

UNA FORMULACIÓN MATRICIAL GENERALIZADA. PARTE 2: ANÁLISIS DINÁMICO

CLIMENT MOLINS

PERE ROCA

y

ALEX H. BARBAT

*E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports
Campus Nort UPC, 08034 Barcelona.*

RESUMEN

Se describe una formulación para el análisis dinámico de estructuras formadas por entramados espaciales de elementos de directriz curva y sección variable, cuyo desarrollo se basa en la Formulación Matricial Generalizada (FGM) presentada en una comunicación anterior¹. El aspecto más notable de la extensión de la FMG al análisis dinámico reside en la construcción de una matriz de masa elemental que, por una parte, no requiere ninguna hipótesis complementaria sobre el campo de movimientos y, por otra parte, permite considerar de forma exacta la distribución de rigidez y masa interior de los elementos. Ello parte de la previa definición de una matriz de masa seccional. Se ha realizado una comparación, para algunas estructuras sencillas, de los resultados obtenidos mediante la formulación presentada y los obtenidos por otros autores a través de distintas formulaciones. De ésta se desprenden la eficiencia y exactitud del método propuesto y, en particular, de la formulación que se realiza de la matriz de masa.

SUMMARY

A formulation is described for the dynamic analysis of 3D frame structures including elements with curved geometry and variable cross sections, based in a Generalized Matrix Formulation (GMF) which was presented in a previous paper¹. The most remarkable aspect of this extension of the GMF to dynamic analysis is found in the definition of an elemental mass matrix which, on one hand, does not require any additional hypothesis upon the field of displacements, and that, on the other hand, allows for an exact consideration of the distribution of both mass and stiffness throughout each element. An study of some simple structures has been carried out by comparing the results obtained by means of the presented formulation with those attained by other authors using alternative formulations. It shows the efficiency and accuracy of the proposed method and, particularly, the exactitude of the computed mass matrices.

Recibido: Noviembre 1993

INTRODUCCIÓN

En un artículo anterior¹ se introdujo una Formulación Matricial Generalizada (FMG) para el análisis de estructuras reticulares espaciales que puede considerarse, por construcción, teóricamente exacta salvo por el error que las necesarias integraciones numéricas puedan producir. El presente artículo describe la extensión de esta formulación a problemas de tipo dinámico, utilizando en todo momento los conceptos y técnicas propios de la FMG y buscando un método de cálculo lo más preciso posible. El aspecto más destacado de este desarrollo estriba en la posibilidad de construir una matriz de masa elemental que tiene en cuenta, de forma objetiva y sistemática, la distribución real de masa y de rigidez dentro del elemento.

Las ecuaciones del movimiento que gobiernan la respuesta dinámica de las estructuras pueden formularse aplicando, por ejemplo, el principio de D'Alembert, según el cual un sistema dinámico está en equilibrio cuando todas las fuerzas que actúan en él, incluso las de inercia, cumplen las ecuaciones de equilibrio estático en cada instante de tiempo². Dichas fuerzas de inercia $(F_I)_j(t)$ se expresan como

$$(F_I)_j(t) = -m_j \ddot{d}_j(t) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

donde m_j , $j = 1, 2, \dots, n$ son las masas del sistema y $\ddot{d}_j(t)$ son sus aceleraciones absolutas. Considerando también las fuerzas elástica $\mathbf{F}_E(t)$, de amortiguamiento viscoso $\mathbf{F}_A(t)$ y dinámica $\mathbf{F}(t)$, que actúan sobre la estructura, el sistema de ecuaciones de equilibrio dinámico es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2)$$

donde $\mathbf{M}$ es la matriz de masa, $\mathbf{C}$ es la matriz de amortiguamiento, $\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez y $\mathbf{d}(t)$ es el vector de desplazamientos.

En esta ecuación, la matriz de rigidez $\mathbf{K}$ mantiene el mismo significado que en el caso estático, pudiéndose por ello evaluar a través del proceso ya descrito¹. Consecuentemente, para plantear las ecuaciones (2) del movimiento sólo resta formular la matriz de masa $\mathbf{M}$, cuyo producto con el vector de aceleración $\ddot{\mathbf{d}}$ proporciona las fuerzas de inercia nodales equivalentes. Comúnmente, las matrices de masa elementales se calculan o bien de forma simplificada, como en el caso de las matrices de masa diagonales, o bien de manera coherente con una hipótesis de interpolación del campo de desplazamientos, como en el caso de las matrices de masa consistentes que se utilizan en combinación con el método de los elementos finitos. Estas últimas son en general más exactas que las matrices de masa diagonales³.

En los sucesivos apartados se expone la formulación de una matriz de masa consistente de forma coherente con la Formulación Matricial Generalizada. En este sentido, conviene recordar que uno de los objetivos subyacentes en la FMG es reproducir con la mayor precisión posible y con el mínimo número de grados de libertad el comportamiento real de las estructuras. Una de las características de la formulación que se expone reside en la introducción del concepto de "matriz de masa seccional", a partir de la cual es posible derivar de manera objetiva una matriz de masa elemental que incorpora información relativa a la geometría y a la distribución de rigidez y de densidad dentro del elemento. Esta matriz de masa seccional es, de hecho, el tensor de

inercia de una figura plana en el espacio respecto a un punto del plano que contiene a ésta.

La FMG es exacta en el sentido de que no exige realizar hipótesis adicionales sobre la distribución del campo de movimientos en el interior de un elemento (por ejemplo, en forma de interpolación). No obstante, el planteamiento del problema dinámico exige partir de una forma conocida del campo de aceleraciones en función de los valores nodales, a fin de obtener un número finito de ecuaciones. En este caso, las aceleraciones en un punto interior del elemento debidas a las vibraciones se interpolan en función de las aceleraciones nodales, pero no de manera arbitraria sino coherentemente con la formulación, tomando como referencia la relación que la FMG establece implícitamente entre los movimientos nodales y los movimientos en cualquier punto.

Una vez se conocen las fuerzas de inercia que actúan en cualquier punto de un elemento en función de sus aceleraciones nodales, se aplica el principio de d'Alembert para obtener la ecuación de equilibrio dinámico del elemento. Ello se consigue identificando las fuerzas de inercia actuantes sobre cualquier punto como cargas repartidas en la barra e imponiendo las ecuaciones de equilibrio estático en cada instante de tiempo. A partir de la matriz de masa calculada se procede de forma análoga a cualquier desarrollo de análisis dinámico en elementos finitos formulados en desplazamientos.

MATRIZ DE MASA SECCIONAL

En la referencia¹ se enumeraron las hipótesis de la Resistencia de Materiales requeridas por la Formulación Matricial Generalizada. Éstas son: que los elementos estén sometidos a un estado uniaxial de tensiones; que el comportamiento a torsión sea de Saint Venant; que las tensiones normales y tangenciales estén desacopladas; y la hipótesis de Bernoulli. Para obtener las fuerzas de inercia que actúan en una sección es necesario añadir la hipótesis de que las secciones de espesor infinitesimal se mueven como un sólido rígido en su plano, lo que no es exactamente congruente con la teoría de torsión de Saint-Venant por ignorar el alabeo. De acuerdo con esta última hipótesis, las fuerzas de inercia en coordenadas locales $\mathbf{f}_I(s) = (f_{I_x}(s), f_{I_y}(s), f_{I_z}(s), f_{I_{xx}}(s), f_{I_{yy}}(s), f_{I_{zz}}(s))$, correspondientes a una sección transversal cualquiera de coordenada curvilínea s , se pueden calcular, en función de las aceleraciones, de la siguiente forma:

$$\mathbf{f}_I(s) = \mathbf{M}_s(s) \ddot{\mathbf{d}}(s) \quad (3)$$

donde

$$\mathbf{M}_s(s) = \begin{bmatrix} \iint_A \rho dA & 0 & 0 & 0 & \iint_A \rho z dA & -\iint_A \rho y dA \\ & \iint_A \rho dA & 0 & -\iint_A \rho z dA & 0 & 0 \\ & & \iint_A \rho dA & \iint_A \rho y dA & 0 & 0 \\ & & & \iint_A (y^2 + z^2) \rho dA & 0 & 0 \\ & & & & \iint_A \rho z^2 dA & -\iint_A \rho y z dA \\ & \text{sim.} & & & & \iint_A \rho y^2 dA \end{bmatrix} \quad (4)$$

es la matriz de masa seccional, que coincide de hecho con el tensor de inercia de un cuerpo rígido de espesor infinitesimal referido al sistema local de coordenadas. El vector $\ddot{\mathbf{d}}(s) = (\ddot{u}_x(s), \ddot{u}_y(s), \ddot{u}_z(s), \ddot{\theta}_x(s), \ddot{\theta}_y(s), \ddot{\theta}_z(s))$ describe la aceleración del punto del eje de coordenada curvilínea s . Obsérvese que esta matriz de masa seccional incluye los términos relativos a los tres giros, uno de torsión y dos de flexión.

EXPRESIÓN DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS EN LA FMG

El vector de deformaciones en coordenadas globales de una sección de coordenada curvilínea s es¹

$$\epsilon_{XY}(s) = \mathbf{C}^T(s) \mathbf{K}_s^{-1}(s) \mathbf{C}(s) \sigma_{XY}(s) \quad (5)$$

Combinando la ecuación (5) con la ecuación de equilibrio¹ $\sigma_{XY}(s) = \mathbf{N}(s, s_B) \mathbf{P}_B + \sigma_{XY}^*(s)$ se obtiene la siguiente expresión que relaciona las deformaciones seccionales $\epsilon_{XY}(s)$ con las fuerzas en el extremo $\mathbf{P}_B$ y los esfuerzos $\sigma_{XY}^*(s)$ sobre la isostática base originados por las cargas repartidas:

$$\epsilon_{XY}(s) = \mathbf{C}^{-1}(s) \mathbf{K}_s^{-1}(s) \mathbf{C}(s) (\mathbf{N}(s, s_B) \mathbf{P}_B + \sigma_{XY}^*(s)) \quad (6)$$

donde $\mathbf{C}(s)$ es la matriz de cambio de base en la sección de coordenada curvilínea s y $\mathbf{N}(s, s_B)$ es la matriz de equilibrio entre las secciones s y s_B .

Las fuerzas del extremo B se pueden calcular directamente a partir de los desplazamientos nodales según la siguiente relación obtenida en la referencia¹

$$\mathbf{P}_B = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{N}^T(s_A, s_B) \mathbf{d}_A + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{d}_B - \mathbf{F}^{-1} \mathbf{d}^* \quad (7)$$

en esta ecuación aparece el término $\mathbf{d}^*$ que describe los movimientos en el extremo B debidos a la deformación del propio elemento causada por los esfuerzos σ_{XY}^* sobre la configuración isostática base. Si se supone que la viga no tiene cargas repartidas, ($\sigma_{XY}^* = 0$ y $\mathbf{d}^* = 0$) la ecuación (6) se convierte en

$$\epsilon_{XY}(\Gamma) = \mathbf{C}^{-1}(\Gamma) \mathbf{K}_s^{-1}(\Gamma) \mathbf{C}(\Gamma) \mathbf{N}(\Gamma, s_B) (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{d}_B - \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}(A, B) \mathbf{d}_A) \quad (8)$$

La ecuación de Navier-Bresse proporciona en coordenadas globales, el desplazamiento en cualquier punto conocidos la ley de deformaciones del elemento y los movimientos del extremo A ; particularizando entre los extremos del elemento A y B de la Figura 1

$$\mathbf{d}_B = \mathbf{N}^T(s_A, s_B) \mathbf{d}_A + \int_A^B \mathbf{N}^T(s, s_B) \epsilon_{XY}(s) ds \quad (9)$$

Sustituyendo (8) en la ecuación (9) se obtiene

$$\mathbf{d}(s) = [\mathbf{T}(s_A, s) - \mathbf{F}_s(s) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}(A, B) \quad \mathbf{F}_s(s) \mathbf{F}^{-1}] \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}^T$$

$$\mathbf{F}_s(s) = \int_{s_A}^s \mathbf{T}(\Gamma, s) \mathbf{C}^{-1}(\Gamma) \mathbf{K}_s^{-1}(\Gamma) \mathbf{C}(\Gamma) \mathbf{N}(\Gamma, s_B) d\Gamma$$

y siendo Γ la variable de integración entre dos valores de la coordenada curvilínea.

La expresión (10) permite calcular de forma exacta el movimiento que experimenta un punto cualquiera de un elemento a partir de los movimientos nodales, sea cual sea la geometría del elemento (directriz curva y/o sección variable), sin considerar, no obstante, el efecto local de cargas repartidas en barras. El término $\mathbf{F}_s(s)$ se puede interpretar como la flexibilidad del elemento entre A y el punto de coordenada s respecto del extremo B . El factor $(\mathbf{F}_s(s) \mathbf{F}^{-1})$ que multiplica al desplazamiento $\mathbf{d}_B$ es adimensional y consiste en el producto de una fracción de la flexibilidad y la rigidez del elemento entero. El factor que multiplica a $\mathbf{d}_A$ es el simétrico del anterior.

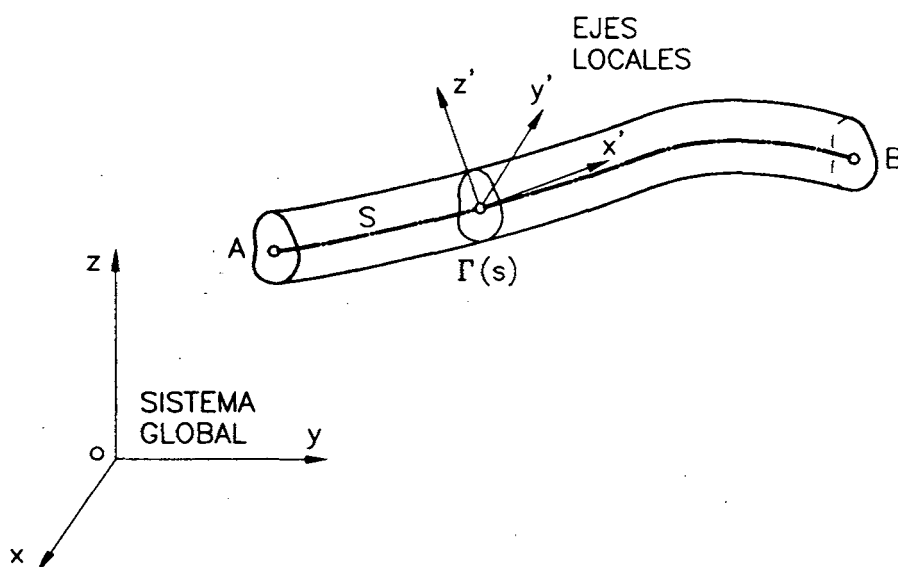


Figura 1. Directriz de un elemento, su coordenada curvilínea y definición del sistema local de coordenadas.

CÁLCULO DE LA MATRIZ DE MASA

Aplicando el principio de d'Alembert, es decir, tratando en cada instante a las fuerzas de inercia como una carga repartida a lo largo de la longitud de un elemento, se puede proceder análogamente al caso estático¹ y obtener los esfuerzos sobre la configuración isostática base originados por las cargas repartidas sobre los elementos.

Matricialmente los esfuerzos originados por cargas repartidas aplicadas sobre el eje del elemento se pueden calcular como

$$\sigma_{XY}^*(s) = \int_s^B \mathbf{N}(s, \Gamma) \mathbf{f}_{I_{XY}}(\Gamma) d\Gamma \quad (11)$$

donde $\mathbf{f}_{I_{XY}}(\Gamma)$ es el vector de las fuerzas de inercia en coordenadas globales en la sección de coordenada curvilínea Γ . En función de las aceleraciones nodales, este vector se puede escribir en la forma

$$\mathbf{f}_{I_{XY}}(\Gamma) = \left[\mathbf{C}^T \mathbf{M}_s \mathbf{C} \left(\mathbf{T}(A, \Gamma) - \mathbf{F}_s(\Gamma) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}(A, B) \right) \quad \mathbf{C}^T \mathbf{M}_s \mathbf{C} \left(\mathbf{F}_s(\Gamma) \mathbf{F}^{-1} \right) \right] \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}_A \\ \ddot{\mathbf{d}}_B \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ahora, el vector $\mathbf{d}^*$ de movimientos en B debidos sólo a la deformación de la propia viga debido a las esfuerzos σ_{XY}^* de la ecuación (11), puede expresarse como

$$\mathbf{d}^* = \int_A^B \mathbf{N}^T(s, s_B) \mathbf{C}^T \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{C} \int_s^B \mathbf{N}(s, \Gamma) \mathbf{f}_{I_{XY}}(\Gamma) d\Gamma ds \quad (13)$$

En la referencia [1] se obtuvo la siguiente relación entre las fuerzas y los movimientos nodales

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_A \\ \mathbf{P}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{(A,B)} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{N}_{(A,B)}^T & -\mathbf{N}_{(A,B)} \mathbf{F}^{-1} \\ -\mathbf{F}^{-1} \mathbf{N}_{(A,B)}^T & \mathbf{F}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{(A,B)} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{d}^* + \mathbf{P}_A^* \\ \mathbf{F}^{-1} \mathbf{d}^* \end{bmatrix}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{d} + \mathbf{P}^{*o} \quad (14)$$

donde $\mathbf{P}^{*o}$ será ahora el vector de las fuerzas de inercia aplicadas en los nodos, es decir, el producto de la matriz de masa por las aceleraciones nodales. Sustituyendo (12) y (13) en (14) se obtiene la siguiente expresión final de la matriz $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11} & \mathbf{m}_{12} \\ \mathbf{m}_{21} & \mathbf{m}_{22} \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{m}_{22} = \mathbf{F}^{-1} \int_A^B \mathbf{N}^T(s, s_B) \mathbf{C}^T(s) \mathbf{K}_s^{-1}(s) \mathbf{C}(s) \int_s^B \mathbf{N}(s, \Gamma) \times \mathbf{C}^T(\Gamma) \mathbf{M}_s(\Gamma) \mathbf{C}(\Gamma) \mathbf{F}_s(\Gamma) \mathbf{F}^{-1} d\Gamma ds \quad (15)$$

$$\mathbf{m}_{21} = \mathbf{F}^{-1} \int_A^B \mathbf{N}^T(s, s_B) \mathbf{C}^T(s) \mathbf{K}_s^{-1}(s) \mathbf{C}(s) \int_s^B \mathbf{N}(s, \Gamma) \mathbf{C}^T(\Gamma) \mathbf{M}_s(\Gamma) \mathbf{C}(\Gamma) \times \left(\mathbf{T}(A, \Gamma) - \mathbf{F}_s(\Gamma) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}(A, B) \right) d\Gamma ds \quad (16)$$

$$\mathbf{m}_{12} = -\mathbf{N}(A, B)\mathbf{m}_{22} + \int_A^B \mathbf{N}^T(s_A, s)\mathbf{C}^T(s)\mathbf{M}_s(s)\mathbf{C}(s)\mathbf{F}_s(s)\mathbf{F}^{-1}ds \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{11} = & -\mathbf{N}(A, B)\mathbf{m}_{21} + \int_A^B \mathbf{N}^T(s_A, s)\mathbf{C}^T(s)\mathbf{M}_s(s)\mathbf{C}(s) \\ & \times \left(\mathbf{T}(s_A, s) - \mathbf{F}_s(s)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}(A, B) \right) ds \end{aligned} \quad (18)$$

Se puede comprobar que efectivamente $\mathbf{m}_{12} = \mathbf{m}_{21}^T$ y que $\mathbf{m}_{11}$ y $\mathbf{m}_{22}$ son matrices simétricas, tal y como cabía esperar, a pesar de ser resultado de múltiples operaciones sobre matrices no simétricas.

Archer⁴ (1965) propuso una matriz de masa elemental desarrollada mediante el MEF a partir de una interpolación de los desplazamientos tal que tuviera en cuenta la deformación por cortante. Si se particulariza el cálculo de la matriz de masa, según el desarrollo expuesto, para una barra recta de sección constante se obtiene una matriz idéntica a la propuesta por Archer. Esta coincidencia se debe a que la interpolación utilizada es exacta en el caso de una barra recta uniforme.

OBSERVACIONES ACERCA DE LA IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

En la referencia¹ se encuentran detalles referentes a la implementación numérica realizada de la FMG para el análisis estático. Seguidamente se destacan algunas características específicas de su extensión para análisis dinámico.

Como se desprende del desarrollo teórico anteriormente expuesto, en el caso más general posible, el número de operaciones necesario para obtener la matriz de masa es elevado. Su cálculo tiene tres niveles de integración, a través de los cuales se pueden ir acumulando errores si no se utilizan cuadraturas suficientemente exactas para la función que se integra. Usando el método de Simpson múltiple, se obtienen resultados satisfactorios si la integración entre los extremos del elemento A y B de la ecuación (14) se calcula con 7 puntos en el caso de elementos de sección constante. Si el elemento es de canto variable es necesario incrementar este número de puntos hasta un límite superior de 13 que generalmente es suficiente. En el cálculo de los autovalores se ha utilizado el algoritmo de iteración en el subespacio⁵.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Se exponen algunos ejemplos estudiados a fin de comprobar la exactitud y la eficacia del algoritmo propuesto. La simplicidad de los ejemplos considerados se debe exclusivamente a razones de comparación con otros estudios disponibles. No obstante, el procedimiento propuesto es general y permite estudiar el comportamiento dinámico de estructuras complejas tales como puentes arco o entramados espaciales.

Voladizo de sección constante

El primer ejemplo consiste en el cálculo de las frecuencias de los cinco primeros modos de vibración de una viga en voladizo de sección rectangular constante de 365.76mm de longitud, 25.4mm de canto, 25.4mm de ancho. Sus características mecánicas son las siguientes: módulo de Young $E = 2.068410^{11}$ Pa, módulo de deformación transversal $G = 3E/8$, densidad 7.757kg/m^3 y el factor de corrección de cortante $2/3$. En la Tabla I se muestra una comparación de los resultados obtenidos mediante el método propuesto (columna 3) con los resultados analíticos de Huang⁶ (columna 2) y con los obtenidos por Oral⁷ mediante un elemento finito con matriz de masa consistente obtenida a partir de una formulación híbrida (columna 4). En todos los casos se ha utilizado una malla de 16 elementos, con un total de 32 grados de libertad. Puede comprobarse que la FMG es el método que mejor ajusta los valores de las frecuencias de los dos primeros modos a los resultados analíticos.

Una posible medida cuantitativa del error que permita comparar directamente los distintos métodos es

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{f_i - f_{exact_i}}{f_{exact_i}} \right)^2} \quad (19)$$

es decir, la raíz de la suma cuadrática de los errores relativos, siendo N es el número de modos de vibración calculados y f_i es la frecuencia correspondiente. Observando, la última fila de la Tabla I, donde se muestra el valor del índice de error para cada caso, se comprueba que las diferencias entre los índices obtenidos para los dos métodos considerados son poco significativas.

MODO (1)	Huang (2)	FMG (3)	Híbrido (4)
1	977.	990.5	991.
2	6040.	6043.7	6035.
3	16200.	16274.	16226.
4	30200.	30337.	30225.
5	47200.	47470.	47328.
estimador del error		1.629E-3	1.472E-3

Tabla I. Primeras 5 frecuencias (Hz) de una viga en voladizo (16 elementos, 32 grados de libertad).

Viga biapoyada de sección constante

El segundo ejemplo consiste en el estudio de la frecuencia de los 10 primeros modos naturales de vibración de una viga simplemente apoyada de esbeltez 50 y de módulo de deformación transversal $G = 3E/8$. Esta estructura ha sido discretizada utilizando un modelo de 20 elementos (40 grados de libertad). En la Tabla II se presentan las frecuencias normalizadas ($\omega_n = \omega/(EI/\rho AL^4)^{1/2}$, donde E es el módulo de Young, I la inercia, ρ la densidad, A el área de la sección transversal y L la longitud), obtenidas en este estudio y se comparan con las obtenidas por Oral⁷ usando un elemento híbrido. Cabe destacar especialmente la exactitud con que se obtienen las frecuencias de los modos superiores de vibración. Los valores de las frecuencias calculadas son siempre ligeramente menores a los analíticos dados por Oral⁷.

Si, como en el ejemplo anterior, se toma como índice de medida del error a la raíz de la suma cuadrática de los errores relativos, se observa como, con diferencia, la FMG produce en este caso un índice de error notablemente menor. En efecto, al aumentar el número de autovalores obtenidos en relación al número de grados de libertad utilizados, se observa que otros métodos incremetan en mayor medida su error relativo.

Modo (1)	Analítico (2)	FMG (3)	Híbrido (4)
1	9.890	9.7967	9.7843
2	38.244	38.116	38.190
3	82.986	82.262	82.843
4	140.95	139.00	140.93
5	209.12	205.45	209.95
6	284.90	279.42	288.09
7	366.23	359.47	374.19
8	451.55	444.77	467.63
9	539.73	534.89	568.20
10	629.91	629.68	675.98
estimador del error		4.114E-2	10.06E-2

Tabla II. Primeras 10 frecuencias ω_n de una viga biapoyada modelada en 40 grados de libertad. Los resultados a partir de la matriz de masa de una formulación híbrida los proporciona Oral⁷.

Este ejemplo, como el anterior, ha sido estudiado mediante FMG y mediante cálculo matricial convencional para estructuras de barras de directriz recta y sección constante. Para FMG se han utilizado modelos de 2, 3, 4, 6, 8 y 10 elementos y para el programa de barras, el voladizo ha sido discretizado en 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 30 y 40 elementos equidistantes. A las barras se les ha asignado las características mecánicas correspondientes a la sección del punto medio de su longitud.

En las Figuras 4, 5, 6 y 7 se muestra la variación de la frecuencia en función del número de elementos en que se ha discretizado el arco para los modos primero, segundo, tercero y quinto. Se puede comprobar que en todos los casos la FMG converge más rápidamente a la solución. Por otra parte es interesante observar que la FMG, utilizando un modelo de sólo dos elementos y dos grados de libertad, aproxima mejor las frecuencias del primer y segundo modo que un método convencional (por ejemplo basado en el MEF) con un modelo de cuatro elementos y seis grados de libertad.

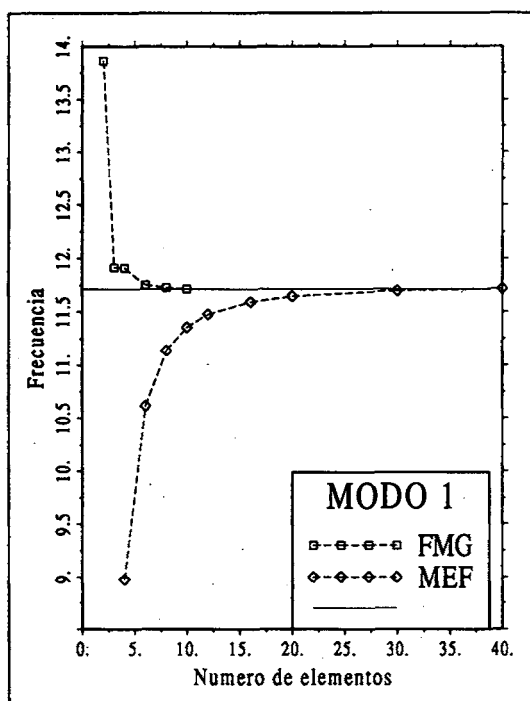


Figura 4. Valor de la frecuencia para el primer modo de vibración en función del número de elementos y de la formulación empleada para un arco parabólico de canto variable.

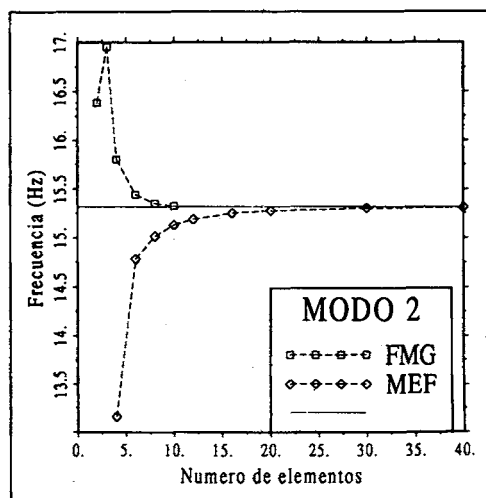


Figura 5. Valor de la frecuencia para el segundo modo de vibración en función del número de elementos y de la formulación empleada para un arco parabólico de canto variable.

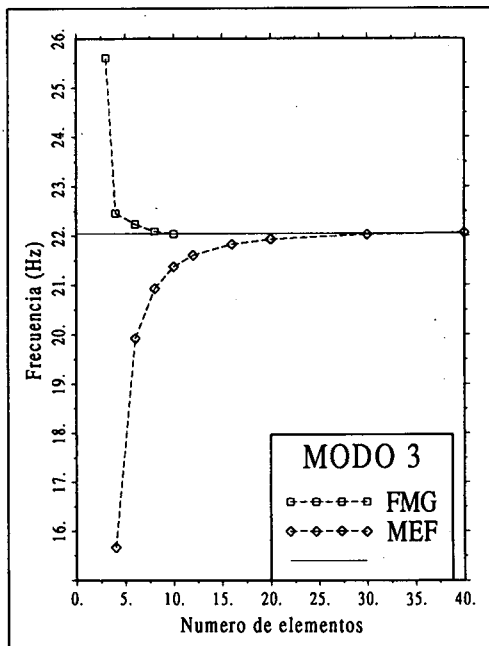


Figura 6. Valor de la frecuencia para el tercer modo de vibración en función del número de elementos y de la formulación empleada para un arco parabólico de canto variable.

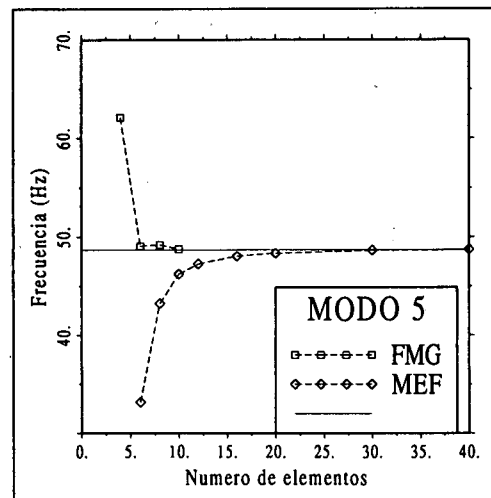


Figura 7. Valor de la frecuencia para el quinto modo de vibración en función del número de elementos y de la formulación empleada para un arco parabólico de canto variable.

CONCLUSIONES

La Formulación Matricial Generalizada que se presentó en un artículo anterior, ha sido extendida al cálculo dinámico manteniendo las ventajas que ésta presenta en exactitud y eficiencia.

Particularmente, es posible realizar esta extensión sin introducir ninguna hipótesis sobre el campo de desplazamientos de la estructura. No obstante, es preciso introducir una interpolación del campo de aceleraciones que, al insertarse en la metodología propia de la FMG, resulta tener en cuenta la distribución interna de rigidez en elementos de directriz curva y de sección variable. La formulación desarrollada permite, conocidas las funciones que describen la geometría y las características mecánicas del elemento, calcular analíticamente la matriz de masa.

Mediante el estudio de algunos ejemplos es posible concluir que el método propuesto aproxima el comportamiento dinámico de las estructuras reticulares espaciales más satisfactoriamente que otros métodos convencionales, incluyendo entre éstos otras formulaciones consistentes para la matriz de masa. Asimismo, para una misma precisión, la FMG requiere un menor número de elementos aunque realiza más cálculos para cada uno de ellos.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio ha sido desarrollado con el soporte económico concedido por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología al proyecto "Desarrollo y ensayo de técnicas para el análisis estructural de construcciones antiguas del patrimonio arquitectónico histórico" (SEC93-1160). Asimismo, el primer autor ha disfrutado de una beca FPI concedida por el Ministerio de Educación y Ciencia español.

REFERENCIAS

1. C. Molins, A.R. Marí y P. Roca, "Una formulación matricial generalizada. Parte 1: análisis estático", *Revista Internacional de Métodos numéricos para cálculo y diseño en Ingeniería*, Vol. 10, Nº. 4, pp. 317-339, (1993).
2. A.H. Barbat y J. Miquel, *Estructuras sometidas a acciones sísmicas*, Segunda Edición, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, (1994).
3. O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, Fourth Edition, Volume 2, Mc Graw-Hill Book Company, London (1991).
4. J.S. Archer, "Consistent matrix formulations for structural analysis using finite element techniques", *AIAA Journal*, Vol. 3, pp. 1910-1918, (1965).
5. K.J. Bathe y E.L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1976).
6. T.C. Huang, "The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 28, pp. 79-87, (1961).
7. S. Oral, "Anisoparametric Interpolation in Hibryd-Stress Timoshenko Beam Element", *Journal of the Structural Engineering ASCE*, Vol. 117, Nº. 4, pp. 1070-1078, (1991).
8. S. Timoshenko, D.H. Young y W. Weaver, *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley and Sons, Inc., New York, USA, (1974).