

DIMENSIONAMENTO DO REFORÇO À TORÇÃO DE VIGAS RETANGULARES E EM CAIXÃO DE CONCRETO ARMADO COM COMPÓSITOS DE FIBRA DE CARBONO¹

Emil De Souza Sánchez Filho ², Júlio Jerônimo Holtz Silva Filho ³ e Marta De Souza Lima Velasco ⁴

Resumo: As pesquisas sobre reforço de estruturas de concreto à torção com compósitos de fibra de carbono (CFC) são escassas, e não se encontram no mesmo nível de conhecimento do que as pesquisas sobre reforço à flexão e à força cortante. O reforço à torção é pouco usual, mas é possível realizar esse reforço com CFC em vigas de concreto armado. Neste trabalho adota-se a sistemática do Eurocode 2, a qual é fundamentada no Modelo da Treliça Espacial.

Palavras-chave: compósito de fibra de carbono, dimensionamento à torção, reforço à torção, vigas de concreto armado.

TORSION STRENGTHENING DESIGN OF REINFORCED CONCRETE RECTANGULAR AND BOX BEAMS WITH CARBON FIBER COMPOSITES

Abstract: Research on torsion strengthening of concrete structures with carbon fiber composites (CFC) are scarce, and it does not yet meet the same level of knowledge of the flexural strengthening and shear force strengthening research. Strengthening a concrete structure for torsion is quite unusual, but it is possible to accomplish that by reinforcing the concrete beams for torsion with CFC. A simple method for predicting the ultimate torsional strength and failure mode of reinforced concrete beams subjected to pure torsion is presented. The Eurocode 2 approach is adopted in this paper, which is based in the model of Space Truss Analogy.

Keywords: carbon fiber composite, reinforced concrete beams, torsion design, torsion strengthening.

INTRODUÇÃO

A técnica de reforço de elementos de concreto armado por meio da colagem externa de materiais compósitos mostra-se econômica e eficaz. Os resultados das pesquisas desenvolvidas, e os diversos relatórios e manuais que tratam do estado da arte sobre essa técnica, ressaltam que a ductilidade dos elementos reforçados deve ser garantida.

O material compósito é elástico e linear, mas ao ser colado ao elemento de concreto armado deve garantir que esse apresente ductilidade razoável sob carregamento externo. A aderência também deve ser garantida, daí a necessidade dos modelos de análise e dimensionamento para as solicitações de flexão, de força cortante e de torção serem complementados por prescrições que garantam a efetividade de funcionamento do reforço colado ao substrato de concreto, de modo que ele atue como uma armadura externa ao elemento de concreto.

As pesquisas sobre reforço à torção de vigas de concreto armado com materiais compósitos são escassas, e não se encontram no mesmo estágio de desenvolvimento que os estudos sobre o reforço à flexão e à força cortante com esse tipo de material.

¹ Artículo recibido el 30 de abril de 2005 y en forma revisada el 27 de abril de 2006.

² D.Sc., Professor do Departamento de Estruturas da UFJF. E-mail: emilsanchez@uol.com.br.

³ M.Sc., doutorando do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio. E-mail: jholtz@pop.com.br.

⁴ D.Sc., Professora do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio. E-mail: marta@civ.puc-rio.br.

Este artigo apresenta uma sistemática consistente para o cálculo desse tipo de reforço, fundamentada nas prescrições européias para o dimensionamento à torção, e adota um modelo sobre aderência para garantir que a ruptura do tecido de fibra de carbono não descole do substrato de concreto.

PESQUISAS SOBRE REFORÇO A TORÇÃO

Na literatura existem poucos trabalhos publicados sobre reforço à torção com materiais compósitos colados externamente. As conclusões dos resultados de ensaios de dois artigos são transcritas, de modo a permitir uma avaliação qualitativa da influência dos diversos parâmetros que colaboram na resistência última das vigas reforçadas.

Em Panchacharam e Belarbi (2003) são apresentados os resultados dos ensaios de oito vigas reforçadas à torção, com sete diferentes tipos de arranjos para o reforço com materiais compósitos. Esses resultados mostram que:

- a) o momento torçor de fissuração não é influenciado pelo tipo de arranjo do reforço dos materiais compósitos;
- b) a viga reforçada com armadura de reforço envolvendo-o completamente com as fibras direcionadas no sentido longitudinal, apresentaram maior ductilidade e menor momento torçor último do que a viga reforçada transversalmente com envolvimento total (fibra do CFC na direção ortogonal ao eixo da viga);
- c) a viga reforçada transversalmente com envolvimento completo (fibras na direção ortogonal ao eixo da viga) apresentaram maior momento torçor último, mas menor ductilidade do que a viga reforçada com estribos de material compósito regularmente espaçados;
- d) a viga reforçada com armadura de reforço envolvendo-a completamente com as fibras direcionadas no sentido longitudinal apresentaram cerca de 15% de acréscimo no valor do momento torçor último, e aproximadamente a mesma ductilidade da viga reforçada longitudinalmente com a configuração em U;
- e) a viga reforçada transversalmente com envolvimento total é mais resistente e menos dútil do que a viga reforçada transversalmente com estribos em forma de U com ancoragens nos extremos, e mais dútil do que a viga reforçada com estribos em forma de U sem ancoragem;
- f) a viga com reforço longitudinal e transversal é mais resistente e apresenta praticamente a mesma ductilidade do que a viga com reforço longitudinal com envolvimento completo (as fibras orientadas no sentido longitudinal) e reforçadas transversalmente com estribos fechados de material compósito.

A ductilidade dessas vigas foi calculada por esses autores em termos do variação do ângulo de torção, e não em termos da energia potencial de deformação acumulada no processo de carregamento.

Täljsten (2003) apresenta os resultados de quatro vigas de concreto armado reforçadas com CFC e os resultados obtidos para uma viga de referência. Esses ensaios fazem parte de um teste piloto. As conclusões obtidas foram em linhas gerais:

- a) a viga reforçada somente com estribos de material compósito apresentou uma configuração de fissuração bem definida, e a ruptura ocorreu na ancoragem do reforço;
- b) a viga reforçada com material compósito cujas fibras estavam inclinadas de $\pm 45^\circ$ em ambas as direções, e coladas apenas nos lados da viga, forneceu uma configuração de fissuras bem definida e com rotações apreciáveis. A ruptura ocorreu fora do material de reforço;
- c) a viga reforçada com fibra de vidro (com as fibras orientadas numa só direção), com o material compósito colado com as fibras no sentido vertical e envolvendo completamente a viga, teve uma rotação muito grande na ruptura, que ocorreu por esmagamento do concreto abaixo do reforço;
- d) a viga reforçada com material compósito de fibra de carbono (fibras orientadas numa direção), com esse material colado com as fibras no sentido vertical e envolvendo completamente a viga, teve uma grande rotação de ruptura, que ocorreu por esmagamento do concreto abaixo do material de reforço.

Esses resultados não foram conclusivos, mas mostraram que o modelo da Treliza Espacial leva a resultados consistentes quando da análise de vigas de concreto armado reforçadas com materiais compósitos.

TRELIÇA ESPACIAL GENERALIZADA

A Treliza Espacial Generalizada é uma concepção mais ampla do modelo de Ernest Rausch para o dimensionamento de vigas de concreto armado solicitadas à torção. Esse modelo foi desenvolvido na Suíça por Bruno Thürlimann e Paul Lampert, e recebeu consideráveis contribuições de diversos pesquisadores da Universidade de Toronto, onde Michael

Collins e seus colaboradores, conceberam o modelo denominado Campo da Compressão Diagonal Modificado, que se aplica ao dimensionamento e análise de vigas de concreto estrutural submetidas à torção e a solicitações combinadas.

A Figura 1 ilustra o conceito básico do modelo de treliça para torção pura, onde a seção transversal da viga é admitida como funcionando de modo similar a um tubo de paredes finas, sendo que nessas paredes tem-se um fluxo de tensões tangenciais, que deverá ser resistido pelas armaduras transversais e longitudinais da seção. As fissuras nos painéis de concreto são inclinadas de um ângulo θ , que por hipótese é o ângulo de inclinação das tensões de compressão nas bielas, sendo necessário verificar se essas bielas não atingirão a ruptura por compressão. A espessura do tubo é definida de forma arbitrária, com essa definição variando de norma para norma, mas em geral, mantendo-se como um parâmetro balizador básico a relação entre a área da seção e o seu perímetro.

Esse modelo teórico é apresentado e desenvolvido em Lampert e Thürlimann (1968), Thürlimann (1978), Hsu (1984), CEB-FIP (1990), Kovács (1995) e MacGregor (1997).

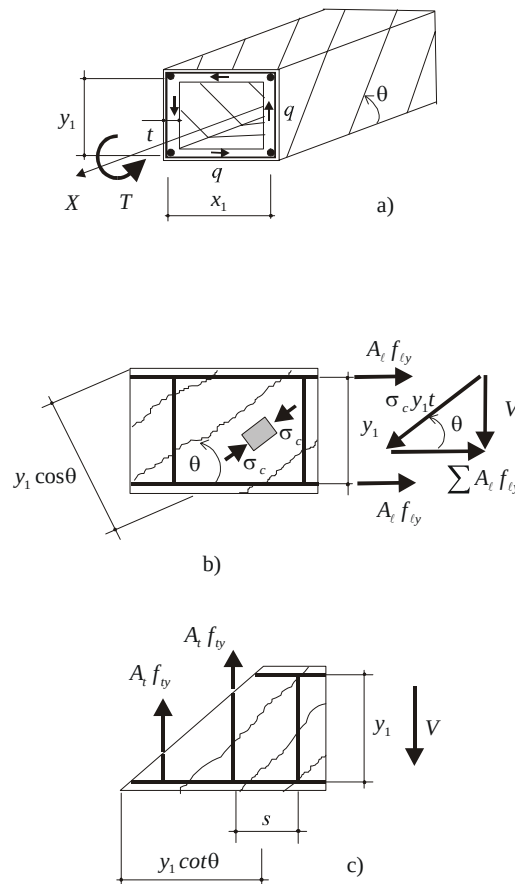


Figura 1: Treliça Espacial Generalizada: a) tubo de paredes finas; b) equilíbrio horizontal; c) equilíbrio vertical.

REFORÇO À TORÇÃO

Filosofia de dimensionamento

O dimensionamento do reforço à torção com material compósito, adotando-se o modelo da Treliça Espacial Generalizada e o formato do Eurocode 2 (CEN, 1991), é função da armadura longitudinal e dos estribos fechados, que em conjunto constituem esse reforço. Essa filosofia de dimensionamento é expressa por:

$$T_{Sd} \leq \begin{cases} T_{Rd1} \\ T_{Rd2} \end{cases} \quad (1)$$

onde T_{Sd} é o momento torçor de projeto, T_{Rd1} é o momento torçor resistido pelas bielas e T_{Rd2} é o momento torçor resistido pelas armaduras (de aço e de CFC).

O momento torçor resistido pelas bielas é dado por:

$$T_{Rd1} = 2\nu f_{cd} \frac{tA_k}{(\tan\theta + \cot\theta)} \quad (2)$$

onde f_{cd} é a resistência à compressão de cálculo do concreto, e ν é o fator de efetividade do concreto, sendo

$$\nu = 0,7 \left(0,7 - \frac{f_{ck}}{200} \right) \geq 0,35 \quad (3)$$

com f_{ck} em MPa. O coeficiente de redução 0,70 no valor de ν , no caso da torção, deve-se ao fato das bielas serem flexo-comprimidas. No caso da força cortante elas são comprimidas e esse coeficiente não é adotado. Quando da torção as bielas assumem a forma de uma superfície de dupla curvatura (parabolóide hiperbólico). O intervalo de variação do ângulo de inclinação das bielas é $32^\circ \leq \theta \leq 68^\circ$ (Hsu, 1993).

As parcelas do momento torçor relativas às armaduras de reforço são obtidas por meio da condição de resistência da biela:

$$T_{Rd2} = T_{Rd,RC} + T_{Rd,CFC} \quad (4)$$

onde a parcela correspondente à resistência da viga sem reforço é dada por:

$$\begin{aligned} T_{Rd,RC} &= 2A_k \tan\theta \frac{A_{St} f_{ytd}}{u_k} \\ &= 2A_k \cot\theta \frac{A_{St} f_{ytd}}{s} \end{aligned} \quad (5)$$

sendo $T_{Rd,CFC}$ a parcela do reforço, onde A_k, u_k são, respectivamente, a área definida pela linha média da seção admitida com um tubo de paredes finas de espessura t , e o perímetro dessa área.

As expressões anteriores mostram que o reforço em CFC somente pode ser executado se for garantida a condição de integridade das bielas. O acréscimo de resistência deve ser determinado de modo a evitar a ruptura das bielas, donde o dimensionamento deve ser efetuado considerando-se como valor limite a seguinte parcela de momento torçor:

$$\Delta T_{Sd} = T_{Rd1} - T_{Rd,RC} \quad (6)$$

O momento torçor fornecido pela expressão 6 deve ser resistido pelas armaduras de reforço com CFC:

$$\Delta T_{Sd} \leq \begin{cases} T_{Rdt,CFC} \\ T_{Rd\ell,CFC} \end{cases} \quad (7)$$

onde $T_{Rdt,CFC}$ e $T_{Rd\ell,CFC}$ são as parcelas do reforço transversal e longitudinal respectivamente.

Armadura transversal de reforço

A parcela da armadura transversal do reforço em CFC no caso de envolvimento completo da viga é dada por:

$$T_{Rdt,CFC} = 2bh\varepsilon_{ek,f} E_f t_f \cot\theta \quad (8)$$

onde $\varepsilon_{fk,e}$ é a deformação específica característica efetiva do CFC, E_f é o módulo de elasticidade do CFC na direção de alinhamento das fibras, t_f, b_f , são a espessura e a largura do reforço, respectivamente, e s_f é o seu espaçamento. Para o arranjo do reforço na forma de estribos fechados, essa parcela é dada por:

$$T_{Rdt,CFC} = 2bh\varepsilon_{ek,f} E_f \frac{t_f b_f}{s_f} \cot \theta \quad (9)$$

Armadura longitudinal de reforço

No caso das fibras do CFC serem alinhadas na direção do eixo da viga, a seguinte fórmula deve se aplicar:

$$T_{Rd\ell,CFC} = 2bh\varepsilon_{ek,f} E_f \frac{A_{f\ell}}{u_k} \tan \theta \quad (10)$$

onde $A_{f\ell}$ é a área da armadura longitudinal de reforço.

Aderência CFC-concreto

As propriedades mecânicas do CFC devem se analisadas criteriosamente, pois de um material para outro existe uma grande variação nas características intrínsecas dos mesmos.

Deve-se garantir a aderência total entre o CFC e o substrato de concreto, de modo a permitir a aplicação da sistemática apresentada neste trabalho. Essa condição básica leva à adoção de um modelo teórico fundamentado na tensão efetiva de aderência.

Em Chen e Teng (2003) é mostrado um modelo baseado no modo de ruptura por descolamento do CFC. Nesse modelo a tensão efetiva axial resistida pelo CFC é dada por:

$$f_{f,e} = E_f \varepsilon_{f,e} \quad (11)$$

a qual não é transmitida de modo uniforme ao concreto.

Essa tensão efetiva, considerando-se um coeficiente de distribuição de tensão, é definida por:

$$f_{f,e} = D_f \sigma_{f,m\acute{a}x} \quad (12)$$

A tensão máxima no CFC, de acordo com Chen e Teng (2003) é:

$$\sigma_{f,m\acute{a}x} = 0,315 \beta_w \beta_L \sqrt{\frac{E_f}{t_f} f'_c} \leq f_{f,u} \quad (13)$$

onde f'_c é a resistência à compressão do concreto (corpo-de-prova cilíndrico), e com $\beta_w = 0,707$, $\beta_L = 1$, que substituídas na expressão 13 resulta:

$$\sigma_{f,m\acute{a}x} = 0,223 \sqrt{\frac{E_f}{t_f} f'_c} \leq f_{f,u} \quad (14)$$

Para o fator de distribuição de tensão segue-se:

$$D_f = \frac{2}{\pi} = 0,637 \quad (15)$$

No modelo apresentado por Chen e Teng (2003) tem-se o coeficiente adimensional $\lambda = \frac{L_{máx}}{L_e} = 1$, onde $L_{máx}$ é o comprimento máximo de ancoragem do CFC, e L_e é o comprimento efetivo de ancoragem. Substituindo-se a expressão 15 na expressão 12 tem-se:

$$f_{f,e} = 0,142 \sqrt{\frac{E_f}{t_f}} \sqrt{f'_c} \leq f_{f,u} \quad (16)$$

Ângulo da biela flexo-comprimida

O ângulo de inclinação das bielas é admitido igual ao ângulo de inclinação das fissuras e igual ao ângulo de inclinação das deformações específicas principais. Após o reforço com CFC esse ângulo varia, e de acordo com Aprile e Bendetti (2004) tem-se (Apêndice A):

$$\tan^4 \theta = \frac{1 + \frac{1}{n_f \rho_{f\ell} + n_s \rho_{s\ell}}}{1 + \frac{1}{n_f \rho_{ft} + n_s \rho_{st}}} \quad (17)$$

com as seguintes relações:

$$n_s = \frac{E_s}{E_c} \quad (18)$$

$$n_f = \frac{E_f}{E_c} \quad (19)$$

O módulo de elasticidade médio do concreto é dado pelo Eurocode 2 (CEN, 1991):

$$E_{cm} = 9,5(f_{ck} + 8)^{1/3} \quad (20)$$

com f_{ck} em MPa . Esse valor será adotado para E_c nas fórmulas seguintes.

As taxas geométricas das armaduras são definidas pelas seguintes expressões (Figura 2):

$$\rho_{st} = \frac{A_{st}}{bs} = \frac{a_{st}}{b} \quad (21)$$

$$\rho_{s\ell} = \frac{A_{s\ell}}{u_k t} = \frac{a_{s\ell}}{t} \quad (22)$$

e para as taxas geométricas das armaduras de reforço tem-se

$$\rho_{ft} = \frac{A_{ft}}{bs_f} = \frac{a_{ft}}{b} \quad (23)$$

$$\rho_{f\ell} = \frac{A_{f\ell}}{ut} = \frac{a_{f\ell}}{t} \quad (24)$$

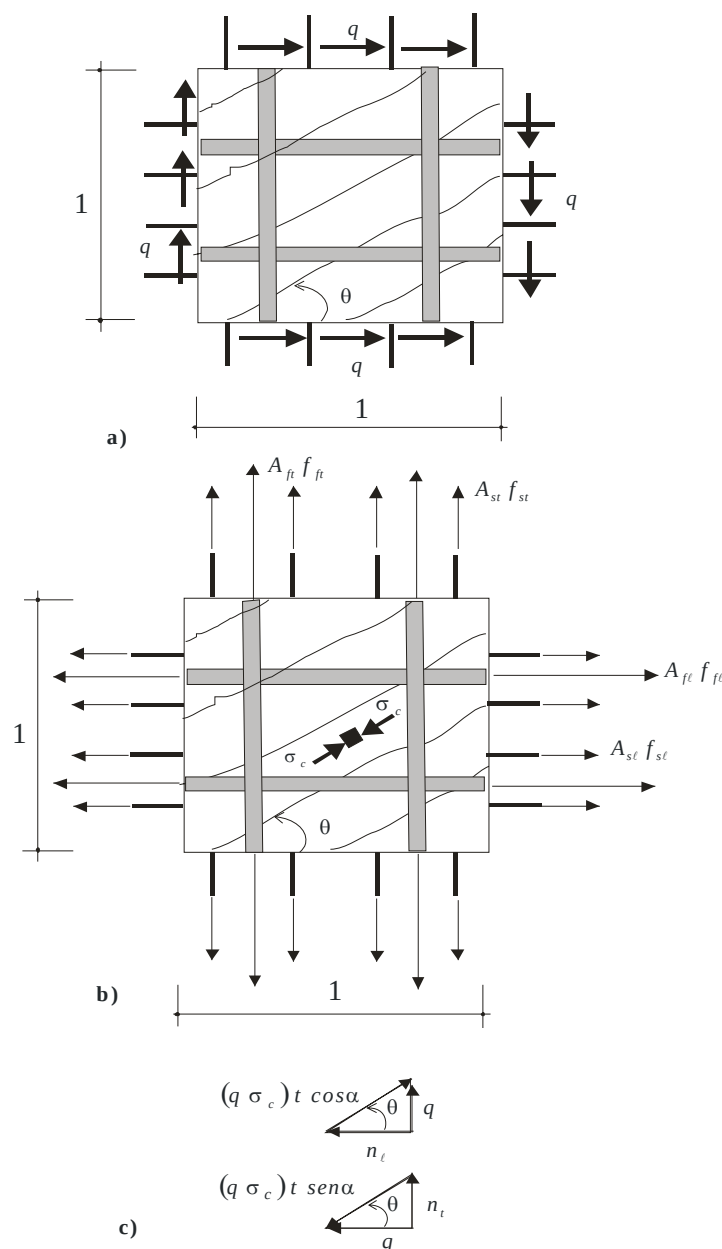


Figura 2: Paineis fissurados com reforço em fitas de CFC coladas externamente: a) fluxo de tensões tangenciais; b) forças internas resistentes; c) polígonos de forças.

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Foi desenvolvido um programa de dimensionamento do reforço em CFC em MATHCAD (Apêndice B) no formato de dimensionamento prescrito pelo Eurocode 2 (CEN, 1991), adotando-se os coeficientes de segurança: $\gamma_c = 1,4$, $\gamma_c = 1,4$, e $\gamma_f = 1,3$ para o CFC. Os exemplos numéricos a seguir apresentados ilustram a sistemática proposta. As Tabelas 1 e 2 mostram os resultados obtidos pelo programa para esses dois exemplos.

1. Dimensionar as armaduras transversal e longitudinal de reforço em CFC para uma viga com seção retangular $40\text{ cm} \times 80\text{ cm}$, com armadura longitudinal $A_{s\ell} = 3,2\text{ cm}^2$ distribuída ao longo do perímetro da seção, e estribos fechados com área $A_{st} = 1,0\text{ cm}^2$ espaçados de $s = 20\text{ cm}$, $f_{y\ell} = f_{yt} = 500\text{ MPa}$, $E_s = 200\text{ GPa}$, e a resistência característica do concreto à compressão $f_{ck} = 25\text{ MPa}$. O CFC possui as seguintes características mecânicas:

$f_{fu} = 3290 \text{ MPa}$, $E_f = 235 \text{ GPa}$ e de modo a se evitar ruptura indesejável, supor que se tenha no máximo $\varepsilon_{fu} = 1,4\%$. Admitir o momento torçor solicitante de projeto $T_{Sd} = 90 \text{ kNm}$.

- Admitindo-se o momento torçor de projeto $T_{Sd} = 1.000 \text{ kNm}$ dimensionar as armaduras transversal e longitudinal de reforço em CFC, para uma viga com seção retangular em caixão $90 \text{ cm} \times 120 \text{ cm}$, espessura das paredes $t = 14 \text{ cm}$, com armadura longitudinal $A_{s\ell} = 35,00 \text{ cm}^2$ distribuída ao longo do perímetro da seção, e estribos fechados com área $A_{st} = 4,00 \text{ cm}^2$ espaçados de $s = 20 \text{ cm}$, com $f_{y\ell} = f_{yt} = 500 \text{ MPa}$, $E_s = 200 \text{ GPa}$, e a resistência característica do concreto à compressão $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$. O CFC possui as seguintes características mecânicas: tensão última à tração $f_{fu} = 3.290 \text{ MPa}$, sendo o módulo de elasticidade $E_f = 235 \text{ GPa}$, e de modo a se evitar ruptura indesejável, supor que se tenha no máximo $\varepsilon_{fu} = 1,4\%$.

Tabela 1: Resultados teóricos dos exemplos 1 e 2: vigas de concreto armado.

	θ_{CA}	T_{Rd1} (kNm)	$T_{Rd\ell}$ (kNm)	T_{Rdt} (kNm)	ΔT_{Sd} (kNm)	$f_{f,e}$ MPa
Exemplo 1	59,65°	148,577	45,259	45,259	44,741	378,936
Exemplo 2	55,26°	1.056,230	971,449	971,449	28,551	426,182

Tabela 2: Resultados teóricos dos exemplos 1 e 2: vigas reforçadas com CFC.

Concreto	Exemplo 1				Exemplo 2			
	θ_{CA}^*	θ	$A_{ft} (\text{cm}^2)$	$A_{f\ell} (\text{cm}^2)$	θ_{CA}^*	θ	$A_{ft} (\text{cm}^2)$	$A_{f\ell} (\text{cm}^2)$
f_{ck}	59,65°	49,96°	0,571	4,837	55,26°	49,84°	0,096	1,429
f_{cd}	59,65°	49,81°	0,618	5,289	55,26°	49,83°	0,104	1,555
Var (%)	-	0,30	8,23	9,34	-	0,02	7,69	8,10

OBSERVAÇÕES FINAIS

O compósito de fibras de carbono, quando do envolvimento completo da viga no sentido longitudinal e transversal confina o concreto da viga, contudo, na verificação da resistência das bielas deve ser considerado o fator de efetividade do concreto ν , pois a fissuração altera o comportamento mecânico da viga. Outro fator que não valida a consideração do acréscimo de resistência à compressão com o confinamento é a deformação da biela flexo-comprimida. Donde admitir o aumento da resistência, tendo-se em conta essas considerações é uma inconsistência conceitual.

Os resultados dos exemplos numéricos (Tabelas 1 e 2) mostram que o reforço com CFC reduz o ângulo de inclinação das bielas de forma considerável, e que o acréscimo de resistência à torção é limitado pelos valores fornecidos pelas expressões 6 e 7. Nesses exemplos as armaduras $A_{f\ell}$ são muito superiores às armaduras A_{ft} , o que pode levar à necessidade de envolvimento completo da seção, com as fibras do CFC dispostas longitudinalmente e com várias camadas de reforço, sendo esse tipo de arranjo uma solução anti-econômica e de validade técnica discutível. Esta particularidade restringe o valor do acréscimo de resistência à torção, que fica limitado pelo número de camadas possíveis de serem utilizadas. Na rotina elaborada foi usada a equação 8 (estribo com envolvimento completo).

Outro fator limitador do acréscimo de reforço em CFC é o intervalo de variação da inclinação das bielas. O espaçamento de $A_{f\ell}$ deve ser no máximo a metade da altura da viga, de modo a que pelo menos uma fissura seja cortada por essa armadura de reforço, e como a taxa geométrica da armadura transversal de CFC tem sua variação ligada diretamente a esse parâmetro (expressão 23), pois a nova inclinação das bielas fica vinculada à essa limitação de espaçamento entre os estribos. A variação da inclinação do ângulo das bielas θ após o reforço com CFC é de cerca de 19% para o Exemplo 1, e de cerca de 11% para o Exemplo 2.

A adoção de f_{cd} no lugar de f_{ck} na expressão 16, diminui o ângulo θ de uma pequena magnitude, e aumenta ambas as armaduras de reforço. Na rotina do programa mostrada no Apêndice B foi adotado o parâmetro f_{ck} .

Os valores obtidos para a tensão efetiva $f_{f,e}$ no CFC são baixos. Isto se deve às limitações impostas pelo modelo de aderência adotado.

O uso de estribos em U é passível de críticas pois o modelo da Treliza Espacial Generalizada admite estribos fechados, o que não é o caso desse tipo de arranjo de armadura, contudo em Panchacharam e Belarbi (2003) e Täljsten (2003) o arranjo em U foi adotado (vide item 2).

A sistemática de dimensionamento desenvolvida neste trabalho está alicerçada no modelo da Treliza Espacial Generalizada e no modelo de aderência desenvolvido por Chen e Teng (2003). Contudo, são necessárias novas pesquisas experimentais de modo a fornecer subsídios suplementares que permitam aprimorar a abordagem deste trabalho, que faz parte de uma pesquisa teórico-experimental em desenvolvimento na PUC-Rio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aprile, A. e Bendetti, A. (2004). Coupled flexural-shear design of R/C beams strengthened with FRP. *Composites: Part B: Engineering*, Vol. 35, No. 1, pp. 1-25.
- CEB-FIP Model Code (1990). Design Code *Comité Euro-International du Béton*. Bulletin d'information No. 204.
- Chen J. F. e Teng J. G. (2003). "Shear capacity of FRP-strengthened RC beams: FRP debonding". *Construction and Building Materials*, Vol. 17, No. 1, pp. 27-41.
- CEN – Comité Européen de Normalisation (1991). *Eurocode 2: Design of Concrete Structure*. ENV-1992-1-1, Brussels, pp. 90-183.
- Hsu, T. T. C. (1984). *Torsion of Reinforced Concrete*. Van Nostrand Reinhold.
- Hsu, T. T. C. (1993). *Unified Theory of Reinforced Concrete*. CRC Press.
- Kovács, B. (1995). *Torsion. Model Ultimate Limit State Design Models*. CEB-FIP Bulletin D'Information No. 223, pp. 107-136.
- Lampert P. e Thürlimann B. (1968). *Torsionsversuche an Stahlbetonbalken*. Institut für Baustatik ETH. Bericht No. 6506-2.
- MacGregor, J. G. (1997). *Reinforced Concrete - Mechanics and Design*. Prentice Hal. 3rd Edition.
- Panchacharam, S. e Belarbi, A. (2003). "Torsional behavior of reinforced concrete beams strengthened with FRP Composites". *First FIB Congress*, Osaka, Japan, pp. 13-19.
- Täljsten, B. (2003). "Strengthening of concrete structures in torsion with FRP". *FRPRCS-6*, Singapore, pp. 1167-1176.
- Thürlimann B. (1978). "Plastic Analysis of Reinforced Concrete Beams". Institut für Baustatik ETH. Bericht No. 86.

APÊNDICE A

A Figura 2 ilustra os principais parâmetros de análise do painel fissurado com espessura t , onde as forças por unidade de comprimento são n_ℓ , n_t , e τ é a tensão tangencial obtida por intermédio do fluxo de tensões. Essas variáveis permitem deduzir as equações de equilíbrio e a condição de compatibilidade de deformações específicas (Hsu, 1993). Essas equações de equilíbrio são dadas por:

$$\begin{cases} \rho_{st} f_{st} + \rho_{ft} f_{ft} = \tau \cot \theta \\ \rho_{st} f_{st} + \rho_{ft} f_{ft} = \tau \tan \theta \\ \sigma_c = \tau (\tan \theta + \cot \theta) \end{cases} \quad (A.1)$$

A inclinação do ângulo das fissuras, supondo-se que as tensões principais e deformações específicas principais tenham essa mesma inclinação, é dada por:

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_\ell - \varepsilon_c}{\varepsilon_t - \varepsilon_c} \quad (A.2)$$

onde ε_ℓ , ε_t , ε_c são, respectivamente, as deformações específicas na armadura longitudinal e na armadura transversal, e a deformação específica na biela.

Admitindo-se a equação constitutiva do concreto por meio de uma linearização (Figura A.1), e a aderência completa entre o concreto e as armaduras de aço e de CFC, seguem-se para as deformações específicas:

$$\varepsilon_c = \frac{\tau}{E_{c,sec}} (tg\theta + cot\theta) \quad (A.3)$$

$$\varepsilon_t = -\frac{\tau}{E_{c,sec}} \frac{tg\theta}{(n_s \rho_{st} + n_f \rho_{ft})} \quad (A.4)$$

onde $E_{c,sec}$ é o módulo de elasticidade secante do concreto, relativo à tensão $0,60 f_{cd}$.

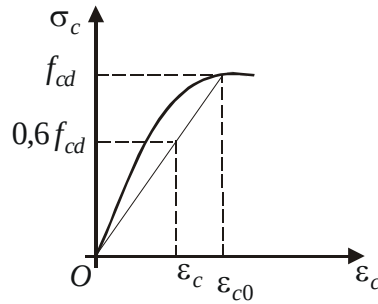


Figura A.1: Linearização da relação constitutiva do concreto.

Supondo-se que a deformação específica ao longo da altura do painel seja uma média entre a deformação específica de sua parte superior e a deformação específica da parte inferior resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\ell &= \frac{\varepsilon_{sup} + \varepsilon_{inf}}{2} \\ &= -\frac{\tau}{E_{c,sec}} \frac{cot\theta}{(n_s \rho_{sl} + n_f \rho_{fl})} \end{aligned} \quad (A.5)$$

Substituindo-se as expressões A.3, A.4 e A.5 na expressão A.2, tem-se:

$$tg^2\theta = \frac{tg\theta + cot\theta + \frac{cot\theta}{n_s \rho_{sl} + n_f \rho_{fl}}}{tg\theta + cot\theta + \frac{tg\theta}{n_s \rho_{st} + n_f \rho_{ft}}} \quad (A.6)$$

Isolando-se $tg\theta$ na expressão A.6 segue-se:

$$tg^2\theta = \frac{\left(1 + \frac{1}{n_s \rho_{sl} + n_f \rho_{fl}}\right) \frac{1}{tg\theta} + tg\theta}{\left(1 + \frac{1}{n_s \rho_{st} + n_f \rho_{ft}}\right) tg\theta + \frac{1}{tg\theta}} \quad (A.7)$$

e pondo-se

$$A = \left(1 + \frac{1}{n_s \rho_{sl} + n_f \rho_{fl}} \right) \quad (\text{A.8})$$

e

$$B = \left(1 + \frac{1}{n_s \rho_{st} + n_f \rho_{ft}} \right) \quad (\text{A.9})$$

tem-se:

$$tg^2 \theta = \frac{A \frac{1}{tg \theta} + tg \theta}{B tg \theta + \frac{1}{tg \theta}} \quad (\text{A.10})$$

$$tg^2 \theta = \frac{\frac{A + tg^2 \theta}{tg \theta}}{B tg^2 \theta + 1} \quad (\text{A.11})$$

$$tg^2 \theta = \frac{A + tg^2 \theta}{tg \theta} \frac{tg \theta}{B tg^2 \theta + 1} \quad (\text{A.12})$$

que simplificada fica:

$$tg^2 \theta = \frac{A + tg^2 \theta}{B tg^2 \theta + 1} \quad (\text{A.13})$$

Seguindo-se:

$$tg^2 \theta (B tg^2 \theta + 1) = A + tg^2 \theta \quad (\text{A.14})$$

$$B tg^4 \theta + tg^2 \theta = A + tg^2 \theta \quad (\text{A.15})$$

onde

$$tg^4 \theta = \frac{A}{B} \quad (\text{A.16})$$

Substituindo-se as expressões A.8 e A.9 na expressão A.16 resulta:

$$\theta = \arctg \sqrt[4]{\frac{\left(1 + \frac{1}{n_s \rho_{sl} + n_f \rho_{fl}} \right)}{\left(1 + \frac{1}{n_s \rho_{st} + n_f \rho_{ft}} \right)}} \quad (\text{A.17})$$

APÊNDICE B

CONCRETO:

$$f_{ck} := \text{MPa}$$

$$E_c(f_{ck}) := 1000 \cdot 9.5 \cdot (f_{ck} + 8)^{\frac{1}{3}}$$

$$f_{cd}(f_{ck}) := \frac{f_{ck}}{1.4}$$

AÇO DA ARMADURA:

$$E_s := \text{GPa} \quad f_{yl} := \text{MPa} \quad f_{yt} := \text{MPa}$$

$$A_{sl} := \text{cm}^2 \quad A_{st} := \text{cm}^2 \quad s := \text{cm}$$

$$f_{yld}(f_{yl}) := \frac{f_{yl}}{1.15} \quad f_{ytd}(f_{yt}) := \frac{f_{yt}}{1.15}$$

COMPÓSITO DE FIBRA DE CARBONO:

$$E_f := \text{GPa} \quad \varepsilon_{fu} := \% \quad f_{fu} := \text{MPa}$$

$$t_f := \text{mm} \quad s_f := \text{cm}$$

SEÇÃO TRANSVERSAL:

$$b := \text{cm} \quad h := \text{cm} \quad t := \text{cm}$$

MOMENTO TORÇOR SOLICITANTE:

$$T_{sd} := \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned} t &\leftarrow \frac{b \cdot h}{2(b + h)} \\ A_k &\leftarrow (h - t) \cdot (b - t) \\ u_k &\leftarrow 2 \cdot [(h - t) + (b - t)] \\ u &\leftarrow 2(b + h) \\ \theta &\leftarrow \text{atan} \left[\frac{\frac{A_{st} \cdot f_{ytd}}{s}}{\left(\frac{A_{sl} \cdot f_{yld}}{u_k} \right)} \right] \\ \theta_{rc} &\leftarrow \theta \\ v_v &\leftarrow 0.7 \left(0.7 - \frac{f_{ck}}{200} \right) \\ v &\leftarrow \begin{cases} v_v & \text{if } v_v \geq 0.35 \\ \text{"mudar dados"} & \text{otherwise} \end{cases} \\ TR_{d1} &\leftarrow 2 \cdot v \cdot f_{cd} \cdot \left[\frac{t \cdot A_k}{\left(\frac{1}{\tan(\theta)} + \tan(\theta) \right)} \right] \\ T_{sd} &\leftarrow \begin{cases} \text{"OK"} & \text{if } T_{sd} \leq TR_{d1} \\ \text{"mudar dados"} & \text{otherwise} \end{cases} \\ TR_{drcL} &\leftarrow 2 \cdot A_k \cdot \tan(\theta) \cdot \frac{A_{sl} \cdot f_{yld}}{u_k} \\ TR_{drcT} &\leftarrow 2 \cdot A_k \cdot \frac{1}{\tan(\theta)} \cdot \frac{A_{st} \cdot f_{ytd}}{s} \\ \Delta T_{sdL} &\leftarrow TR_{d1} - TR_{drcL} \\ \Delta T_{sdT} &\leftarrow TR_{d1} - TR_{drcT} \\ \Delta T_{sd} &\leftarrow \max(\Delta T_{sdL}, \Delta T_{sdT}) \\ f_{fe} &\leftarrow 0.142 \cdot \sqrt{\left(\frac{E_f}{t_f} \right)} \cdot \sqrt{f_{ck}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{for } i \in 1..10 \\ \text{aft} &\leftarrow \frac{\Delta T_{sd} \cdot \tan(\theta)}{2 \cdot b \cdot h \cdot \frac{f_{fe}}{1.3}} \\ A_{ft} &\leftarrow \text{aft} \cdot s_f \\ \text{afl} &\leftarrow \frac{\Delta T_{sd} \cdot \frac{1}{\tan(\theta)}}{2 \cdot b \cdot h \cdot \frac{f_{fe}}{1.3}} \\ A_{fl} &\leftarrow \text{afl} \cdot u \\ n_s &\leftarrow \frac{E_s}{E_c} \\ n_f &\leftarrow \frac{E_f}{E_c} \\ \rho_{st} &\leftarrow \frac{A_{st}}{t \cdot s} \\ \rho_{sl} &\leftarrow \frac{A_{sl}}{t \cdot u_k} \\ \rho_{ft} &\leftarrow \frac{A_{ft}}{t \cdot s_f} \\ \rho_{fl} &\leftarrow \frac{A_{fl}}{u \cdot t} \\ \theta_2 &\leftarrow \text{atan} \left(\sqrt[4]{\frac{1 + \frac{1}{n_f \cdot \rho_{fl} + n_s \cdot \rho_{sl}}}{1 + \frac{1}{n_f \cdot \rho_{ft} + n_s \cdot \rho_{st}}}} \right) \\ \theta &\leftarrow \theta_2 \end{aligned}$$