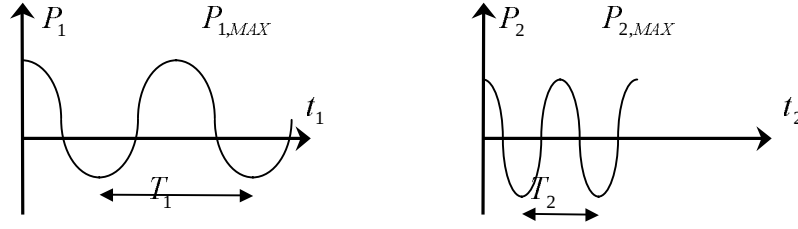


Fig. 3.20. Historia de dos cargas armónicas diferentes

Tampoco es muy habitual que la carga actuante sea la sucesión de diversas cargas armónicas, aunque la comprensión de este caso particular resulta un paso previo para entender el funcionamiento ante cargas variables, así como otros aspectos del comportamiento del modelo.

Suponiendo que para $t_T = t_1 + t_2$ no se han producido fenómenos de daño ni plasticidad, es decir las cargas han sido resistidas dentro del campo elástico del material, cada una de las cargas de la Figura 3.20 tiene asociada una historia tensional en cada punto del material, Figura 3.21, y una superficie límite que se formula a partir de esta, que se reduce a una simple curva en este caso ya que $q = 0$, y que proporciona la evolución de la tensión límite para cada una de estas cargas.

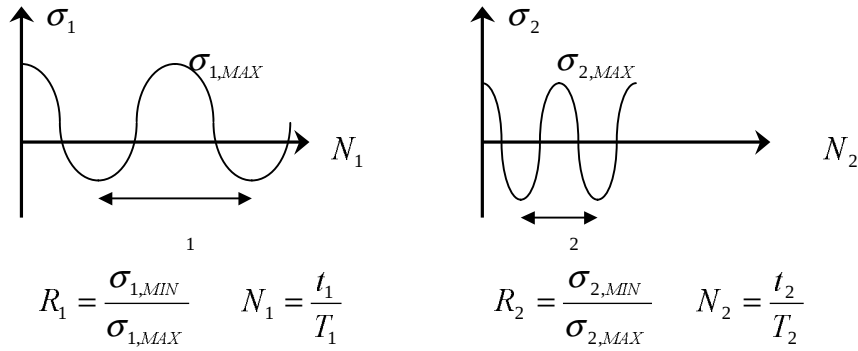


Fig. 3.21. Historia de tensiones producidas por cada carga

Transcurridos N_1 ciclos bajo la carga P_1 , en un punto del material la tensión límite vale:

$$\sigma_f^1(q, N_1) = \sigma_f'(q=0) \cdot \text{fred}(N_1) = 8389.6 \cdot \text{fred}(\sigma_{1,MAX}, R_1, N_1) \quad [3.51]$$

sí a partir de ese instante cesa la carga P_1 y se aplica P_2 la evolución de la tensión límite se describirá mediante la curva:

$$\sigma_f(q, N) = \sigma_f'(q=0) \cdot \text{fred}(N) = 8389.6 \cdot \text{fred}(\sigma_{2,MAX}, R_2, N + N_{12}^*) \quad [3.52]$$

donde N_{12}^* es el número de ciclos necesarios bajo la carga P_2 que se requieren para que la tensión límite alcance el valor σ_f^1 que proporciona la expresión

[3.52]. De este modo se fija el punto inicial dentro de la curva actual de evolución de la tensión límite:

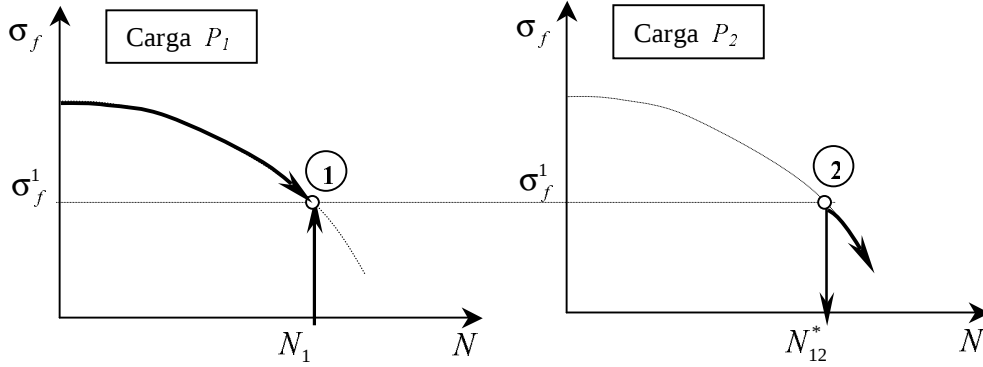


Fig.3.22 · Evolución de la tensión límite bajo la aplicación de dos cargas armónicas.

De este modo la evolución de la tensión límite se define durante todo el proceso mediante las siguientes expresiones.

$$\text{Curva 1: } \sigma_f(q, N) = 8389.6 \cdot \text{fred}(\sigma_{1,MAX}, R_1, N) \quad \text{para } 0 < t < t_1 \quad [3.53]$$

$$\text{Curva 2: } \sigma_f(q, N) = 8389.6 \cdot \text{fred}(\sigma_{2,MAX}, R_2, N + N_{12}^*) \quad \text{para } t_1 < t < t_2 \quad [3.54]$$

verificándose que para $t = t_1$ ambas expresiones coinciden, siendo esta es la condición para hallar N_{12}^* , es decir:

$$8389.6 \cdot \text{fred}(\sigma_{1,MAX}, R_1, N) = 8389.6 \cdot \text{fred}(\sigma_{2,MAX}, R_2, N + N_{12}^*) \quad [3.55]$$

$$\text{fred}(\sigma_{1,MAX}, R_1, N) = \text{fred}(\sigma_{2,MAX}, R_2, N + N_{12}^*) \quad [3.56]$$

y utilizando la expresión:

$$\text{fred}(\sigma, R, N) = e^{-B \cdot \log(N)^B} \quad [3.57]$$

se obtiene,

$$N_{12}^* = \log^{-1} \left(\sqrt[B]{\ln \left(\frac{\text{fred}(N_1)}{-B} \right)} \right) \quad [3.58]$$

En presencia de plasticidad o daño, el problema se resuelve de igual modo, puesto la ecuación [3.55] se escribe ahora como:

$$\sigma'_f(q) \cdot \text{fred}(\sigma_{2,MAX}, R_2, N) = \sigma'_f(q) \cdot \text{fred}(\sigma_{2,MAX}, R_2, N + N_{12}^*)$$

que simplificada vuelve a ser la misma ecuación [3.56].

3.6.2. Redistribución de tensiones.

El comportamiento comentado en el apartado anterior, es decir el cambio de superficie para describir la evolución de la tensión límite en un punto puede producirse también bajo la aplicación de una carga armónica de amplitud constante si se produce alguna redistribución de tensiones en la pieza. Este es el caso cuando, después de repetidos ciclos de carga, se alcanza la condición límite en algún punto del material. Entonces dicho punto del material ya no es capaz de seguir resistiendo la tensión existente hasta ese momento lo que provoca una variación de tensión en tal punto por la redistribución en sus vecindades. Así pues tanto en el punto dañado como en otros próximos se produce un cambio de tensión, que se trata siguiendo los pasos antes descritos. Además, esta situación de no radialidad en la carga que se produce como consecuencia de la distribución de tensiones, esta perfectamente contenida dentro de los modelos de plasticidad y daño.

3.7 Otras consideraciones sobre la formulación de fatiga.

3.7.1. Parámetro β .

Las curvas de disminución de la tensión límite con el número de ciclos han sido formuladas a partir de consideraciones generales basadas en el estudio de la bibliografía consultada y de los datos experimentales de las curvas de Wöhler. Se hace notar que estos datos experimentales corresponden a ensayos de piezas sometidas a repetidos ciclos de tracción-compresión hasta rotura. Tomando estos resultados como explicativos del funcionamiento de un punto sometido a tensión cíclica constante y con aumento del número de ciclos se han parametrizado las curvas de pérdida de resistencia.

No obstante lo dicho, existe un parámetro fundamental para la simulación del proceso de fatiga, al que todavía no se le ha asignado ningún valor. Se trata del parámetro β al que se ha definido como $\beta = c \cdot \alpha$. Este parámetro es el responsable de la forma de las curvas de descenso de la tensión límite y debe ser forzosamente $\beta > \alpha$, es decir $c > 1$, para que la tensión límite disminuya más rápidamente para tensiones elevadas tal como se ha comentado en el apartado 3.4.1

Si se reproduce el ensayo de una barra de acero sometida a repetidos ciclos de una misma carga hasta rotura, sería posible observar que la elección del parámetro β no influye considerablemente en el resultado, es decir en la duración de la vida de la pieza.

El modo más cómodo de ajustar el parámetro β a la realidad sería disponer de ensayos experimentales que caracterizaran la evolución de la tensión límite. Se trataría de someter a piezas a repetidos ciclos de carga hasta un determinado instante en que

se realizaría una prueba de carga para conocer la capacidad resistente de la pieza. No existen sin embargo resultados de este tipo ya que comúnmente en los ensayos a fatiga se suele determinar el número de ciclos hasta rotura incluso algunas veces la evolución de algunos parámetros mecánicos más sencillas de evaluar, como por ejemplo el módulo elástico, pero nunca la capacidad última resistente cuantificable únicamente a partir de la rotura de la pieza.

Otra alternativa posible sería el análisis y correlación para aquellos casos donde los resultados dependan sustancialmente de la forma de las curvas. Tal es el caso de piezas sometidas a distintos tipos de cargas o en piezas complejas donde se produzcan fuertes redistribuciones tensionales.

A falta de una documentación y resultados experimentales más completos sobre tales fenómenos, se adopta en principio $c = 2$, valor que ha proporcionado unos resultados satisfactorios en los ejemplos resueltos en el próximo capítulo (Capítulo 4).

Evidentemente la caracterización del parámetro β no es tan sencilla como aquí se presenta, puesto que también cabría esperar un valor variable en función de la carga aplicada. En todo caso, como ya se ha comentado, tal parámetro debería ajustarse a partir de una extensa documentación experimental.

Como se ha visto anteriormente ha parecido razonable adoptar la hipótesis que la tensión límite debía evolucionar de forma similar a como lo hace la tensión máxima en las curvas de Wöhler. Por ello se ha decidido adoptar, para definir la pérdida de resistencia de la pieza, expresiones del mismo tipo a las usadas para describir las curvas de Wöhler, es decir:

$$\sigma_f = \sigma'_f \cdot e^{-B \cdot (\log N)^\beta}$$

Las curvas obtenidas de este modo describen, como puede verse en ejemplos posteriores, una pérdida de resistencia muy importante para los ciclos iniciales de carga, ocurriendo todo lo contrario para alto número de ciclos. Si bien este hecho puede parecer que se contradice con las roturas repentinas de piezas a fatiga no resulta ser de este modo pues como ya se ha comentado la rotura del material es debida a que una vez alcanzada la condición límite el proceso de deterioro se ve acelerado por la presencia de fenómenos de daño o plasticidad irreversible.

3.7.2. Coste de cálculo.

Se ha comentado anteriormente que la pérdida de resistencia por fatiga, muy a menudo no es percibida físicamente. Del mismo modo, al tratar de reproducir con el modelo propuesto un ensayo hasta rotura de una pieza, esta pierde resistencia paulatinamente. Esto se traduce en forma de plasticidad o daño, lo que conlleva que en todos los puntos de la pieza se esté dentro del dominio elástico al no haberse alcanzado la condición límite. Ello permite que dentro de esta etapa elástica sea posible la determinación de la resistencia en todos los puntos de la pieza, para un número determinado de ciclos sin la necesidad de reproducir todo el proceso de

cargas anterior. No hace falta insistir en el ahorro de cálculo que ello supone si se observa en los elevados números de ciclos que suelen reproducir los ensayos a fatiga (hasta 10^8 ciclos), dentro de esta etapa elástica. Concretamente esto puede suponer una fracción muy importante de la vida del material.

Por ello es de especial interés el parámetro N_F en cuyo significado se volverá a recalar. Resulta ser el número de ciclos necesarios bajo la aplicación de una misma carga para que se verifique la condición límite en un punto. Es decir, este parámetro indica el límite de la etapa elástica permitiéndolo así un considerable ahorro de cálculo.

Capítulo 4

Ejemplos de aplicación de la teoría de fatiga.

4.1 Introducción

El objetivo de este trabajo no sólo ha sido el de encontrar expresiones verosímiles que representen el complejo comportamiento de un punto sometido a fatiga, sino introducir dichas curvas dentro del complejo contexto de un programa de elementos finitos no lineal, orientado al cálculo real. Así pues una vez introducidas convenientemente las curvas de reducción de resistencia en función del número de ciclos (*fred-N*), el nuevo programa de elementos finitos constituye una herramienta de trabajo capaz de tratar el problema de la fatiga como un problema no lineal de plasticidad y/o daño junto con otros problemas de cálculo estructural.

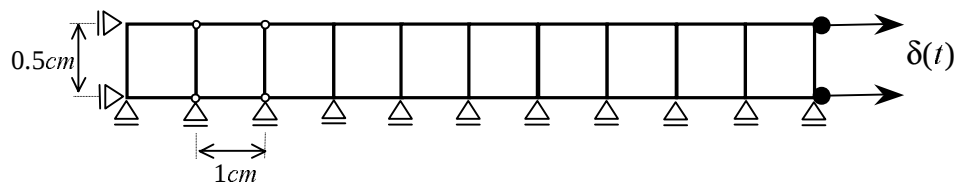
A continuación se expone un par de ejemplos que además de mostrar las posibilidades del modelo de fatiga, ayudará a comprender mejor su funcionamiento.

4.2 Ejemplo de una probeta bajo carga uniaxial.

En este apartado se tratará un ejemplo sencillo que servirá para comprobar el correcto funcionamiento del modelo matemático, como así también permitirá comprender algunos aspectos básicos de la formulación adoptada.

El problema consiste en una simple barra de acero a la que se aplica repetidos ciclos de tracción-compresión. Al igual que sucede en la mayoría de ensayos experimentales de fatiga el proceso de cargas será bajo deformación controlada en lugar de realizarlo bajo tensión.

Las características de la pieza, así como sus propiedades, y las de la carga actuante se muestran en la Figura 4.1.



$$\text{Material: acero A517} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_u = \sigma_f^0 = 8389.6 \text{ kp/cm}^2 \\ \nu = 0.3 \\ E = 2100000 \text{ kp/cm}^2 \end{array} \right\}$$

Carga actuante (deformación impuesta) :

$$\sigma_{max} = \varepsilon_{max} \cdot E = 7140 \text{ Kg/cm}^2$$

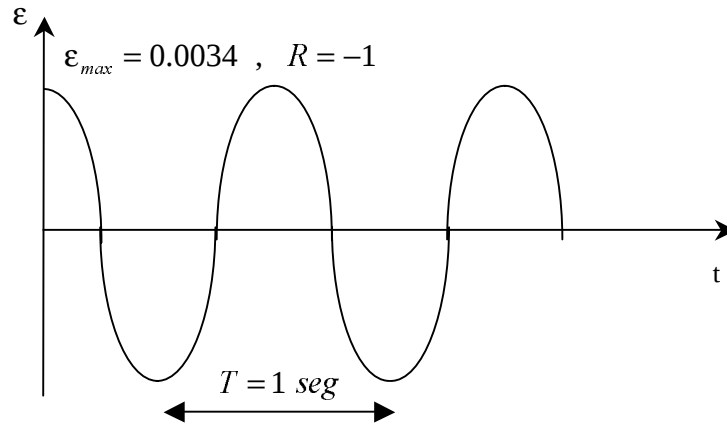


Figura 4.1: Características de la pieza y de la carga actuante.

El primer paso consiste en calcular la tensión límite asociada al factor de reversibilidad tensional correspondiente, esto es:

$$\sigma_{lim} = \sigma_f'(q) \left(\frac{1}{1.26} + \frac{R}{3.3} \right) \quad [4.1]$$

puesto que inicialmente el material se supone en perfecto estado $q=0$, $\sigma_f'(q=0) = \sigma_f^0 = 8389.6 \text{ kp/cm}^2$, que sustituyendo junto con $R = -1$ en la expresión [4.1], se tiene:

$$\sigma_{lim} = 8389.6 \cdot \left(\frac{1}{1.26} + \frac{-1}{3.3} \right) = 4116.1 \text{ kp/cm}^2 \quad [4.2]$$

lo cual indica que bajo esta carga, el material no tiene una vida infinita. Esto se observa a partir de la siguiente desigualdad:

$$\sigma_{max} > \sigma_{lim} \quad \text{ya que} \quad \sigma_{max} = \varepsilon_{max} \cdot E = 7140 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{lim} = 4116 \text{kp} / \text{cm}^2$$

Entonces, la expresión de las curvas que nos indican la disminución de la tensión límite con el número de ciclos es,

$$\sigma_f = \sigma'_f(q) \cdot \text{fred}(N) = \sigma_f(q) \cdot e^{-B(\log N)^\beta} \quad [4.3]$$

donde :

$$B = \frac{-\ln\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_f^0}\right)}{(\log N_F)^\beta} = \frac{-\ln\left(\frac{7140}{8389,6}\right)}{(\log N_F)^\beta} = 0,0064163 \quad [4.4]$$

$$N_F = \log^{-1} \left(7 \cdot \sqrt[\alpha]{\frac{\ln\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_f^0}\right)}{\ln\left(\frac{1}{1.26} + \frac{R}{3.3}\right)}} \right) = \log^{-1} \left(7 \cdot \sqrt[\alpha]{\frac{\ln\left(\frac{7140}{8389,6}\right)}{\ln\left(\frac{1}{1.26} + \frac{-1}{3.3}\right)}} \right) = 38,5 \text{ ciclos} \quad [4.5]$$

$$\alpha = 4 \cdot 2^{2R} = 1$$

$$\beta = 2 \cdot \alpha = 2$$

y por tanto, con ello se conoce la disminución la tensión límite:

$$\sigma_f = 8389.6 \cdot f(q) \cdot e^{-0.064613(\log N)^2} = 8389.6 \cdot f(q) \cdot \text{fred}(N) \quad [4.6]$$

La expresión [4.6] permite conocer el descenso de resistencia del material mientras no se produzcan cambios en el proceso de cargas (σ_{max}, R) . Además el término $f(q)$ resulta ser igual a 1, mientras no se produzcan procesos inelásticos que permitan la evolución de variables como d y ε_p , por lo que puede escribirse la expresión [4.6] como:

$$\sigma_f = 8389.6 \cdot e^{-0.064613(\log N)^2} = 8389.6 \cdot \text{fred}(N) \quad [4.7]$$

El origen de procesos asociados a daño o plasticidad se corresponde con el instante en que deja de verificarse la siguiente desigualdad (condición límite):

$$f(\sigma) - \sigma_f(q, N) = \sigma_{max} - 8389.6 \cdot \text{fred}(N) < 0 \quad [4.8]$$

Este hecho ocurre para $N = N_F = 38.5 \text{ ciclos}$ como se comprueba en la siguiente expresión,

$$\text{fred}(N = 38.5) = 0.851$$

Para $N < N_F$ hay pérdida de resistencia irre recuperable sin que se muestren indicios de plasticidad, y a partir de este instante la ecuación [4.8] se escribe como:

$$\sigma_{max} - \sigma_f(q) \cdot fred(N) = 7140 - 8389.6 \cdot 0.851 = 0 \quad [4.9]$$

Esto significa que la tensión límite, resistencia del material, disminuye hasta alcanzar el valor de la tensión máxima:

$$\sigma_f = fred(N) \cdot \sigma_f(q) = 0.851 \cdot 8389.6 = 7140 \text{ kp/cm}^2 \quad [4.10]$$

A partir del instante que se llega a este nivel tensional, se abandona el comportamiento elástico del material y empieza a producirse el proceso de daño o plasticidad. Si el proceso de carga fuese bajo tensión impuesta, se alcanzaría la rotura de la pieza reproduciendo así los resultados que muestran las curvas de Wöhler (rotura para $N = N_F$). Al ser bajo el nivel de deformación controlada, puede observarse la progresiva pérdida de resistencia a través de la curva $\sigma - \epsilon$. En ellas puede verse la existencia de un primer periodo inicial, donde a pesar de que la resistencia de la pieza disminuye paulatinamente, la tensión en la pieza permanece constante sin apreciarse por tanto los efectos de la fatiga hasta que se alcanza la condición límite. A partir de ese instante el material sufre un acelerado deterioro motivado por la continua aparición de nuevas deformaciones plásticas en el material. En esta última etapa la tensión límite del material coincide a lo largo de todo el proceso con la tensión máxima provocada por la carga actuante ($\sigma_{max} = \sigma_f$).

Todo este efecto podrá acoplarse con la plasticidad clásica si en un determinado instante del proceso se aumenta el desplazamiento impuesto, es decir si se produce un cambio en el camino de carga.

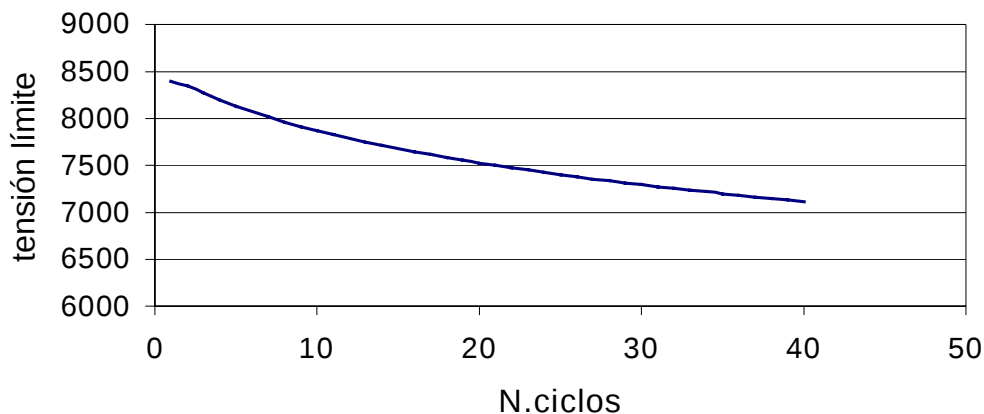


Fig 4.2: Disminución de la tensión límite para : $\sigma_{max} = 7140 \text{ kp/cm}^2$, $R = -1$.

En la figura anterior, puede verse que para $N = N_F = 38.5 \text{ ciclos}$, la tensión de fatiga llega al punto en que comienza el proceso de daño propiamente dicho, es decir

que se cumple que $\sigma_f = \sigma_{max}$. Esta figura muestra la evolución de la resistencia en los primeros ciclos de carga, por lo tanto es una ampliación de la Figura 4.3.

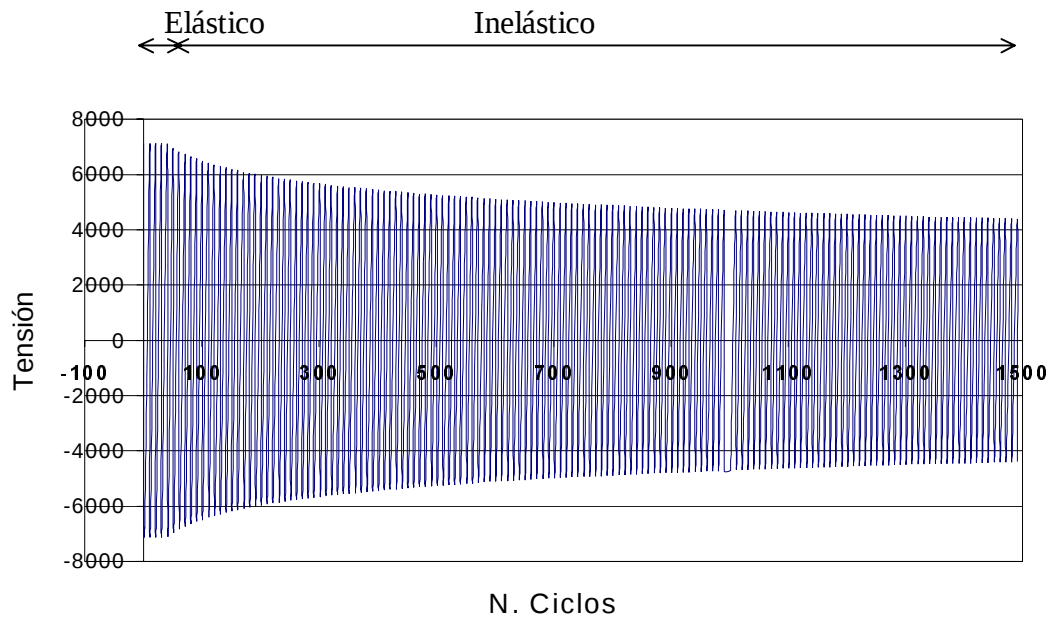


Fig 4.3: Tensión en un punto de la pieza a lo largo del proceso de carga.

En este caso se ha reproducido el ciclo completo de carga. De este modo puede verse la evolución cíclica de la tensión en un punto de la pieza y comprobar como después de un periodo elástico con tensión máxima constante en el material, para $N = N_F = 38.5 \text{ ciclos}$ empieza a disminuir la tensión en el material como consecuencia del proceso de daño coincidiendo a partir de este instante la tensión aplicada en el material con su resistencia.

4.2.1. Prueba de acumulación de daño.

Observaciones realizadas en este ejemplo, permiten además presentar también resultados que muestran el concepto de acumulación de daño cuando se somete la pieza a dos cargas armónicas de distinta amplitud, aplicadas una a continuación de la otra.

$$\text{Caso 1} \begin{cases} 1^a \text{ carga : } \sigma_{Amax} = 5000 \text{ kp/cm}^2, R = -1 \\ 2^a \text{ carga : } \sigma_{Bmax} = 4500 \text{ kp/cm}^2, R = -1 \end{cases}, \text{ Resist. Final: } \sigma_f = 5960 \text{ kp/cm}^2$$

$$\text{Caso 2} \begin{cases} 1^a \text{ carga : } \sigma_{Bmax} = 4500 \text{ kp/cm}^2, R = -1 \\ 2^a \text{ carga : } \sigma_{Amax} = 5000 \text{ kp/cm}^2, R = -1 \end{cases}, \text{ Resist. Final: } \sigma_f = 5940 \text{ kp/cm}^2$$

En la figura que sigue, puede verse la aplicación de cada una de las cargas por separado y la evolución de la curva de Wöhler.

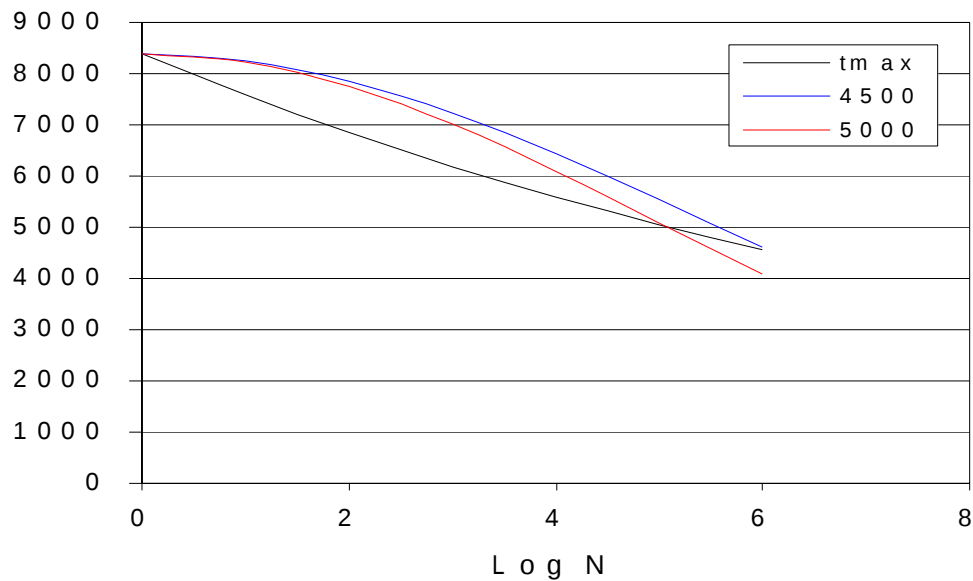


Fig. 4.4: Curvas de tensión límite-número de ciclos para $\sigma_{max} = 5000$ / cm^2 y $\sigma_{max} = 4500kp/cm^2$.

La intersección de dichas curvas con la curva de Wöhler para $r = -1$, muestra el punto para el que se verifica la condición límite, es decir a partir de que número de ciclos se inicia el proceso de daño propiamente dicho para cada nivel de carga aplicado.

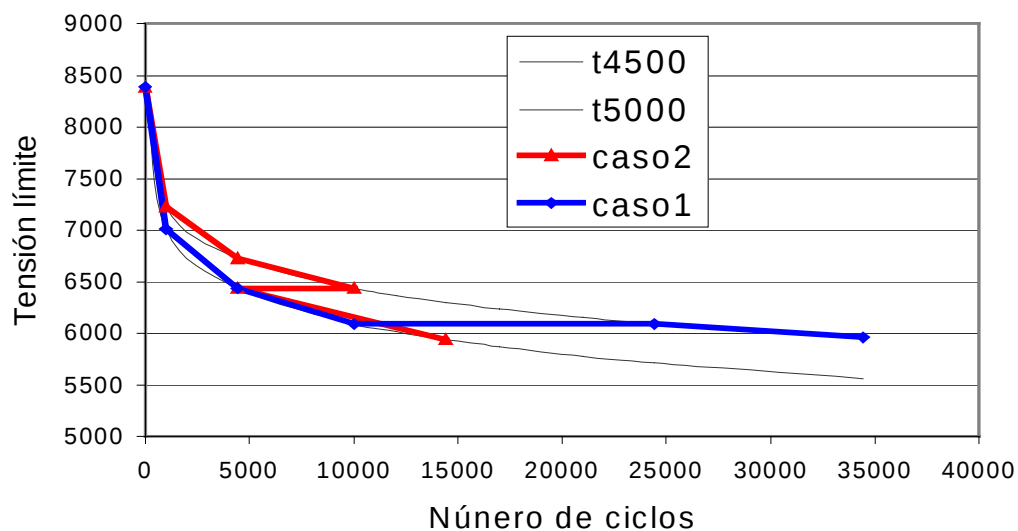


Fig.4.5: Trayectorias de la tensión límite bajo la aplicación consecutiva de 10000 ciclos de dos cargas armónicas de distinta amplitud.

Tras aplicar los 10000 ciclos iniciales de carga, al producirse un cambio de la carga actuante hay un cambio en la curva de pérdida de resistencia. En el gráfico puede comprobarse la no linealidad del proceso de acumulación, dependiendo por lo tanto el nivel de deterioro del material y del orden de aplicación de las cargas.

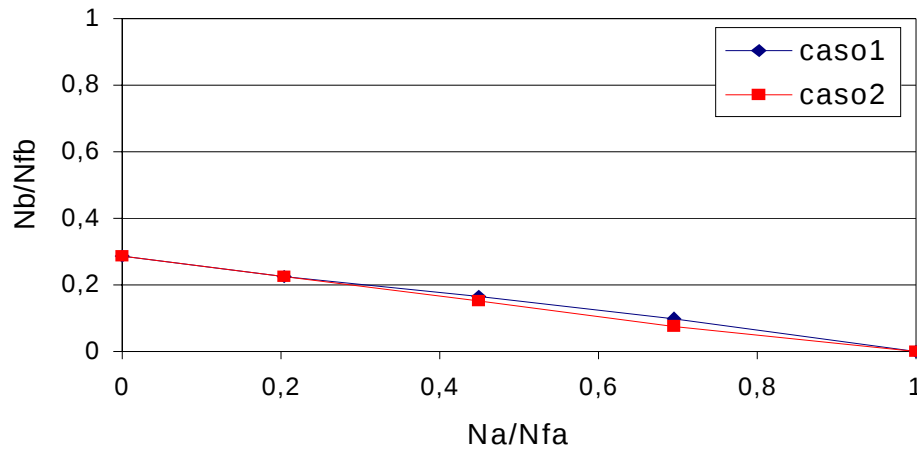


Fig.4.6:Acumulación de daño al aplicar dos cargas de distinta amplitud.

En la Figura 4.6 se menciona con N_a el número de ciclos de aplicación de la carga “1”, con N_{fa} el número de ciclos necesarios para que se verifique la condición límite bajo la aplicación de la carga “1”, con N_b el número ciclos de aplicación de la carga “2”, y con N_{fb} el número de ciclos necesarios para que se verifique la condición límite bajo la aplicación de la carga “2”.

A pesar de que el modelo es capaz de reproducir fenómenos de acumulación de daño no lineal, los resultados obtenidos para este caso reproducen una regla de acumulación cuasi lineal. Si bien hay evidencias experimentales^{3,25} de la no linealidad del fenómeno de fatiga, también es cierto que existe una gran variedad de situaciones distintas. Es decir según se desprende de los estudios citados en las referencias^{3,25}, a pesar de existir casos con una alta no linealidad existen también situaciones donde ocurre lo contrario. En definitiva se trata de un problema todavía no resuelto en la actualidad.

4.3 Crecimiento de fisuras.

El siguiente ejemplo tiene por objetivo mostrar como el modelo formulado es capaz de reproducir el crecimiento de fisuras o grietas. A pesar de que en este ejemplo sólo se intenta reproducir el comportamiento cualitativo, se tratará de comparar los resultados obtenidos con los que se obtienen de abordar el problema mediante teorías de la Mecánica de Fractura (ver capítulo 2), para verificar la coherencia de los resultados.

En la Figura 4.7 se definen las características de la sollicitación así como la geometría de la pieza ensayada, que corresponde a una típica pieza utilizada para el estudio de propagación de grietas según expresiones basadas en conceptos de la Mecánica de Fractura (ver método de Paris, capítulo 2).

4.3.1. Características del material, geometría y malla de elementos finitos.

Elementos: 125 , Nodos: 156 , Elementos cuadrangulares de 4 nodos y 4 puntos de Gauss

Características del material:

Material metálico sometido a microfisuración mediante un modelo de daño (daño isótropo)

Característica de la sollicitación:

Período medio de la acción: $T = 1s$, factor de reversión de la carga: $R = -1$, Incremento de tiempo: $\Delta t = 3s$, Incremento de ciclos: $N = (t/T)^2$

Geometría

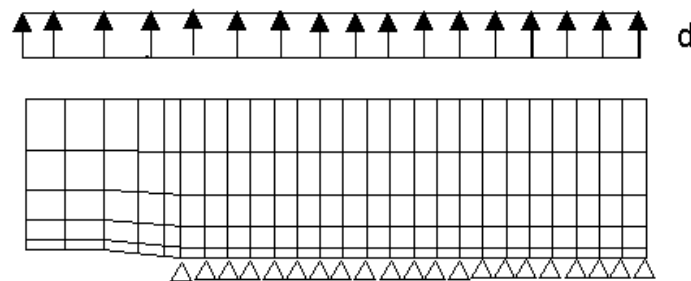
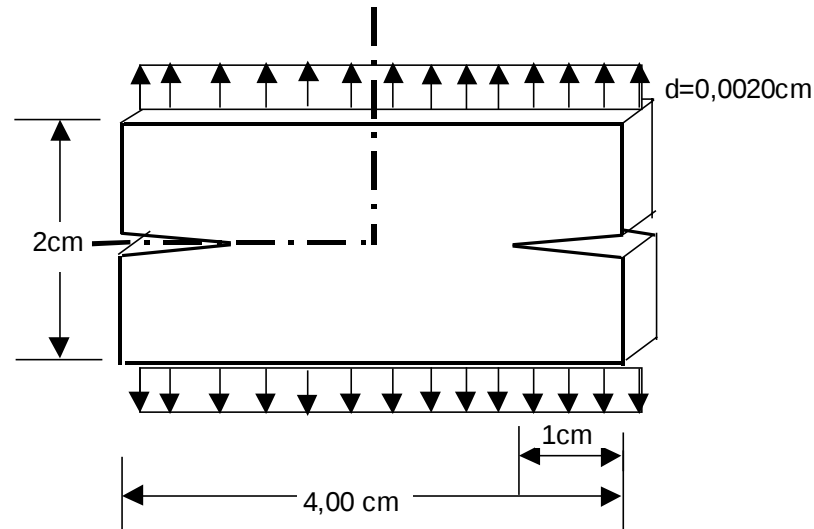


Figura 4.7: Malla de elementos finitos y condiciones de contorno.

Primeramente se resolverá el problema por la forma clásica expresada por el método de Paris, y luego se comparará con los resultados obtenidos a través de la teoría presentada en este trabajo.

El método de Paris se basa en la resolución de la siguiente ecuación diferencial, ya presentada en el capítulo 2,

$$\frac{da}{dN} = A \cdot (\Delta K)^m \quad [4.11]$$

Tal que para el acero tipo A517, según¹⁸, los parámetros para esta ecuación valen: $A = 0.66 \times 10^{-8}$, y $m = 2.25$. Por otro lado, para el ejemplo que aquí se propone, el factor de intensidad de tensiones en modo “I” en la cabeza de la entalla se expresa con la siguiente formulación $K_I = 1.12 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \sigma$, donde a representa la profundidad de dicha entalla (ver Figura 4.8).

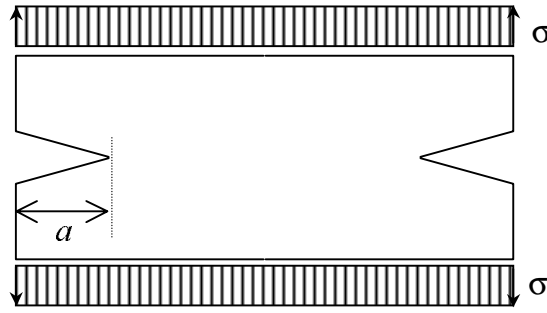


Fig. 4.8: Pieza utilizada en el ensayo y estudiada mediante la Mecánica de Fractura

El incremento del factor de intensidad de tensiones resulta directamente proporcional al incremento de tensión homogénea que ha sufrido la pieza. Esto es,

$$\Delta K_I = 1.12 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \Delta \sigma$$

Para obtener el número de ciclos necesarios para hacer crecer la grieta hasta un tamaño a_f , debe integrarse la expresión [4.11], obteniendo:

$$\Delta N = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{A \cdot (\Delta K)^m} \quad [4.12]$$

que sustituyendo los parámetros conocidos, puede escribirse en forma discreta como:

$$\Delta N = \frac{\Delta a}{0.66 \times 10^{-8} \cdot [1.98(\Delta \sigma) \cdot \sqrt{a_{vg}}]} \quad [4.13]$$

esta última expresión muestra el número de ciclos necesario para que la fisura crezca desde a_1 hasta a_2 . En la misma ecuación, se entiende por $\Delta a = a_2 - a_1$ el incremento de fisura en pulgadas, $a_{vg} = \frac{a_2 + a_1}{2}$ el tamaño medio de la fisura expresado también en pulgadas, $\Delta \sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$ la amplitud de tensión del ciclo de carga en *ksi*.

Las expresiones anteriores proporcionan un crecimiento de fisura de tipo exponencial bajo un proceso de tensión impuesta, aunque no es este el caso que se pretende resolver en este apartado. Al tratarse de un proceso bajo deformación controlada el aumento del tamaño de la fisura, pérdida de sección resistente, provoca una relajación tensional en el material. Es decir es necesaria una tensión menor para seguir produciendo la misma deformación. Esta tensión σ es precisamente la que figura en la anteriores expresiones y que será evaluada de un modo aproximado suponiendo que esta disminuye proporcionalmente a la pérdida de sección resistente es decir:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \left(\frac{L - 2a}{L} \right)$$

donde L es el ancho de la pieza, a el tamaño de la fisura, σ_0 la tensión inicial necesaria para producir el desplazamiento impuesto (tensión media). Con estas consideraciones se obtiene el crecimiento de la fisura según el método de Paris, cuyos resultados de crecimiento de fisura v . El número de ciclos aplicados, se sintetizan en la Figura 4.9, pudiéndolos comparar con los de la Figura 4.10, obtenidos mediante la utilización de la nueva teoría que se presenta en este trabajo. Puede comprobarse que en ambos casos se obtiene un crecimiento de grieta *cu* lineal con el número de ciclos.

Además de reproducir correctamente este fenómeno de propagación de fisuras y la rotura de piezas sometidas a cargas cíclicas este planteamiento ofrece otras ventajas ya comentadas a lo largo del presente trabajo, que se sintetizan en los siguientes puntos,

- 1- Conocimiento en todo instante de del estado actual en cada punto de la pieza, es decir tensión, deformación, nivel de daño, resistencia, etc.
- 2- Posibilidad de conocer no sólo el número de ciclos que puede resistir la carga actual, sino también la resistencia máxima de la pieza ante cualquier tipo de sobrecarga.
- 3- Posibilidad de resolver conjuntamente con otros problemas no asociados a fatiga como plasticidad, fenómenos viscosos, etc.

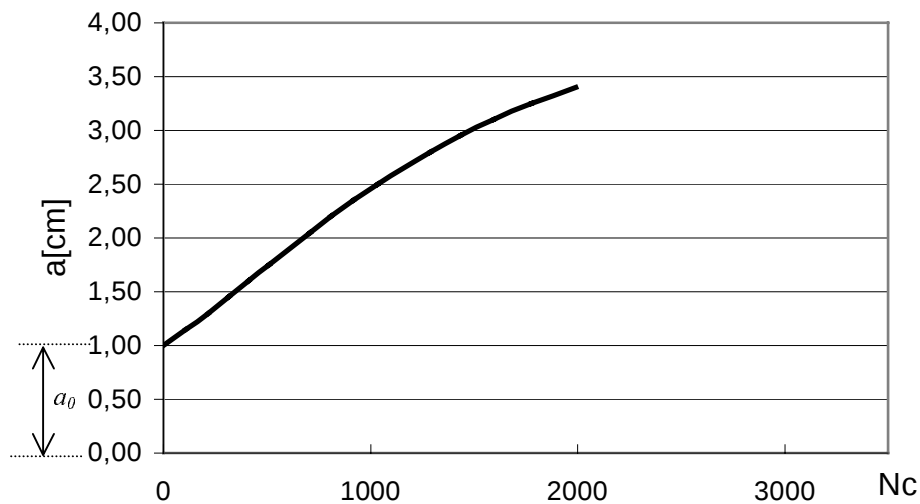


Fig.4.9: Crecimiento de la fisura según el método de Paris.

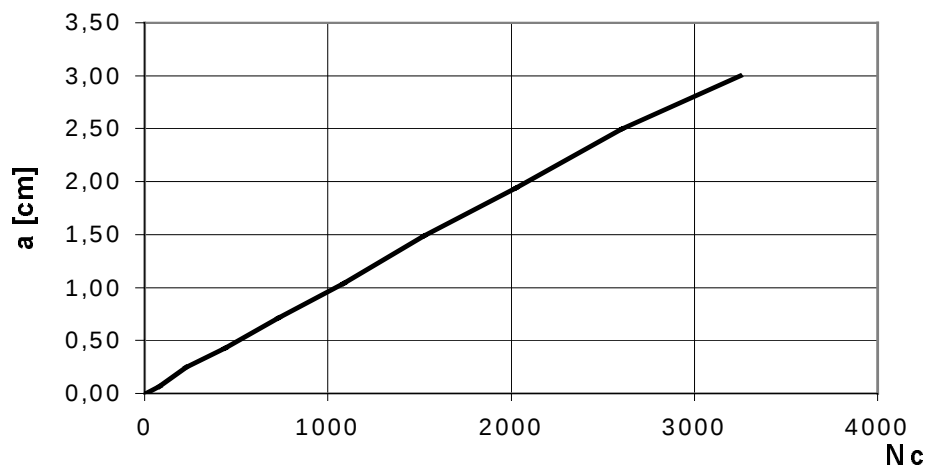


Fig. 4.10: Crecimiento de fisura predicho según el modelo formulado.

Como puede comprobarse el resultado obtenido mediante el cálculo con elementos finitos, el modelo propuesto describe correctamente el crecimiento del tamaño de fisura, incluso los resultados a nivel cuantitativo parecen reproducir de modo similar al método de Paris el crecimiento de la fisura. Hay que tener en cuenta para poder comparar ambas curvas, el método de Paris define la longitud de fisura a partir del borde exterior de la pieza, es decir $a_0 = 1$, mientras que en el cálculo mediante elementos finitos a representa el tamaño real de la fisura. Por lo tanto el modelo propuesto para el tratamiento de la fatiga proporciona correctamente la misma información que el método de Paris pero permite ir más lejos. Ejemplo de ello son las figuras que se muestran a continuación, que permiten conocer en todo instante

el estado de tensión, deformación, tensión, resistencia, estado de daño, etc. en cualquier punto de la pieza.

4.3.2. Crecimiento de la localización de deformaciones – fisuración.

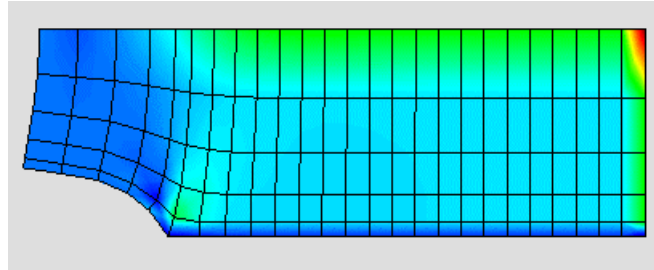


Fig.4.11: Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} , para $N_c=81$.

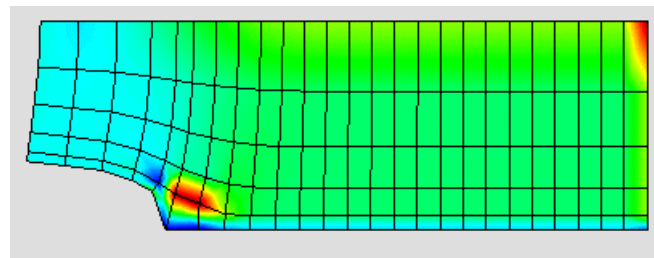


Fig.4.12: Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} , para $N_c=225$.

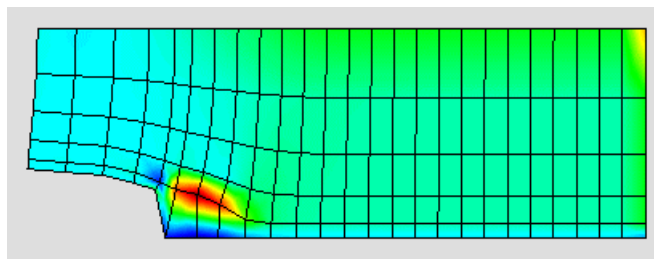


Fig.4.13: Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} , para $N_c=441$.

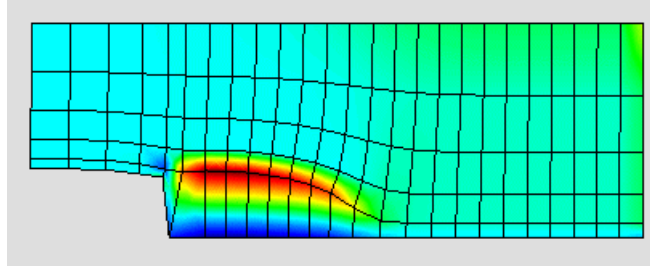


Fig. 4.14: Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} , para $N_c=729$.

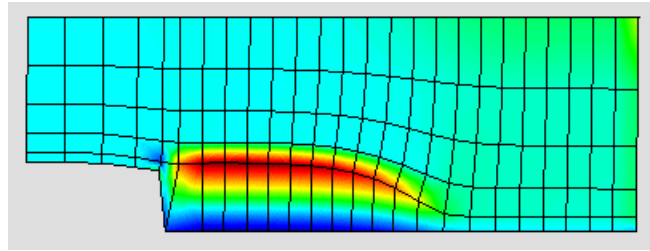


Fig. 4.15: Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} , para $N_c=1090$.

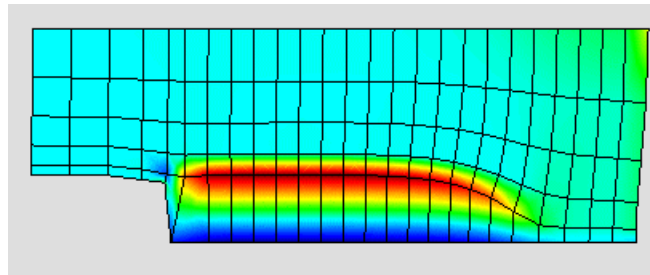


Fig. 4.16: Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} , para $N_c=1520$.

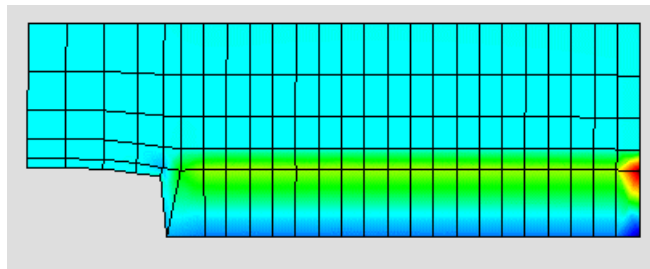


Fig. 4.17: Malla deformada y mapa de deformaciones ε_{yy} , para $N_c=2030$.

4.3.3. Curvas de evolución del daño a lo largo de la pieza.

La siguiente curva muestra la evolución del daño en cada punto que se indica en la Figura, en función del número de ciclos. Se puede observar como los primeros puntos sufren un rápido crecimiento del daño, en tanto, por ejemplo el punto Nro. 17 inicia su daño en $N=2,0E+03$.

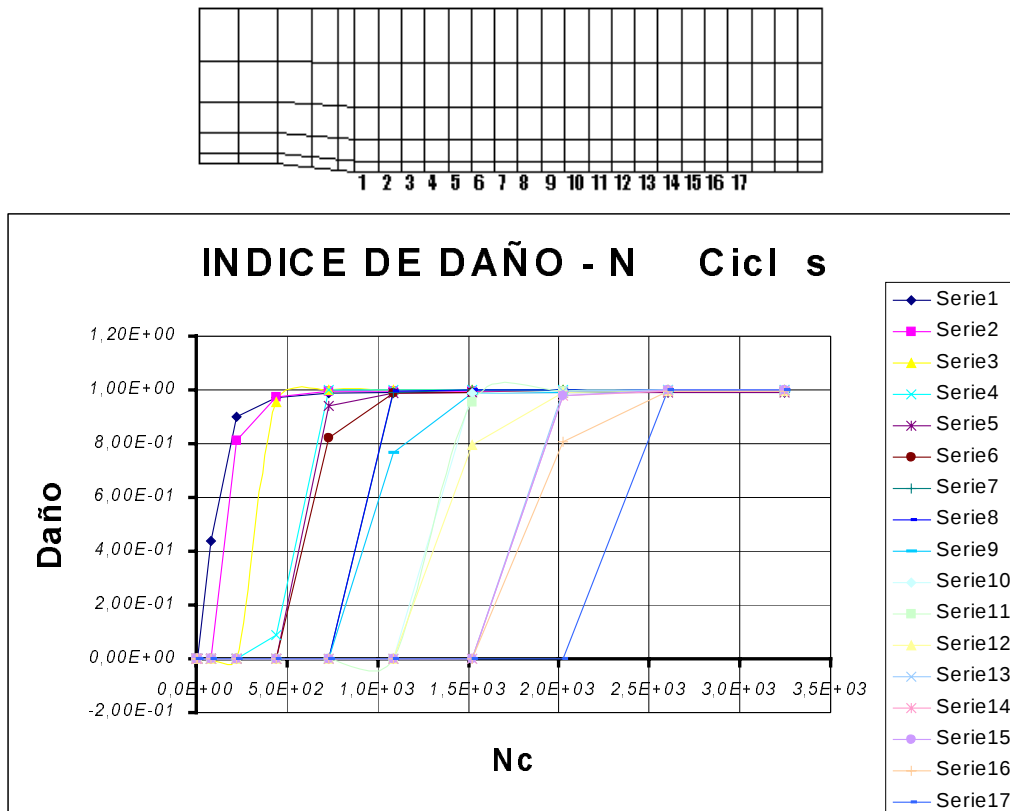


Fig.4.18: Curva de evolución del daño en cada punto en función del número de ciclos.

A continuación se presenta la evolución de la longitud de fisura “a” en función del número de ciclos. En el primer gráfico se muestra la evolución punto por punto y en el segundo su envolvente. Obsérvese que la tendencia de esta envolvente es una recta. Esto se debe a que la acción es un desplazamiento constante y no una carga, lo que hace que a medida que se va abriendo la probeta, también se va relajando la carga.

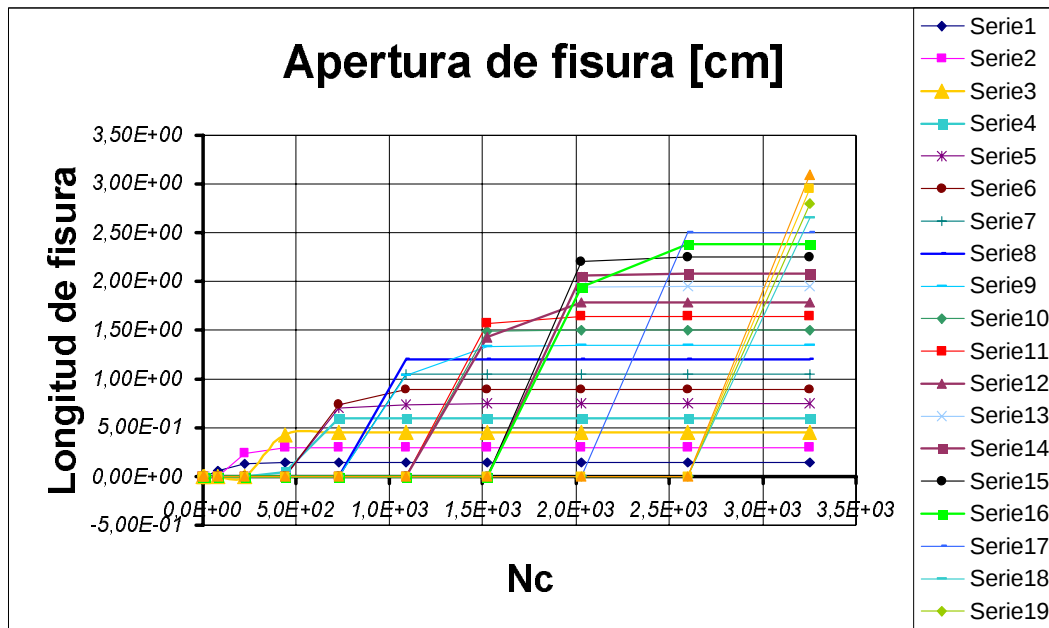


Fig.4.19: Evolución del tamaño de fisura en cada punto.

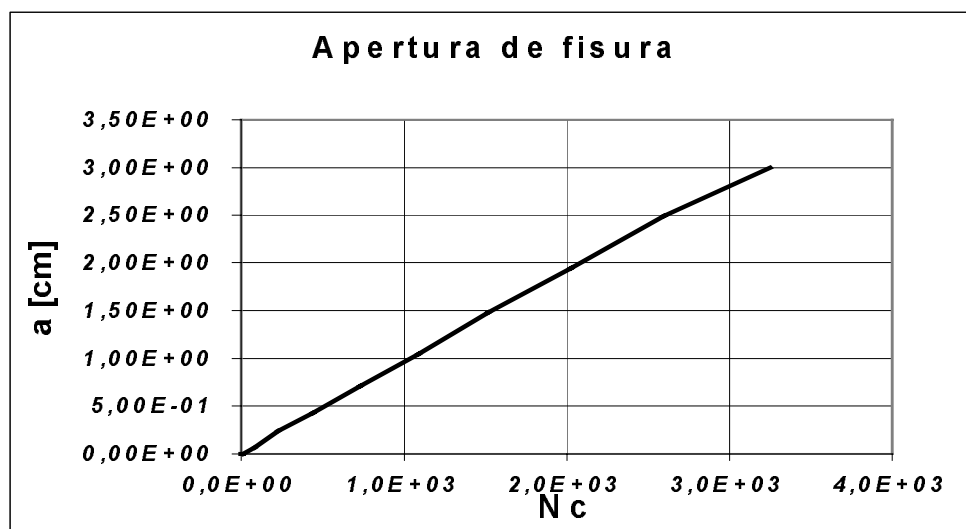


Fig.4.20: Envoltente de la evolución de la longitud de fisura “a” en función del número de ciclos (envoltente de las curvas de la Figura 4.19).

4.3.4. Curvas de evolución de la tensión a lo largo de la pieza.

En esta serie de curvas, se puede observar la evolución de la tensión en cada punto de la pieza, por donde discurre la fractura. Es conveniente recordar, que cada una de estas series corresponde a un punto de los señalados en la figura 4.18. En ellas se puede observar también, que en ningún instante del proceso se alcanza el límite instantáneo de daño $\sigma_o^f = 8389.6 \text{ kp/cm}^2$, no obstante esto, se entra en estado de daño en todos los puntos, tal como se muestra en la figura 4.18.

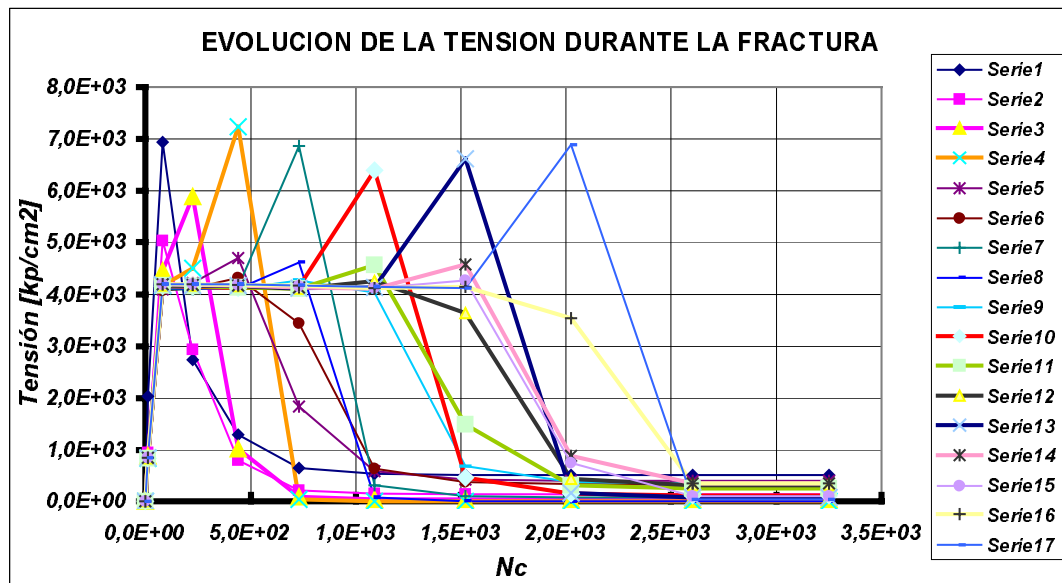


Fig.4.21: Evolución de la tensión durante la fractura.

A continuación se presentan las curvas para los distintos números de ciclos, en cada punto de la pieza. En estas curvas se puede observar como la tensión es nula en todos los puntos para cero ciclos (serie 1), y así va aumentando a medida que aumentan los ciclos, hasta llegar a 3250 ciclos donde la tensión es prácticamente nula en todos los puntos (serie 11). También es importante mostrar nuevamente, que en ningún caso se alcanza el umbral de daño instantáneo $\sigma_o^f = 8389.6 \text{ kp/cm}^2$, sin embargo, el material se fatiga y pierde resistencia, haciendo crecer el daño.

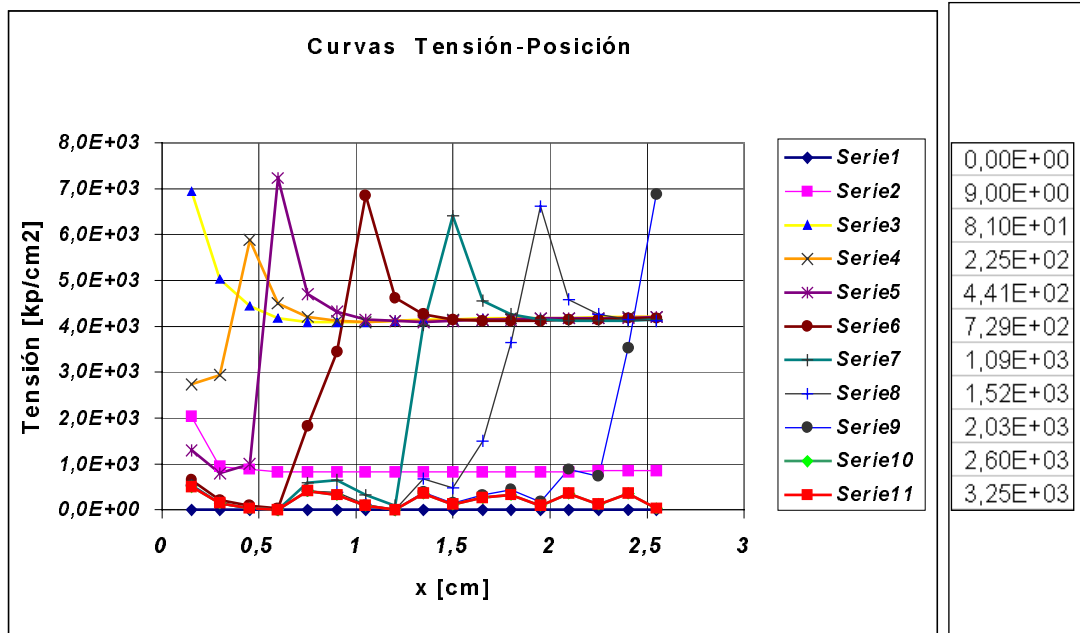


Fig.4.22: Curvas de tensión en los puntos de la pieza.

Notación.

σ_f : tensión límite de discontinuidad (resistencia).

$\sigma'_f(q)$: tensión límite de plasticidad o daño.

$fred(N)$: factor de reducción de la tensión límite por fatiga.

$\sigma_{max}(N)$: tensión de Wöhler.

σ_{limite} : tensión límite de indurancia.

$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$: relación tensional.

$\sigma_{max}, \sigma_{max,APL}$: tensión máxima en un punto a lo largo de un ciclo de carga.

σ_f^0 : tensión límite inicial (resistencia máxima de la pieza).

N_F : ciclos de vida del material bajo la acción de una carga determinada.

$\sigma_{f,inf}$: límite de resistencia para casos de vida infinita.

Bibliografía.

[1] "Standart Definitions of Terms Relating to Fatigue Testing and Statistical Analysis of Fatigue Data", ASTM Designation E206-72.

[2] "Wöhler's Experiments on the Strength of Metals", *Engineering*, August 23, 1967.

[3] P.Forrest. "Fatigue of metals". *Pergamon Press, London* 1962.

[4] O.H.Basquin. "The exponential law of endurance tests". *Proceedings of American Society for Testing Materials*, 1910.

[5] L.Bairstow. "The elastic limits of iron and steel under cyclic variations of stress". *Philosophical Transactions of the Royal Society, London*, 1910.

[6] Xavier Ayneto Gubert. "Fatiga de materiales y componentes". Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona, Junio 1986.

[7] S.S.Manson, Discussion of: "Experimental Support for Generalized Equation Predicting Low Cycle Fatigue". *Trans ASME, J.Basic Eng.*, Vol.84, No.4, Dec 1962.

[8] J.F.Tavernelli and L.F.Coffin, Jr "Experimental Support for Generalized Equation Predicting Low Cycle Fatigue", *Trans ASME, J.Basic Eng.*, Vol.84, No.4, Dec 1962.

[9] G.R.Halford "The energy required for fatigue ", *Journal of Materials*, Vol.1, 1966.

[10] G.R.Irwin, "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate", *Trans ASME, J.Appl.Mech.*, Vol.24, Sept 1957.

[11] P.C.Paris, M.P.Gomez and W.P.Anderson, "A rational analytic theory of fatigue", *The Trend in Engineering* 1961.

[12] P.C.Paris and F.Erdogan, "A critical Analysis of Crack Propagation Law", *Trans ASME, J.Basic Eng.*, Vol.85, No.4, 1963.

[13] S.Suresh and R.O.Ritchie, "Closure Mechanisms for the Influence of Load on Fatigue Crack Propagation in Steels", *U.S.Department of Energy, Contract No DE-ACO3-765F00098*, Abril 1982.

[14] J.L.Chaboche, "Continuum Damage Mechanics and its Application to Structural Lifetime Predictions", *ONERA*, 1987.

- [15] M.A.Miner, "Cumulative Damage in Fatigue", *Trans ASME, J. Appl. Mech.*, Vol.67, Sept 1967.
- [16] S.Oller."Modelización Numérica de Materiales Friccionales". *CIMNE.*, 1988
- [17] A.Palmgren, "Die Lebensdauer von Kugellagern", *ZDVDI.* Vol.68, No.14, 1924.
- [18] J.L.Chaboche, "Continuum Damage Mechanics: Part I-General Concepts", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.55, 1988.
- [19] J.L.Chaboche, "Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire. *Revue Française de Mécanique*, No 50-51(1974).
- [20] J.L.Chaboche, "Continuum Damage Mechanics: Part II-Damage Growth, Crack Initiation, and Crack Growth", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.55, 1988.
- [21] J.M.Barsom and S.T.Rolfe. "Fracture & Fatigue Control in Structures", *Prentice Hall*, 1987.
- [22] S.Suresh, "Fatigue of Materials", *Department of Materials Science and Engineering (Cambridge University)*, 1991.
- [23] H.O.Fuchs, R.I.Stephens, "Metal Fatigue in Engineering", *John Wiley & Sons*, 1980.
- [24] J.Oliver, M.Cervera, S.Oller, and J.Lubliner, "Isotropic Damage Models and Smeared Cracks Analysis of Concrete", *Second International Conference on Computer Aided Design of Concrete Structures*, Vol.2, 1990.
- [25] J.L.Chaboche, "Amorçage en fatigue a faible ou grand nombre de cycles", *ONERA*, 1979.
- [26] L.Neamtu, S.Oller and E.Oñate, "A Generalized Mixing Theory Elasto-Damage-Plastic Model For Finite Element Analysis Of Composites, *COMPLASV*, Barcelona 1997.
- [27] S.Oller, E.Oñate, J.Miquel Canet and S.Botello, "A Plastic Damage Constitutive Model For Composite Materials. *International Journal of Solids and Structures*, Vol.33, 1996.
- [28] C.Trusdell and Toupin. "The Classical Field Theories". -Ed by S.Flugge-Handbuch der Physik III/I-Springer Verlag, Berlin(1960).